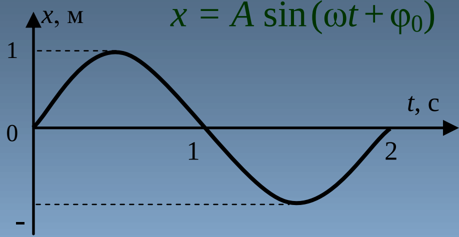
$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi.$$




$$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$F = q\upsilon B \sin\alpha$$

$$F_{уп} = k \cdot \Delta l$$

О. С. ДМИТРИЕВ, О. В. ИСАЕВА,
И. А. ОСИПОВА, В.Н. ХОЛОДИЛИН

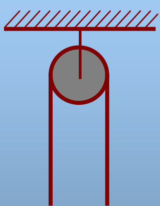
# ФИЗИКА

## МЕХАНИКА МУЛЬТИМЕДИА

Учебное электронное мультимедийное издание

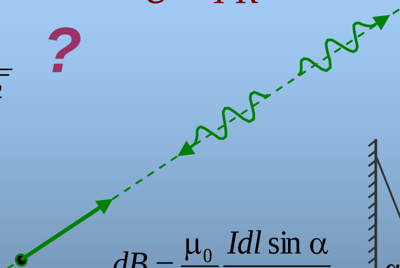
$$R = \sigma \cdot T^4$$

$$U = I \cdot R$$



$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}$$

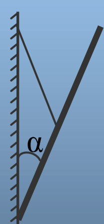
?



$$Q = S \cdot \upsilon$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\left(\frac{\pi n}{l} x\right)$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin\alpha}{r^2}$$




Тамбов
Издательство ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный технический университет»**

**О. С. ДМИТРИЕВ., О. В. ИСАЕВА, И. А. ОСИПОВА, В. Н. ХОЛОДИЛИН**

# ФИЗИКА

## МЕХАНИКА МУЛЬТИМЕДИА

Утверждено Учёным советом университета
в качестве учебного пособия для студентов 1 курса
инженерного профиля всех форм обучения

*Учебное электронное мультимедийное издание*

Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2023

УДК 53.02+530.1
ББК В22.3я73-5
Ф50

Р е ц е н з е н т ы :

Доктор физико-математических наук, профессор, Заслуженный деятель науки Российской Федерации, профессор кафедры теоретической и экспериментальной физики ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г. Р. Державина»
*В. А. Федоров*

Доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Материалы и технологии» ФГБОУ ВО «ТГТУ»
*Д. М. Мордасов*

Ф50 **Физика.** Механика мультимедиа [Электронный ресурс, мультимедиа] : учебное пособие / О. С. Дмитриев, О. В. Исаева, И. А. Осипова, В. Н. Холодилин. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2023. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium II ; CD-ROM-дисковод 00,0 Mb RAM ; Windows 95/98/XP ; мышь. – Загл. с экрана.
ISBN 978-5-8265-2631-6

Представлены описание и методические указания к циклу лабораторных и практических работ, тематика которых охватывает важный раздел курса физики – механику. Приведена краткая теория изучаемых вопросов, порядок выполнения, методика обработки результатов измерений, контрольные вопросы. Представлена мультимедийная визуализация выполнения лабораторных работ с их подробным объяснением и примером получения реальных данных. Развернуто даны ответы на контрольные вопросы лабораторных работ, необходимые для их защиты, решения задач с подробным разбором вариантов решения.

Предназначены для студентов для студентов 1 курса инженерного профиля всех форм обучения.

УДК 53.02+530.1
ББК В22.3я73-5



**ISBN 978-5-8265-2631-6**

# ВВЕДЕНИЕ

Физика в широком смысле слова — это наука, изучающая окружающий мир, простейшие и вместе с тем наиболее общие закономерности явления природы, свойства и строение материи и законы её движения. В основе всего естествознания лежит физика и её законы. Способствуя развитию физического мышления студентов, познанию ими современной физической картины мира, изучение физики не только формирует научное мировоззрение, но и закладывает фундамент для освоения специальных дисциплин. Глубокое изучение физики играет важную роль в становлении современного инженера.

Учебное пособие предназначено для студентов первых курсов дневного и заочного обучения инженерно-технических специальностей. Предлагаемое издание состоит из двух глав: «Решение задач» и «Самостоятельные лабораторные работы». Первая глава включает семь разделов: «Кинематика», «Динамика», «Работа и энергия», «Законы сохранения», «Механические колебания и волны», «Механика жидкостей». Она содержит подробный анализ и решение типовых задач и ответов на теоретические вопросы по различным темам раздела физики «Механика». Вторая глава включает пять лабораторных работ, которые имеют теоретическое описание и визуализацию выполнения лабораторных работ с их подробным объяснением и примером получения реальных данных. В каждой работе выделены наиболее важные теоретические и практические вопросы, отражающие последовательность изложения материала. Особое внимание уделено на ответах на контрольные вопросы, необходимые при защитах лабораторных работ.

В методических указаниях к работам используются не только теоретические выкладки, но и достаточно большой иллюстративный материал, включающий рисунки, схемы, фотографии, выполненный на очень высоком уровне. Подобная визуализация позволит более осмысленно усваивать изучаемые разделы курса физики. Таблицы и графики — обязательная часть работы студента. В каждой работе (решении задач или выполнении лабораторной работы) необходимо стремиться к ясному пониманию того, с какой точностью получена та или иная физическая величина.

Анализ решений, ответы на задачи и теоретические вопросы приводятся непосредственно вслед за условием каждой задачи, что облегчает восприятие материала. Авторы пособия стремились использовать наиболее современные и рациональные методы решения, которые, конечно, не являются единственно возможными. Некоторые задания направлены на расширение эрудиции студентов в области физики.

При выполнении лабораторных работ студентам необходимо ясно понимать, что превышение допустимой погрешности является грубой ошибкой. В равной мере это относится как к анализу, исследованию данного явления, так и к производимым вычислениям и расчётам.

Терминология в настоящем издании выдержана в основном в рамках СИ с учетом сложившейся литературной и научной традиции.

При подготовке данного пособия авторы использовали опыт преподавания курса физики в Тамбовском государственном техническом университете.

Учебное электронное мультимедийное издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту по курсу общей физики для технических направлений подготовки бакалавров всех форм обучения.

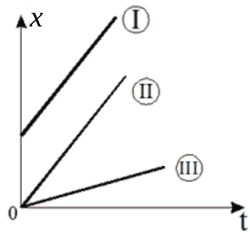
При подготовке учебного электронного мультимедийного пособия к изданию были учтены замечания и рекомендации рецензентов: профессора кафедры теоретической и экспериментальной физики ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г. Р. Державина», доктора физико-математических наук, Заслуженного деятеля науки РФ В. А. Федорова и заведующего кафедрой «Материалы и технологии» ФГБОУ ВО «ТГТУ», доктора технических наук, профессора Д. М. Мордасова.

# 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

## 1.1. КИНЕМАТИКА

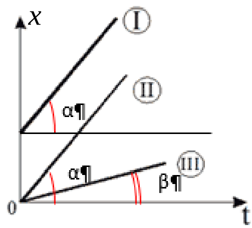
Задача 1

На рисунке представлен график зависимости координат от времени для трех тел. В каком соотношении между собой находятся скорости этих тел?




Решение

Скорость можно найти как угловой коэффициент прямой. Мы видим, что прямые I и II находятся под одним и тем же углом к оси времени.




Так как тангенсы углов одинаковые, то мы можем написать, что проекции скорости первого и второго тел равны

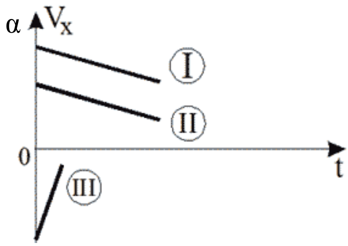
$$v_{x1} = v_{x2}$$

У тела III угол наклона намного меньше, поэтому и проекция скорости на ось $x$ этого тела $v_{x1}$ будет меньше. Таким образом, мы получаем, проекция скорости III тела на ось $x$ меньше, чем проекция скорости I или II тела.

$$v_{x1} = v_{x2} < v_{x3} .$$

Задача 2

На рисунке приведены проекции скоростей от времени для трех тел. В каком из соотношении находятся между собой модули ускорений этих тел?




Решение

Для решения этой задачи нужно знать, что проекцию ускорения можно найти как тангенс угла наклона касательной к графику зависимости проекции скорости от времени.

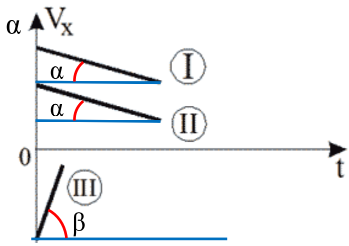
В задаче тела движутся равнопеременно, поэтому графиком зависимости проекции скорости от времени являются прямые.

Необходимо найти углы наклона и оценить угловые коэффициенты. Для удобства берём не сам угол наклона к оси времени, а смежный с ним угол.

Так как прямые параллельны, то углы наклона и тангенсы одинаковы. Следовательно, и проекции ускорения будут одинаковы.

Проекция ускорения первого тела на ось *x* равна проекции второго тела на ось *x*.

$$a_{x1} = a_{x2}$$

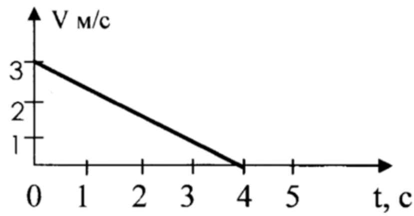


Из рисунка явно видно, что модуль проекции ускорения третьего тела намного больше. Поэтому, сравнивая величины модулей ускорения первого, второго и третьего тел, мы получаем, что модуль ускорения третьего тела больше, чем модуль первого и второго.

$$a_{x3} > a_{x2} = a_{x1}$$

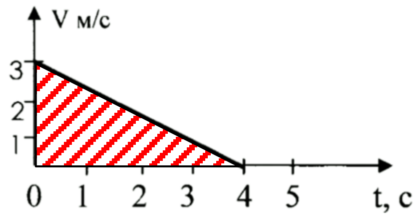
Задача 3

Определить из графика $v(t)$ путь (в метрах), пройденный телом за 4 секунды.




Решение

Путь находится как площадь фигуры, ограниченной графиком зависимости скорости от времени $v(t)$ и осью времени. В данном случае находится площадь треугольника.



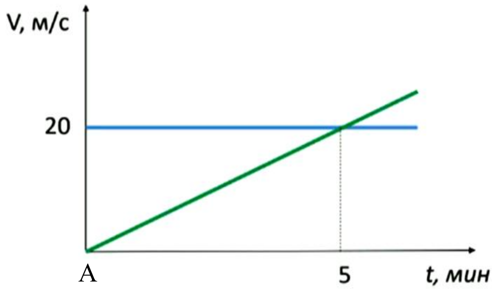

Площадь треугольника равна пути.

$$S_{тр} = S = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6\,\text{м}.$$

Таким образом, путь, пройденный телом за первые 4 секунды, равен 6 метрам.

Задача 4

Две машины одновременно вышли из пункта *A* в одном направлении. По графикам зависимости скорости машин от времени определите время и путь, пройденный каждой машиной до встречи.




Решение

Глядя на графики движения этих автомобилей, можно ошибочно сказать, что момент встречи этих автомобилей – 5 минут.

На самом деле, пути автомобилей, пройденные за 5 минут, различаются в два раза. Первый автомобиль проехал путь численно равный площади прямоугольника, а второй автомобиль – площади треугольника. И эти пути неодинаковы.

Для того чтобы автомобили встретились, необходимо, чтобы пройденный путь был одинаковый. Для того, чтобы найти момент встречи, нужно найти такой момент времени, при котором пути будут одинаковы. Для этого продлим каждый из графиков и ось времени. И найти такой момент времени, при котором площади под графиком для каждого из автомобилей будут одинаковы.

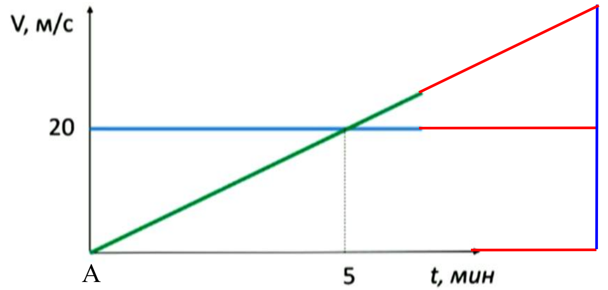
Мы видим, что автомобиль, который двигался равномерно со скоростью 20 м/с, прошёл путь численно равный площади четырёх треугольников. Автомобиль, который двигался равноускоренно, тоже прошёл путь, равный площади четырёх треугольников.

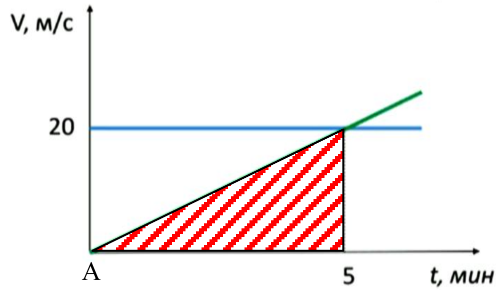
Все треугольники имеют равные площади, поэтому получаем момент времени встречи двух автомобилей 10 минут.

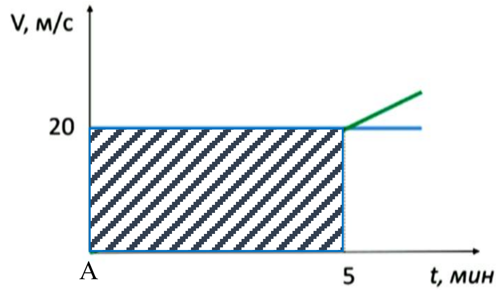
$$t_{встр} = 10 \text{ мин.}$$

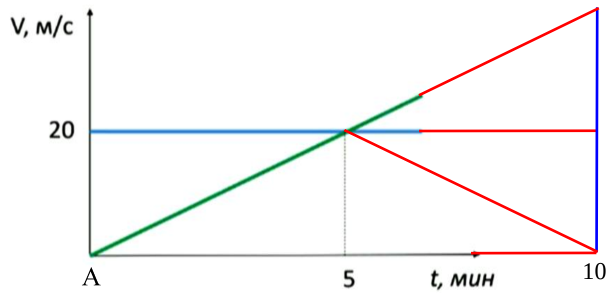
Для того чтобы найти расстояние, которое пройдёт каждый из автомобилей, надо найти площадь под графиком любого из автомобилей.

$$S = 20 \cdot 600 = 12000 \text{м} = 12 \text{ км.}$$




Таким образом, два автомобиля, одновременно вышедшие из пункта А в одном направлении, встретятся через 10 минут на расстоянии 12 км от пункта А.

Задача 5

Движение некоторой точки описывается уравнением $x = 6 - t + t^2$. Какое выражение соответствует зависимости проекции скорости этого тела от времени?

1. $v_x = -1+2t$
2. $v_x = 1+t$
3. $v_x = -1+t$
4. $v_x = 6-t$

Решение

Для того чтобы найти уравнение, соответствующее зависимости проекции скорости от времени, достаточно взять производную по времени от уравнения зависимости координаты $x$.

$$v_x = x' = (6 - t + t^2)' = -1 + 2t\,.$$

Мы видим, что это уравнение соответствует ответу под цифрой 1.

Задача 6

Уравнение движения точки по прямой имеет вид: $x = 4 + 2t + t^2 + t^3$. Найдите:

1) положение точки в моменты времени $t_1 = 2c, t_2 = 5c$;
2) среднюю скорость за время, соответствующее этим моментам;
3) мгновенную скорость в указанные моменты времени;
4) мгновенное ускорение в указанные моменты времени.

Решение

Для ответа на каждый из этих вопросов, нужно помнить, что средняя скорость – это отношение всего пути $S$ ко всему времени движения $t$, мгновенная скорость – это первая производная от координаты $x$ по времени $t$, а мгновенное ускорение – это производная от проекции скорости $v_x$ по времени $t$ или вторая производная от координаты по времени.

Для нахождения положения точки в моменты времени $t_t$ или $t_2$ достаточно в уравнение для координатs подставить этот момент времени.

$$x(t_1) = 4 + 2 \cdot 2 + 2^2 + 2^3 = 4 + 4 + 4 + 8 = 20\,\text{м}.$$

Таким образом, подставив в уравнение зависимости координаты от времени время, равное 2 секундам, мы получили положение точки в этот момент времени. То есть тело, вышедшее вдоль оси $x$ в начальный момент времени из координаты 4 метра добралось за 2 секунды до точки с координатой 20 метром. Следовательно, пройденный путь будет равным 16 метров.

Средняя скорость – это отношение пути ко времени.

$$v_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{16 м}{2 с} = 8 \text{ м/с}.$$

Мгновенная скорость в указанный момент времени – это $dx$ по $dt$.

$$v_x = \frac{d(4 + 2t + t^2 + t^3)}{dt} = 2 + 2t + 3t^2 .$$

$$v_x = 2 + 2 \times 2 + 3 \times 2^2 = 18 \text{ м/с}.$$

Таким образом, мгновенная скорость в момент времени 2 секунды равна 18 м/с$^2$.

Мгновенное ускорение в указанный момент времени можно найти как $dv_x$ по $dt$.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(2 + 2t + 3t^2) = 2 + 6t .$$

$$a_x = 2 + 6 \times 2 = 14 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, ускорение тела на ось $x$ равно 14 м/с$^2$.

Для времени 5 секунд можно сделать самостоятельно те же действия. Координата в момент времени $t_2$ = 5 с:

$$x(t_2) = 4 + 2 \cdot 5 + 5^2 + 5^3 = 4 + 10 + 25 + 75 = 114 \text{ м}.$$

Пройденный путь:

$$S = 114 - 4 = 100 \text{ м}.$$

Средняя скорость

$$v_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{100 м}{5 с} = 20 \text{ м/с}.$$

Мгновенная скорость:

$$v_x = 2 + 2t + 3t^2 = 2 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 5^2 = 2 + 10 + 75 = 87 \text{ м/с}.$$

Мгновенное ускорение:

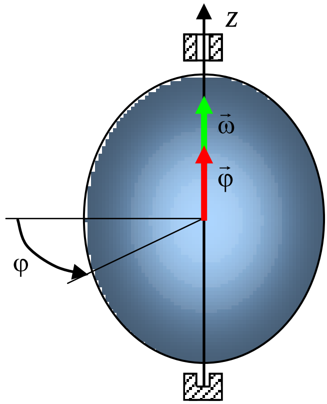
$$a_x = 2 + 6t = 2 + 6 \cdot 5 = 32 \text{ м/с}^2$$

## Задача 7

Твёрдое тело вращается вокруг оси $z$. Зависимость угла поворота $\varphi$ от времени $t$ описывается законом

$$\varphi = At - \frac{Bt^2}{2},$$

где $A$ и $B$ положительные постоянные. В какой момент времени тело остановится?




## Решение

Для нахождения угловой скорости $\omega$ мы найдём первую производную от угла поворота $\varphi$ по времени $t$.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Для того, чтобы понять, в какой момент времени тело остановится, угловую скорость $\omega$ нужно приравнять к нулю, так как тело останавливается и больше не вращается, и выразить оттуда время.

$$\omega = \frac{d}{dt}\left(At - \frac{Bt^2}{2}\right) = A - Bt,$$

$$\omega = 0,$$

$$A - Bt = 0,$$

$$t = \frac{A}{B}.$$

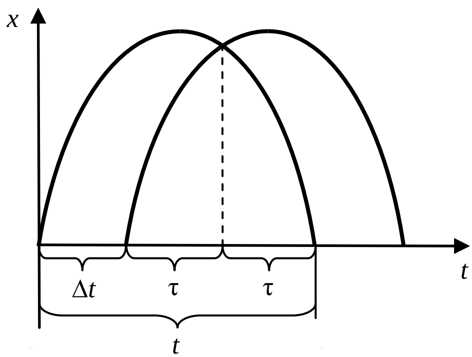
Таким образом, тело остановится в момент времени, равный отношению *A* к *B*.

Задача 8

Из одной и той же точки вертикально вверх с интервалом времени $\Delta t$ брошены 2 шарика со скоростью *v*. Через какое время после вылета второго шарика они столкнуться?

Решение

Движение тел в поле тяжести Земли с ускорением равным ускорению свободного падения. Для решения задачи можно воспользоваться графическим способом, то есть построить график зависимости координаты от времени для каждого из летящих шариков. Графиками будут являться две одинаковые параболы, ветки которых направлены вниз, так как ускорения и начальные скорости у них одинаковые, но они будут сдвинуты друг от друга на промежуток $\Delta t$.




Так как параболы одинаковы, то можно провести прямую, как на чертеже, и показать, что отрезок τ – время после вылета второго шарика, когда шарики столкнутся. В этот момент первый шарик уже будет лететь вниз, а второй – продолжать двигаться вверх. Тогда *t* – время движения первого шарика от начала броска до момента попадания в ту же точку, откуда его бросили.

Отсюда видно, что $t = \Delta t + 2\tau$.

Учитывая, что шарик был брошен со скоростью $v$ и прилетел обратно с такой же скоростью, то выражение для скорости будет записываться следующим образом

$$-v = v - gt,$$

$$t = \frac{2v}{g}.$$

Подставляя полученное выражение в уравнение, получаем следующую формулу

$$\frac{2v}{g} = \Delta t + 2\tau.$$

Отсюда легко найти время, за которое второй шарик столкнётся с первым.

$$\tau = \frac{v}{g} - \frac{\Delta t}{2}$$

Задача 9

Зависимость пути, пройденного точкой по окружности радиусом $R$ = 2 м, от времени выражено уравнением

$$S = at^2 + bt.$$

Найдите скорость, нормальное, тангенциальное и полное ускорение точки через $t$ = 0,5 с после начала движения, если $a$ = 3 м/с, $b$ = 1 м/с$^2$.

Решение

Движение по окружности, значит, в каждой точке скорость будет направлена по касательной. Ускорение тела можно разложить на две составляющие: нормальная и тангенциальная. За счёт тангенциальной составляющей скорость будет изменяться по величине, за счёт нормальной – по направлению.

Для нахождения скорости надо взять первую производную от пути.

$$v = S' = (at^2 + bt)' = 2at + b$$

В момент времени $t = 0{,}5$ с тангенциальная (касательная) составляющая скорости $v_\tau$ будет равна

$$v_\tau = 2\times3\times0{,}5+1=4\ \text{м/с}^2.$$

Таким образом, в момент времени $t = 0{,}5$ с проекция скорости на касательную в данной точке окружности равна 4 м/с.

Нормальное ускорение находится по формуле

$$a_н = \frac{v_\tau^2}{R} = \frac{16}{2} = 8\ \text{м/с}^2.$$

Таким образом, нормальная составляющая ускорения равна 8 м/с$^2$.

Тангенциальным ускорением является первая производная от проекции скорости.

$$a_\tau = v'_\tau = (2at+b)' = 2a = 2\times3 = 6\ \text{м/с}^2.$$

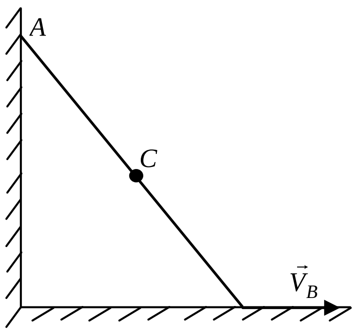
Полное ускорение $a$ ищется как корень квадратный из суммы квадратов нормального и тангенциального ускорения.

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_н^2} = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = 10\ \text{м/с}^2.$$

Таким образом, полное ускорение равно 10 м/с$^2$.

Задача 10

Твердый стержень длиной $l$ скользит без трения по горизонтали с постоянной скоростью $V_B$ и вертикале. Найдите ускорение точки $C$ (центра тяжести) стержня.



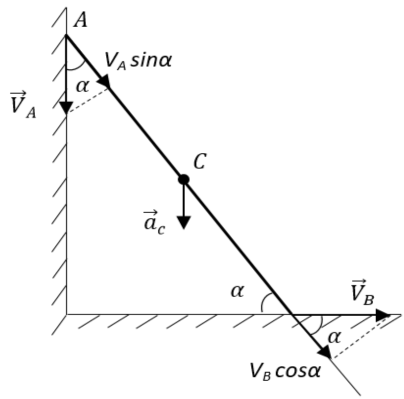

Решение

Так как стержень твердый, то расстояние между любыми двумя его точками постоянно, иначе стержень бы деформировался, следовательно, проекции скоростей любых его точек на ось, проходящую вдоль стержня, одинаковые.

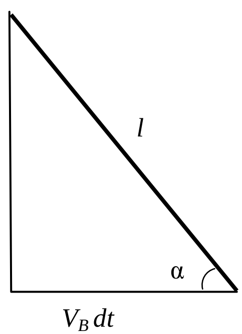
$$V_B \cos\alpha = V_A \sin\alpha,$$

$$V_A = \frac{V_B \cos\alpha}{\sin\alpha} = V_B ctg\alpha.$$

Ускорение точки А равно первой производной от скорости $V_A$ по времени *t*.




$$a = \frac{dV_A}{dt} = V_A' = (V_B ctg\alpha)' = V_B\left(\frac{-\sin\alpha\sin\alpha - \cos\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)\alpha' = -\frac{V_B\alpha'}{\sin^2\alpha},$$




$$\cos\alpha = \frac{V_B t}{l},$$

$$d(\cos\alpha) = d\left(\frac{V_B t}{l}\right) = \frac{V_B}{l}\,dt\ ,$$

$$-\sin\alpha\, d\alpha = \frac{V_B}{l}\,dt\ ,$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha' = -\frac{V_B}{l\sin\alpha}\ ,$$

Знак минус говорит об уменьшении угла α.

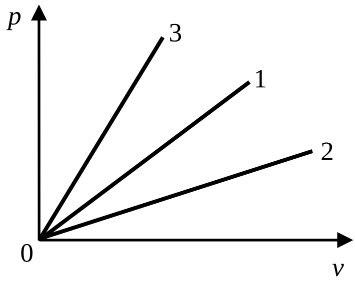
$$a_A = -\frac{V_B(-V_B)}{\sin^2\alpha\, l\sin\alpha} = \frac{V_B^2}{l\sin^3\alpha}\ ,$$

$$a_C = \frac{a_A}{2} = \frac{V_B^2}{2l\sin^3\alpha}\ .$$

## 1.2. ДИНАМИКА

Задача 1

На рисунке приведено соотношение импульсов трёх тел от скорости. В каком соотношении находятся их массы?




Решение

Импульс линейно зависит от скорости. Согласно определению, импульсом тела называется величина, равная произведению массы на скорость.

$$p = m \cdot v$$

Отсюда видно, что масса является угловым коэффициентом, т.е. чем больше масса, тем больше угол наклона этой прямой к оси скорости, и тем круче пойдёт график.

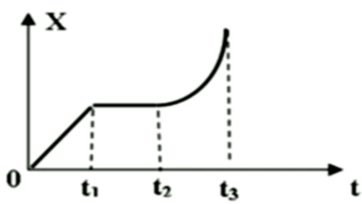
У графика 3 угол наклона самый большой; у графика 1 угол наклона немного меньше; у графика 2 угол наклона самый маленький.

Отсюда можно сделать вывод, что масса $m_3$ самая большая, $m_1$ немного меньше, $m_2$ – наименьшая.

$$m_3 > m_1 > m_2 .$$

Задача 2

Координата тела меняется с течением времени так, как показано на рисунке. Начертите график зависимости проекции импульса этого тела от времени.



Решение

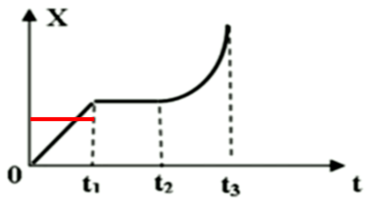
Импульсом тела называется величина, равная произведению массы на скорость.

$$p = m \cdot v .$$

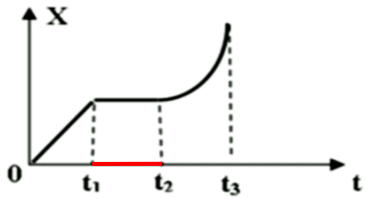
Скорость можно найти по формуле

$$v = \frac{dx}{dt} .$$

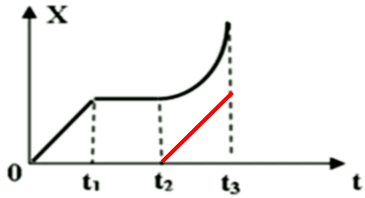
На участке от 0 до $t_1$ тело движется равномерно, скорость постоянна, поэтому графиком *dx* по *dt* будет являться некоторая прямая параллельная оси времени.



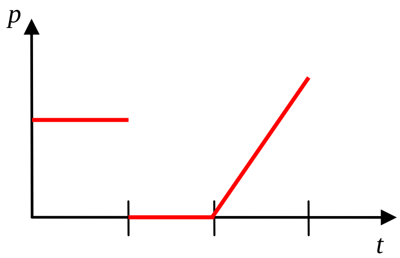

На участке от $t_1$ до $t_2$ координата времени не меняется, поэтому *dx* по *dt* будет равно 0. График опустится на ось времени.




На участке от $t_2$ до $t_3$ тело движется равнопеременно, поэтому скорость будет равномерно возрастать от 0 до какого-либо конечного значения.

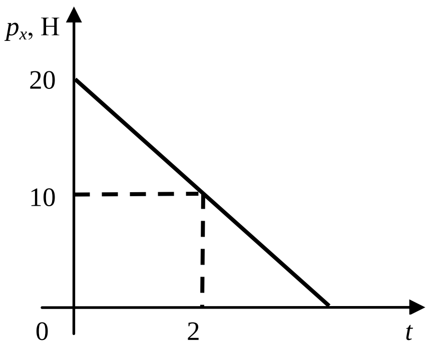


Помножив на массу, мы получим следующий вид графика зависимости импульса *p* от времени *t*.




Задача 3

На рисунке показана зависимость проекции импульса тела от времени. Определить проекцию силы (в Н), под действием которой тело двигалось до остановки.




Решение

Согласно второму закону Ньютона, сила равна скорости изменения импульса. Так как импульс меняется равномерно, второй закон Ньютона можно представить в следующем виде.

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Теперь нашей задачей является определить из графика, чему равно изменение импульса $\Delta p$ и промежуток времени $\Delta t$, за которое это изменение импульса произошло.

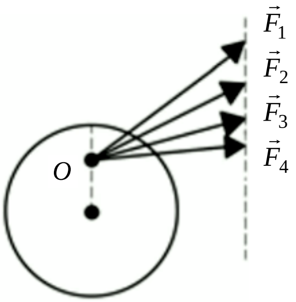
Изменение импульса $\Delta p$ равно –20 $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$; промежуток времени $\Delta t$, за которое это изменение импульса произошло, равно 4 с. Подставив в формулу, мы получаем

$$F = \frac{-20\,\text{Н} \cdot \text{с}}{4\text{с}} = -5\,\text{Н}.$$

Таким образом, под действием силы $F = -5\,\text{Н}$ (проекция силы) импульс изменился от 20 до 0.

## Задача 4

К диску приложена одна из четырёх сил. Под действием какой силы диск будет вращаться с большим угловым ускорением?




## Решение

Для того, чтобы оценить, какая сила будет сообщать большее угловое ускорение, нужно понять, момент какой силы относительно оси вращения будет больше. Чем больше момент, тем большее угловое ускорение сила будет сообщать.

Согласно основному уравнению динамики вращательного движения, угловое ускорение равно отношению момента силы к моменту инерции

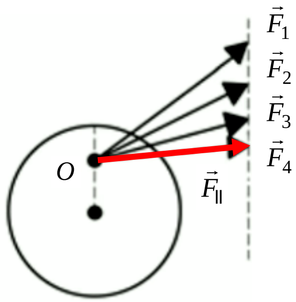
$$\varepsilon = \frac{M}{I}.$$

Моментом силы называют произведение силы на плечо

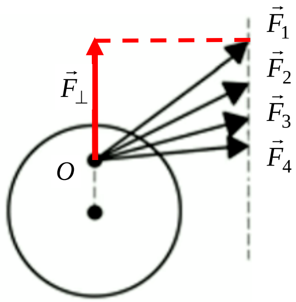
$$M = F \cdot h.$$

Каждую из сил $F_1$, $F_2$, $F_3$ и $F_4$ можно разложить на две составляющие, горизонтальную и вертикальную.

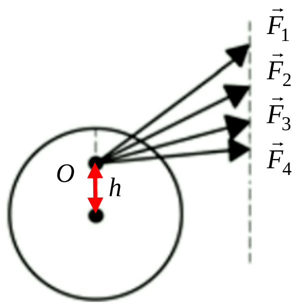
Одна составляющая $\vec{F}_{\parallel}$ пойдёт горизонтально и будет численно равна силе $F_4$.




Вторая составляющая $\vec{F}_{\perp}$ вертикальная и для всех сил одинаковая.




Таким образом, полный момент сил будет равен сумме моментов, сообщающих каждый из этих составляющих сил. Момент силы, перпендикулярной $\vec{F}_{\perp}$, равен нулю, потому что плечо этой силы 0. Момент силы, параллельной $\vec{F}_{\parallel}$, равен произведению самой силы параллельной на плечо. В данном случае, плечом является отрезок от оси вращения до точки приложения силы.



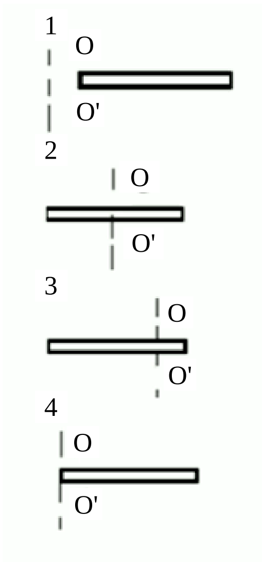
Для всех сил плечо одинаковое. Отсюда можно сделать вывод, что все силы будут иметь одинаковые моменты и сообщать одно и то же угловое ускорение.

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4,$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 .$$

## Задача 5

На рисунке изображено несколько однородных стержней, имеющих одинаковую массу и длину. Какой из них имеет наибольший момент инерции относительно указной оси OO' ?

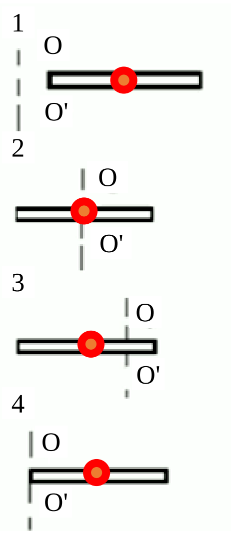



### Решение

Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс, будет находиться по формуле

$$I_0 = \frac{1}{12} m l^2 .$$

Центр масс расположен в геометрическом центре стержня.



Согласно теореме Штейнера, момент инерции относительно оси, не проходящей через центр масс, равен сумме момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс, и произведению массы стержня на квадрат расстояния между осями

$$I = I_0 + ma^2 .$$

Отсюда видно, что чем больше расстояние между осями, тем больше момент инерции.

Из рисунка видно, что самое большое расстояние между осями на первом рисунке. На втором рисунке расстояние равно 0, на третьем – части стержня, на четвёртом – половине стержня.

Таким образом, наибольший момент инерции имеет стержень на первом рисунке.

### Задача 6

Сила, действующая на частицу в течение 0,003 с, описывается уравнением $F = F_0 - bt$, где $F_0 = 480$ Н, $b = 1{,}6 \times 10^5$ Н/с. Определите изменение импульса частицы за время действия силы.

### Решение

Для решения этой задачи необходимо воспользоваться вторым законом Ньютона: сила равна скорости изменения импульса тела

$$F = \frac{dp}{dt} .$$

Выразим отсюда бесконечно малое изменение импульса $dp$

$$dp = F \cdot dt .$$

Вместо $F$ подставим выражение уравнения $F_0 - bt$ из условия задачи

$$dp = (F_0 - bt) \cdot dt .$$

Проинтегрируем получившееся уравнение справа и слева

$$dp = \int (F_0 - bt) \cdot dt .$$

Получим $$\Delta p = F_0 t - \frac{bt^2}{2} \Bigg|_0^t .$$

Подставив численные значения, получим

$$\Delta p = 480 \cdot 0{,}003 - \frac{1{,}6 \cdot 10^5 \cdot 0{,}003^2}{2} = 0{,}72\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}\,.$$

Таким образом, изменение импульса частицы за 0,003с составляет $0{,}72\,\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$.

Задача 7

Шар радиусом $R$ = 10 см и массой $m$ = 5 кг вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$, где $B = 2$ рад/с$^2$, $C = 0{,}5$ рад/с$^3$. Определите момент сил для $t$ = 3 с.

Решение

Момент силы определяется из основного уравнения динамики вращательного движения

$$M = I \cdot \varepsilon\,.$$

Момент инерции шара: $I = \frac{2}{5} mR^2$.

Угловое ускорение находится по формуле $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A + Bt^2 + Ct^3\right) = 2Bt + 3Ct^2\,,$$

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2Bt + 3Ct^2 = 2B + 6Ct\,.$$

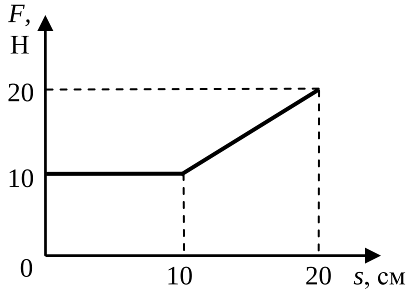
Подставив в первое уравнение полученные выражения, окончательно для момента силы получим

$$M = \frac{2}{5} mR^2 \cdot (2B + 6Ct)\,.$$

Подставив численные значения, получим окончательный результат $M = 0{,}1$ Н·м. Таким образом, в момент времени $t$ = 3 с, момент силы $M$ будет равен 0,1 Н·м.

## 1.3. РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

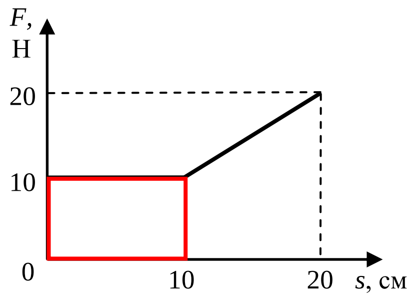
Задача 1




На рисунке приведена зависимость силы от перемещения. На сколько работа этой силы (в Дж) при перемещении на 10 см отличается от работы этой же силы на следующих 5 см?

Решение

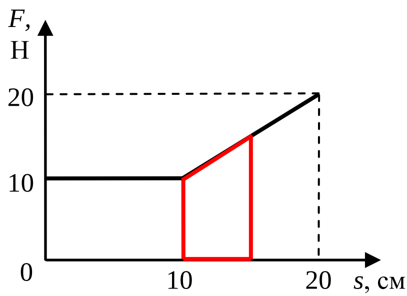
Для решения задачи воспользуемся графическим способом нахождения работы. Сначала найдём работу на первых 10 см. Для этого выделим фигуру.




На рисунке видно, что этой фигурой является прямоугольник. Найдём площадь этого прямоугольника, которая численно будет равна работе.

$$A_1 = S_{пр} = 10 \cdot 0{,}1 = 1 \text{ Дж.}$$

Таким образом, работа на первых 10 см равна 1 Дж. Теперь найдём работу на следующих 5 см, вновь выделив фигуру – трапецию.




Площадь трапеции равна произведению полусумме оснований на высоту. Одно основание трапеции – 10 Н, второе основание – 15 Н, а высота – 5 см. Таким образом, работа равна площади трапеции

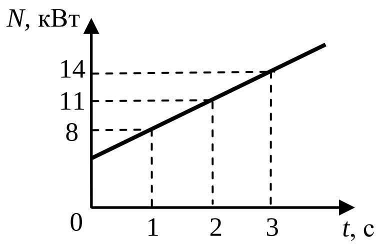
$$A_2 = S_{тр} = \frac{10+15}{2} \cdot 5 \cdot 10^{-2} = 0{,}625 \text{ Дж},$$

$$A_1 - A_2 = 1 - 0{,}625 = 0{,}375 \text{ Дж}.$$

Работа этих сил отличается на 0,375 Дж.

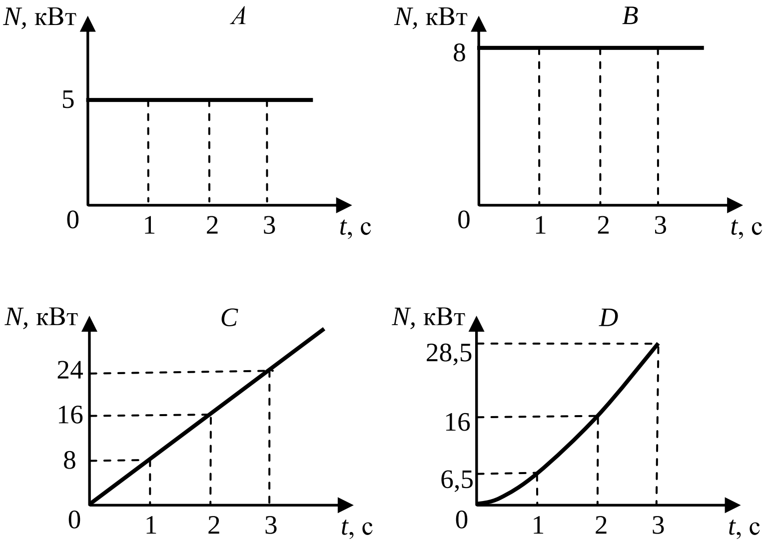
Задача 2

На рисунке представлен график зависимости мощности силы от времени. Какой из нижеприведённых графиков соответствует зависимости работы этой силы от времени.




Решение

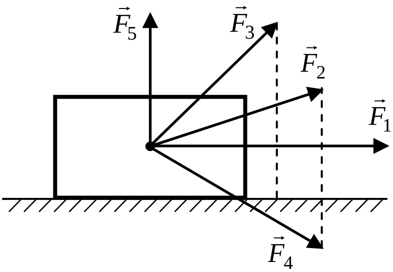
Мощность, по определению, это скорость совершения работы. Поэтому для того, чтобы найти мощность, нужно взять производную от функции зависимости работы от времени. Мы видим, что мощность – это прямая. Мощность описывается прямой, направленной вверх. Следовательно, графиком зависимости работы от времени должна быть парабола. Если от функции, описывающейся параболы, взять производную, то мы получим прямую. Таким образом, правильный ответ в этом задании будет под буквой *D*.




Можно проверить, написав уравнение прямой и проинтегрировать. В результате получим уравнение параболы и, подставив значения, выведем те значений, которые написаны на графике.

Задача 3

На тело, движущиеся по горизонтальной поверхности, могут поочередно действовать одинаковые по модулю силы так, как показано на рисунке. Сравните работы этих сил.

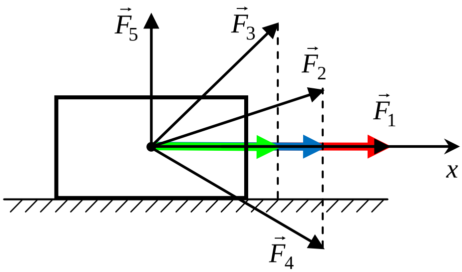


Решение

Работа равна произведению силы на перемещение.

$$A = F \cdot s$$

Покажем ось *x*, вдоль которой движется тело. И покажем составляющие всех сил на эту ось.




Составляющая силы $F_1$ уже лежит на оси *x*, выделим ее на рисунке красным цветом, $F_2$ и $F_4$ покажем синим цветом, горизонтальную составляющую $F_3$ – зеленым. А составляющую силу $F_5$ мы не сможем показать, потому что она проецируется в ноль на ось *x*.

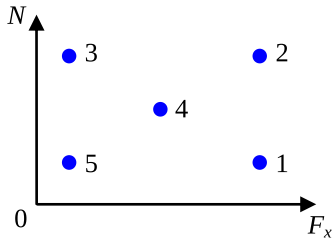
Таким образом, для нахождения работы, необходимо будет сравнить работы сил вдоль направления *x*. Каждую из этих сил можно разложить на две составляющие: составляющие на ось *x* показаны, а вертикальные составляющие дают работу, равную 0, потому что угол между вертикальной составляющей силы и перемещением равен 90°, cos90° = 0.

Сила $F_1$ самая большая, поэтому и работа будет совершена ей самая большая. Составляющие сил $F_2$ и $F_4$ немного меньше, значит, и работа будет меньше. Составляющая силы $F_3$ ещё меньше, следовательно, и работы будет меньше. А составляющая силы $F_5$ равна 0

$$A_1 > A_2 = A_4 > A_3 > A_5 = 0.$$

## Задача 4

Какой из нижеуказанных точек на диаграмме зависимости мощности от проекции силы, соответствует точка, в которой проекция скорости тела минимальна?




Решение

Для того чтобы рассчитать мощность, можно воспользоваться следующим соотношением

$$N = \frac{A}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot v$$

Таким образом, мы получили соотношение между мощностью, скоростью и проекцией силы на ось $x$

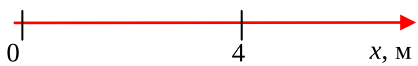
$$N = v \cdot F_x .$$

Мы видим, что скорость играет роль углового коэффициента прямой зависимости мощности от силы. Чем больше скорость, тем больше угловой коэффициент. Поэтому для того, чтобы найти максимальную или минимальную скорость, из начала координат нужно построить прямые, проходящие через предложенные точки, и посмотреть, какая прямая будет круче всего идти относительно оси силы, а какая наиболее полого. Наиболее пологой прямой будет соответствовать минимальная скорость в той точке, через которую она будет проходить.

Из рисунка видно, что наиболее пологая прямая проходит через точку 1. Соответственно и скорость в точке 1 будет самая маленькая.

Задача 5

Материальная точка движется прямолинейно по горизонтальной плоскости по закону $x = Ct^4$, где $C$ = 1 м/с, под действием силы $F = Bt^2$, где $B$ = 12 Н/с$^2$. Определите работу этой силы по перемещению точки из начального положения в точку, где $x$ = 4 м.



Решение

Записываем уравнение для элементарной работы. Элементарная работа может быть найдена как произведение силы на проекцию перемещения

$$\delta A = Fdx .$$

Вместо силы можно подставить выражение $Bt^2$. Для того, чтобы получить выражение для $dx$, нам нужно взять выражение, согласно которому изменяется координата $x = Ct^4$ и найти от него полный дифференциал

$$dx = 4Ct^3 dt .$$

И в выражение для элементарной работы вместо $dx$ подставим $4Ct^3 dt$

$$\delta A = Bt^2 4Ct^3 dt .$$

Сделаем некоторые преобразования

$$\delta A = 4BCt^5 dt .$$

Таким образом, для того, чтобы найти работу, нам достаточно проинтегрировать. Работа на участке от 0 до 4 будет равна интегралу от получившегося выражения

$$A = \int_0^t 4BCt^5 dt .$$

Верхний предел будет равен тому моменту времени, когда координата станет равна 4 м. Найдём этот момент времени, подставив вместо координат в выражение $x = Ct^4$ значение 4 м

$$4 = 1t^4 => t = \sqrt{2}(c) .$$

Отсюда момент времени, когда координата станет равна 4 м, будет равен $\sqrt{2}$ секунд. Теперь можем окончательно посчитать работу

$$A = \int_0^{\sqrt{2}} 4BCt^5 dt .$$

$$A = \frac{4BCt^6}{6}\Bigg|_0^{\sqrt{2}},$$

$$A = \frac{4 \cdot 12 \cdot 1 \cdot (\sqrt{2})^6}{6} = 24 \text{ Дж.}$$

Таким образом, работа силы по перемещению точки из начального положения в точку, где координата равна 4 м, будет 24 Дж.

Задача 6

Потенциальная энергия частицы является функцией её координат: $E_p(x, y, z) = Bx^3 + Cy^2 + Dz$, где $B$ = 4 Н/м², $C$ = 1 Н/м², $D$ = 3 Н. Определите модуль вектора силы, действующей на частицу в точке с координатами $x$ = 0,5 м, $y$ = $z$ = 0.

Решение

Для того, чтобы решить эту задачу нужно понимать, что сила численно равна отрицательному градиенту от потенциальной энергии

$$F = -grad\, E_p.$$

Для нахождения проекции $F_x$, $F_y$, $F_z$ мы найдём честные производные от функции зависимости потенциальной энергии от координат

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx} = -3Bx^2.$$

Частные производные по $y$ и $z$ в данном случае будут равны 0.

$$F_y = -\frac{dE_p}{dy} = -2Cy,$$

$$F_z = -\frac{dE_p}{dz} = -D,$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2},$$

$$F = \sqrt{9B^2x^4 + 4C^2y^2 + D^2}.$$

Теперь, в получившееся выражение вместо $x$, $y$ и $z$ подставляем наши значения: $x$ = 0,5 м, $y$ = z = 0.

$$F=\sqrt{9\cdot 16\cdot 0{,}5^4+9}=4{,}2\ \text{Н}.$$

Получаем силу, равную 4,2 Н.

Задача 7

Маховик в виде сплошного диска массой $m = 80$ кг и радиусом $R$ = 30 см находится в состоянии покоя. Какую работу нужно совершить, чтобы раскрутить маховик до частоты вращения $n$ = 600 об/мин.

Решение

В соответствии с теоремой о кинетической энергии можем записать:

$$A=E_{к2}-E_{к1};\quad E_{к1}=0;\quad E_{к2}=\frac{I\omega^2}{2}.$$

Угловая скорость связана с частоты вращения ν соотношением:

$$\omega=2\pi n.$$

Момент инерции маховика, как сплошного диска:

$$I=\frac{mR^2}{2}.$$

Тогда работа раскручивания маховика определяется:

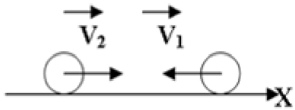
$$A=\frac{I\omega^2}{2}=\frac{mR^2}{2}\frac{(2\pi n)^2}{2}=\frac{4\pi^2 n^2 mR^2}{4}=\pi^2 n^2 mR^2,$$

$$A=3{,}14^2\cdot 10^2\cdot 80\cdot 0{,}3^2=7{,}1\ \text{кДж}.$$

## 1.4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Задача 1

Скорости встречного движения двух тележек, имеющих одинаковые массы, соответственно 5 м/с и 3 м/с.




Найти скорости этих тележек после абсолютно неупругого удара.

Решение

Запишем закон сохранения импульса в проекции на ось $x$

$$mv_2 - mv_1 = 2mu\ ,$$

$$u = \frac{v_2 - v_1}{2}\ ,$$

$$u = \frac{3-5}{2} = -1 \text{ м/с.}$$

После абсолютного неупругого удара тележки будут двигаться как единое целое против оси $x$ со скоростью 1 м/с.

Задача 2.

На тележку массой 10 кг, движущуюся по горизонтальной поверхности со скоростью 15 м/с, падает тело массой 5 кг. Определите скорость (в м/с) этого тела после абсолютно неупругого удара о тележку.

Решение

Запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось $x$

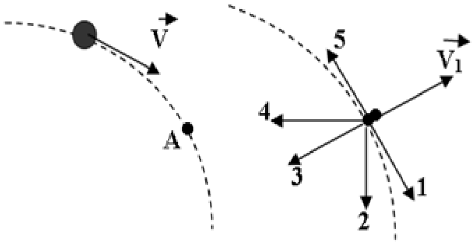
$$Mv = (m+M)u\,,$$

$$u = \frac{Mv}{m+M}\ ,$$

$$u = \frac{10 \cdot 15}{10+15} = 10 \text{ м/с.}$$

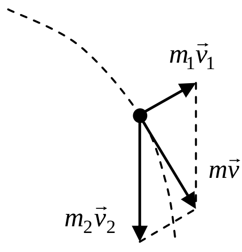
Задача 3

Тело, движущееся по траектории, указанной на рисунке, в точке $A$ разрывается на два осколка. Определите приблизительно направление второго осколка, если первый осколок движется так, как показано на рисунке.




Решение

Направление движения осколка совпадает с направлением его импульса. Согласно закону сохранения импульса суммарный импульс осколка должен быть равен импульсу тела до разрыва. Направление импульса движущегося тела $mv$ показано на рисунке цифрой 1, после разрыва первый осколок имеет импульс $m_1v_1$, направление которого совпадает с направлением скорости $v_1$. Для того, чтобы суммарный импульс сохранился второй осколок, имея импульс $m_2v_2$, должен двигаться в направлении 2, тогда в сумме с импульсом первого осколка получится первоначальный импульс.




Задача 4

Два тела, массы которых равны соответственно 8 кг и 1 кг, изменяют свои координаты по законам $x_1 = 7 + 2t$ (м) и $x_2 = -8 + 20t$ (м). Определите скорость этих тел (в м/с) после абсолютно неупругого удара.

Решение

Из уравнения движения видно, что первое тело движется со скоростью $v_1$ = 7 м/с, второе со скоростью $v_2$ = 20 м/с.

Запишем закон сохранения импульса в проекции на горизонтальную ось

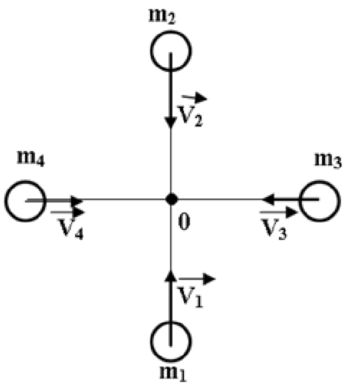
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2)u,$$

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},$$

$$u = \frac{8 \cdot 2 + 1 \cdot 20}{8 + 1} = 4 \text{ м/с.}$$

Задача 5

Четыре тела, массы которых соответственно равны $m_1 = m_4 = 1$ кг; $m_2 = 4$ кг и $m_3 = 23$ кг, двигаются по гладкой горизонтальной поверхности так, что они одновременно достигают точки *O*. С какой скоростью (в м/с) и в каком направлении будет двигаться система этих тел после абсолютно неупругого удара, если скорости тел до удара соответственно равны $v_1$ = 8 м/с; $v_2 = v_3$ = 2 м/с и $v_4$ = 10 м/с?




Решение

При абсолютно неупругом ударе выполнится закон сохранения импульса. Найдём суммарный импульс до взаимодействия.

В проекции на горизонтальную ось *x*:

$$p_x = m_4 v_4 - m_3 v_3 = 1 \cdot 10 - 23 \cdot 2 = 10 - 46 = -36 \text{ кг·м/с.}$$

Минус говорит о том, что импульс направлен влево.

В проекции на вертикальную ось *y*:

$$p_y = m_2 v_2 - m_1 v_1 = 4 \cdot 2 - 1 \cdot 8 = 8 - 9 = 0 \text{ кг·м/с.}$$

Таким образом, импульс $p_0$ до взаимодействия равен 36 кг·м/с. Значит и после взаимодействия импульс $p$ = 36 кг м/с.

Поделив на массу системы, найдём скорость после удара.

$$v = \frac{36}{1+1+4+23} = 1{,}24 \text{ м/с.}$$

Таким образом, система тел будет двигаться влево со скоростью $v$ = 1,24 м/с.

## Задача 6

Обруч и диск имеют одинаковую массу и катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Кинетическая энергия обруча равна $E_к$ = 40 Дж. Найти кинетическую энергию диска.

## Решение

По условию задачи имеем: $m_1 = m_2 = m$; $v_1 = v_2 = v$.

Полная кинетическая энергия катящегося тела складывается из энергии поступательного и вращательного движений:

$$E_к = E_{пост} + E_{вр}.$$

Если момент инерции обруча равен $I = mR_1^2$, а момент инерции диска $I = \frac{mR_2^2}{2}$, то угловые скорости соответственно обруча и диска будут определяться : $\omega_1 = \frac{v_1}{R_1}$, $\omega_2 = \frac{v_2}{R_2}$.

Тогда кинетическая энергия обруча будет равна:

$$E_{к1} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR_1^2 \frac{v^2}{R_1^2}}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mv^2.$$

А кинетическая энергия диска будет равна:

$$E_{к2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR_2^2 \frac{v^2}{R_2^2}}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = \frac{3}{4}mv^2.$$

Таким образом, отношение кинетических энергий обруча и диска:

$$\frac{E_{к1}}{E_{к2}} = \frac{mv^2}{\frac{3}{4}mv^2} = \frac{4}{3}.$$

А кинетическая энергия диска $E_{к2} = \frac{3}{4}E_{к1} = \frac{3}{4}40 = 30$ Дж.

Задача 7

Сплошной диск катится по горизонтальной плоскости со скоростью $v$ = 5 м/с. На какую высоту диск сможет закатиться по наклонной плоскости за счет своей кинетической энергии? Трением пренебречь.

Решение

Полная энергия катящегося диска равна сумме кинетических энергий поступательного и вращательного движений:

$$E_к = E_{к\,пост} + E_{к\,вр}$$

Согласно закону сохранения полной механической энергии потенциальная энергия диска $E_п$, поднявшегося на высоту $h$ за счет своей кинетической энергии $E_к$, будет определяться:

$$E_{к\,пост} = \frac{mv^2}{2},\ E_{к\,вр} = \frac{I\omega^2}{2},\ I = \frac{mR^2}{2},\quad \omega = \frac{v}{R},\ E_п = mgh.$$

Тогда $E_п = E_к + E_{вр}$, так как

$$E_к = \frac{mv^2}{2},\ E_{вр} = \frac{I\omega^2}{2},\ I = \frac{mR^2}{2},\quad E_п = mgh.$$

То получаем

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2}{2}\frac{v^2/R^2}{2} = mgh,\quad \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{4} = mgh,\quad \frac{3}{4}mv^2 = mgh.$$

Отсюда $h = \frac{3v^2}{4g}$, $\quad h = \frac{3\cdot 5^2}{4\cdot 9{,}8} = 1{,}91$ м.

## 1.5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Задача 1

1. Пружинный маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω и амплитудой *A*. Масса груза равна *m*. Чему равна максимальная мощность, развиваемая силой упругости?

Решение

Мощность *N*, развиваемая силой упругости, изменяется по гармоническому закону и равна скорости совершения работы *A* силой упругости

$$N = \frac{dA}{dt}.$$

Элементарная работа силы упругости $\delta A = Fdx$, где сила упругости $F = -kx$, тогда $\delta A = -kxdx$.

Пусть смещение *x* изменяется по закону косинуса $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$.

Продиффиренцируем это выражение: $dx = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)dt$ и подставив вместо *dx* в формулу элементарной работы, получим

$$\delta A = -k\,A\cos(\omega t + \varphi_0)(-A)\omega\sin(\omega t + \varphi_0)dt.$$

Учитывая, что $\cos(\omega t + \varphi_0)\cdot\sin(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}\sin 2(\omega t + \varphi_0)$, получим

$$dA = \frac{1}{2}kA^2\omega\sin 2(\omega t + \varphi_0)dt$$

Тогда мощность *N* равна: $N = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}kA^2\omega\sin 2(\omega t + \varphi_0)$.

Максимальная мощность: $N_{\max}$ : $N = \frac{1}{2}kA^2\omega$.

Максимальное ускорение соответственно равно $a = A\omega^2$.

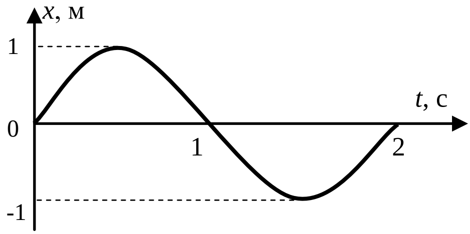
По второму закону Ньютона можем записать: $a = \frac{kA}{m}$.

Подставив в уравнение для мощности окончательно получим:

$$N = \frac{1}{2}mA^2\omega^3.$$

Задача 2

На графике изображена зависимость (синусоида) координаты колеблющегося тела от времени. Чему равна максимальная скорость тела ( в секундах)?




Решение

Максимальная скорость $v_{max}$ связана с амплитудой $A$ колебаний соотношением:

$$v_{max} = A\omega .$$

где ω – циклическая частота колебаний.

Значение амплитуды, т.е. максимальное отклонение от положения равновесия возьмем из графика $A$ = 1 м.

Циклическая частота $\omega = \frac{2\pi}{T}$, период $T$ = 2 с.

Таким образом, $v_{max} = A\frac{2\pi}{T} = 1\frac{2\pi}{2} = \pi$ м/с.

Задача 3

Материальная точка совершает гармонические колебания вдоль оси $x$. Найдите отношение скорости точки в положении равновесия к ее скорости в положении, соответствующем половине наибольшего отклонения от положения равновесия.

Решение

Пусть материальная точка совершает колебания по закону: $x = A\sin\omega t$. В положении равновесия скорость $v_0$ принимает максимальное значение: $v_0 = v_{\max} = A\omega$. Найдём момент времени $t$, соответствующий половине наибольшего отклонения от положения равновесия:

$$\frac{A}{2} = A\sin\omega t\,,\quad \sin\omega t = \frac{1}{2}\,.$$

Найдём скорость, соответствующую этому моменту $v = A\omega\cos\omega t$,

$$v^2 = A^2\omega^2\cos^2\omega t = A^2\omega^2(1-\sin^2\omega t) = A^2\omega^2\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}A^2\omega^2\,,$$

отсюда $v = \dfrac{\sqrt{3}}{4}A\omega$ .

Теперь найдём отношение скорости точки в положении равновесия к ее скорости в положении, соответствующей половине наибольшего отклонения от положения равновесия:

$$\frac{v_0}{v} = \frac{A\omega}{\frac{\sqrt{3}}{4}A\omega} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

Задача 4

Как изменится период колебаний математического маятника при подъеме его на большую высоту?

Решение

При подъеме математического маятника на большую высоту период его колебаний увеличится, т.к. уменьшается ускорение свободного падения $g$:

$$g = G\frac{M}{(R_з + h)^2}\,,$$

где $G$ – гравитационная постоянная, $M$ – масса Земли, $R_З$ – радиус Земли, $h$ – высота.

Период колебаний математического маятника определяется:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.$$

## Задача 5

Чашка пружинных весов совершает малые колебания с периодом $T_1 = 0{,}3$ с. Если на чашку весов опустить гирю массой 5 кг, период колебаний чашки весов с гирей станет равным $T_2 = 0{,}9$ с. Пружина невесома. Чему равна масса пустой чашка весов (в кг):

## Решение

Период колебаний $T_1$ чаши пружинных весов можно найти воспользовавшись формулой для расчёта периода колебаний пружинного маятника

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}} ,$$

где $m_0$ – масса чаши, $k$ – жесткость пружины.

Если на чашу весов опустить гирю массой $m$, то период $T_2$ станет равным: $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + m}{k}}$ .

Решая совместно эти два уравнения

$$\begin{cases} T_1^2 = 4\pi^2 \dfrac{m_0}{k} \\ T_2^2 = 4\pi^2 \dfrac{m_0 + m}{k} \end{cases}$$

и выполняя соответствующие преобразования, получим:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{m_0}{m_0 + m} , \quad T_1^2 m_0 + T_1^2 m = T_2^2 m_0 , \quad (T_2^2 - T_1^2) m_0 = T_1^2 m_0 , \quad m_0 = \frac{T_1^2 m_0}{T_2^2 - T_1^2} .$$

Подставив значения, получим окончательный результат

$$m_0 = \frac{0{,}3^2 \cdot 5}{0{,}9^2 - 0{,}3^2} = \frac{0{,}45}{0{,}72} = 0{,}625 \text{ кг.}$$

## Задача 6

Зависимость координаты $x$ колеблющейся материальной точки от времени $t$ имеет вид $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, где $A = 0{,}33$ м; $\omega = 40\pi$ рад/с; $\varphi_0 = \pi/6$ рад. Найти частоту колебаний в Гц.

Решение

Циклическая частота $\omega$ связана с частотой колебаний $\vartheta$ соотношением $\omega = 2\pi\vartheta$, тогда $\vartheta = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40\pi}{2\pi} = 20$ Гц. Амплитуда и фаза не требуются.

Задача 7

Длины двух математических маятников отличаются на 5,1 см. Найти длину первого мятника (в см), если за одинаковый промежуток времени первый маятник совершил 10 полных колебаний, а второй – 7 полных колебаний.

Решение

Период колебаний первого маятника $T_1 = \frac{t}{N_1} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}$,

где $t$ – промежуток времени от начала отсчёта, $N_1$ – число колебаний первого маятника, $l_1$ – длина нити первого маятника, $g$ – ускорение свободного падения.

Период колебаний второго маятника $T_2 = \frac{t}{N_2} = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$,

где $N_2$ – число колебаний второго маятника, $l_2$ – длина нити второго маятника.

Длины маятников отличаются на: $\Delta l = l_2 - l_1$.

Выразим длины маятников из соответствующих уравнений для периодов: $\frac{t^2}{N_1^2} = 4\pi^2 \frac{l_1}{g} \to l_1 = \frac{t^2 g}{4\pi^2 N_1^2}$. Аналогично получим $l_2 = \frac{t^2 g}{4\pi^2 N_2^2}$.

Отсюда, поделив $l_1$ на $l_2$ получим $\frac{l_1}{l_2} = \frac{\frac{t^2 g}{4\pi^2 N_1^2}}{\frac{t^2 g}{4\pi^2 N_2^2}} = \frac{N_2^2}{N_1^2}$.

Окончательно имеем: $\Delta l = l_1\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 - l_1$, $l_1 = \frac{\Delta l}{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 - 1}$.

Подставив значения, получим результат $l_1 = \dfrac{5{,}1}{\left(\dfrac{10}{7}\right)^2 - 1} = 4{,}9$ см.

Задача 8

Уравнение волны имеет вид $\xi(x,t) = 0{,}01\cos(12{,}6 \cdot 10^3 t - 37x)$. Чему равна скорость распространения волны (в м/с)?

Решение

Волновое число $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, где $\lambda$ – длина волны. Соответственно $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$, а скорость волны $v = \dfrac{\lambda}{T}$.

Период $T$ связан с циклической частотой $\omega$ как $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Тогда скорость распространения волны: $v = \dfrac{2\pi\omega}{k2\pi} = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{12{,}6 \cdot 10^3}{37} = 340$ м/с.

Задача 9

Найдите частоту колебаний диска относительно оси, проходящей через его край. Масса диска *m*. Радиус диска *r*.

Решение

Диск, подвешенный за край, является физическим маятником. Период колебаний $T$ физического маятника равен: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgl}}$,

где $I$ – момент инерции диска относительно оси, проходящей через край в точке подвеса.

По теореме Штейнера момент инерции относительно оси, проходящей через край $I$, равен сумме момента инерции $I_0$ диска относительно оси, проходящей через образующую и произведения массы диска $m$ на квадрат расстояния между осями, равное радиусу $r$ диска:

$$I = I_0 + mr^2, \text{ а момент инерции диска } I_0 = \frac{mr^2}{2}.$$

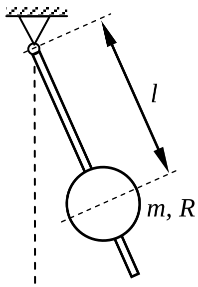
Расстояние $l$ от точки подвеса до центра масс равно $r$ :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{mr^2}{2} + mr^2}{mgr}} = \sqrt{\frac{3mr^2}{2mgr}} = \sqrt{\frac{3r}{2g}}\ .$$

Тогда частоту колебаний диска $\vartheta = \frac{1}{T} = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$ .

Задача 10

Найти частоту малых колебаний маятника механических часов, представляющего собой однородный диск массы $m$ и радиуса $R$, насаженного на невесомый стержень. Расстояние от центра диска до оси вращения маятника равно $l$.




Решение

Период колебания маятника механических часов найдем исходя из того, что это физический маятник

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}\ .$$

Момент инерции $I$ диска равен сумме момента инерции $I_0$ относительно оси, проходящей через центр масс, и произведения массы диска на квадрат расстояния между осями:

$$I = I_0 + ml^2\,, \quad I_0 = \frac{mR^2}{2}\,, \quad I = \frac{mR^2}{2} + ml^2 = m\left(\frac{R^2}{2} + l^2\right).$$

Расстояние от точки подвеса до центра масс $l$.

Частота колебаний: $\vartheta = \dfrac{1}{T}$, $\vartheta = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{mgl}{m\left(\dfrac{R^2}{2}+l^2\right)}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{l\left(\dfrac{R^2}{2l^2}+1\right)}}$.

Задача 11

При каких условиях маятник из задания 10 можно приближенно рассматривать как математический? Если часы спешат/отстают, куда надо переместить диск?

Решение

При условии, что расстояние между осями много больше радиуса диска $l \gg R$ маятник можно считать математическим. Если часы спешат, диск нужно переместить вниз. При этом увеличится момент инерции и период колебаний увеличится. Если часы отстают, диск нужно сместить вверх, тогда момент инерции уменьшится, и период колебаний уменьшится.

## 1.6. МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ

Задача 1

Чему равен максимальный объёмный расход $Q$ воды в трубе диаметром $d = 10$ см, при котором ещё не возникает турбулентность (критическое число Рейнольдса $Re_{кр}$=2300)? Коэффициент вязкости $\eta$ воды принять равным 1,8 мПа·с. Плотность воды $\rho$ = 1000 кг/м$^3$.

Решение

Условие турбулентности: $Re > Re_{кр}$

$$Re = \frac{\rho v d}{\eta}.$$

Расход воды определяется как

$$Q = vS, \quad Q_{max} = v_{max} S = v_{max} \frac{\pi d^2}{4}.$$

Максимальная скорость при критическом числе Рейнольдса

$$v = v_{max} \quad \text{при} \quad Re > Re_{кр},$$

$$Re_{кр} = \frac{\rho v_{max} d}{\eta} \Rightarrow v_{max} = \frac{Re_{кр} \eta}{\rho d}, \quad Q_{max} = \frac{Re_{кр} \eta \pi d}{4\rho}.$$

Максимальный объёмный расход воды в трубе

$$Q_{max} = \frac{2300 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 3{,}14 \cdot 0{,}1}{4 \cdot 10^3} = 0{,}325 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}.$$

Задача 2

В широком сосуде с глицерином плотностью $\rho = 1{,}2$ г/см$^3$ падает с установившейся скоростью $v = 5$ см/с стеклянный шарик диаметром $d = 1$ мм и плотностью $\rho_1 = 2{,}7$ г/см$^3$. Определить динамическую вязкость глицерина.

Решение

На шарик, падающий в жидкость вертикально вниз, кроме силы сопротивления, действуют ещё силы: сила тяжести и сила Архимеда. В случае установившегося движения ($v$=const):

$$m_1 g = F_C + F_A\,, \tag{1}$$

$$m_1 g = \rho_1 V g = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho_1 g\,, \tag{2}$$

$$F_A = mg = \rho V g = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho g\,, \qquad 3)$$

$$F_C = kv = 6\pi\eta\, r v\,. \tag{4}$$

Решая совместно (1), (2), (3), (4) имеем: $\frac{1}{6}\pi d^3 \rho_1 g = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho g + 3\pi\eta\, d\, v$.

Решая уравнение (5), имеем: $\eta = \frac{d^2 g(\rho_1 - \rho)}{18v}$.

Расчет: $\eta = \frac{18 \cdot 0{,}05}{10^{-3} \cdot 10 \cdot (2{,}7 - 1{,}2) \cdot 10^3} = 0{,}016$ Па·с.

Задача 3

В бак равномерно поступает вода, скорость наполнения бака $Q_{(+)} = 60$ л/мин. На дне имеется отверстие площадью $S = 1$ см$^2$. Какой высоты может достичь уровень воды в баке?

Решение

Формула Торричелли для скорости истечения воды:

$$v_{ист} = \sqrt{2gh}\,.$$

Расход воды, вытекающей через отверстие:

$$Q_{(-)} = v_{ист} S = S\sqrt{2gh}\,.$$

Уровень воды в установится когда $Q_{(+)}$=$Q_{(-)}$ следовательно:

$$Q_{(+)} = S\sqrt{2gh}\text{, откуда}\quad h = \frac{Q_{(+)}^2}{2gS^2}\,.$$

Расчет: $h = \frac{10^{-6}}{10^{-8} \cdot 2 \cdot 9{,}8} = 5{,}1$ м.

Задача 4

Канал шириной $b = 10$ м и глубиной $H = 5$ м наполнен водой и перегорожен плотиной. Определить силу давления воды $p$ на плотину. Плотность воды $\rho$ = 1000 кг/м$^3$.

Решение

Рассмотрим силу давления на элемент площади плотины:

$$dF = pdS; \quad dS = bdh; \quad p = \rho gh; \quad dF = \rho gVhdh.$$

Тогда сила давления на плотину найдем интегрированием:

$$F = \int_0^H \rho gVhdh = \rho gV\int_0^H hdh = \frac{\rho gVH^2}{2}.$$

Расчет: $F = \dfrac{10^3 \cdot 9{,}8 \cdot 10 \cdot 25}{2} = 1{,}23 \cdot 10^6$ Н=1,23 МН.

Задача 5

Сколько времени потребуется, чтобы заполнить водой бассейн глубиной $h = 3{,}1$ м, шириной $b = 9{,}5$ м и длинной $l = 21$ м, если вода поступает из шланга диаметром $d$ = 1,9 см со скоростью $v$ = 1,5 м/с?

Решение

Объёмный расход воды: $Q = vS = v\dfrac{\pi d^2}{4}$, с другой стороны:

$$Q = \frac{V}{t} \Rightarrow t = \frac{V}{Q} = \frac{4hbl}{\pi vd^2}.$$

Расчет: $t = \dfrac{4 \cdot 3{,}1 \cdot 9{,}5 \cdot 21}{3{,}14 \cdot 1{,}5 \cdot 1{,}9 \cdot 10^{-2}} = 1455 \cdot 10^3$ с = 404 час.

Задача 6

По трубе радиусом $r = 1{,}5$ см течет углекислый газ. Определить скорость его течения $v$, если за $t$ = 20 мин через поперечное сечение трубы протекает $m$ = 950 г. Плотность углекислого газа принять $\rho$ = 7,5 кг/м$^3$.

Решение

Объёмный расход углекислого газа: $Q = vS \Rightarrow v = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi r^2}$ .

С другой стороны: $Q = \frac{V}{t}$; $V = \frac{m}{\rho}$; $Q = \frac{m}{\rho t}$.

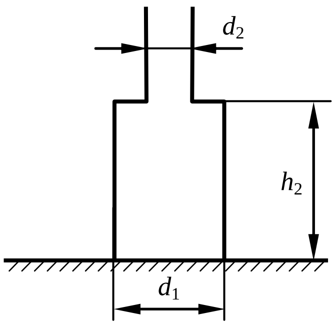
Тогда скорость течения углекислого газа: $v = \frac{m}{\pi \rho r^2 t}$ .

Расчет: $v = \frac{0{,}95}{3{,}14 \cdot 7{,}5 \cdot 1{,}2 \cdot 10^2 \cdot (1{,}5 \cdot 10^{-2})^2} = 0{,}149$ м/с.

Задача 7

Вода из водопроводной магистрали диаметром $d_1 = 5$ см на уровне земли ($h_1 = 0$ м) поступает под давлением $p_1 = 3{,}3$ атм в здание со скоростью $v = 0{,}5$ м/с. На высоте $h_2 = 25$ м диаметр трубы $d_2 = 2{,}5$ см. Определить давление в трубе $p_2$ и скорость течения воды $v_2$ на этой высоте.

Решение




Скорость $v_2$ найдём из уравнения неразрывности: $v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow$

$$v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2} = \frac{4 v_1 \pi d_1^2}{4 \pi d_2^2} = v_1 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 .$$

Давление найдём из уравнения Бернулли:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 \quad \text{отсюда} \quad p_2 = p_1 + \frac{\rho}{2}\left(v_1^2 - v_2^2\right) - \rho g h_2 .$$

Тогда скорость течения воды: $v_2 = 0{,}5\left(\dfrac{5\cdot 10^{-2}}{2{,}5\cdot 10^{-2}}\right)^2 = 2$ м/с.

Давление в трубе: $p_2 = 3{,}3\cdot 10^5 + \dfrac{10^3}{2}(0{,}25-4) - 10^3\cdot 9{,}8\cdot 25 = 78{,}1$ кПа.

Задача 8

Какой диаметр $d$ должен иметь воздуховод длиной $l = 30$ м, чтобы вентиляционная система полностью обновляла воздух в помещении с размерами $A = 10$ м, $B = 18$ м, $C = 4$ м каждые 10 мин? Насос системы создаёт избыточное давление $\Delta p = 40$ Па. Коэффициент вязкости $\eta = 18{,}2$ мкПа·с.

Решение

Согласно формуле Паузейля:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{\pi R^4 t\Delta p}{8\eta l} \\ V &= ABC \end{aligned}\right\} \quad R = \sqrt[4]{\frac{8ABC\eta l}{\pi t\Delta p}},$$

$$d = 2R; \qquad d = 2\sqrt[4]{\frac{8ABC\eta l}{\pi t\Delta p}}.$$

Тогда диаметр воздуховода равен

$$d = 2\sqrt[4]{\frac{8\cdot 10\cdot 18\cdot 4\cdot 1{,}82\cdot 10^{-5}}{3{,}14\cdot 40\cdot 600}} = 0{,}16 \text{ м}.$$

Задача 9

Чему должна равняться разность давлений $\Delta p$ на концах 2-х километрового трубопровода диаметром $d = 40$ см, чтобы нефть с коэффициентом вязкости 20 Па·с поступала в количестве $Q = 4$ л/с?

Решение

По формуле Паузейля: $V = \dfrac{\pi R^4 t\Delta p}{8\eta l}$.

Отсюда имеем расход и разность давлений:

$$Q = \frac{V}{t} = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l}; \qquad \Delta p = \frac{8Q\eta l}{\pi R^4} = \frac{128\,Q\eta l}{\pi d^4}.$$

Расчет: $\Delta p = \dfrac{128 \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 2 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 0{,}4^4} = 255$ кПа.

Задача 10

Скорость течения воды $v_0$ в центре трубы диаметром $d = 5{,}2$ см и длинной $l = 20$ м равна 10 см/с. Определить разность давлений $\Delta p$ на концах трубы и объёмный расход воды $Q$. Коэффициент вязкости $\eta = 1{,}8$ мПа·с

Решение

Зависимость скорости ламинарного течения вязкой жидкости в трубе радиусом $R$ от расстояния до оси трубы имеет вид:

$$v = \frac{\Delta p}{4\eta l}\left(R^2 - r^2\right).$$

Скорость течения на оси трубы (при $r = 0$)

$$v_0 = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2 \quad \text{или} \quad v_0 = \frac{\Delta p}{16\eta l} d^2, \text{ откуда:} \quad \Delta p = \frac{16\eta l v_0}{d^2}.$$

Согласно формуле Паузейля объёмный расход воды:

$$Q = \frac{\pi R^4 \Delta p}{8\eta l} = \frac{\pi d^4 \Delta p}{128\,\eta l}, \text{ откуда получаем} \quad Q = \frac{\pi d^2 v_0}{8}.$$

Проведем расчеты, подставив в формулы исходные данные:

$$Q = \frac{3{,}14 \cdot (5{,}2 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 0{,}1}{8} = 1{,}06 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3\text{/с},$$

$$\Delta p = \frac{16 \cdot 1{,}8 \cdot 10^{-3} \cdot 20 \cdot 0{,}1}{(5{,}2 \cdot 10^{-2})^2} = 21{,}3 \text{ Па}.$$

# 2. САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

*Лабораторная работа 1*

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСКОРЕНИЯ СВОБОДНОГО ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО И ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКОВ

*Цель работы*: научиться определять ускорение свободного падения с помощью математического и физического маятников.

*Приборы и принадлежности*: стальной шарик, подвешенный на нити (модель математического маятника), оборотный маятник (разновидность физического маятника), секундомер, линейка.

### Краткая теория и методические указания

Вблизи поверхности Земли все тела падают с одинаковым ускорением, которое называют *ускорением свободного падения* и обозначают буквой $g$. В системе, связанной с Землей, кроме гравитационной силы, с которой Земля притягивает тело, нужно учитывать центробежную силу инерции, зависящую от широты местности (она максимальна на экваторе и обращается в нуль на полюсах). Из-за сплюснутости Земли гравитационная сила изменяется с широтой, будучи на полюсах на 0,5% больше, чем на экваторе. В итоге ускорение свободного падения изменяется с широтой от 9,780 м/с$^2$ на экваторе до 9,832 м/с$^2$ на полюсах. Значение $g = 9{,}80665$ м/с$^2$ принято в качестве *нормального* (стандартного) значения. Для возможно более точного определения этой величины проводятся *гравиметрические измерения,* результаты которых используются для поиска полезных ископаемых, при изучении внутреннего строения Земли, в целях навигации и т.д.

С высотой, если не учитывать центробежную силу, величина $g$ убывает в соответствии с законом

$$g(h) = g_0 \frac{R^2}{(R+H)^2},$$

где $R$ – радиус Земли, $H$ – высота, а $g_0$ – ускорение свободного падения на поверхности.

При опускании вниз (например, в шахту) величина $g$ также убывает, но уже по другому закону:

$$g(x) = g_0 \frac{x}{R},$$

где $x$ – расстояние от центра Земли.

Таким образом, наибольшее значение ускорение свободного падения принимает на поверхности планеты.

Для определения ускорения свободного падения существует много методов. Первое, что приходит в голову, это отпустить маленький шарик с некоторой высоты $h$ и, измерив время падения $t$, рассчитать $g$ по формуле

$$g = \frac{2h}{t^2}.$$

Разумеется, желательно при этом избавиться от сопротивления воздуха, создав необходимый вакуум.

Можно предложить ещё один способ: с помощью точного динамометра, проградуированного в единицах силы – ньютонах, взвесить тело с известной массой и найти $g$ по формуле

$$g = \frac{P}{m},$$

где $P$ – вес тела.

В настоящей работе для определения ускорения свободного падения используются методы физического и математического маятников.

*Математическим маятником* называется материальная точка, способная совершать колебания на невесомой и нерастяжимой нити. Период малых колебаний математического маятника зависит только от длины $l$ нити и ускорения свободного падения $g$ и определяется соотношением:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{1}$$

Маленький шарик, подвешенный на длинной, нерастяжимой нити, можно с некоторым приближением рассматривать в качестве модели математического маятника. Если измерить время $t$ некоторого числа $n$ полных колебаний шарика, то для периода его колебаний можно записать:

$$T = \frac{t}{n}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) для ускорения $g$ получаем формулу

$$g = \frac{(2\pi)^2 l n^2}{t^2}, \tag{3}$$

в которой в качестве $l$ будем рассматривать расстояние от точки подвеса до середины шарика.

Число колебаний *n* выберем равным 20 (при этом колебания не сильно затухают и точность измерения времени оказывается достаточной).

Более точно можно определить ускорение свободного падения с помощью оборотного маятника, который представляет собой частный случай физического маятника. *Физическим маятником* называется тело, которое может совершать колебания относительно оси, не проходящей через его центр масс. Период малых колебаний физического маятника определяется соотношением:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}},$$

где $I$ – момент инерции маятника относительно горизонтальной оси, проходящей через точку (ось) подвеса; $m$ – масса маятника; $a$ – расстояние от точки подвеса до центра масс маятника; $g$ – ускорение свободного падения.

Оборотный маятник (рис. 1) представляет собой стальной стержень с жёстко закреплёнными параллельными призмами *1* и *3*, неподвижным грузом *2* и подвижным грузом *4* (в виде чечевиц). Передвигая подвижный груз вдоль стержня, можно изменять момент инерции маятника.

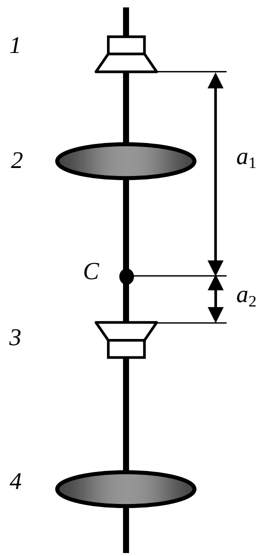


**Рис.1**

Если оборотный маятник установить на призму *1*, то период его колебаний равен

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{mga_1}},$$

где (по теореме Штейнера) $I_1 = I_0 + ma_1^2$ – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через призму *1*, а $I_0$ – момент инерции маятника относительно оси, проходящей через его центр масс $C$.

Если перевернуть маятник и установить на призму *2*, то его период колебаний равен

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{mga_2}},$$

где $I_2 = I_0 + ma_2^2$.

Исключая величину $I_0$, получим

$$T_1^2 ga_1 - T_2^2 ga_2 = 4\pi^2(a_1^2 - a_2^2),$$

откуда
$$g = \frac{4\pi^2 (a_1^{\,2} - a_2^{\,2})}{T_1^{\,2} a_1 - T_2^{\,2} a_2}. \qquad (4)$$

С помощью этой формулы можно рассчитать величину ускорения свободного падения, проведя два опыта для измерения периодов $T_1$ и $T_2$. Но кроме этого, потребуется определить также расстояния $a_1$ и $a_2$ Это можно сделать, уравновесив оборотный маятник в горизонтальном положении на специальной призме, и измерить $a_1$ и $a_2$. Дополнительные измерения приводят, как известно, к дополнительным погрешностям. Поэтому на практике поступают иначе.

Регулированием положения груза *4* на стержне маятника можно добиться равенства периодов колебаний маятника на обеих призмах, т.е. $T_1 = T_2 = T$. С учётом этого формула (4) примет вид:

$$g = 4\pi^2 L / T^2,$$

где $L = a_1 + a_2$ – расстояние между призмами маятника. Обратите внимание на то, что период колебаний оборотного маятника в этом случае будет равен периоду математического маятника с длиной, равной расстоянию $L$ между призмами *1* и *3* (рис. 1). Этот факт используется в дальнейшем для грубой (предварительной) настройки оборотного маятника.

Выражая период колебаний по формуле

$$T = \frac{t}{n},$$

получим окончательно

$$g = \frac{4\pi^2 L n^2}{t^2}. \qquad (5)$$

## Порядок выполнения работы

***Работа может быть выполнена в двух вариантах, виртуальном и реальном. Виртуальный выполняется в случае невозможного выполнения реального варианта.***

**1. Вариант – виртуальный.**

Загрузите из яндекс-диска файл, ссылка
https://disk.yandex.ru/i/mnuKO3s58bimaw

Если система защиты не позволяет запуск, нажмите *Подробнее* и выполните.

Просмотрите выполнение лабораторной работы, запишите полученные в эксперименте данные и далее выполните задания как в реальном варианте.

**2. Вариант – реальный.**

I. Определение ускорения свободного падения с помощью шарика, подвешенного на нити.

1. Регулируя длину нити с помощью лебёдки, установите середину шарика примерно на одной высоте с ребром нижней призмы *2*.

2. Измерьте линейкой расстояние $l$ от точки подвеса до середины шарика и запишите результат с учётом погрешности:

$$l = l_{ср} \pm \Delta l.$$

3. Отклоните шарик от положения равновесия на небольшой угол (5…6°) и с помощью секундомера измерьте время 20 полных колебаний. Результат занесите в таблицу. Повторите измерения ещё 4 раза.

| № п/п | $t_i$, с | $\Delta t_i$, с | $(\Delta t_i)^2$, с$^2$ | $S_n$, с | $t_{ср}$, с | $\Delta t$, с | $E_t$, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |

4. Рассчитайте среднее значение $t_{ср}$ по формуле

$$t_{ср} = \frac{\sum t_i}{n} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{n}.$$

5. Заполните оставшиеся столбцы таблицы, используя формулы:

$$\Delta t_i = |t_i - t_{ср}|; \quad S_n = \sqrt{\frac{\sum (\Delta t_i)^2}{n(n-1)}}; \quad \Delta t = t_\alpha S_n, \quad E_t = \frac{\Delta t}{t_{ср}},$$

где $t_\alpha = 2{,}78$ – коэффициент Стьюдента для пяти измерений при $P = 0{,}95$.

6. Рассчитайте среднее значение ускорения свободного падения по формуле (3), подставляя в неё измеренные и рассчитанные значения.

7. По формуле

$$E_g = \frac{2\Delta\pi}{\pi_{ср}} + \frac{\Delta l}{l_{ср.}} + \frac{2\Delta t}{t_{ср}}$$

найдите относительную погрешность $E_g$, а затем и абсолютную погрешность:

$$\Delta g = E_g g_{ср}.$$

8. Запишите окончательный результат:

$$g = (g_{ср} \pm \Delta g)\ м/с^2.$$

II. Определение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника.

1. Установите оборотный маятник (рис. 1) на призму *1*. Регулируя длину нити с помощью лебёдки, установите середину шарика примерно на одной высоте с ребром нижней призмы *3*. Отклонив одновременно шарик на нити и оборотный маятник от положения равновесия на небольшой угол (5…6°), предоставьте им возможность совершать свободные колебания. Перемещая груз *4* вдоль стержня, добейтесь того, чтобы в течение *10* полных колебаний маятник и шарик двигались примерно с одинаковыми фазами, что соответствует приблизительному равенству периодов. После этого грубую настройку оборотного маятника можно считать законченной.

2. Точная настройка маятника имеет целью добиться равенства периодов колебаний на призмах *1* и *3* с возможно большей точностью. Для этого необходимо сравнить времена $t_1$ и $t_2$ достаточно большого числа (например, 50-ти) колебаний на призмах *1* и *3*. Устанавливая маятник последовательно на обе призмы и, перемещая груз *4* (в небольших пределах), добейтесь того, чтобы разница $|t_1 - t_2|$ не превышала 1 с. Следует учесть, что положение груза *4* влияет как на $t_1$, так и на $t_2$. Таким образом, после каждого перемещения груза необходимо заново измерять $t_1$ и $t_2$. Эта процедура – одна из самых трудоёмких в данной работе. Окончательную величину $t_1 \approx t_2 = t_{ср}$ запишите в тетрадь. В качестве погрешности величины $t_{ср}$ примите $\Delta t = 1$ с.

3. Измерьте (с помощью линейки и двух угольников) расстояние $L$ между ребрами призм *1* и *3* и запишите с учётом погрешности:

$$L = L_{ср} \pm \Delta L.$$

4. Рассчитайте среднее значение ускорения свободного падения по формуле (5).

5. По формуле

$$E_g = \frac{2\Delta\pi}{\pi_{ср}} + \frac{\Delta L}{L_{ср}} + \frac{2\Delta t}{t_{ср}}$$

найдите относительную погрешность $E_g$, а затем и абсолютную погрешность:

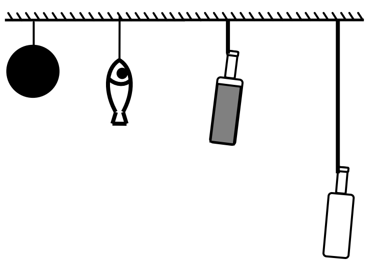
$$\Delta g = E_g g_{ср}.$$

6. Запишите окончательный результат:

$$g = (g_{ср} \pm \Delta g)\ м/с^2.$$

## Контрольные вопросы

1. Что называется ускорением свободного падения?
2. От чего зависит величина ускорения свободного падения?
3. Запишите дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение.
4. Дайте определение физическому и математическому маятникам.
5. Почему маленький тяжёлый шарик является хорошей моделью математического маятника?
6. От чего зависит период колебаний математического маятника?
7. От чего зависит период колебаний физического маятника?
8. Что такое центр масс и момент инерции тела? Как их найти?
9. Сформулируйте теорему Штейнера и покажите её применение на простейших примерах.
10. С какой целью следует добиваться равенства периодов колебаний оборотного маятника на обеих призмах? Можно ли выполнить работу, если подвижный груз *4* не может перемещаться по стержню?
11. Почему амплитуды колебаний обоих маятников должны быть небольшими?
12. Что такое приведённая длина физического маятника?
13. Как ещё можно найти величину ускорения свободного падения? Укажите все известные Вам способы?
14. Рассчитайте период $T$ колебаний тонкого стержня длиной $L$ относительно оси, проходящей через один из концов стержня. Как изменится период $T$, если на второй конец стержня прикрепить точечный груз с такой же массой, как у стержня?
15. Как найти период колебаний маленького заряженного шарика, подвешенного на нити, и находящегося под действием однородного электростатического поля?
16. С помощью каких методов и приёмов можно повысить точность измерений (уменьшить погрешности измеряемых величин в данной работе)?
17. Какой из приведённых на рисунке объектов наилучшим образом соответствует модели математического маятника?



## Вариант ответов на контрольные вопросы

1. Ускорением свободного падения называется ускорение, приобретаемое телом в гравитационном поле массивного тела (планеты, звезды) под действием силы тяжести в отсутствии сил сопротивления среды (свободное падение).

2. Величина ускорения свободного падения зависит от расстояния между центром масс планеты и точкой в пространстве, где находится тело, приобретающее данное ускорение.

На небольших расстояниях от поверхности планеты ускорение свободного падения меняется слабо, но учитывая сплюснутость планеты (эллипсоид вращения) возможно заметное ~ 0,5 % отличие значений. В итоге ускорение свободного падения изменяется с широтой от 9,780 м/с$^2$ на экваторе до 9,832 м/с$^2$ на полюсах. На основании этого можно заключить, что ускорение свободного падения будет завесить от широты данной местности. Значение $g = 9{,}80665$ м/с$^2$ принято в качестве *нормального* (стандартного) значения.

На больших высотах или высоких орбитах (расстояния сравнимые с радиусом планеты) ускорение свободного падения меняется существенно.

3. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0\,,$$

где $x = x(t)$ – значение колеблющейся величины в момент времени $t$, $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ – вторая производная (ускорение) величины $x(t)$ по времени $t$, $\omega_0$ – циклическая частота гармонических колебаний функции $x(t)$ удовлетворяющая данному дифференциальному уравнению.

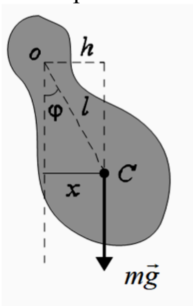
Решение дифференциального уравнения имеет вид гармонической функции:

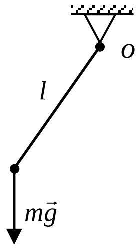
$$x = A_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $A_m$ – максимальное значение величины $x(t)$ (амплитуда колебаний), $\varphi_0$ – начальная фаза колебаний (фаза колебаний в момент $t = 0$).

4. Физическим маятником называется твердое тело, способное совершать колебание в поле сил тяжести (и не только) относительно оси $O$, не проходящей через центр масс $C$ этого тела.

Математическим маятником называется материальная точка на нерастяжимой невесомой нити, совершающая колебание в поле сил тяжести. Математический маятник является частным случаем физического маятника, когда размеры и форма твердого тела несущественны в сравнении с длиной нити $l$.




Физический маятник Математический маятник

5. Маленький тяжелый шарик является хорошей моделью математического маятника, потому что такая модель удовлетворяет определению математического маятника.

6. Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Отсюда видно, что период $T$ зависит от длины математического маятника $l$, а $g$ – ускорение свободного падения, вообще говоря, различно для разных областей пространства, где находится математический маятник.

7. Период колебаний физического маятника $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{mgl}}$. Отсюда видно, что период $T$ зависит не только от массы физического маятника $m$, но и от выбора оси качания $o$, которой определяется момент инерции $I$ физического маятника. Здесь $l$ – расстояние между центром масс $C$ и $o$ – ось колебаний. Также можно говорить и о зависимости от $g$, т.е. выбора области пространства.

8. Центром масс системы материальных точек называется некоторая точка в пространстве координаты (радиус-вектор) $\vec{r}_c$, которой определяется в некоторой системе координат как $\vec{r}_c = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$, где $m_i$, $\vec{r}_i$ – массы и радиус-векторы каждой $i$-й материальной точки, $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – общая масса системы материальных точек.

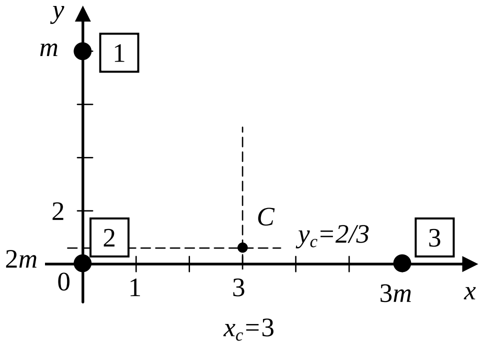
Если система материальных точек представляет собой твердое тело, т.е. масса распределена непрерывно, для координат центра масс $\vec{r}_c$ имеем:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\int_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV ,$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор элемента объема $dV$, имеющего плотность $\rho(\vec{r})$, $m$ – масса всего твердого тела.

Интегрирование осуществляется по всему объему тела $V$.

Для примера решим задачу: Найти координаты центра масс системы материальных точек 1, 2, 3, показанных на рисунке.




Решение: По определению центр масс равен

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}, \; i = 1;\, 2;\, 3$$

$$m_1 = m; \quad m_2 = 2m; \quad m_3 = 3m$$

Свяжем начало системы координат $xoy$ с точкой 2 и рассмотрим проекции вектора $\vec{r}_c$ на данные координатные оси:

$$ox: \quad x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \cdot 0 + m_2 \cdot 0 + m_3 \cdot 6}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3m \cdot 6}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{3 \cdot 6}{6} = 3 ;$$

$$oy: \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 \cdot 4 + m_2 \cdot 0 + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{4m}{6m} = \frac{2}{3} .$$

Итак, центром масс системы является точка с координатами $x_c = 3$; $y_c = 2/3$ или (3; 2/3)

Центры масс однородных ($\rho$=const) геометрически правильных тел совпадают с их геометрическими центрами.

Введение понятия центра масс удобно для описания поступательного движения системы материальных точек или твердого тела. Рассматриваем движение его центра масс как материальной с массой, равной массе всего тела.

Моментом инерции системы материальных точек относительно некоторой оси *oz* называется скалярная физическая величина, численно равная произведению масс данных точек $m_i$ на квадрат расстояния от них до оси *oz:*

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$$

где $i = 1; 2; 3 \ldots$; $n$ – число материальных точек данной системы.

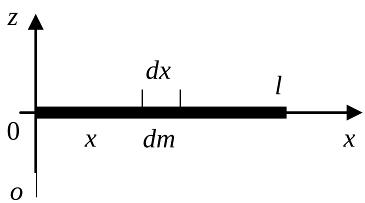
Момент инерции обладает свойством аддитивности, заключающимся в том, что момент инерции целого может быть представлен в виде суммы моментов инерции его частей.

Если мы имеем непрерывное распределение массы тела (твердого тела) относительно некоторой оси *oz*, то определение момента инерции твердого тела относительно данной оси *oz* имеет вид:

$$I = \int_m r^2 dm = \int_V r^2 \rho(r) dm ,$$

где $r$ – расстояние от оси *oz* до элемента объема тела $dV$ с массовой плотностью $\rho(r)$ в данной точке с координатой $r$. Интегрирование производится по всему объему тела $V$.

Для примера решим задачу: Найти момент инерции однородного тонкого стержня относительно оси *oz,* проходящей через один из его концов и перпендикулярной ему.



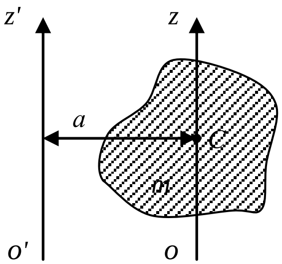

Решение: Проведем ось координат *ox* вдоль стержня, ось *ox* перпендикулярна оси *oz*. Выберем на расстоянии $x$ малый элемент стержня $dx$. Его масса $dm = \mu dx$, где $\mu = m/l$ – линейная массовая плотность стержня. Малый элемент $dx$ можно считать материальной точкой. Тогда приращение момента инерции, обусловленное его вкладом, будет иметь вид:

$$dI = x^2 dm = x^2 \mu dx = \frac{m}{l} x^2 dx\,.$$

Проведя интегрирование (суммирование вкладов всех элементов стержня) от 0 до $l$, получим:

$$I = \int_0^l \frac{m}{l} x^2 dx = \frac{m}{l} \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^l = \frac{m}{l}\frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} m l^2\,.$$

9. Теорема Штейнера утверждает, что момент инерции твердого тела относительно некоторой оси $oz$ равен сумме момента инерции данного тела относительно оси $oz$, проходящей через его центр масс $C$ и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями $oz$ и $o'z'$ (смещения осей). Оси $oz$ и $o'z'$ параллельны:

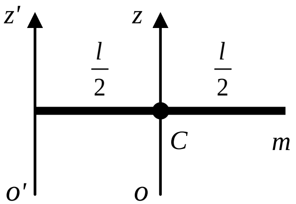



$$I = I_0 + ma^2\,,$$

где $I$ – момент инерции тела относительно оси $o'z'$; $I_0$ – момент инерции тела относительно оси $oz$, проходящей через центр масс $C$; $a$ – расстояние между осями $oz$ и $o'z'$ (смещения осей); $m$ – масса тела; $C$ – положение центра масс тела.

Для примера решим задачу: В пункте 8 мы рассчитали момент инерции тонкого однородного стержня массы $m$ и длины $l$ относительно оси, перпендикулярной стержню, и проходящей через один из его концов.

Он равен $$I = \frac{1}{3} m l^2\,.$$




Определим, воспользовавшись теоремой Штейнера, момент инерции данного стержня относительно оси, проходящей через его центр масс. Оси параллельны. Согласно утверждению теоремы, имеем:

$$\frac{1}{3} m l^2 = I_0 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2,\ \text{так как}\ \ a = \frac{l}{2}$$

$$I_0 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2^2}\right) m l^2 = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) m l^2 = \frac{4-3}{12} m l^2 = \frac{1}{12} m l^2\,.$$

10. Измеряя периоды колебаний оборотного маятника на различных призмах, мы получаем, вообще говоря, различные значения, $T_1$ и $T_2$. при этом рабочая формула для определения ускорения свободного падения (4) (текст лабораторной работы) имеет вид:

$$g = \frac{4\pi^2(a_1{}^2 - a_2{}^2)}{T_1{}^2 a_1 - T_2{}^2 a_2},$$

где $a_1$ – расстояние от ребра призмы *1* до центра масс $C$ оборотного маятника; $a_2$ – расстояние от ребра призмы *2* до центра масс $C$ оборотного маятника.

Перемещение подвижного груза по оси оборотного маятника приводит к перемещению точки центра масс $C$. Изменение положения центра масс ведет к изменению периода колебаний относительно осей качания обеих призм.

Уравняв, примерно, периоды $T_1$ и $T_2$, мы можем привести формулу (4) к более простому виду:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2},$$

где $T \approx T_1 \approx T_2$, $L = a_1 + a_2$ – расстояние между осями призм.

Если перемещение подвижного груза затруднено или невозможно по каким-либо причинам, то работу выполнить вполне возможно. Для этого необходимо определить положение центра масс $C$ с достаточно высокой точностью, а также периоды $T_1$ и $T_2$, и воспользоваться формулой (4).

11. Амплитуды колебаний обоих маятников должны быть малыми, поскольку используемые формулы для определения периодов колебаний обоих маятников справедливы при условии «малых колебаний», которое заключается в равенстве $\sin\alpha \approx \alpha$. Чем оно справедливее, тем точнее значения периодов мы получим.

12. Приведённой длинной $L$ физического маятника называется длина математического маятника, период которого будет равен периоду данного физического маятника.

Период малых колебаний физического маятника определяется формулой:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}},$$

где $I$ – момент инерции физического маятника относительно горизонтальной оси, проходящей через точку (ось) подвеса; $m$ – масса маятника; $l$ – расстояние от точки подвеса до центра масс маятника; $g$ – ускорение свободного падения.

Период малых колебаний математического маятника зависит только от длины $l$ нити и ускорения свободного падения $g$ и определяется соотношением:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

Тогда длина приведённого маятника массы $m$ и момента инерции $I$ определяется соотношением:

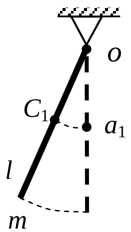
$$L = \frac{I}{ml}\ .$$

И соответственно период колебаний физического маятника равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\ .$$

13. Например, бросить с высоты тяжелый предмет (подойдет лом) и измерить время падения $t$. Зная высоту $h = \frac{gt^2}{2}$, легко рассчитать $g = \frac{2h}{t^2}$.

14. Тонкий стержень длинной $l$ и массой $m$ могущий совершать колебания в поле сил относительно оси, проходящей через один из его концов, представляющем собой колебательную систему “физический маятник”.




Период малых колебаний физического маятника:

1) $$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{m_1 g a_1}}\ ,$$

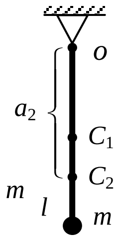
где $I_1 = \frac{1}{3}m_1 l^2$ – момент инерции стержня относительно его конца, $m_1 = m$ – его масса, $a_1 = \frac{l}{2}$ – расстояние от оси колебаний до центра масс $C$ стержня

Тогда, $$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2 2}{3mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{2l}{3g}} = \sqrt{\frac{2}{3}}2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\ .$$

2) Если к нижнему концу стержня прикрепить точечный груз массы $m$, то мы изменим как массу “физического маятника“, так и его момент инерции: $I_2 = I_1 + m_1 l^2$ – мы учли свойство аддитивности момента инерции.

Период колебаний физического маятника в этом случае:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{m_2 g a_2}}\ ,$$




где $m_2 = 2m$, $m_1 = m$; тогда $I_2 = \frac{1}{3}ml^2 + ml^2 = \frac{4}{3}ml^2$ – момент инерции в данном случае, $a_2 = \frac{3}{4}l$ – расстояние до точки центра масс $C_2$.

Тогда, имеем $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{4ml^2 \cdot 4}{3\cdot 2mg \cdot 3l}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\sqrt{\frac{8}{9}}$ .

Найдём отношение $\frac{T_2}{T_1}$:  $\frac{T_2}{T_1} = \sqrt{\frac{8\cdot 3}{9\cdot 2}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$ .

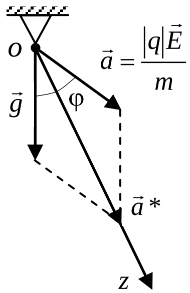
Ответ: увеличится в $\sqrt{\frac{4}{3}}$ раза.

15. Незаряженный шарик с массой $m$ в поле тяжести, характеризующим в данном месте ускорение свободного падения $g$ может совершать малые колебания с периодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ (соблюдается модель математического маятника).

Если кроме этого шарик имеет электрический заряд $q$ и однородное электрическое поле $E$ в данной области возможных колебаний, то на него кроме силы тяжести будет действовать кулоновская сила, модуль которой $F = qE$. Как известно, $F = ma$, где $a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m}$ – дополнительное ускорение, которое приобретает заряженный шарик в поле $\vec{E}$. Вектор ускорения $\vec{a}$ будет иметь направление, зависящее как от направления вектора $\vec{E}$, так и знака заряда $q$:

Например : а) $\downarrow\vec{q}\downarrow\vec{E},\ \ q > 0 \Rightarrow \downarrow\vec{a}$, тогда $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$ ;

б) $\downarrow\vec{q}\uparrow\vec{E},\ \ q > 0 \Rightarrow \uparrow\vec{a}$, тогда $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$ .




Если вектор $\vec{E}$ направлен под некоторым углом φ к вектору $\vec{g}$, то необходимо рассматривать проекции ускорения $a$ на ось $oz$, совпадающую с направлением вектора $\vec{a}* = \vec{g} + \vec{a}$.

Здесь $\vec{a}* = \sqrt{g^2 + \left(\frac{qE}{m}\right)^2 - 2g\left(\frac{qE}{m}\right)\sin\varphi}$, тогда $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a*}}$ – период малых колебаний относительно оси $oz$.

Особый случай: $a* = 0$ – невесомость. Формально $T = \infty$.

16. Уменьшить погрешность измеряемых величин в данной работе можно для математического маятника максимальным приближением колебательной системы к модели “математического маятника“, т.е. минимизацией отношения $d/l$, где $d$ – диаметр шарика, $l$ – длина нити, а также максимизацией $m$ – массы шарика.

Для обоих случаев маятниковых систем регистрацию времени $N$ колебаний (желательно) нужно проводить не “на глаз“, а с использованием электронной или фоторегистрации.

Тогда, для случая физического маятника появляется возможность более тонкая настройка периодов $T_1$ и $T_2$.

17. Из приведённых на рисунке объектов модели математического маятника наилучшим образом соответствует четвёртый объект (бутылка на длинной веревке), так как длина подвеса больше чем геометрические размеры в сравнении с предыдущими предметами.

# ИЗУЧЕНИЕ УДАРА ШАРОВ

*Цель работы*: ознакомиться с явлениями, связанными с движением и соударением шаров. Определить коэффициенты восстановления скорости и энергии при упругом ударе.

*Приборы и принадлежности*: установка для изучения удара шаров, технические весы, комплект шаров.

## Краткая теория и методические указания

В окружающем нас мире соударения тел происходят довольно часто (удар теннисной ракетки по мячу, столкновения автомобилей, забивка свай при строительстве домов и т.д.). При этом тела в большей или меньшей мере деформируются, а их кинетическая энергия частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и во внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии приводит к нагреванию тел.

Различают два предельных случая – *абсолютно упругий* и *абсолютно неупругий удары*. При абсолютно упругом ударе полная механическая энергия тел сохраняется. Это в некотором роде идеализация – в макромире таких соударений не происходит, хотя столкновение, например, бильярдных шаров из слоновой кости очень похоже на абсолютно упругий удар.

Абсолютно неупругим называется соударение, в результате которого тела движутся с одинаковой скоростью (как единое целое). Примером может служить попадание пули в мишень. При этом механическая энергия не сохраняется и переходит в другие виды энергий, в частности, в тепловую. Можно говорить также об *упругом* ударе, после которого тела движутся с разными скоростями, а начальная механическая энергия сохраняется не полностью.

В настоящей работе рассматривается упругий центральный удар шаров. При центральном ударе шары движутся вдоль прямой, соединяющей их центры Для оценки степени упругости соударения можно ввести коэффициенты восстановления скорости $k$ и энергии ε. *Коэффициент восстановления скорости*, характеризующий уменьшение относительной скорости тел в результате удара, определяется соотношением

$$k = \frac{|\vec{u}_2 - \vec{u}_1|}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|},$$

где $\vec{\mathrm{v}}_1$ и $\vec{\mathrm{v}}_2$ – скорости первого и второго тел до удара, а $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ – после. Таким образом, коэффициент восстановления скорости – это отношение *относительной скорости* тел после соударения к *относительной скорости* до соударения. В своё время Ньютон, анализируя подобные опыты с шарами, пришел к выводу, что величина $k$ постоянна для исследуемых объектов и мало зависит от их скоростей.

*Коэффициент восстановления энергии* равен отношению суммарной кинетической энергии $E_к$ движущихся тел после удара к их суммарной кинетической энергии $E_{к0}$ до удара:

$$\varepsilon = \frac{E_к}{E_{к0}}.$$

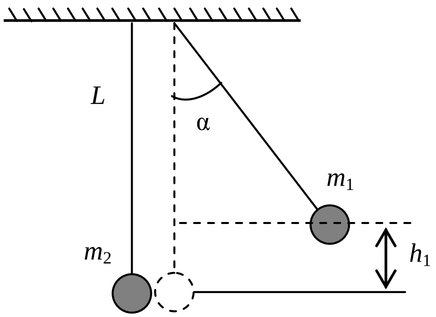


Рис. 1

Можно показать, что для абсолютно упругого удара оба коэффициента равны единице. При абсолютно неупругом соударении $k = 0$, а $\varepsilon < 1$. При упругом соударении $k < 1$ и $\varepsilon < 1$.

Рассмотрим два шара, подвешенных на невесомых нерастяжимых нитях длиной $L$ каждая. В положении равновесия шары должны касаться друг друга, а нити направлены вертикально. Пусть в начальный момент времени первый шар массой $m_1$ отклонён на угол α от положения равновесия, а второй висит неподвижно (рис. 1). Если отпустить первый шар, то он начинает двигаться по дуге окружности; при этом его потенциальная энергия перейдёт в кинетическую. Скорость первого шара перед соударением со вторым можно найти, воспользовавшись законом сохранения полной механической энергии:

$$m_1 g h_1 = \frac{m_1 \mathrm{v}_1^2}{2}. \qquad (1)$$

Из соотношения (1) выразим величину скорости первого шара:

$$\mathrm{v}_1 = \sqrt{2gh_1},$$

где $h_1 = L(1-\cos\alpha) = 2L\sin^2\frac{\alpha}{2}$ (см. рис. 1),

или окончательно:

$$\mathrm{v}_1 = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{gL}\,. \qquad (2)$$

После соударения шары получают скорости движения $u_1$ и $u_2$ и отклоняются соответственно на углы $\gamma$ и $\beta$ (рис. 2). Эти скорости можно выразить через углы отклонения аналогично скорости $\mathrm{v}_1$:

$$u_1 = 2\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{gL}\,,\; u_2 = 2\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{gL}\,. \qquad (3)$$

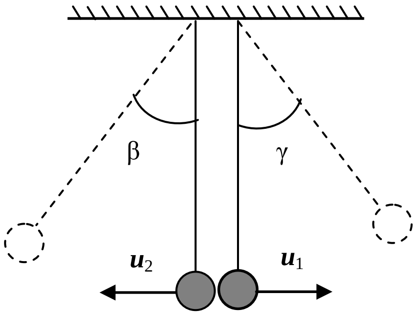



Рис. 2

Коэффициент восстановления с учётом направления скоростей в этом случае будет равен:

$$k = \frac{|\vec{u}_2 - \vec{u}_1|}{|\vec{\mathrm{v}}_2 - \vec{\mathrm{v}}_1|} = \frac{u_1 + u_2}{\mathrm{v}_1}\,. \qquad (4)$$

Казалось бы, зная углы отклонения $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ можно с помощью соотношений (2) и (3) рассчитать величину $k$. В этом случае, однако, необходимо фиксировать одновременно два угла $\beta$ и $\gamma$, что совсем не просто. Эту трудность можно обойти, связав между собой скорости $u_1$ и $u_2$, а значит, и углы $\beta$ и $\gamma$.

При ударе выполняется закон сохранения *проекции импульса* системы шаров на горизонтальное направление:

$$m_1\mathrm{v}_1 = m_2u_2 - m_1u_1\,. \qquad (5)$$

Выражая $u_1$ из (5) и подставляя в (4), получим:

$$k = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1}\frac{u_2}{\mathrm{v}_1} - 1\,. \qquad (6)$$

Используя формулы (2) и (3), получаем окончательную расчётную формулу для коэффициента восстановления скорости в следующем виде:

$$k = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1}\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - 1\,. \qquad (7)$$

Перейдём к коэффициенту восстановления энергии. Согласно определению, величина $\varepsilon$ равна отношению суммарной кинетической энергии шаров после удара $\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2}$ к их суммарной кинетической энергии до удара $\frac{m_1\mathrm{v}_1^2}{2}$:

$$\varepsilon=\frac{m_1u_1^2+m_2u_2^2}{m_1\mathrm{v}_1^2}. \tag{8}$$

Выражая $u_1$ из (5) и подставляя в (8), получим:

$$\varepsilon=\frac{(m_2u_2-m_1\mathrm{v}_1)^2+m_1m_2u_2^2}{m_1^2\mathrm{v}_1^2}=\frac{m_2(m_1+m_2)u_2^2}{m_1^2\mathrm{v}_1^2}-\frac{2m_2u_2}{m_1\mathrm{v}_1}+1.$$

Из (6) можно найти отношение $\frac{u_2}{\mathrm{v}_1}=\frac{(k+1)m_1}{m_1+m_2}$ и с помощью простых преобразований получить окончательную расчётную формулу для коэффициента восстановления энергии:

$$\varepsilon=\frac{m_1+m_2k^2}{m_1+m_2}. \tag{9}$$

## Порядок выполнения работы

***Работа может быть выполнена в двух вариантах, виртуальном и реальном. Виртуальный выполняется в случае невозможного выполнения реального варианта.***

**1. Вариант – виртуальный.**

Загрузите из яндекс-диска файл, ссылка
https://disk.yandex.ru/i/OtqSdJ3GpEA1-g

Если система защиты не позволяет запуск, нажмите *Подробнее* и выполните.

Просмотрите выполнение лабораторной работы, запишите полученные в эксперименте данные и далее выполните задания как в реальном варианте.

**2. Вариант – реальный.**

1. Аккуратно снимите и взвесьте оба шара, запишите результат с учётом погрешности:

$$m_1 = m_{1\text{ср}} \pm \Delta m,$$

$$m_2 = m_{2\text{ср}} \pm \Delta m.$$

2. Повесьте шары обратно (не перепутайте!) и отрегулируйте их положение так, чтобы в свободно висящем состоянии получить центральное соприкосновение (если это выполняется, то ничего регулировать не надо). Желательно, чтобы указатели шаров соответствовали нулевым делениям обеих шкал (если это не выполняется, то разницу следует учесть при дальнейших измерениях).

3. Включите стопорный электромагнит, для чего переведите тумблер в состояние «Вкл».

4. Отведите правый шар от положения равновесия и закрепите его электромагнитом. Запишите в журнал наблюдений начальный угол отклонения α и его погрешность Δα в градусах и минутах:

$$\alpha = \alpha_{ср} \pm \Delta\alpha.$$

5. Выключите электромагнит и зафиксируйте максимальный угол отклонения β левого шара. Результат запишите в таблицу. Повторите измерения ещё 4 раза.

6. Переведите минуты в градусы. Например: $\beta = 9°24' = 9 + \dfrac{24}{60} =$ $= 9{,}4°$. Рассчитайте среднее значение $\beta_{ср}$ по формуле

$$\beta_{ср} = \frac{\sum \beta_i}{n} = \frac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5}{n}.$$

| № п/п | β, град,мин | $\beta_i$, град | $\Delta\beta_i$, град | $(\Delta\beta)^2_i$, град$^2$ | $S_n$, град | $\beta_{ср}$, град | Δβ, град | $E_\beta$, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | |

7. Заполните оставшиеся столбцы таблицы, используя формулы:

$$\Delta\beta_i = \left|\beta_i - \beta_{cp}\right|; \quad S_n = \sqrt{\frac{\sum(\Delta\beta_i)^2}{n(n-1)}}; \quad \Delta\beta = t_\alpha S_n; \quad E_\beta = \frac{\Delta\beta}{\beta_{ср}},$$

где $n = 5$, $t_\alpha = 2{,}78$ – коэффициент Стьюдента для пяти измерений $n$ при вероятности $P = 0{,}95$.

8. Рассчитайте среднее значение коэффициента восстановления скорости по формуле (7).

9. Рассчитайте абсолютную погрешность коэффициента восстановления скорости (формула приводится без вывода). Значения $\Delta\alpha$ и $\Delta\beta$ должны быть выражены в радианах!

$$\Delta k = \left( \frac{\Delta m_1 + \Delta m_2}{m_1 + m_2} + \frac{\Delta m_1}{m_1} + \Delta\beta \cdot \mathrm{ctg}\frac{\beta}{2} + \Delta\alpha \cdot \mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} \right)(k+1).$$

10. Запишите окончательный результат

$$k = k_{ср} \pm \Delta k.$$

11. По формуле (9) рассчитайте среднее значение коэффициента восстановления энергии $\varepsilon$.

12. Рассчитайте относительную погрешность коэффициента восстановления энергии (формула приводится без вывода):

$$E_\varepsilon = \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\Delta m_1 + k^2 \Delta m_2 + 2k m_2 \Delta k}{m_1 + k^2 m_2} + \frac{\Delta m_1 + \Delta m_2}{m_1 + m_2}.$$

13. Найдите абсолютную погрешность:

$$\Delta\varepsilon = E_\varepsilon \varepsilon_{ср}.$$

14. Запишите окончательный результат:

$$\varepsilon = \varepsilon_{ср} \pm \Delta\varepsilon.$$

## Контрольные вопросы

1. Какова классификация возможных типов соударений?
2. Дайте определение абсолютно упругого и абсолютно неупругого ударов.
3. Что называется коэффициентом восстановления скорости и коэффициентом восстановления энергии?
4. Что можно рассчитать, зная величины указанных коэффициентов?
5. В каких пределах могут находиться значения этих коэффициентов?
6. Зависят ли значения этих коэффициентов от выбора системы отсчёта? Если да, то как?
7. Чем обусловлено уменьшение кинетической энергии при упругом и абсолютно неупругом соударении тел?
8. Каким образом можно повысить точность измерения угла $\beta$?
9. Решите простую задачу: «В передний номерной знак автомобиля, движущегося со скоростью 80 км/ч, попадает резиновая пуля от

травматического пистолета, летящая навстречу со скоростью 200 км/ч, и отскакивает. С какой скоростью будет двигаться пуля относительно Земли, если коэффициент восстановления скорости равен 0,8?»

10. Тот же вопрос, но на этот раз пуля попадает в задний номерной знак.

11. Может ли быть так, что $\varepsilon = 0$, а $k \neq 0$? Если «да», то приведите пример.

12. В каком случае $\varepsilon = k = 0$?

13. Происходит центральный удар движущегося шара 1 с покоящимся шаром 2. Может ли скорость второго шара быть больше скорости первого? Может ли скорость второго шара быть в два раза больше скорости первого?

14. При выводе расчётной формулы для $k$ используется закон сохранения импульса. Система, состоящая из двух шаров, подвешенных на нитях, не является замкнутой. На каком основании можно пользоваться в данном случае законом сохранения импульса?

15. Как, по Вашему мнению, изменятся величины $k$ и $\varepsilon$, если используемые в работе шары заменить шарами из пластилина?

16. Решите простую задачу: «Мяч, падая без начальной скорости с высоты $H$, после удара о горизонтальную плоскость подскочил на высоту $h$. Чему равны величины $k$ и $\varepsilon$?»

## Вариант ответов на контрольные вопросы

1. Ударом будем называть весьма кратковременное взаимодействие поступательно движущихся твердых тел, приводящее к существенному изменению импульсов тел как по направлению, так и по величине, а также к перераспределению механической энергии в системе взаимодействующих тел.

В зависимости от направления векторов скоростей (импульсов) взаимодействующих твердых тел, движущихся поступательно, будем классифицировать удар как косой, прямой, прямой центральный.

Импульсом поступательно движущегося твердого тела будем называть произведение массы данного тела $m$ на скорость движения его центра масс.

Описание движения вращающегося твердого тела математически достаточно сложно, поэтому данный случай мы рассматривать не будем.

Косым ударом называется такой удар, при котором векторы импульсов (скоростей) двух взаимодействующих тел в начале удара не лежат на одной прямой.

Прямой удар – это такой удар, при котором векторы импульсов (скоростей) взаимодействующих тел в начале удара лежат на параллельных прямых.

Прямой центральный удар – удар, при котором векторы импульсов (скоростей) взаимодействующих тел в начале удара лежат на одной прямой, проходящей через их центр масс.

С точки зрения рассмотрения баланса механической энергии соударяющихся тел и модели сил, действующих в данной механической системе, можно привести следующую классификацию ударов: абсолютно упругий, абсолютно неупругий, неабсолютно упругий (упругий).

2. Абсолютно упругим ударом будем называть такое соударение, при котором взаимодействующие тела рассматриваются как абсолютно упругие. Абсолютно упругим телом называется такое абстрактное, идеальное тело, между элементами которого действуют только упругие силы (консервативные) и это тело полностью восстанавливает свою форму (абсолютно упругая деформация) после взаимодействия на него данных сил.

Абсолютно неупругим ударом будем называть такое взаимодействие тел, после которого их центры масс будут двигаться с одной и той же поступательной скоростью. При данном взаимодействии на тела действуют силы неупругой природы (диссипативные), приводящие к переходу механической энергии в другие немеханические, например, тепловую, виды энергии, а также к пластической деформации.

3. Поскольку реальные тела не являются идеальными моделями (абсолютно упругой или абсолютно неупругой) необходимо ввести в описание удара тех или иных реальных тел величины, характеризующие степень упругости удара и энергетические соотношения.

Такими величинами являются коэффициент восстановления скорости и коэффициент восстановления энергии.

Коэффициентом восстановления скорости удара называется скалярная безразмерная величина, равная отношению модуля относительной скорости двух взаимодействующих тел после удара к модулю относительной скорости этих же тел до удара:

$$k = \frac{|\vec{u}_2 - \vec{u}_1|}{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|},$$

где $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ – скорости тел до удара, $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ – после удара.

Коэффициент $k$ зависит от природы тел и их упругих свойств и не зависит от скорости их движения непосредственно перед ударом.

4. Зная значения данных указанных коэффициентов, мы можем рассчитать степень упругости взаимодействия, а также относительные потери механической энергии, т.е. долю механической энергии системы, перешедшей в немеханические виды энергии: тепловой, пластической деформации, звуковых потерь и т.д. и т.п.

5. В зависимости от природы, строения, структуры взаимодействующих тел или точнее от типов сил, действующих в данной системе, а также от модели взаимодействующих тел коэффициенты восстановления могут принимать значения от 0 до 1 ($0 \le k \le 1;\ 0 \le \varepsilon \le 1$) включительно.

6. Поскольку в определении коэффициента восстановления скорости $k$ мы имеем отношение относительных скоростей, то оно не меняется от выбора инерциальной системы отсчета, так как относительная скорость тел одна и та же в различных инерциальных системах отсчета.

Коэффициент восстановления энергии ε представляет собой отношение кинетической энергии системы после взаимодействия к кинетической энергии системы до взаимодействия (удара).

Основываясь на утверждении $\Delta E_к = E_{к1} - E_{к2} = A_{ст.сил}$, т.е. приращение кинетической энергии системы $\Delta E_к$, равное работе внешних сил $A_{ст.сил}$, в том числе и сил инерции, справедливо для любых инерциальных и неинерциальных систем отсчета, можно утверждать, что коэффициент восстановления энергии не меняется от выбора системы отсчета:

$$E_{к1} - E_{к2} = A_{ст.сил}$$

где $E_{к1}$ – до взаимодействия, $E_{к2}$ – после взаимодействия

$$\frac{E_{к2}}{E_{к1}} = \frac{E_{к1} - A_{ст}}{E_{к1}}, \quad \varepsilon = 1 - \frac{A_{ст}}{E_{к1}}.$$

7. Уменьшение кинетической энергии при упругом (неабсолютно упругом) и абсолютно упругом ударах обусловлено работой диссипативных сил (сил трения, сопротивления), переводящей механическую энергию в тепловую энергию, энергию акустической волны (звук при ударе), а также в пластическую деформацию взаимодействующих сил.

При упругом (неабсолютно упругом) ударе механическая энергия переходит в немеханические виды частично (не полностью), причем у взаимодействующих тел после удара будут различные скорости (векторная величина).

Могут быть одинаковы либо модули, либо направления.

В случае абсолютно неупругого удара происходят те же самые процессы, но в результате которых взаимодействующие тела будут двигаться с одной и той же поступательной скоростью как единое целое.

8. Точность измерения угла β достигается путем отлаживания условий соблюдения центральности прямого угла, а также использованием технических средств измерения (например, смартфон в режиме видеосъемки) с последующим замедленным воспроизведением видео вместо «на глаз» предписанного в инструкции работы.

9. Решим задачу: «В передний номерной знак автомобиля, движущегося со скоростью 80 км/час, попадает резиновая пуля от травматического пистолета, летящая навстречу со скоростью 200 км/час и отскакивает. С какой скоростью будет двигаться пуля относительно земли, если коэффициент восстановления скорости равен 0,8?

Пусть $m$ – масса пули, $M$ – масса автомобиля, $M >> m$.

До удара имеем: относительная скорость движения пули относительно автомобиля $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$ (по определению).

В проекции на ось $ox$ имеем: $v = v_1 + v_2$.

После удара имеем относительную скорость пули: $\vec{u} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$,

В проекции на горизонтальную ось: $u = u_1 - u_2$.

Так как $M >> m$, то $u_1 = v_2$ – скорость автомобиля практически не изменится, тогда $u = u_2 - v_1$.

Коэффициент восстановления скорости по определению:

$$k = \frac{u}{v} \quad \text{или} \quad k = \frac{u_2 - v_1}{v_2 + v_1}.$$

Найдем $u_2$ – скорость пули относительно земли:

$$u_2 = k(\mathrm{v}_2 + \mathrm{v}_1) + \mathrm{v}_1.$$

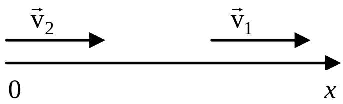
Найдем численно: $u_2 = 0{,}8(200 + 80) + 80 = 304$ км/час.

10. В случае попадания пули в задний номерной знак будем иметь (см. решение вопроса 9.):

$$\vec{\mathrm{v}} = \vec{\mathrm{v}}_2 - \vec{\mathrm{v}}_1.$$

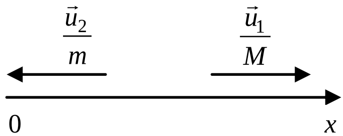
В проекции на горизонтальную ось $ox$ имеем:

$\mathrm{v} = \mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1$ – относительная скорость пули до удара (относительно автомобиля).




В проекции на горизонтальную ось $ox$ имеем:

$\vec{u} = \vec{u}_2 - \vec{u}_1$ – относительная скорость пули после удара.




Так как $M >> m$, то $u_1 = \mathrm{v}_1$ – скорость автомобиля.

Коэффициент восстановления скорости по определению:

$$k = \frac{u_2 + u_1}{\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1} \quad \text{или} \quad k = \frac{u_2 + \mathrm{v}_1}{\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1}.$$

Для $u_2$ имеем $u_2 = k(\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1) - \mathrm{v}_1$.

Подставив числовые значение скоростей, получим:

$$u_2 = 0{,}8 \cdot (200 - 80) - 80 = 16 \text{ км/час}.$$

11. Условие $k \neq 0$ предполагает, что удар, по крайней мере, неабсолютно упругий, т.е. относительная скорость тел после взаимодействия не равна 0. Это говорит о не нулевой кинетической энергии после взаимодействия, т.е. $\varepsilon \neq 0$, так как ε определяется через отношение кинетических энергий.

12. $\varepsilon = k = 0$ будем иметь в случае абсолютно неупругого удара, причем тела должны иметь противоположные импульсы. Это равенство справедливо при прямом, центральном ударе (исключаем вращение в системе тел).

13. Обозначим скорости шаров массами $m_1$ и $m_2$ до удара через $v_1$ и $v_2$, после удара – через $u_1$ и $u_2$. Рассмотрим прямой центральный удар. Максимальное значение скоростей $u_1$ и $u_2$ будут при абсолютно упругом ударе. Для данного случая имеем:

Закон сохранения импульса: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2$.

Закон сохранения энергии $\dfrac{m_1\vec{v}_1^2}{2} + \dfrac{m_2\vec{v}_2^2}{2} = \dfrac{m_1\vec{u}_1^2}{2} + \dfrac{m_2\vec{u}_2^2}{2}$.

Перейдя к соответствующим проекциям и решая совместно эти уравнения, можно найти неизвестные $u_1$ и $u_2$.

$$u_1 = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}; \qquad u_2 = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Если $m_1 = m_2$, то $u_1 = v_2$ и $u_2 = v_1$ – шары обмениваются скоростями.

Анализируем вторую формулу. Пусть $v_2$=0. Если $m_1 > m_2$, то $u_2 > v_1$. Например, возьмем $m_1$=2 кг, $m_2$=1 кг, $v_1$=1 м/с, $v_2$ =0. Тогда по второй формуле $u_2 = \dfrac{4}{3}v_1 = 1{,}33\,v_1$. То есть $u_2 > v_1$. Это ответ на первый вопрос.

Теперь, возьмем $m_1$=99 кг, $m_2$=1 кг, $v_1$=1 м/с, $v_2$=0. Тогда по второй формуле $u_2 = \dfrac{198}{100}v_1 = 1{,}98\,v_1$. То есть $u_2 > v_1$, но $u_2 < 2v_1$.

Таким образом, скорость второго шара $u_2$ может быть больше скорости первого шара $v_1$, но не может быть в два раза больше скорости первого шара $v_1$ по причине невозможности нарушения законов сохранения импульса и энергии. При увеличении отношения масс отношение скоростей будет приближаться к двум, но никогда ее не достигнет.

С другой стороны, рассмотрим случай, когда $\vec{u}_1 \uparrow\downarrow \vec{u}_2$, тогда имеем

$$\begin{cases} m_1v = -m_1u_1 + m_2u_2 \\ m_1v^2 = m_1u_1^2 + m_2u_2^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} m_1(v + u_1) = m_2u_2 \\ m_1(v + u_1)(v - u_1) = m_2u_2^2 \end{cases}.$$

Отсюда $u_2 = v - u_1$ (*).

Анализируя формулу (*) можем заключить, что $u_2$ не может превышать v, т.е. не может быть больше v.

Рассмотрим случай, когда $\vec{v} \uparrow\uparrow \vec{u}_1$, тогда имеем

$$\begin{cases} m_1 v = m_1 u_1 + m_2 u_2 \\ m_1 v^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} m_1 (v - u_1) = m_2 u_2 \\ m_1 (v - u_1)(v + u_1) = m_2 u_2^2 \end{cases}.$$

Отсюда $u_2 = v + u_1$ (**).

В данном случае скорость второго шара после удара $u_2$ может быть больше скорости первого шара после удара $u_1$, а также и до удара v.

Скорость $u_2 = 2v = 2u_1$ не может быть по причине нарушения законов сохранения импульса и энергии.

14. Для вывода расчетной формулы нет необходимости в использовании закона сохранения полного импульса системы. Достаточно сохранения проекции полного импульса системы на горизонтальную ось, где проекции сил натяжения нитей и сил тяжести равны нулю.

15. При замене используемых в работе шаров на шары из пластилина, будем иметь абсолютно неупругий удар (идеальный случай), коэффициент восстановления скорости тогда $k = 0$.

Имея связь между $k$ и ε формула $\varepsilon = \dfrac{m_1 + m_2 k^2}{m_1 + m_2}$ будет иметь вид: $\varepsilon = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}$. В случае равенства $m_1 = m_2 = m$ будем иметь $\varepsilon = \dfrac{1}{2} = 0{,}5$.

16. В задаче мяч, массой *m*, падает с высоты *H* на горизонтальную плоскость и отскакивает от неё на высоту *h*. Найдем коэффициенты восстановления по скорости *k* и по энергии ε.

Считая падение свободным (внешние силы отсутствуют или пренебрежимо малы), имеем закон сохранения механической энергии:

$$\text{до удара} \quad \frac{mv^2}{2} = mgH, \qquad \text{после удара} \quad \frac{mu^2}{2} = mgh,$$

где *v* – относительная скорость движения мяча относительно плоскости до удара, *g* – ускорение свободного падения, *u* – относительная скорость движения мяча относительно плоскости после удара.

Для скоростей имеем $v = \sqrt{2gH}$; $u = \sqrt{2gh}$.

Коэффициент восстановления скорости по определению:

$$k = \frac{u}{v} \quad \text{или} \quad k = \sqrt{\frac{h}{H}}.$$

Коэффициент восстановления энергии по определению:

$$\varepsilon = \frac{E_{к2}}{E_{к1}} = \frac{mu^2}{mv^2} = \left(\frac{u}{v}\right)^2 \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{E_{п2}}{E_{п1}} = \frac{mgh}{mgH} = \frac{h}{H}, \ \text{тогда} \ \varepsilon = \frac{h}{H}.$$

## ИЗУЧЕНИЕ ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЁРДОГО ТЕЛА

*Цель работы*: проверить основной закон динамики вращательного движения при постоянном моменте инерции, проверить свойство аддитивности момента инерции.

*Приборы и принадлежности*: маятник Обербека, электронный секундомер, фотодатчики, набор грузов, линейка, штангенциркуль, весы.

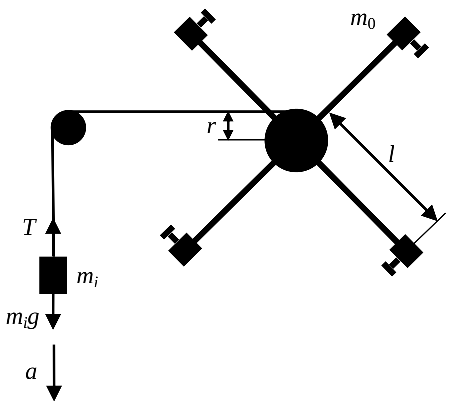
### Краткая теория и методические указания

При вращательном движении твёрдого тела вокруг неподвижной оси его угловое ускорение ε определяется суммарным моментом $M$ всех сил, действующих на тело, относительно оси и моментом инерции $I$ тела относительно этой же оси:

$$\varepsilon = \frac{M}{I}\ .$$

Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении; он зависит от массы тела и распределения её относительно оси вращения:

$$I = \sum m_i r_i^2\ .$$




Если момент инерции $I$ тела остаётся постоянным, то выполняется соотношение:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{M_1}{M_2}\ . \tag{1}$$

Это равенство мы и должны проверить в данной работе. Следующей задачей является экспериментальное определение момента инерции маятника Обербека и проверка свойства аддитивности (величина является аддитивной, если её значение для всего тела равно сумме значений для всех частей этого тела. К подобным величинам относятся, например, масса, объём, энергия).

Маятник Обербека (см. рис.) представляет собой крестовину, образованную четырьмя одинаковыми стержнями, ввинченными в муфту. На концах стержней можно закреплять грузы массой $m_0$ каждый. Муфта жёстко соединена с осью, которая может свободно вращаться в подшипниках. Кроме муфты на оси расположен блок с намотанной на него тонкой нитью, к свободному концу которой прикрепляется груз массой $m_i$.

Если отпустить груз, он начнёт опускаться и приведёт во вращение маятник. Угловое ускорение ε маятника связано с тангенциальным ускорением $a_\tau$ точки, расположенной на поверхности блока, соотношением $\varepsilon = \frac{a_\tau}{r}$. Опускаясь равноускоренно, груз за время $t$ проходит расстояние $h = \frac{1}{2}at^2$, где $a = a_\tau$. Таким образом, угловое ускорение маятника можно рассчитать по формуле

$$\varepsilon = \frac{2h}{rt^2}. \qquad (2)$$

Пренебрегая трением в подшипниках и сопротивлением воздуха, (они компенсируются весом винта, к которому крепятся грузы $m_1$ и $m_2$) можно представить момент сил $M$, действующих на маятник относительно его оси, как произведение силы натяжения нити $T$ на плечо этой силы, равное радиусу $r$ блока:

$$M = Tr.$$

Для груза, висящего на конце нити, следует воспользоваться вторым законом Ньютона в проекции на вертикальную ось:

$$ma = mg - T,$$

откуда

$$T = m(g - a) = m\left(g - \frac{2h}{t^2}\right).$$

Момент сил равен:

$$M = mr\left(g - \frac{2h}{t^2}\right). \qquad (3)$$

Момент инерции маятника можно найти по формуле:

$$I=\frac{M}{\varepsilon}=\frac{mr\left(g-\frac{2h}{t^2}\right)}{\frac{2h}{rt^2}}=mr^2\left(\frac{gt^2}{2h}-1\right). \qquad (4)$$

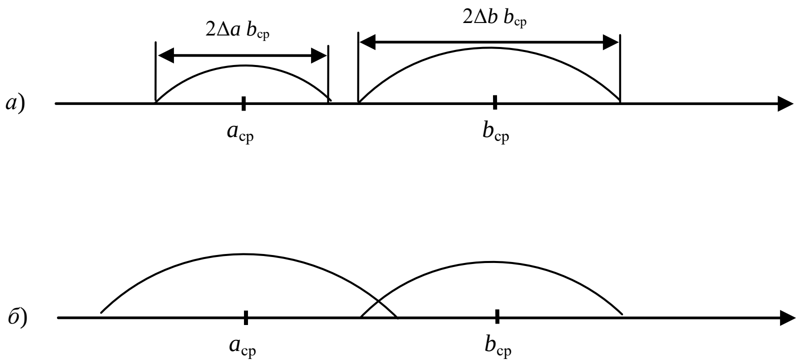
Проводя измерения с различными грузами $m_1$ и $m_2$, будем получать разные значения времени $t_1$ и $t_2$, угловых ускорений $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ и моментов сил $M_1$ и $M_2$, но соотношение (1) должно выполняться:

$$\frac{\left(\frac{2h}{rt_1^2}\right)}{\left(\frac{2h}{rt_2^2}\right)}=\frac{m_1 r\left(g-\frac{2h}{t_1^2}\right)}{m_2 r\left(g-\frac{2h}{t_2^2}\right)}$$

или после упрощений

$$m_1\left(gt_1^2-2h\right)=m_2\left(gt_2^2-2h\right). \qquad (5)$$

В полученное выражение входят экспериментально определяемые величины и выполнение этого равенства (с учётом погрешностей) эквивалентно выполнению равенства (1).




Предположим, что необходимо сравнить два числа $a$ и $b$, каждое из которых определено с некоторой погрешностью: $a=a_{ср}\pm\Delta a$, $b=b_{ср}\pm\Delta b$. На числовой оси эти числа расположены внутри соответствующих интервалов (отмечены дугами на рисунке).

Если эти интервалы не перекрываются (*а*), то равенство между числами нельзя считать выполнимым; а если перекрываются (*б*), то можно. Из приведённых рисунков видно, что перекрытие будет иметь место в том случае, если выполняется неравенство:

$$\left|a_{\text{ср}} - b_{\text{ср}}\right| < \left(\Delta a + \Delta b\right).$$

Таким образом, в качестве критерия того, равны или не равны обе части равенства (5), примем выполнение неравенства:

$$\left|m_1\left(gt_1^2 - 2h\right) - m_2\left(gt_2^2 - 2h\right)\right| < \left(\Delta\left(m_1\left(gt_1^2 - 2h\right)\right) + \Delta\left(m_2\left(gt_2^2 - 2h\right)\right)\right). \quad (6)$$

Если оно выполняется, то можно говорить о справедливости равенства (1) с учётом погрешностей измерений.

Для расчёта абсолютных погрешностей, входящих в правую часть неравенства, воспользуемся тем, что $\Delta a = Ea_{\text{ср}}$, где $E$ – относительная погрешность величины $a$. Следовательно:

$$\Delta\left(m\left(gt^2 - 2h\right)\right) = E\left(m\left(gt^2 - 2h\right)\right). \quad (7)$$

Относительная погрешность $E$ может быть рассчитана по формуле:

$$E = \frac{\Delta m}{m_{\text{ср}}} + \frac{\Delta gt^2 + 2gt\Delta t + 2\Delta h}{gt^2 - 2h}. \quad (8)$$

Для проверки свойства аддитивности следует измерить момент инерции $I$ маятника без грузов на концах стержней, а затем, закрепив на стержнях грузы, снова измерить момент инерции $I_0$ маятника. Считая дополнительные грузы материальными точками массой $m_0$, расположенными на расстоянии $l$ от оси, можно ожидать, что значение $I_0$ будет больше значения $I$ на величину $4m_0l^2$:

$$I_0 = I + 4m_0l^2. \quad (9)$$

Выполнение этого равенства и будет свидетельствовать об аддитивности момента инерции. Естественно, что речь идёт о приближённом равенстве.

Регистрация времени $t$ движения груза, за которое он опускается на высоту $h$, производится счётчиком-секундомером. Отсчёт времени начинается автоматически в момент прохождения груза мимо верхнего фотодатчика и заканчивается при прохождении мимо нижнего фотодатчика, расстояние между которыми равно $h$.

## Порядок выполнения работы

***Работа может быть выполнена в двух вариантах, виртуальном и реальном. Виртуальный выполняется в случае невозможного выполнения реального варианта.***

**1. Вариант – виртуальный.**

Загрузите из яндекс-диска файл, ссылка
https://disk.yandex.ru/i/_wIVhSiyKZUZZQ

Если система защиты не позволяет запуск, нажмите *Подробнее* и выполните.

Просмотрите выполнение лабораторной работы, запишите полученные в эксперименте данные и далее выполните задания как в реальном варианте.

**2. Вариант – реальный.**

1. Взвесьте оба груза $m_1$ и $m_2$, запишите результат с учётом погрешности:

$$m_1 = m_{1ср} \pm \Delta m,$$

$$m_2 = m_{2ср} \pm \Delta m.$$

2. Включите электронный секундомер и проверьте его работоспособность. (Он должен начинать отсчёт времени при прохождении груза мимо верхнего фотодатчика и заканчивать его при прохождении груза мимо нижнего фотодатчика. Значение времени высвечивается на панели прибора. Сброс показаний производится специальной кнопкой «СБРОС».)

3. Прикрепите меньший из грузов $m_1$ к нити и намотайте её на большой блок. Подберите такое начальное положение груза (придерживая маятник), при котором отсчёт времени ещё не начинается, а при малейшем движении груза вниз счётчик включается. С этого положения отпустите маятник и запишите измеренное значение времени в табл. 1.

4. Повторите измерения п. 3 ещё 4 раза. Результаты запишите в табл. 1.

5. Поменяйте меньший груз $m_1$ на больший $m_2$. Проведите 5 измерений согласно п. 3 и запишите результаты в табл. 2.

6. Взвесьте одновременно четыре груза массой $m_0$:

$$4m_0 = (\ldots \pm\ \ldots)\ кг\ .$$

7. С помощью винтов симметрично закрепите 4 груза массой $m_0$ на концах стержней так, чтобы концы стержней находились на одном уровне с боковыми поверхностями грузов. Проведите 5 измерений согласно п. 3 и запишите результаты в табл. 3.

8. Измерьте линейкой высоту $h$ между серединами фотодатчиков и запишите результат:

$$h = h_{ср} \pm \Delta h.$$

9. Измерьте штангенциркулем диаметр $d$ большого блока и запишите результат:

$$d = d_{ср} \pm \Delta d, \quad r = \frac{d}{2} = r_{ср} \pm \Delta r.$$

10. Измерьте линейкой расстояние $2l$ между серединами грузов, закреплённых диаметрально противоположно на концах стержней, и запишите результат:

$$2l = 2l_{ср} \pm \Delta(2l), \qquad l = l_{ср} \pm \Delta l.$$

11. Рассчитайте значения левой и правой частей равенства (5) и запишите в виде приближённого равенства.

Таблица 1

| № п/п | $t_i$, с | $\Delta t_i$, с | $(\Delta t_i)^2$, с$^2$ | $S_n$, с | $t_{ср}$, с | $\Delta t$, с | $E_t$, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |

Таблица 2

| № п/п | $t_i$, с | $\Delta t_i$, с | $(\Delta t_i)^2$, с$^2$ | $S_n$, с | $t_{ср}$, с | $\Delta t$, с | $E_t$, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |

Таблица 3

| № п/п | $t_i$, с | $\Delta t_i$, с | $(\Delta t_i)^2$, с$^2$ | $S_n$, с | $t_{ср}$, с | $\Delta t$, с | $E_t$, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |

12. Рассчитайте абсолютные погрешности этих выражений и проверьте выполнение неравенства (6).

13. Используя измеренные значения $m_1$, $m_2$, $r$, $h$, $t_{1ср}$, $t_{2ср}$, $t_{3ср}$, по формуле (4) рассчитайте значения моментов инерции $I_1$, $I_2$ и $I_3$ и убедитесь

в равенстве $I_1$ и $I_2$ (так как момент инерции маятника в первых двух опытах не менялся):

$$I_1 \approx I_2 = I \, .$$

14. Рассчитайте значение выражения $I_0$ используя формулу (9) и сравните его со значением момента инерции $I_3$, полученного экспериментально. Сделайте вывод о выполнении (или невыполнении) свойства аддитивности момента инерции.

## Контрольные вопросы

1. Дайте определения момента силы относительно оси и относительно точки, момента инерции, углового ускорения. Укажите единицы измерение этих величин в системе СИ.

2. Что означает свойство аддитивности? Приведите примеры аддитивных величин.

3. Сформулируйте закон динамики вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

4. Почему момент инерции обруча относительно его оси больше момента инерции диска при одинаковых массах и радиусах?

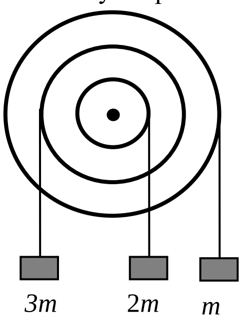
5. Почему время, измеренное при наличии грузов на концах стержней, всегда больше, чем при их отсутствии?

6. Во сколько раз уменьшится момент инерции сплошного стального цилиндра относительно его оси, если геометрические размеры цилиндра уменьшатся в два раза?

7. Как изменится угловое ускорение $\alpha$ маятника, если расстояние между фотодатчиками уменьшить в два раза?

8. Как повлияет отсутствие одного, двух или трёх стержней в маятнике Обербека на результаты измерений? Можно ли вообще в этом случае выполнить работу?

9. Как можно сравнить между собой два приближённых числа? В каком случае равенство между ними можно считать удовлетворительным?




10. Три блока, жёстко связанные между собой, могут без трения вращаться вокруг общей оси. На нитях, намотанных на блоки, висят три груза. В каком направлении начнёт вращаться система, если грузы отпустить?

11. Понятие «маятник» обычно ассоциируется с колебаниями. Подумайте, почему в названии установки, используемой в данной работе, есть слово «маятник»?

12. У кого больше момент инерции – у молодого слона или взрослого комара?

13. Какие неучтённые факторы могли повлиять на результаты лабораторной работы?

14. От чего зависит точность и правильность измерения времени движения груза?

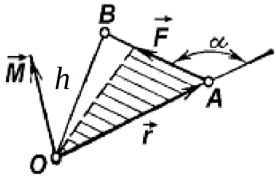
15. Можно ли с помощью данной установки измерить момент инерции, например, пустой бутылки, относительно её оси? Как это сделать? Может быть, нужно что-то изменить в конструкции установки?

16. Представьте декартову систему координат. К точке с координатой +2м, расположенной на оси *oy*, приложена в положительном направлении оси *ox* сила, равная 10Н. Куда направлен момент этой силы относительно начала координат? Чему равен модуль момента силы?

## Вариант ответов на контрольные вопросы

1. Моментом силы относительно некоторой точки (полюс), называется векторная физическая величина $\vec{M}$, равная векторному произведению радиус-вектора $\vec{r}$ точки приложения силы, проведённого из полюса *O* в данную точку, на вектор силы $\vec{F}$, приложенной в данной точке *M*:

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right].$$



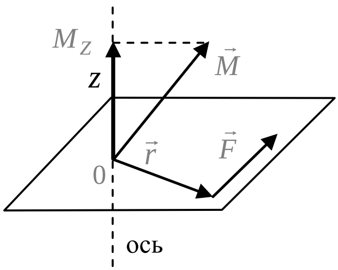

Модуль вектора момента сил:

$$M = Fr\sin\alpha\,,$$

где $\alpha$ – угол между вектором силы $\vec{F}$ и радиус-вектором $\vec{r}$.

Единица измерения момента силы *M* [Дж·м].

Моментом силы относительно оси *oz* называется скалярная величина, равная проекции вектора момента силы относительно любой точки (полюса), лежащей на данной оси, на эту ось *oz:*




$$M_Z = \left(\vec{r}, \vec{F}\right).$$

$M_Z > 0$, если вектор проекции $\vec{M}_Z \uparrow\uparrow \vec{oz}$

$M_Z < 0$, если вектор проекции $\vec{M}_Z \uparrow\downarrow \vec{oz}$

Единица измерения проекции $M_Z$ [Дж·м].

Моментом инерции системы материальных точек относительно некоторой оси называется скалярная величина, численно равная сумме произведений масс $m_i$ этих точек на квадрат расстояния $r_i$ от них до данной оси: $I_z = \sum\limits_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ .

Единица измерения момента инерции *I* [кг·м$^2$]

2. Свойство аддитивности какой-либо физической скалярной величины заключается в том, что она (физическая величина) может быть представлена в виде суммы частей её составляющих.

Примером аддитивных физических величин являются такие величины как масса, объем абсолютно твёрдых тел, непрерывные интервалы времени, объём несжимаемых несмешивающихся жидкостей.

3. Закон динамики вращательного движения твёрдого тела. Произведение момента инерции $I$ твердого тела относительно некоторой оси $oz$ на угловое ускорение $\varepsilon$, приобретаемое данным твердым телом равно векторной сумме моментов сил $\vec{M}_i$ относительно той же самой оси:

Таким образом, основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси можно представить в форме

$$\frac{d}{dt}(\omega I_z) = M_z . \quad \text{или} \quad \vec{M} = \dot{\vec{L}} .$$

Если тело абсолютно твёрдое, то его момент инерции $I_z$ не зависит от времени. Поэтому $I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z$ или $I_z \varepsilon = M_z$,

где $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ – угловое ускорение тела.

Таким образом, угловое ускорение твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, прямо пропорционально моменту всех внешних сил и обратно пропорционально моменту инерции тела

$$\varepsilon = \frac{M_z}{I_z} .$$

Момент инерции зависит от формы тела и от положения оси вращения. Момент инерции является мерой инертности тела при его вращении и является важной динамической характеристикой.

4. Момент инерции сплошного диска (цилиндра) массы $m$ и радиуса $R$: $I = \frac{1}{2} mR^2$. Момент инерции обруча (обода, кольца) той же массы $m$ и того же радиуса $R$: $I = mR^2$. Увеличение момента инерции обруча по сравнению с диском связано с тем, что масса $m$ в данном случае сосредоточена на максимальном удалении от центра вращения на расстоянии $R$, а в случае диска масса распределена по всей площади диска от 0 до $R$ и центральная часть диска вследствие малого $R$ практически не вносит вклад в момента инерции.

5. Наличие грузов на концах стержней приводит к увеличению момента инерции крестовины маятника Обербека, поэтому при том же моменте силы натяжения нити $M$ будет приобретаться меньшее угловое $\varepsilon$ и связанное с ним линейное ускорение $a$. Уменьшение линейного ускорения $a$ приводит к увеличению промежутка времени, необходимого для прохождения грузом $m$ того же пути $h$, согласно $\varepsilon = \frac{M_z}{I_z}$.

6. Момент инерции сплошного стального цилиндра относительно оси, проходящей через его центр масс, и параллельной образующей центра равен:

$$I = \frac{1}{2} mR^2 .$$

Представим момент инерции цилиндра через его геометрические параметры и плотность ρ.

Тогда $$I_1 = \frac{1}{2} \rho \pi R_1^2 H_1 R_1^2 = \frac{1}{2} \rho \pi H_1 R_1^4 .$$

Имея по условию задачи $H_2 = \frac{1}{2} H_1$, $R_2 = \frac{1}{2} R_1$.

Тогда $$I_2 = \frac{1}{2} \rho \pi H_2 R_2^4 = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{1}{2} H_1 \left( \frac{1}{2} R_1 \right)^4 = \frac{1}{64} \rho \pi H_1 R_1^4 .$$

Находим отношение $$\frac{I_1}{I_2} = \frac{1}{2} \frac{64}{1} = 32 .$$

Ответ: меньше в 32 раза.

7. Величина углового ускорения маятника ε определяется только величиной момента инерции маятника и суммарным моментом сил *M*, закручивающий маятник согласно основному закону динамики вращательного движения будет иметь вид: $\varepsilon = \frac{M}{I}$ .

Изменение расстояния между фотодатчиками меняет расстояние *h*, проходимое движущимся грузиком *m*, но это же меняет и интервал времени *t* прохождения данного промежутка. Причем $h \sim t^2$ или $t \sim \sqrt{h}$ .

8. Отсутствие одного, двух или трех стержней в маятнике Обербека уменьшает его момент инерции за счет убыли массы, что формально может привести к уменьшению интервала времени на шкале секундомера.

В случае двух стержней, расположенных на одной прямой (симметрично), проведение работы корректно и возможно. Ускорение в данном случае можно считать постоянным и рабочие формулы являются справедливыми.

В случае одного или трех стержней симметричное расположение стержней невозможно, иначе это приведет к движению, вообще говоря, с переменным ускорением. Тогда рабочие формулы в данной работе не являются справедливыми (верными).

Кроме того, в зависимости от массы *m* навешиваемого грузика возможно состояние, когда вызываемый им момент сил не приведет к вращению маятника.

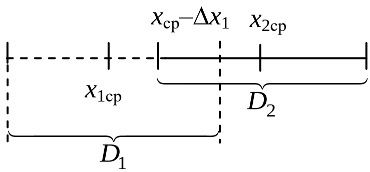
9. Приближенное число $x$ представляется в стандартном виде:

$$x = x_{ср} \pm \Delta x$$

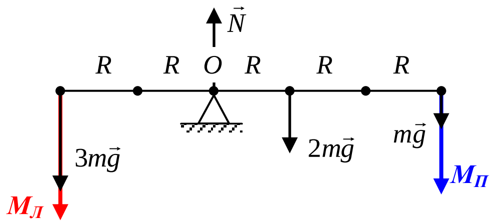
где $x_{ср}$ – среднее значение некоторой величины, а $\Delta x$ – его абсолютная погрешность. Пусть мы имеем $x_1 = x_{1ср} \pm \Delta x_1$ и $x_2 = x_{2ср} \pm \Delta x_2$. Для того чтобы можно было считать числа $x_1$ и $x_2$ приближенно равными, достаточно частичного перекрытия их доверительных интервалов.

$$D_1 = 2\Delta x_1 \quad \text{и} \quad D_2 = 2\Delta x_2 .$$

Чем больше область перекрытия их доверительных интервалов, тем выше степень их равенства.




10. Постановка задачи эквивалентна рассмотрению устойчивости системы, изображенной на рисунке:




Здесь $R$ – радиус меньшего блока. $O$ – положение оси вращения. Точки приложения сил на «невесомом жестком стержне» указаны в масштабе, соответствующему условию задачи.

Условием равновесия механической системы являются два условия:

1) векторная сумма сил, действующих на механическую систему равна нулю: $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$ .

2) векторная сумма моментов сил относительно некоторой оси, равна нулю: $\sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$ .

Из первого условия имеем: $N = mg + 2mg + 3mg = 6mg$,
где $N$ – нормальная реакция опоры (нагрузка на ось).

Из второго условия относительно оси $oz$, перпендикулярной плоскости рисунка, имеем:

$$2mg\cdot R+mg\cdot 3R-3mg\cdot 2R=mgR(2+3-6)=-mgR\neq 0.$$

Здесь учтены знаки проекций моментов на ось, перпендикулярную плоскости рисунка, и направлению «от нас». Неравенство нулю суммарного момента говорит о том, что система придет в движение, а именно система блоков начнет вращение относительно оси против часовой стрелки.

Или также можно рассмотреть следующие моменты сил:

Момент сил, поворачивающий влево $M_Л = 3mg\cdot 2R = 6mg\cdot R$

Момент сил, поворачивающий вправо $M_П = 2mg\cdot R+mg\cdot 3R = 5mg\cdot R$

Таким образом, $M_Л > M_П$ и система блоков начнет вращение в сторону большего момента относительно оси, то есть против часовой стрелки в сторону $M_Л$.

11. Лабораторная установка для данной работы носит название маятник Обербека. Понятие «маятник» предполагает колебания чего-либо. Действительно, «отпустив» грузик $m$, связанный с нитью, мы будем наблюдать его равноускоренное движение вниз. Достигнув нижней точки своего положения наш грузик не остается в таком положении, а начинает движение «вверх» вследствие инерции, вращающейся в данный момент, крестовины маятника.

Кинетическая энергия вращающейся крестовины будет переходить с течением времени в кинетическую и потенциальную энергию нашего грузика на нити посредством совершения над ним механической работы, обусловленной силой натяжения нити. Конечно, часть кинетической энергии вращательного движения крестовины «потеряется» вследствие работы диссипативных сил (трение в подшипнике, сопротивление воздуха и т.п.)

Поэтому наш грузик в «верхней точке» своего положения будет несколько «ниже» предыдущей.

Рассмотрев данный процесс движения грузика $m$ во времени, мы будем иметь колебательный процесс с затуханием.

Колебательные процессы характерны для систем типа «маятник». Поэтому называется «маятник».

12. Величина момента инерции зависит не только от массы данного тела, но и от распределения или положения её (массы) относительно оси вращения. Поэтому, вопрос сравнения моментов инерции слона и комара некорректен. Для решения данной задачи необходимо задать, кроме их масс, так же и их расположение (расстояние) относительно оси вращения.

13. К неучтенным факторам, влияющим на результаты лабораторной работы, можно отнести трение в блоке, трение в подшипнике оси крестовины, сопротивление воздуха, существенное при больших угловых скоростях вращения крестовины, вообще говоря, ненулевая начальная скорость движения грузика на нити, а также приближение грузиков $4m_0$ как материальных точек тоже относится к неучтенным факторам.

Наличие сил трения и сопротивления будет приводить к неверному, несколько большему значению момента инерции крестовины.

Неравенство нулю начальной скорости грузика на нити приводит к уменьшенному значению интервала времени прохождения расстояния $h$ между фотодатчиками.

14. Точность и правильность измерения времени движения груза зависит от тщательного соблюдения параллельности «линии луча» фотодатчиков, а также тщательного подбора положения груза относительно данной «линии луча», чтобы соблюсти условие нулевой начальной скорости.

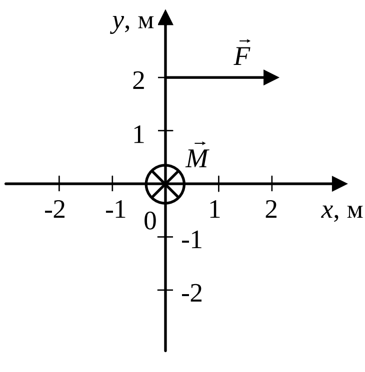
15. На данной установке измерить момент инерции пустой бутылки относительно её оси симметрии не представляется возможным.

Внесение изменений в конструкцию позволяет измерить данный момент инерции. Изменения заключаются в удалении оси с крестовиной с последующей установкой на ось подшипников соосных зажимов, которыми можно закрепить пустую бутылку «на оси» зажимов, подшипников. Намотать на бутылку нить и перебросить через блок на груз.

16. В декартовой системе координат в точке $l = y_0 = 2$ м приложена в положительном направлении оси $ox$ сила $F = 10$ Н.

Модуль момента силы относительно начала координат $xoy$:

$$M = F \cdot l,$$




где $l$ – плечо силы $F$,

Тогда момент силы

$$M = 10\text{Н}\cdot 2\text{м} = 20 \text{ н}\cdot\text{м}$$

Направление вектора момента сил $\vec{M}$ определяем по правилу правого винта (буравчика) или согласно определению векторного произведения соответствующих векторов. Вектор $\vec{M}$ будет направлен перпендикулярно плоскости $xoy$ «от нас».

# ИЗУЧЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

*Цель работы*: ознакомиться с явлениями, связанными с затухающими колебаниями пружинного маятника; определить жёсткость пружины, коэффициент затухания, логарифмический декремент затухания.

*Приборы и принадлежности*: пружина, груз, весы, секундомер, вертикальная шкала.

## Краткая теория и методические указания

Процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости, называются колебаниями. Простейший вид колебаний – свободные и гармонические колебания. Свободные – это колебания системы, предоставленной самой себе, после выведения её из состояния равновесия. Гармонические колебания – это колебания, подчиняющиеся закону синуса или косинуса:

$$x = A_0 \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Рассмотрим пружинный маятник – колебательную систему, состоящую из упругой пружины и груза массой *m*. В состоянии равновесия вес груза уравновешивается силой упругости пружины (рис. 1):

$$mg = k\Delta l, \tag{1}$$

где $\Delta l$ – удлинение пружины под действием груза; *k* – жёсткость пружины.

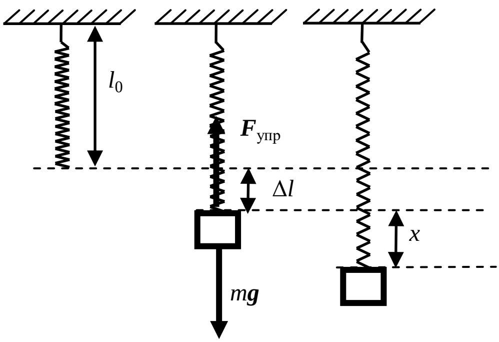



Рис. 1

Сместим груз из положения равновесия на расстояние $x$. Удлинение пружины при этом станет равным ($x+\Delta l$). Результирующая сила будет равна $F = mg - k(\Delta l + x)$ или с учётом соотношения (1) $F = -kx$.

Колебания, происходящие в вязкой среде, со временем затухают из-за действия сил сопротивления. Если затухание колебаний происходит медленно, то их приближённо можно считать периодическими. При сравнительно медленных движениях колеблющегося груза сила сопротивления $R$ пропорциональна скорости и равна

$$R = -r\frac{dx}{dt},$$

где $r$ – коэффициент сопротивления.

В соответствии со вторым законом Ньютона $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$, получим уравнение движения груза для затухающих колебаний:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} \quad \text{или} \quad \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где $\beta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания; $A_0$ – начальная амплитуда.

Амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону:

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \qquad (2)$$

Отношение двух амплитуд, отстоящих по времени на период, называется декрементом затухания:

$$\frac{A(t)}{A(T+t)} = \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta(t+T)}} = e^{\beta T}.$$

Натуральный логарифм этого отношения называют логарифмическим декрементом затухания:

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(T+t)} = \ln e^{\beta T} = \beta T.$$

Для амплитуд, отличающихся друг от друга на $N$ периодов:

$$\lambda = \frac{1}{N}\ln\frac{A_0}{A_N} = \frac{N\beta T}{N} = \beta T. \quad (3)$$

Работа выполняется на установке, состоящей из цилиндрической спиральной пружины с подвешенным к ней деревянным бруском, к которому крепится груз массой $m$ (см. фото). Надпись на бруске указывает его массу $m_0$. Амплитуда колебаний груза измеряется по вертикальной шкале, проградуированной в сантиметрах. Отсчёт ведётся по верхнему краю бруска.

## Порядок выполнения работы

***Работа может быть выполнена в двух вариантах, виртуальном и реальном. Виртуальный выполняется в случае невозможного выполнения реального варианта.***

**1. Вариант – виртуальный.**

Загрузите из яндекс-диска файл, ссылка

https://disk.yandex.ru/i/n7fv3T2hlSFgYw

Если система защиты не позволяет запуск, нажмите *Подробнее* и выполните.

Просмотрите выполнение лабораторной работы, запишите полученные в эксперименте данные и далее выполните задания как в реальном варианте.

**2. Вариант – реальный.**

***I. Определение жёсткости пружины по её удлинению.***

1. Измерьте на весах массу груза и запишите её значение в журнал наблюдений:

$$m = m_{\text{ср}} \pm \Delta m.$$

2. Подвесьте груз к бруску, определите удлинение пружины $\Delta l$ и запишите в журнал наблюдений:

$$\Delta l = \Delta l_{\text{ср}} \pm \Delta(\Delta l).$$

3. По формуле (1) определите жёсткость $k_{cp}$ (массу бруска не учитывайте!)

$$k_{cp} = \frac{mg}{\Delta l}.$$

4. Рассчитайте относительную и абсолютную погрешности для $k$ по формулам

$$E_k = \frac{\Delta m}{m_{\text{ср}}} + \frac{\Delta(\Delta l)}{\Delta l_{\text{ср}}} + \frac{\Delta g}{g_{\text{ср}}}\ ; \quad \Delta k = E_k k_{\text{ср}}\,.$$

5. Окончательный результат округлите и запишите в виде:

$$k = k_{\text{ср}} \pm \Delta k\ .$$

***II. Определение коэффициента затухания и логарифмического декремента затухания.***

Для определения коэффициента затухания β и логарифмического декремента затухания λ проведём $n$ = 5 опытов, в каждом из которых измерим время 10 полных колебаний, а также амплитуду в начале $A_0$ и в конце колебаний $A_{\text{N}}$. Измерение времени будем проводить с помощью секундомера (смартфона), а амплитуду измерять по шкале, цена деления которой 1 см.

1. Оттяните груз пружинного маятника на $A_0$ = 20…25 см ($\Delta A_0$ = 0,5 см) от положения равновесия и отпустите его, одновременно включив секундомер. По окончании $N$ = 10 полных колебаний выключите секундомер и зафиксируйте амплитуду $A_{\text{N}}$ последнего десятого колебания. Полученные результаты занесите в табл. 1 и 2. Повторите измерения ещё 4 раза.

Таблица 1

| № п/п | $t_i$, с | $\Delta t_i$, с | $(\Delta t_i)^2$, с$^2$ | $S_n$, с | $t_{\text{ср}}$, с | $\Delta t$,с | $E_t$, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |

Таблица 2

| № п/п | $A_{\text{N}i}$, см | $\Delta A_{\text{N}i}$, см | $(\Delta A_{\text{N}i})^2$,см$^2$ | $S_n$, см | $A_{\text{Nср.}}$, см | $\Delta A_{\text{N}}$, см | $E_A$, % |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | |

2. Рассчитайте среднее значение $t_{\text{ср}}$ по формуле

$$t_{ср} = \frac{\sum t_i}{n} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5}{n}.$$

3. Заполните оставшиеся столбцы табл. 1, используя формулы:

$$\Delta t_i = |t_i - t_{ср}|; \quad S_n = \sqrt{\frac{\sum (\Delta t_i)^2}{n(n-1)}}; \quad \Delta t = t_\alpha S_n; \quad E_t = \frac{\Delta t}{t_{ср}},$$

где $n = 5$, $t_\alpha = 2{,}78$ – коэффициент Стьюдента для пяти измерений $n$ при вероятности $P = 0{,}95$.

4. Рассчитайте среднее значение периода колебаний по формуле

$$T_{ср} = \frac{t_{ср}}{N}$$

и абсолютную погрешность периода

$$\Delta T = \frac{\Delta t}{N}.$$

5. Рассчитайте среднее значение амплитуды десяти полных колебаний по формуле

$$A_{Nср} = \frac{\sum A_{Ni}}{n} = \frac{A_{N1} + A_{N2} + A_{N3} + A_{N4} + A_{N5}}{n}.$$

6. Заполняем оставшиеся столбцы табл. 2, используя формулы:

$$\Delta A_{Ni} = |A_{Ni} - A_{N\,ср.}|; \quad S_n = \sqrt{\frac{\sum (\Delta A_{Ni})^2}{n(n-1)}}; \quad \Delta A_N = t_\alpha S_n; \quad E_{A_N} = \frac{\Delta A_N}{A_{N\,ср}},$$

где $n = 5$, $t_\alpha = 2{,}78$ – коэффициент Стьюдента для пяти измерений $n$ при вероятности $P = 0{,}95$.

7. С помощью соотношения (3) рассчитайте средние значения логарифмического декремента затухания $\lambda_{ср}$ и коэффициента затухания $\beta_{ср}$, подставляя вместо $A_N$ и $T$ их средние значения из табл. 1 и 2.

8. Найдите абсолютные погрешности $\Delta\lambda$ и $\Delta\beta$ по формулам (приводятся без вывода):

$$\Delta\lambda = \frac{1}{N}(E_{A_0} + E_{A_N}),$$

где $E_{A_0} = \dfrac{\Delta A_0}{A_0}$ – относительная погрешность начальной амплитуды; $E_{A_N} = \dfrac{\Delta A_N}{A_N}$ – относительная погрешность конечной $N$-ой амплитуды;

$$\Delta\beta = E_\beta \beta_{ср}, \quad E_\beta = E_\lambda + E_T = \frac{1}{N\lambda_{ср}}(E_{A_0} + E_{A_N}) + E_T,$$

где $E_T = \dfrac{\Delta T}{T_{ср}}$ – относительная погрешность периода колебаний.

9. Окончательные результаты запишите в виде:

$$\lambda = \lambda_{ср} \pm \Delta\lambda; \quad \beta = \beta_{ср} \pm \Delta\beta.$$

III. Определение жёсткости пружины по периоду колебаний маятника.

Зная период $T$ колебаний маятника и общую массу ($m_0 + m$) бруска и груза, можно (пренебрегая затуханием) вычислить жёсткость пружины из формулы $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m_0 + m}{k}}$ и сравнить её с полученным значением из первого опыта (пункт I).

1. По формуле $k = \dfrac{4\pi^2(m_0 + m)}{T_{ср}^2}$ определите жёсткость пружины.

2. Рассчитайте относительную и абсолютную погрешности для $k$ по формулам

$$E_k = \frac{2\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta m_0 + \Delta m}{m_0 + m} + \frac{2\Delta T}{T_{ср}}; \quad \Delta k = E_k k_{ср}.$$

3. Окончательный результат округлите и запишите в виде: $k = k_{ср} \pm \Delta k$.

*Подумайте, какими факторами можно объяснить некоторое отличие сравниваемых величин.*

## Контрольные вопросы

1. Классификация колебаний. Основные характеристики колебаний.

2. Поясните вывод дифференциального уравнения затухающих колебаний.

3. Изобразите качественно график зависимости координаты груза от времени при затухающих колебаниях, а также запишите и прокомментируйте соответствующую аналитическую формулу.

4. Какие факторы влияют на затухание колебаний в данной работе? Можно ли добиться того, чтобы колебания совсем не затухали?

5. Как логарифмический декремент затухания, так и коэффициент затухания характеризует скорость уменьшения амплитуды колебаний. В чём отличие между ними?

6. Во что превращается механическая энергия при затухающих колебаниях?

7. С помощью каких методов и приёмов можно повысить точность измерений (уменьшить погрешности измеряемых величин в данной работе)?

8. Рассчитать по данным лабораторной работы время (время релаксации), за которое амплитуда затухающих колебаний уменьшается в $e$ раз.

9. Изменятся ли результаты расчетов, если массу груза увеличить или уменьшить , например в два раза?

10. Приведите примеры затухающих колебаний в технике, в природе, в окружающем нас мире.

11. Как изменится период колебаний груза, если его поместить в воду, в очень густое масло?

12. Как изменится логарифмический декремент затухания, если всю установку перенести на Луну?

13. За время $t_1 = 0{,}5$ с амплитуда затухающих колебаний уменьшилась в $n_1 = 5$ раз. За какое время $t_2$ она уменьшится в $n_2 = 10$ раз.

14. Почему взвешивание на весах – однократное измерение, а определение конечной амплитуды и периода колебаний требует нескольких опытов?

15. Как влияет сила тяжести на колебания пружинного маятника? Что будет, если её «выключить»?

16. При определении логарифмического декремента затухания рекомендуется оттянуть груз пружинного маятника на расстояние $A_0 = 20\ldots25$ см от положения равновесия. Почему нельзя использовать большие значения начальной амплитуды, например $A_0 = 50\ldots60$ см

## Вариант ответов на контрольные вопросы

1. Процессы, обладающие той или иной степенью повторяемости называют колебательными или просто колебаниями. Систему, совершающую колебания, называют колебательной системой.

Различают колебания свободные и вынужденные.

Свободными колебаниями называются колебания, совершаемые колебательной системой при однократном выведении её из состояния равновесия без влияния внешних сил.

Вынужденными колебаниями называют колебания некоторой системы под влиянием внешней периодической силы.

Простейшим случаем свободных колебаний являются периодические колебания.

Гармоническими колебаниями называют колебания, в которых колеблющаяся величина $x$ меняется с течением времени $t$ по гармоническому закону (закону косинуса или синуса):

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где $x(t)$ – значение колеблющейся величины от времени $t$, $A$ – амплитуда (максимальное значение колеблющийся величины $x$), $\omega_0$ – собственная циклическая чистота гармонических колебаний, $\varphi_0$ – начальная фаза колебаний, т.е. значение фазы колебаний $\omega_0 t + \varphi_0$ в момент времени $t = 0$.

По определению $\omega_0 = 2\pi\vartheta_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$,

где $\vartheta_0$ – собственная частота гармонических колебаний, 1/с; $T_0$ – период (время одного полного колебания) гармонических колебаний, с.

В реальных колебательных процессах, как правило, достаточно часто нельзя пренебрегать действием сил сопротивления самой различной природы.

Свободные колебания с учётом сил сопротивления, приводящим к потере энергии колебательной системы (уменьшение амплитуды колебаний с течением времени) называют затухающими.

2. В основе построения дифференциального уравнения затухающих колебаний нашего грузика на пружине лежит основной закон динамики поступательного движения материальной точки (второй закон Ньютона):

$$m\vec{a} = \vec{F}_{упр} + m\vec{g} + \vec{R}, \qquad (*)$$

где $m$ – масса грузика, $F_{упр}$ – сила упругой деформации пружины, $mg$ – сила тяжести, $R$ – сила сопротивления со стороны воздуха, возникающая при движении грузика со скоростью $v$.

При навешивании грузика массы $m$ получим из условия равновесия деформацию пружины: $\Delta l = \dfrac{mg}{k}$,

где $k$ – коэффициент упругости ( жёсткости ) пружины.

Обозначим $x$=$x$($t$) координату центра масс грузика относительно нового положения равновесия. Пологая $R = -rv$ – сила сопротивления воздуха (малые скорости движения), $r$ – коэффициент сопротивления, $F_{упр} = -k(x + \Delta l)$ – сила упругости (закон Гука) пружины, действующая на центр масс грузика в точке с координатой $x$=$x$($t$) в момент времени $t$.

Ось $ox$ направлена вниз (по направлению $g$).

Учитывая, что $v = \dfrac{dx(t)}{dt}$, $a = \dfrac{d^2x(t)}{dt^2}$ для проекции на ось $ox$ уравнение (*), имеем

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + \Delta l) - r\frac{dx}{dt} + mg$$

С учетом того, что $k\Delta l = mg$ и помня, что $x$=$x$($t$), получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

дифференциальное уравнение затухающих колебаний (однородное, 2-го порядка, с постоянными коэффициентами).

Вводя обозначение $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ – квадрат собственной частоты гармонических колебаний без затухания, $\beta = \dfrac{r}{2m}$ – коэффициент затухания, приведём уравнение к стандартному виду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

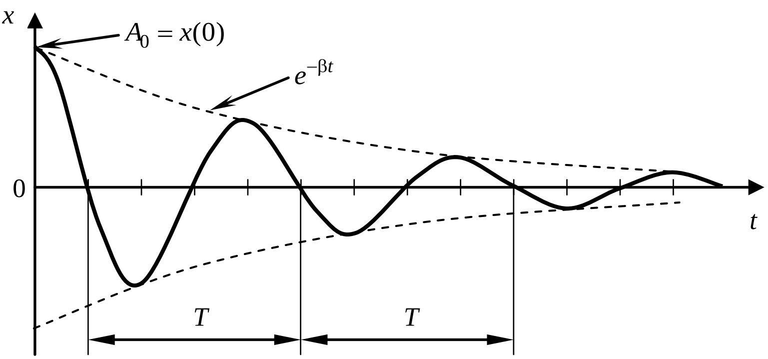
3. Решить дифференциальное уравнение, получаемое в пункте 2, – это значит найти (подобрать) такую функцию $x$=$x$($t$), подстановка которой в данное дифференциальное уравнение позволит получить тождественное равенство нулю для любых моментов времени $t$.

При условии $\beta << \omega_0$ решение имеет вид:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0)\,.$$

В нашем случае $\varphi_0 = 0$ – начальная фаза колебаний, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – циклическая частота затухающих колебаний.

Тогда затухающие колебания имеют вид:




4. На затухание колебаний в данной работе влияет сопротивление воздуха, в котором движется грузик, а также трение в направляющих струнах. Добиться состояния, в котором колебания совсем не затухают практически невозможно. Даже помещение в вакуум колебательной системы и устранение направляющих не может совсем исключить затухание, потому что нагрев самой пружины при ее деформации неизбежен, т.к она изготовлена не из идеально упругого материала.

5. Логарифмический декремент затухания по определению $\lambda = \ln \frac{A_0}{A(T)}$, где $A_0$ – амплитуда в момент времени $t$=0 (см. п.3) $A(T)$ – амплитуда в момент $t = T$. Логарифмический декремент $\lambda$ характеризуется убылью амплитуды за время $t = T$ (за период $T$).

Коэффициент затухания $\beta = \frac{\lambda}{T}$ имеет размерность частоты и характеризует убыль частоты колебаний при затухании и влияет на период $T$ (увеличивает) затухающих колебаний по сравнению с собственным $T_0$ периодом гармонических колебаний в отсутствии затухания.

6. Механическая энергия нашей колебательной системы в конечном итоге превращается в нагрев трущихся поверхностей направляющих и планки, нагрев пружины, а также затрачивается на смешивание слоев воздуха и возможно на возбуждение инфзвуковых волн в воздухе.

7. Уменьшить погрешность измеряемых величин можно исключением влияния субъективного фактора, а именно внедрением электро-, фото- или видеорегистрации значений амплитуды и временных интервалов.

8. Время релаксации $\tau$ по определению равно $\tau = \frac{1}{\beta}$. Подставив сюда $\beta$, из рассчитанных в лабораторной работе значений, можно вычислить величину $\tau$, (с).

9. При изменении массы $m$ грузика мы получим другие значение периода $T$, т. к. $T \sim \sqrt{m}$, а также и коэффициент затухания $\beta$, так как $\beta = \frac{r}{2m}$.

Изменится также и логарифмический декремент затухания $\lambda$. При увеличении массы $m$ коэффициент затухания уменьшается, и кривая $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$ будет менее крутая, т. е. $A(t)$ будет убывать медленнее. При уменьшении $m$ наоборот.

10. Примером затухающих колебаний в технике является затухание колебаний автомобиля за счет амортизаторов, в природе – колебания веток деревьев и т.д.

11. При помещении колебательной системы в среду с большим коэффициентом сопротивления $r$ увеличивается и коэффициент затухания $\beta = \frac{r}{2m}$, что приводит к уменьшению частоты затухания колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ или к увеличению периода затухающих колебания $T$ вплоть до развития апериодического процесса, для которого $T \to \infty$ при $\beta \approx \omega_0$.

12. При переносе установки на Луну исчезает только сопротивление воздуха, а остальные факторы, способствующие затуханию (потери энергии при деформации и нагреве пружины, трение о направляющие) остаются. Таким образом, логарифмический декремент затухания уменьшится незначительно.

13. Зависимость амплитуды затухающих колебаний имеет вид:

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t} \text{ или } \frac{A_0}{A(t)} = e^{-\beta t} \text{ или } \ln\frac{A_0}{A(T)} = \beta t.$$

Для $t_1$ = 0,5 с имеем $\ln n_1 = \beta t_1$, где $n_1$ = 5.

Для $t_2$ = ? имеем $\ln n_2 = \beta t_2$, где $n_1$ = 10.

Тогда, $\frac{t_2}{t_1} = \frac{\ln n_2}{\ln n_1}$. Отсюда, $t_2 = t_1 \frac{\ln n_2}{\ln n_1}$.

Подставив числовые значения: $t_2 = 0{,}5 \frac{\ln 10}{\ln 5} = 0{,}71$ с.

Ответ: $t_2$ = 0,71с.

14. Значение массы груза $m$ определяется погрешностью средства измерения (весов), а значения периода колебаний и амплитуды подвержены влиянию многих случайных факторов, что приводит к проявлению случайных погрешностей. Поэтому для их определения с минимальной случайной погрешностью требуются многократные измерения и статистическая обработка.

15. Сила тяжести на колебания пружинного маятника не влияет, если её “выключить” будет то же самое, только положение равновесия будет изменено. Это подтверждается тем, что в космосе и в авиации до недавнего времени использовали механические часы, имеющие пружинный маятник.

16. Большие значения начальной амплитуды $A_0 = 50 \ldots 60$ см не рекомендуется использовать, т. к. чрезмерная деформация пружины может выходить за пределы закона Гука и сила упругости может быть не пропорциональна величине деформации $F_{упр} \neq -k\Delta x$, т. е. возникнет пластическая и остаточная деформация и установка будет испорчена. Кроме того, при первом колебании положение грузика в верхней точке не должно превышать первоначального положения равновесия колебательной системы (бруска без грузика).

*Лабораторная работа 5*

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ВЯЗКОСТИ ЖИДКОСТИ МЕТОДОМ СТОКСА

*Цель работы*: изучить методику определения коэффициента вязкости жидкости методом падающего шарика – метод Стокса.

*Приборы и принадлежности*: сосуд с жидкостью, секундомер, масштабная линейка, микрометр и шарики.

### Краткая теория и методические указания

Рассмотрим свободное падение тела внутри покоящейся жидкости. При соприкосновении твёрдого тела с жидкостью к поверхности тела тотчас же прилипают молекулы жидкости, образуя молекулярный слой жидкости, обволакивающей тело. Прилегающий к телу мономолекулярный слой жидкости движется вместе с телом со скоростью движения тела. Он увлекает соседние частицы жидкости. Эти частицы, приходя в вязкостное движение, увлекают более удалённые частицы жидкости. Удалённые от тела частицы жидкости движутся медленнее, более близкие к телу – быстрее. В этих условиях между частицами, движущимися с различными скоростями, действуют силы внутреннего трения. Силы внутреннего трения, действующие со стороны удалённых частиц на прилегающие к телу частицы, тормозят движение тела, являясь силами сопротивления. Они направлены в сторону, противоположную перемещению тела.

Опыты показывают, что сила сопротивления зависит от скорости движения тела, от геометрической формы тела, его линейных размеров, состояния поверхности тела и вязкости среды.

Силу сопротивления среды $f$ наиболее просто определить для тела сферической формы (шарика), движущегося под действием силы тяжести в покоящейся жидкости. Теоретические расчёты, выполненные Дж. Стоксом, приводят к выражению

$$f = 3\pi d \upsilon \eta, \tag{1}$$

где $\eta$ – коэффициент вязкости жидкости; $d$– диаметр шарика; $\upsilon$ – скорость движения шарика.

На шарик, находящийся в жидкости, действует сила тяжести $P$ и выталкивающая сила (Архимеда). Их результирующая сила $F$ равна

$$F = gV(\rho - \rho'), \tag{2}$$

где $g$ – ускорение силы тяжести; $V$ – объём шарика; $\rho$ – плотность вещества шарика; $\rho'$ – плотность жидкости.

Под действием сил $f$ и $F$ шарик движется с ускорением. Основной закон динамики рассматриваемого случая запишется так:

$$F - f = ma\,, \tag{3}$$

где $m$ – масса шарика.

Сила $F$ увеличивает скорость шарика. Наряду с возрастанием скорости шарика увеличивается и сила сопротивление $f$ среды, в которой перемещается шарик. По мере падения шарика наступит момент, когда абсолютные значения сил $F$ и $f$ будут одинаковы, а ускорение равно нулю. Дальнейшее движение шарика происходит равномерно со скоростью $\upsilon_0$, тогда

$$gV(\rho - \rho') = 3\pi d\eta\upsilon_0. \tag{4}$$

Подставляя значение объёма шарика, и решая (4) относительно $\eta$, получим

$$\eta = \frac{g}{18} d^2 \frac{\rho - \rho'}{\upsilon_0}\,. \tag{5}$$

Скорость равномерного движения $\upsilon_0$ можно определить по наблюдению времени $\tau$ прохождения шариком определённого пути $l$. Тогда (5) принимает вид

$$\eta = \frac{g}{18} \frac{\rho - \rho'}{l} d^2 \tau\,. \tag{6}$$

Таким образом, наблюдая за равномерным движением шарика в жидкости, можно определить коэффициент вязкости.

Следует иметь в виду, что коэффициент вязкости сильно зависит от температуры и с её ростом уменьшается.

## Описание оборудования и метода измерений

На рисунке 1 представлен прибор, применяемый для определения коэффициента вязкости методом шарика, падающего в испытуемой жидкости. Прибор представляет собой стеклянный цилиндр $A$, укреплённый на деревянной пяте $B$. Цилиндр заполнен испытуемой жидкостью (например, трансформаторным маслом, глицерином).

На внешней поверхности цилиндра имеются две метки $m$ и $n$, расположенные на расстоянии $l$ друг от друга. Метки представляют собой проволочные кольца. Верхнее кольцо находится ниже уровня жидкости.

Диаметры шариков измеряются на микроскопе, снабжённом окулярным микрометром или микрометром.

Окулярный микрометр представляет собой тонкую стеклянную пластинку с нанесённой на неё шкалой. Эта пластинка установлена в фокальной плоскости окуляра микроскопа. При рассмотрении шарика в микроскоп в поле зрения окуляра одновременно видны изображение шарика и шкала окулярного микрометра. Цена деления окулярного микрометра указана на микроскопе.

Время падения шарика измеряют секундомером.

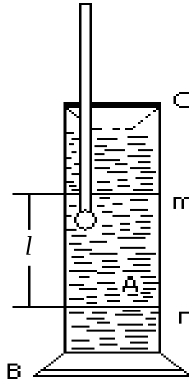



Рис. 1

## Порядок выполнения работы

***Работа может быть выполнена в двух вариантах, виртуальном и реальном. Виртуальный выполняется в случае невозможного выполнения реального варианта.***

**1. Вариант – виртуальный.**

Загрузите из яндекс-диска файл, ссылка
https://disk.yandex.ru/i/eOColrwguM72aw

Если система защиты не позволяет запуск, нажмите *Подробнее* и выполните.

Просмотрите выполнение лабораторной работы, запишите полученные в эксперименте данные и далее выполните задания как в реальном варианте.

**2. Вариант – реальный.**

С помощью микроскопа или микрометра измеряют диаметр пяти шариков. Диаметр каждого шарика измеряют три раза по окулярному микрометру. Измерения соответствуют противоположным концам ($a$ и $b$) диаметра каждого шарика или по микрометру.

Измеряют время падения каждого шарика между двумя метками $m$ и $n$. Для этого фиксируют глазом каждую метку. Проволочное кольцо должно сливаться в прямую линию.

Шарик бросают в отверстие воронки. В момент его прохождения через верхнюю метку включают секундомер, а в момент прохождения шарика через нижнюю метку его выключают. Время падения шарика записывают в табл. 2.

Таблица 1

| Шарик | Числовые отметки по окулярному микрометру микроскопа | | | | | | Диаметр шарика $d$, мм | | | Средний диаметр шарика $d_{ср}$, мм |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a$ | $b$ | $a$ | $b$ | $a$ | $b$ | $d_1$ | $d_2$ | $d_3$ | |
| 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 4 | | | | | | | | | | |
| 5 | | | | | | | | | | |

Масштабной линейкой с точностью до 1 мм измеряют расстояние между метками $m$ и $n$. Производят пять таких измерений по различным образующим цилиндра.

### Обработка результатов измерения

1. По числовым отметкам окулярного микрометра микроскопа или с помощью обычного микрометра определяют диаметры шариков. Результаты отчётов заносят в таблицу 1, затем переносят в таблицу 2.

2. Находят среднее значение $l$. Также в таблицу 2 записывают плотности шариков и жидкости, считая её температуру равной комнатной температуре воздуха.

3. По формуле (6) рассчитывают значение коэффициента внутреннего трения жидкости (с точностью до тысячных долей), заносят в табл. 2.

Таблица 2

| Шарик | $d_{ср}$, м | $\tau$, с | $l$, м | $\eta$, Па·с |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |
| | | | | $\eta_{ср}$ |

| |
|---|
| $\rho = (\ldots \pm \ldots)$ кг/м$^3$ |
| $\rho' = (\ldots \pm \ldots)$ кг/м$^3$ |
| $g = (\ldots \pm \ldots)$ м/с$^2$ |
| $t = (\ldots \pm \ldots)\,^\circ$C |

Для одного из опытов, например, относящегося к пятому шарику, определяют относительную и абсолютную погрешности измерения $\eta$. Относительную погрешность находят по формуле

$$E_\eta = \frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{\Delta g}{g} + \frac{\Delta\rho + \Delta\rho'}{\rho - \rho'} + \frac{\Delta l}{l} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta\tau}{\tau};$$

абсолютную – по формуле

$$\Delta\eta = E_\eta \eta.$$

Результат измерения представляют в виде:

$$\eta = \eta_{ср} \pm \Delta\eta \quad \text{Па·с}.$$

## Контрольные вопросы

1. Почему формула Стокса справедлива при медленном равномерном движении шарика малого диаметра в безграничной среде? Что означает понятие «безграничная среда»?
2. Какие течения называются ламинарными и турбулентными?
3. Для какого движения справедлива формула для определения силы сопротивления (по Ньютону)?
4. Что называется коэффициентом вязкости? Физический смысл и единицы измерения коэффициента вязкости в системе СИ.
5. Почему надо установить трубку строго вертикально?
6. Почему верхняя метка расположена ниже поверхности жидкости?
7. Почему необходимо, чтобы шарики имели диаметр значительно меньший, чем внутренний диаметр сосуда?

**Вариант ответов на контрольные вопросы**

1. Формула Стокса предполагает силу сопротивления среды при медленном равномерном движении шарика малого размера (диаметра) в сравнении с размерами среды (жидкости). Большие размеры предполагают достаточное количество молекул в плоскости, перпендикулярной вектору скорости шарика, которые своими силами молекулярного взаимодействия «удерживают» шарик от ускоренного движения.

Понятие «безграничная среда» означает также размеры, при которых возмущения, вносимые движущимся шариком затухают прежде, чем они могли бы провзаимодействовать с границами (стенками).

2. Течение жидкости или газа называется ламинарным или слоистым (lamina – пластина, полоска, лат.), при котором соседние слои среды движутся с разными скоростями, не перемешиваясь. В центральной части скорость максимальная, около стенок скорость минимальна. Характер течения выражает число Рейнольдса $Re$. При ламинарном течении $Re < Re_{кр} = 2300$. При $Re > Re_{кр}$ течение называется турбулентным (от лат. turbulentus – бурный, беспорядочный), при котором частицы жидкости совершают неупорядоченные, хаотические движения по сложным траекториям. Температура, скорость, давление и плотность среды испытывают хаотические флуктуации. Это сопровождается интенсивным перемешиванием, теплообменом и повышением гидравлического сопротивления.

3. По Ньютону сила любого лобового столкновения $f = C_x \rho S v^2$, по Стоксу $f = 3\pi d \upsilon \eta$, где $C_x$ – коэффициент лобового сопротивления, $S = \pi r^2$, тогда по Стоксу $C_x = \dfrac{12\eta}{\rho d v}$.

Если ввести число Рейнольдса $Re = \dfrac{dv}{\vartheta} = \dfrac{v d \rho}{\eta}$.

где $\eta$ – динамическая вязкость, $\vartheta$ – кинематическая вязкость, то $C_x = \dfrac{12}{Re}$ для шара.

При числах $Re < 1$ вязкое сопротивление и формула Стокса справедлива.

4. Закон Ньютона (внутреннее трение) имеет вид: $dF = \eta \dfrac{dv}{dn} dS$

где $dF$ – приращение силы внутреннего трения; $\frac{dv}{dn}$ м градиент скорости в направлении нормального к площадке $dS$ жидкостного слоя; $\eta$ – динамическая вязкость.

Так как $\frac{dF}{dS}=\tau$ – напряжение сдвига, то физический смысл $\eta$ состоит в том, что это напряжение сдвига в 1 Па = $1\,\frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ при градиенте скорости $\frac{dv}{dn}=1\,\frac{\text{м}}{\text{с}}\frac{1}{\text{м}}$. Размерность $\eta$ [Па·с].

5. Трубка устанавливается строго вертикально, чтобы более точно измерить время прохождения между метками. Траектория (прямой) должна быть перпендикулярна плоскости верхней и нижней метки (кольца). Кроме того, шарик должен двигаться по средней части трубки чтобы взаимодействие со стенками трубки было минимальным.

6. Верхняя метка расположена ниже поверхности жидкости для того, чтобы шарик мог выйти на режим равномерного движения.

7. Шарик должен иметь диаметр меньше внутреннего диаметра сосуда для того, чтобы возмущения в жидкости от его движения успели затухнуть, не доходя до стекла (внутренних границ) сосуда.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные в данном учебном электронном мультимедийном пособии задачи, теоретические вопросы и лабораторные работы проверены на практических и лабораторных занятиях при изучении раздела курса физики «Механика» на кафедре физики ФГБОУ ВО «ТГТУ» в течение многих лет. Представленный материал соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту по курсу общей физики для технических направлений подготовки бакалавров всех форм обучения.

Обязательное количество рассматриваемого материала определяется преподавателем с учетом учебного плана соответствующей специальности и формой обучения.

Студент должен научиться самостоятельно воспроизводить и анализировать основные физические явления, уметь сопоставлять их с теорией. Пособие поможет глубже разобраться в изучаемых вопросах физики, что положительно скажется и на понимании дисциплин, изучаемых в последующих семестрах.

# СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

### *Учебные пособия*


1. **Савельев, И. В.** Курс общей физики: учеб. пособие для студентов втузов: в 5 т. / И. В. Савельев. – 5-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2011. Т.1,2,3,4,5.
2. **Зисман, Г. А.** Курс общей физики: учеб. пособие: в 3 т. / Г. А. Зисман, О.М. Тодес. – 7-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2007, – Т.1,2,3.
3. **Детлаф, А. А.** Курс физики: учеб. пособие для втузов /А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – 4-е изд., испр. – Москва: Высшая школа, 2002. – 718 с.
4. **Ивлиев, А. Д.** Физика: учебное пособие / А. Д. Ивлиев. – СПб.: Лань, 2008. – 671 с.
5. **Барсуков, В. И.** Физика. Механика : учебное пособие / В. И. Барсуков, О. С. Дмитриев. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО "ТГТУ", 2015. – 248 с.
6. **Барсуков, В. И.** Физика. Электричество и магнетизм : учебное пособие / В. И. Барсуков, О. С. Дмитриев. – Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2009. – 252 с.
7. **Барсуков, В. И.** Физика. Волновая и квантовая оптика : учебное пособие / В. И. Барсуков, О. С. Дмитриев. – Тамбов: ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 132 с.
8. **Барсуков, В. И.** Молекулярная физика и начала термодинамики: учебное пособие / В. И. Барсуков, О. С. Дмитриев. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО "ТГТУ", 2015. - 128 с.
9. **Барсуков, В. И.** Физика. Элементы атомной физики, физики ядра, физики твёрдого тела и жидкости: учебное пособие / В. И. Барсуков, О. С. Дмитриев. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО "ТГТУ", 2014. – 112 с.
10. **Барсуков, В. И.** Физика. Электричество, магнетизм, волновая оптика [Электронный ресурс] : практикум для студентов, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям / В. И. Барсуков, О. С. Дмитриев, О. В. Исаева. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2016. – 99 с.
11. Физика. Практикум [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям / Ю. М. Головин, О. С. Дмитриев, О. В. Исаева, И. А. Осипова, В. Б. Вязовов, В. М. Поликарпов, В. М. Холодилин. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2017. – 153 с.
12. Физика. В помощь первокурснику [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов, обучающихся по техническим

направлениям подготовки и специальностям / Ю. М. Головин, О. С. Дмитриев, О. В. Исаева, И. А. Осипова, В. В. Серёгина, В. М. Холодилин. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2020. – 148 с.

13. **Дмитриев, О. С.** Физика. Краткий курс [Электронный ресурс] : учебное пособие для студентов, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям / О. С. Дмитриев, О. В. Исаева, И. А. Осипова, В. Н. Холодилин. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2021. – 180 с.

### *Задачники*

14. **Чертов, А. Г.** Задачник по физике: учебное пособие для втузов / А. Г. Чертов, А. А. Воробьев. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Физматлит, 2006. – 640 с.

15. **Физика:** методические указания и контрольные задания для студентов-заочников инженерно-технических специальностей вузов / под ред. А. Г. Чертова; – М.: Высш. школа, 1987. – 208 с.

16. **Физика:** программа, методические указания и контрольные задания для студентов-заочников технологических специальностей вузов / В. Л. Прокофьев, В. Ф. Дмитриева, и др. – М.: Высш. школа, 1998. – 143 с.

17. **Вязовов, В. Б.** Физика. Задачи и примеры. Электронное учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям подготовки и специальностям / В. Б. Вязовов, О. С. Дмитриев, И. А Осипова. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВО "ТГТУ", Тамбов, 2016. – 80 с.

### *Лабораторные работы*

18. Физика. Механика. Колебания и волны. Гидродинамика. Электростатика. Практикум / В. Б. Вязовов, О. С. Дмитриев, А. А. Егоров, С. П. Кудрявцев, А. М. Подкауро. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО "ТГТУ", Тамбов, 2012. – 120 с.

19. **Барсуков, В. И.** Постоянный ток, электромагнетизм, волновая оптика. Практикум / В. И. Барсуков, О. С. Дмитриев, В. Е. Иванов, Ю. П. Ляшенко. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО "ТГТУ", Тамбов, 2014. – 104 с.

20. **Головин, Ю. М.** Общая физика: Молекулярная физика и термодинамика. Атомная, квантовая и ядерная физика. Физика твёрдого тела. Лабораторный практикум / Ю. М. Головин, Ю. П. Ляшенко, В. Н. Холодилин, В. М. Поликарпов. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО "ТГТУ", Тамбов, 2013. – 96 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

# ПРИЛОЖЕНИЕ

## ФИЗИЧЕСКИЕ КОНСТАНТЫ

Скорость света в вакууме

$$c = 2{,}997 \cdot 10^{8}\ \text{м} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Постоянная Планка

$$\hbar = h/(2\,\pi) = 6{,}5819 \cdot 10^{-22}\ \text{МэВ} \cdot \text{с},$$

$$\hbar = 1{,}05449 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}.$$

Постоянная Больцмана

$$k = 1{,}38047 \cdot 10^{-23}\ \text{Дж} \cdot \text{К}^{-1},$$

$$k = 8{,}6171 \cdot 10^{-11}\ \text{МэВ} \cdot \text{К}^{-1}.$$

Число Авогадро:

физическая шкала (число атомов в 16 г $O^{16}$)

$$N = 6{,}02497 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1};$$

химическая шкала (число атомов в 16 г природного кислорода)

$$N = 6{,}02252 \cdot 10^{23}\ \text{моль}^{-1}.$$

Атомная единица массы – а. е. м.:

физическая шкала

$$1\text{а. е. м.} = 1/N_{\text{физ}} = 1{,}65976 \cdot 10^{-24}\ \text{г} = 931{,}147\ \text{МэВ};$$

Газовая постоянная:

физическая шкала

$$R = 8{,}31695\ \text{Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1};$$

химическая шкала

$$R = 8{,}31466\ \text{Дж} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1},$$

$$R = 8{,}20593 \cdot 10^{-5}\text{м}^{3} \cdot \text{атм} \cdot \text{К}^{-1} \cdot \text{моль}^{-1}.$$

Объём моля идеального газа при нормальных условиях:

физическая шкала

$$V_0 = 2{,}24207 \cdot 10^{-2}\text{м}^{3} \cdot \text{атм} \cdot \text{моль}^{-1};$$

химическая шкала

$$V_0 = 2{,}24145 \cdot 10^{-2}\ \text{м}^{3} \cdot \text{атм} \cdot \text{моль}^{-1}$$

Нормальная атмосфера

$$P_0 = 10{,}1325\ \text{Н} \cdot \text{см}^{-2}.$$

Температура точки таяния льда

$$T_0 = 273{,}15\ \text{К}.$$

Постоянная закона Стефана-Больцмана

$$\sigma = 5{,}6694 \cdot 10^{-8}\ \text{Вт} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{К}^{-4}.$$

Постоянная закона смещения Вина

$$\lambda_{\max} \cdot \text{T} = 2{,}8978 \cdot 10^{-3}\ \text{м} \cdot \text{К}.$$

Гравитационная постоянная

$$\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{Н} \cdot \text{м}^{2} \cdot \text{кг}^{-2}.$$

Число Фарадея:

физическая шкала

$$F = 96521 \text{ Кл·г-эквив.}^{-1};$$

химическая шкала

$$F = 96495 \text{ Кл·г-эквив.}^{-1}.$$

Постоянная Ридберга для бесконечной массы

$$R_\infty = 10973730{,}9 \text{ м}^{-1}.$$

«Радиус первой боровской орбиты» для атома водорода (при бесконечной массе ядра)

$$\alpha_0 = 0{,}529167 \cdot 10^{-10} \text{ м}.$$

Комптоновская длина волны электрона

$$\lambda = 2{,}42621 \cdot 10^{-12} \text{ м}.$$

Постоянная тонкой структуры

$$\alpha = 7{,}242621 \cdot 10^{-3},$$

$$\frac{1}{\alpha} = 137{,}0388.$$

Магнетон Бора

$$\mu_B = 0{,}578817 \cdot 10^{-14} \text{ МэВ} \cdot \text{Гс}^{-1}$$

$$\mu_B = 9{,}27276 \cdot 10^{-24} \text{ Дж·Тл}^{-1} = 9{,}27276 \cdot 10^{-21} \text{ эрг·Гс}^{-1}.$$

Ядерный магнетон

$$\mu_я = 3{,}1524 \cdot 10^{-18} \text{ МэВ·Гс}^{-1},$$

$$\mu_я = 5{,}0502 \cdot 10^{-27} \text{ Дж·Тл}^{-1}.$$

## ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

| Буква | | Название | Буква | | Название |
|---|---|---|---|---|---|
| Α | α | альфа | Ν | ν | ню |
| Β | β | бета | Ξ | ξ | кси |
| Γ | γ | гамма | Ο | ο | омикрон |
| Δ | δ | дельта | Π | π | пи |
| Ε | ε | эпсилон | Ρ | ρ | ро |
| Ζ | ζ | дзэта | Σ | σ | сигма |
| Η | η | эта | Τ | τ | тау |
| Θ | θ | тхэта | Φ | φ | фи |
| Ι | ι | йота | Χ | χ | хи |
| Κ | κ | каппа | Υ | υ | ипсилон |
| Λ | λ | ламбда | Ψ | ψ | пси |
| Μ | μ | мю (ми) | Ω | ω | омега |

## ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

| Буква | | Название | Буква | | Название |
|---|---|---|---|---|---|
| A | a | а | N | n | эн |
| B | b | бе | O | o | о |
| C | c | це | P | p | пэ |
| D | d | де | Q | q | ку |
| E | e | е | R | r | эр |
| F | f | эф | S | s | эс |
| G | g | ге (же) | T | t | тэ |
| H | h | ха (аш) | U | u | у |
| I | i | и | V | v | ве |
| J | j | йот | W | w | дабль-ю |
| K | k | ка | X | x | икс |
| L | l | эль | Y | y | игрек |
| M | m | эм | Z | z | зет |

## ПЕРЕВОД ЕДИНИЦ ВАЖНЕЙШИХ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ВЕЛИКОБРИТАНИИ И США, В ЕДИНИЦЫ, ДОПУСКАЕМЫЕ К ПРИМЕНЕНИЮ В РФ

| Единицы, применяемые в Великобритании и США | Значения в единицах, допускаемых к применению в России |
|---|---|
| Единицы длины | |
| Дюйм | 2,54 см |
| Фут = 12 дюймам | 0,305 м |
| Ярд = 3 футам | 0,914 м |
| Морская сажень = 6 футам | 1,829 м |
| Род, поль и перч = 5,5 ярдам | 5,029 м |
| Кабельтов (Великобритания) = 100 морских сажень | 182,88 м |
| Фурлонг = 220 ярдам | 201,168 м |
| Миля | 1,609 км |
| Миля морская (США) | 1,852 км |
| Миля морская (Великобритания) | 1,853 км |
| Единицы площади | |
| Квадратный дюйм | 6,452 см$^2$ |
| Квадратный фут | 0,093 м$^2$ |
| Квадратный ярд | 0,836 м$^2$ |
| Акр = 4840 кв. ярдам | 4046,860 м$^2$ |

| | |
|---|---|
| Квадратная миля | 2,590 км$^2$ |
| Квадратная миля | 2,590 км$^2$ |

*Продолжение табл.*

| Единицы, применяемые в Великобритании и США | Значения в единицах, допускаемых к применению в России |
|---|---|
| Единицы объема и вместимости | |
| Кубический дюйм | 16,387 см$^3$ |
| Кубический фут | 0,028 м$^3$ |
| Кубический ярд | 0,765 м$^3$ |
| Регистровая тонна = 100 куб. футам | 2,832 м$^3$ |
| Пинта жидкостная (США) | 0,473 л |
| Пинта (Великобритания) | 0,568 л |
| Квартажидкостная (США) | 0,946 л |
| Кварта сухая (США) | 1,101 л |
| Кварта (Великобритания) | 1,136 л |
| Галлон жидкостный (США) | 3,785 л |
| Галлон (Великобритания) | 4,546 л |
| Пек сухой (США) | 8,810 л |
| Пек (Великобритания) = 2 галлонам | 9,092 л |
| Бушель (США) | 35,239 л |
| Бушель (Великобритания) | 36,369 л |
| Баррель нефтяной (США) | 158,99 л |
| Баррель (Великобритания) | 163,654 л |
| Единицы массы | |
| Гран | 0,065 г |
| Карат | 0,200 г |
| Драхма | 1,772 г |
| Драхма аптекарская = 60 гранам | 3,888 г |
| Унция = 16 драхмам | 28,350 г |
| Унция тройская или аптекарская | 31,103 г |
| Фунт тройский или аптекарский | 373,240 г |
| Фунт | 453,590 г |
| Стон = 14 фунтам | 6,350 кг |
| Квартер | 12,701 кг |
| Центнеркороткий = 100 фунтам | 45,359 кг |
| Центнер длинный = 4 квартера | 50,802 кг |
| Тонна короткая = 2000 фунтам | 907,185 кг |
| Тонна длинная = 2240 фунтам | 1016,050 кг |
| Литр= 1 дм$^3$ (точно) =10$^{-3}$ м$^3$ (точно) | |

Учебное электронное мультимедийное издание

ДМИТРИЕВ Олег Сергеевич
ИСАЕВА Ольга Вячеславовна
ОСИПОВА Ирина Анатольевна
ХОЛОДИЛИН Валерий Николаевич

# ФИЗИКА

## МЕХАНИКА МУЛЬТИМЕДИА

Учебное пособие

Редактирование Е. С. Мордасовой
Дизайн, структура, навигация В. Е. Красильникова
Обложка, тиражирование, упаковка Т. Ю. Зотовой

ISBN 978-5-8265-2631-6

9 785826 526316

Подписано к использованию 04.09.2023.
Тираж 50 экз. Заказ № 97

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08
E-mail: izdatelstvo@tstu.ru