

Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВПО «Тамбовский государственный технический университет»
Н.Я. Молотков, В.Е. Иванов, О.В. Ломакина

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Издательство ТГТУ

УДК 537(075.8)
ББК В33я73
М-758

Рецензенты:

Д.п.н., профессор кафедры общей физики радиоэлектронного профиля
ФГБОУ ВПО «ВГТУ»
В.А. Елисеев

Д.т.н., профессор кафедры физики ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
О.И. Гайнутдинов

М-758 Молотков Н.Я.

Электричество и магнетизм: учебное пособие / Н.Я. Молотков,
В.Е. Иванов, О.В. Ломакина.- Тамбов: Из-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012.

Изложены основные вопросы электричества и магнетизма, которые соответствуют учебным программам подготовки бакалавров высших учебных заведений. Особое внимание обращено на разъяснение физической сущности законов электромагнетизма и на сознательное их применение в науке и технике. Вскрывается релятивистская природа магнитных взаимодействий и дается их объяснение на основе специальной теории относительности. Объем материала, включенный в пособие, обеспечивает подготовку, достаточную для успешного освоения студентами других разделов физики и технических дисциплин.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по техническим направлениям и специальностям бакалавриата очной и заочной формы обучения.

Введение

В период модернизации системы образования повышаются требования к качеству обучения физике в высшей школе. Нет сомнения в том, что физика, как фундамент современного естествознания, обеспечивает прогресс в создании инновационных технологий современного производства. Однако, все достижения физики так или иначе начинаются со школьного и вузовского образования, где формируются не только знания, умения и навыки, но и научное мировоззрение и физическое мышление будущих специалистов.

Важная роль в формировании научного мировоззрения будущих специалистов принадлежит курсу электричества и магнетизма, который является базой, как для изучения других разделов физики, так и большого числа общеинженерных и специальных дисциплин. Достоинством данного пособия является рассмотрение глубокой взаимосвязи электрических и магнитных явлений на основе специальной теории относительности, что позволило теоретически обосновать основные законы магнетизма и вскрыть релятивистскую природу магнитных взаимодействий. Приводится теоретическое обоснование волновых уравнений электромагнитного поля для одномерного случая и их решение. Большое внимание уделено экспериментальному обоснованию теории электромагнитного поля и основных свойств электромагнитных волн в диапазоне сверхвысоких частот: $\lambda = 10$ см и $\lambda = 3,2$ см.

Авторы стремились прежде всего выяснить физическую сущность электрических и магнитных явлений, описываемых теми или иными математическими соотношениями. Иногда используется качественный подход к изучению сложных явлений, например, автоколебаний. В умении качественно объяснить сущность физических явлений и заключается истинное понимание математических уравнений, описывающих те или иные закономерности. Важно, чтобы студенты за математическими формулами видели реальные физические явления и процессы.

Данный курс электричества и магнетизма предназначен для подготовки бакалавров технических вузов, изучающих физику по расширенной программе. Однако изложение материала построено так, что пособие можно использовать в вузах с обычной программой по физике. При сокращенной программе по решению кафедры часть вопросов, изложенных в пособии, можно опустить или перенести на самостоятельную подготовку. Например,

1. Раздел 1.6 Проводники в электростатическом поле.
2. Раздел 1.10 Применение диэлектриков.
3. Раздел 2.8 Электрический ток в растворах и расплавах электролитов.
4. Раздел 2.9 Электрический ток в газах.
5. Раздел 3.6 Магнитное поле на оси кругового тока.
6. Раздел 6.7 Излучение элементарного электрического диполя.

Приведенный перечень сокращений является сугубо ориентировочным. В зависимости от объема часов, выделенных на изучение электричества и магнетизма, он может быть сокращен или расширен по усмотрению преподавателя.

Глава1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Введение

Большое количество явлений природы связано с проявлением особого свойства элементарных частиц вещества, а следовательно, и состоящих из них макроскопических тел – наличия у них *электрического заряда*. Эти явления относятся к классу электрических явлений. Наличие электрического заряда проявляется в том, что заряженное тело, например, при электризации трением, взаимодействует с другими заряженными телами. *Электростатика* изучает взаимодействие электрических зарядов в той системе отсчета, относительно которой она покоится.

Существует два вида электрических зарядов, условно названных положительными и отрицательными. Заряды одного знака отталкиваются, разных знаков – притягиваются друг к другу с некоторой силой.

Электрический заряд является неотъемлемым свойством некоторых элементарных частиц. Заряд всех элементарных частиц (если он не равен нулю) одинаков по абсолютной величине. Его называют *элементарным электрическим зарядом* и обозначают e . Так заряд электрона по современным данным равен: $e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл (Кулона); заряд протона: $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; нейтрон не имеет заряда. Поскольку из этих частиц построены атомы любого вещества, электрические заряды оказываются органически входящими в состав всех тел. Обычно частицы, несущие заряды противоположных знаков, присутствуют в равных количествах и распределены в теле с одинаковой плотностью. В этом случае в целом тело будет нейтральным. Если, например, трением создать в теле избыток частиц одного знака (соответственно, недостаток частиц другого знака), тело окажется электрически заряженным. Поскольку заряд q тела обусловлен совокупностью элементарных зарядов, он по величине является кратным e :

$$q = N|e|,$$

где N – число избыточных или недостающих частиц одного знака. В этом проявляется *атомистичность* электрического заряда макроскопических тел. Это означает, что электрический заряд любого тела состоит из целого числа элементарных зарядов.

Электрические заряды могут исчезать или возникать вновь. Однако всегда возникают или исчезают одновременно два элементарных заряда противоположного знака. Поэтому суммарный электрический заряд *изолированной системы* не может изменяться. Это утверждение носит название *закона сохранения* электрического заряда.

1.1 Закон Кулона

Опыт показывает, что сила электрического взаимодействия довольно сложным образом зависит от формы наэлектризованных тел и характера распределения заряда на этих телах. Следовательно, не существует единой простой формулы, описывающей электрическое взаимодействие для любого произвольного случая. И только для *точечных зарядов* закон взаимодействия записывается в достаточно простой форме. Точечным зарядом называется заряд, распределенный на теле, размеры которого значительно меньше, чем любые расстояния, встречающиеся в данной задаче. Заметим, что понятие точечного заряда является удобной абстракцией для упрощения задач.

В 1785 году, воспользовавшись крутильными весами, Кулон смог опытным путем найти закон взаимодействия неподвижных точечных зарядов: *сила взаимодействия двух точечных зарядов, находящихся в вакууме, пропорциональна величине каждого заряда и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними. Направление силы (рис. 1.1) совпадает с прямой, проходящей через заряды.*

$$F = k \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}. \quad (1.1.1)$$

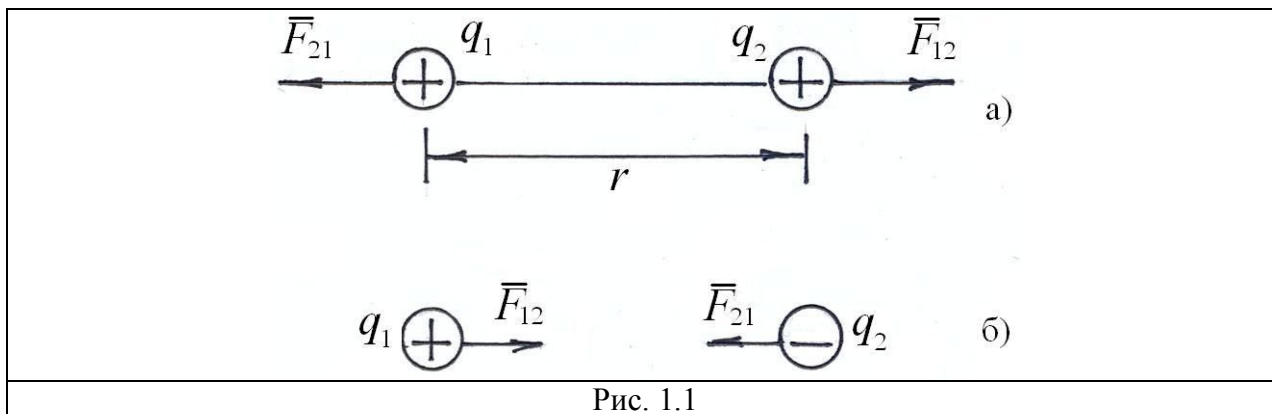


Рис. 1.1

В Международной системе (СИ) заряд измеряется в кулонах (Кл), а коэффициент пропорциональности равен:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (1.1.2)$$

где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$ – называется *электрической постоянной вакуума*. Поэтому коэффициент пропорциональности $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}$. Закон Кулона можно записать в виде:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}. \quad (1.1.3)$$

Если точечные заряды взаимодействуют в диэлектрической среде, то закон Кулона принимает окончательный вид:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2} \quad (1.1.4)$$

или

$$F = k \cdot \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{\epsilon r^2}, \quad (1.1.5)$$

где ϵ – называется *относительной диэлектрической проницаемостью* среды. Так как величина ϵ для обычных сред больше единицы ($\epsilon > 1$), то она показывает во сколько раз сила взаимодействия между точечными зарядами в данной среде меньше, чем в вакууме.

Силы взаимодействия \vec{F}_{12} и \vec{F}_{21} между двумя точечными зарядами q_1 и q_2 (рис. 1.1) в соответствии с третьим законом Ньютона равны по величине и противоположны по направлению: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Так как эти силы приложены к разным телам, то они представляют собой неуравновешенную систему.

Зная закон взаимодействия между точечными зарядами, можно рассчитать силу взаимодействия между зарядами, сосредоточенными на телах конечных размеров. Для этого нужно разбить каждый из зарядов на бесконечно малые заряды dq_i и dq_k , чтобы их можно было считать точечными, вычислить силу взаимодействия между зарядами dq_i и dq_k по формуле (1.1.5) и затем произвести векторное сложение всех элементарных сил. При этом суммирование бесконечно малых сил можно заменить интегрированием.

1.2 Электростатическое поле. Напряженность поля. Вектор электрического смещения

Взаимодействие между зарядами согласно теории близкодействия осуществляется через электростатическое поле. Всякий заряд изменяет свойства окружающего его пространства – создает в нем электростатическое поле. Наличие поля, созданного

некоторым зарядом Q , проявляется в том, что помещенный в какую-либо точку этого поля электрический заряд q оказывается под действием силы. Следовательно, чтобы выяснить имеется ли в данном месте электростатическое поле, нужно поместить туда заряженное тело и установить, испытывает оно действие электрической силы или нет.

Исследуем с помощью точечного пробного заряда $q_{\text{п}}$ электростатическое поле, созданное точечным зарядом q (рис. 1.2). Принято считать, что пробный точечный заряд $q_{\text{п}}$ всегда положительный. Поместив пробный заряд $q_{\text{п}}$ в произвольную точку M , положение которой определяется радиус-вектором \vec{r} , мы обнаружим, что на пробный заряд $q_{\text{п}}$ в соответствие с законом Кулона действует сила:

$$F = q_{\text{п}} \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{|q|}{r^2} \right]. \quad (1.2.1)$$

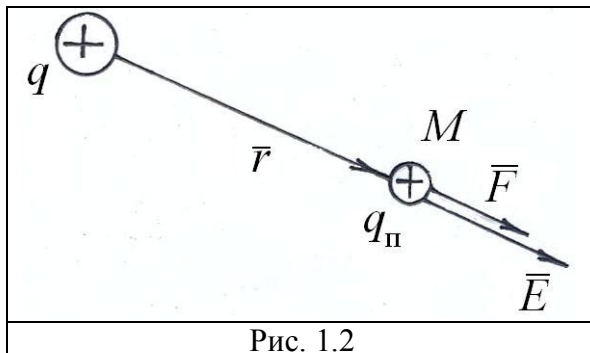


Рис. 1.2

Из этой формулы следует, что сила, действующая на пробный заряд, зависит не только от величин q и r , определяющих поле в данной точке M , но и от величины пробного заряда $q_{\text{п}}$. Если брать разные по величине пробные заряды, то и силы, которые они испытывают в данной точке M поля, будут различны. Однако, согласно формуле (1.2.1) отношение $\frac{F}{q_{\text{п}}}$ для всех пробных зарядов

будет одно и то же и зависит лишь от величин q и r , определяющих поле в данной точке M . Поэтому *отношение силы F , действующей на пробный заряд в некоторой точке M , к величине пробного заряда $q_{\text{п}}$ может служить характеристикой электростатического поля в этой точке, которая называется напряженностью*:

$$E = \frac{F}{q_{\text{п}}}. \quad (1.2.2)$$

По своей физической сущности напряженность показывает, какая сила действует на *единичный* пробный заряд в данной точке поля. Зная величину напряженности поля в определенной точке, можно определить силу, действующую на любой точечный заряд q' , помещенный в эту точку поля:

$$F = |q'|E. \quad (1.2.3)$$

Поэтому напряженность является *силовой* характеристикой поля. Следует отметить, что напряженность является векторной величиной. Вектор напряженности \vec{E} в данной точке поля M направлен в ту же сторону, что и вектор силы \vec{F} , действующей на пробный положительный заряд (рис. 1.2).

Как следует из формул (1.2.1) и (1.2.2), величина напряженности поля, созданного точечным зарядом q , пропорциональна величине этого заряда $|q|$ и обратно пропорциональна квадрату расстояния r от заряда q до данной точки M поля:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \cdot \frac{|q|}{r^2} = k \frac{|q|}{\epsilon r^2}, \quad (1.2.4)$$

где $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Нм}^2}{\text{Кл}^2}$.

За единицу напряженности в системе единиц СИ принимается $1 \frac{\text{Н}}{\text{Кл}} = 1 \frac{\text{В}}{\text{м}}$ (см. разд. 1.5).

Опыт показывает, что сила, с которой система зарядов действует на некоторый не входящий в систему пробный заряд, равна векторной сумме сил, с которыми действует на данный заряд каждый из зарядов системы в отдельности. Отсюда следует, что *напряженность поля системы зарядов равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из зарядов системы в отдельности*:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (1.2.5)$$

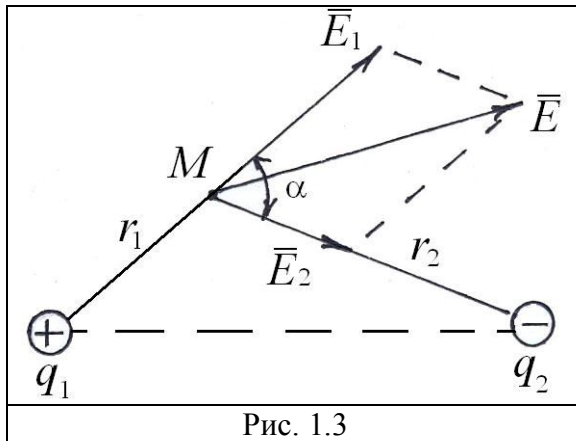


Рис. 1.3

Это утверждение носит название *принципа суперпозиции* (наложения) *электростатических полей*. Так, например, чтобы найти напряженность поля \vec{E} , созданного двумя точечными зарядами q_1 и q_2 в произвольной точке M (рис. 1.3), нужно найти напряженности полей, созданных каждым точечным зарядом в отдельности:

$$E_1 = k \frac{|q_1|}{\epsilon r_1^2}, \quad E_2 = k \frac{|q_2|}{\epsilon r_2^2},$$

а затем найти геометрическую сумму векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , т.е. $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$. Модуль напряженности результирующего поля можно найти по формуле:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha}. \quad (1.2.6)$$

Электростатическое поле принято изображать графически с помощью *линий напряженности* или линий вектора \vec{E} . Линии напряженности проводятся так, чтобы касательная к ним в каждой точке совпадала с направлением вектора \vec{E} в той же точке. Густота линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единичную площадку перпендикулярную к линиям, было равно числовому значению вектора \vec{E} . Тогда по картине линий напряженности можно судить о направлении и величине вектора \vec{E} в различных точках пространства. На рис. 1.4 показаны расположение линий напряженности различных электростатических полей. Следует помнить, что линии напряженности служат лишь способом графического изображения материальной среды, посредством которой осуществляется взаимодействие зарядов. Из рассмотрения рис. 1.4 следует, что линии напряженности электростатического поля могут начинаться или заканчиваться лишь на зарядах, либо уходить в бесконечность. При этом положительные заряды являются «источниками» поля, если проводить гидродинамическую аналогию.

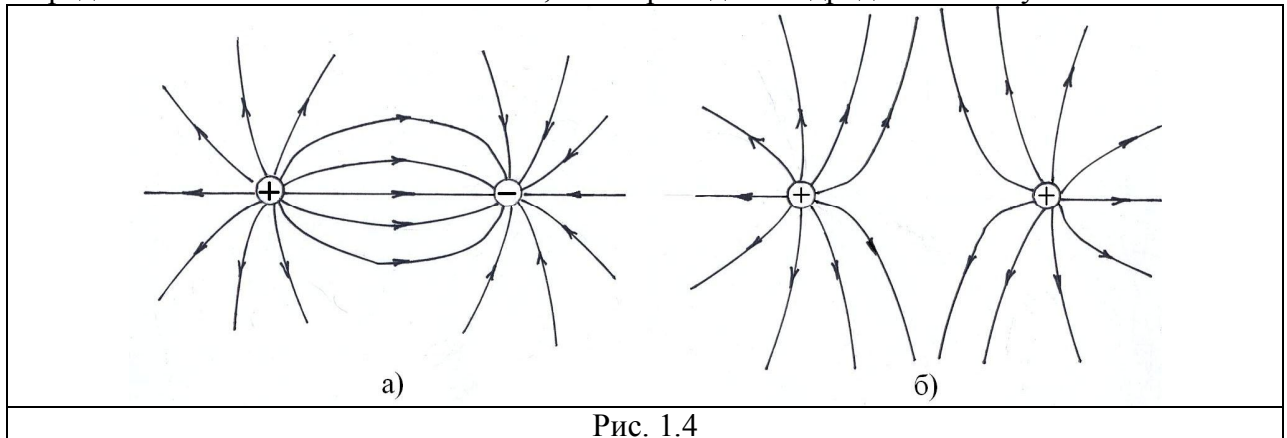


Рис. 1.4

Кроме вектора напряженности \vec{E} важной характеристикой электростатического поля является *вектор электрического смещения* \vec{D} . Введение этого вектора обусловлено следующим обстоятельством. Численное значение вектора напряженности \vec{E} зависит от свойств среды, в которой создается это поле. Это следует, например, из формулы (1.2.4), в которую входит относительная диэлектрическая проницаемость ϵ . Поэтому для характеристики электростатического поля целесообразно ввести величину, не зависящую от свойств среды. Этому условию удовлетворяет *вектор электрического смещения* \vec{D} , который для однородной и изотропной среды удовлетворяет условию:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}. \quad (1.3.1)$$

Направление вектора смещения \vec{D} совпадает для изотропных сред с направлением вектора напряженности \vec{E} электростатического поля.

Согласно формуле (1.2.4) для поля точечного заряда величина вектора электрического смещения равна:

$$D = \epsilon_0 \epsilon E = \frac{|q|}{4\pi r^2}. \quad (1.3.2)$$

В системе единиц СИ вектор \vec{D} измеряется в $\frac{Кл}{м^2}$.

Линии вектора электрического смещения \vec{D} , служащие для графического изображения полей, проводятся по тем же правилам, что и линии для вектора напряженности \vec{E} .

1.3 Поток вектора электрического смещения. Теорема Остроградского-Гаусса для электростатического поля.

В гидродинамике величиной, характеризующей поток Φ жидкости, принято называть произведение скорости V жидкости на площадь поверхности S , установленную перпендикулярно потоку: $\Phi = VS$. По своему физическому смыслу величина потока Φ определяет объемный расход жидкости в единицу времени. По аналогии с гидродинамикой введем понятие потока вектора электрического смещения. *Элементарным потоком вектора электрического смещения* через малую площадку называется произведение модуля вектора \vec{D} на площадь ΔS и косинус угла между вектором \vec{D} и нормалью к площадке \vec{n} (рис. 1.5):

$$\Delta\Phi = D\Delta S \cos\alpha. \quad (1.3.1)$$

Для бесконечно малой площадки имеем:

$$d\Phi = DdS \cos\alpha. \quad (1.3.2)$$

Заметим, что если поверхность замкнутая, то выбирается внешняя нормаль к ней. Учитывая, что

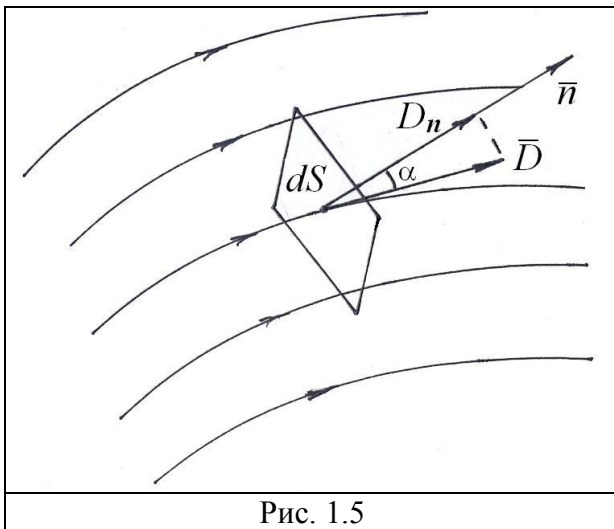
$$D \cos\alpha = D_n \quad (1.3.3)$$

есть проекция вектора смещения на нормаль к элементарной поверхности, получим:

$$d\Phi = D_n dS. \quad (1.3.4)$$

Полный поток через любую поверхность равен сумме элементарных потоков через все её участки:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n \Delta\Phi = \sum_{i=1}^n D_n dS.$$



Увеличивая число участков и уменьшая их размеры, суммирование бесконечно малых величин можно свести к интегрированию:

$$\Phi = \int_S D ds \cos \alpha = \int_S D_n dS. \quad (1.3.5)$$

Из определения потока вектора электрического смещения следует, что единицей его измерения является Кл (Кулон).

Докажем теорему Остроградского-Гаусса, которая позволяет рассчитывать электростатические поля, созданные зарядами, которые распределены по некоторым поверхностям. Пусть электрический точечный заряд q создает в пространстве поле. Выберем замкнутую произвольную поверхность S , которая внутри себя содержит заряд q (рис. 1.6). Определим полный поток вектора \vec{D} через замкнутую поверхность S . Элементарный поток вектора \vec{D} равен:

$$d\Phi = D dS \cos \alpha. \quad (1.3.6)$$

Из рис. 1.6 видно, что $dS \cos \alpha = dS_0$, получим:

$$d\Phi = D dS_0, \quad (1.3.7)$$

где dS_0 - проекция элементарной площадки dS на плоскость перпендикулярную вектору \vec{D} (рис. 1.6). Так как заряд q точечный, то модуль вектора \vec{D} определяется формулой (1.3.2). Учитывая это, на основании выражения (1.3.7) получим:

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi r^2} dS_0,$$

где r - расстояние элементарной площадки dS до заряда q . Учитывая, что $\frac{dS_0}{r^2} = d\omega$ - определяет элементарный телесный угол,

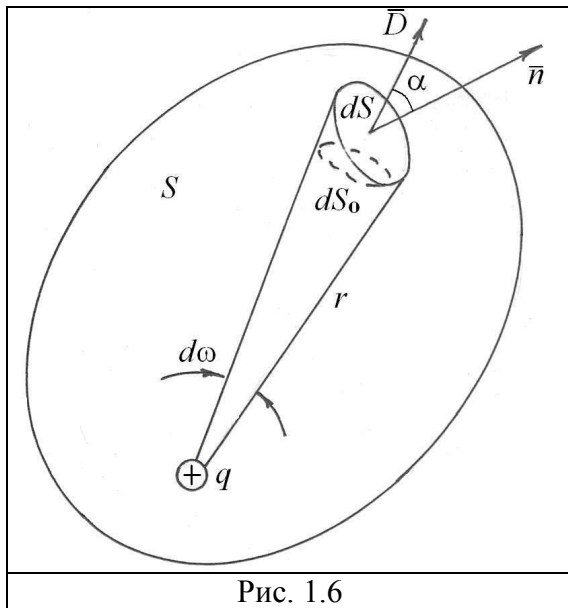


Рис. 1.6

имеем:

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi} d\omega. \quad (1.3.8)$$

Теперь нетрудно получить выражение для полного потока вектора \vec{D} через произвольную замкнутую поверхность:

$$\Phi = \int_0^{4\pi} \frac{q}{4\pi} d\omega = q.$$

Таким образом, если точечный заряд расположен внутри произвольной замкнутой поверхности, то полный поток вектора электрического смещения через эту поверхность равен:

$$\Phi = q. \quad (1.3.9)$$

Этот результат не зависит ни от формы поверхности, ни от того, где внутри поверхности расположен заряд.

Рассмотрим случай, когда заряд q находится вне замкнутой поверхности S (рис. 1.7). Нетрудно убедиться, что поток в этом случае через замкнутую поверхность равен нулю. Действительно, элементарные потоки $d\Phi_1$ и $d\Phi_2$ через площадки dS_1 и dS_2 по модулю равны, так как они вписаны в один и тот же телесный угол $d\omega$. Однако знаки этих потоков противоположны, так как угол α_1 острый и $\cos \alpha_1 > 0$, а угол α_2 тупой и $\cos \alpha_2 < 0$. Следовательно, сумма этих двух элементарных потоков равна нулю. То же

будет справедливо и для всех других участков замкнутой поверхности. Таким образом, если заряд расположен вне замкнутой поверхности, то поток вектора электрического смещения от этого источника равен нулю.

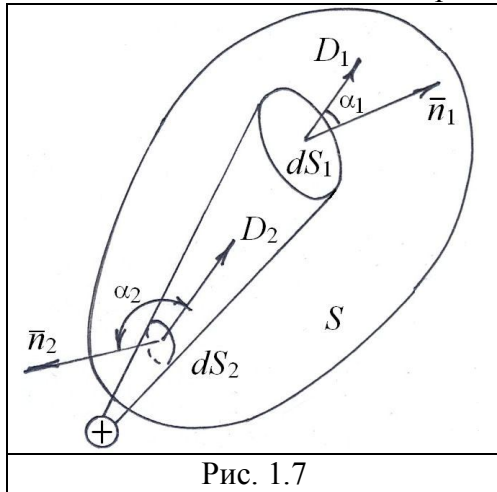


Рис. 1.7

Если же внутри поверхности расположен не один точечный заряд, а их совокупность или если заряд распределен по некоторой поверхности или в некотором объеме, то, пользуясь принципом суперпозиции полей, выражение (1.3.9) можно обобщить:

$$\Phi = \sum_{i=1}^n q_{\text{внутр}}. \quad (1.3.10)$$

Это и есть теорема Остроградского-Гаусса: *поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, расположенных внутри этой поверхности.*

Рассмотрим несколько примеров расчета электростатических полей на основе теоремы Остроградского-Гаусса.

1. *Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости.* Если плоскость бесконечна и равномерно заряжена, то *поверхностная плотность заряда*

$$\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S} \quad (1.3.11)$$

одинакова в любой её точке. Легко понять, что линии напряженности или линии вектора электрического смещения в любой точке M перпендикулярны к этой плоскости (рис. 1.8), т.е. поле заряженной плоскости *однородное*.

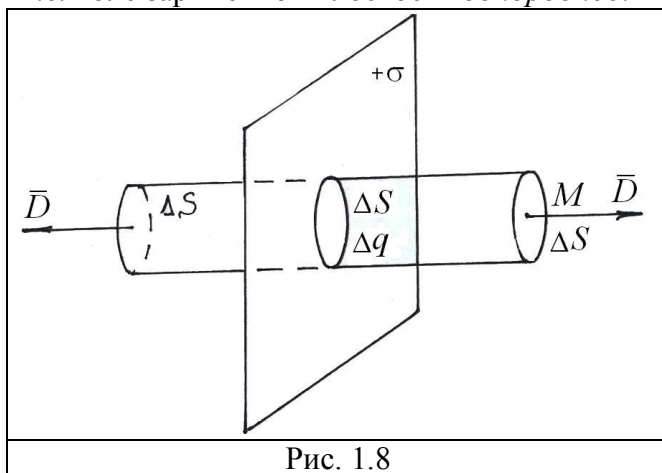


Рис. 1.8

Для нахождения напряженности и вектора смещения электростатического поля заряженной плоскости мысленно выделим в пространстве цилиндр, ось которого перпендикулярна заряженной плоскости, а основания параллельны ей и одно из оснований ΔS проходит через интересующую нас точку M . Цилиндр вырезает из заряженной плоскости участок площадью ΔS , и такую же площадь имеют основания цилиндра, расположенные по разные стороны от плоскости.

Согласно теореме Остроградского-Гаусса поток вектора \bar{D} через поверхность цилиндра равен заряду Δq , находящемуся внутри этой поверхности:

$$D = \Delta q.$$

С другой стороны, так как линии вектора \bar{D} пересекают лишь основания цилиндра, поток вектора смещения можно выразить через величину вектора \bar{D} у обоих оснований цилиндра:

$$\Phi = 2D\Delta S.$$

Действительно, поток через боковую поверхность цилиндра (рис. 1.8) согласно (1.3.6), равен нулю, поскольку $\alpha = 90^\circ$ и $\cos \alpha = 0$.

Из двух выражений потока, получим:

$$2D\Delta S = \Delta q.$$

Откуда найдем:

$$D = \frac{\Delta q}{2\Delta S} = \frac{\sigma}{2}. \quad (1.3.12)$$

На основании формулы (1.3.1) найдем напряженность поля бесконечно заряженной однородной плоскости:

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (1.3.13)$$

2. *Поле двух разноименно заряженных плоскостей.* Если размеры пластин значительно превосходят расстояние между ними, то электростатическое поле можно считать близким к полю бесконечной равномерно заряженной плоскости. Так как линии напряженности поля разноименно заряженных пластин между ними направлены в одну сторону (рис. 1.9), то напряженность поля между пластинами равна:

$$E = E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}. \quad (1.3.14)$$

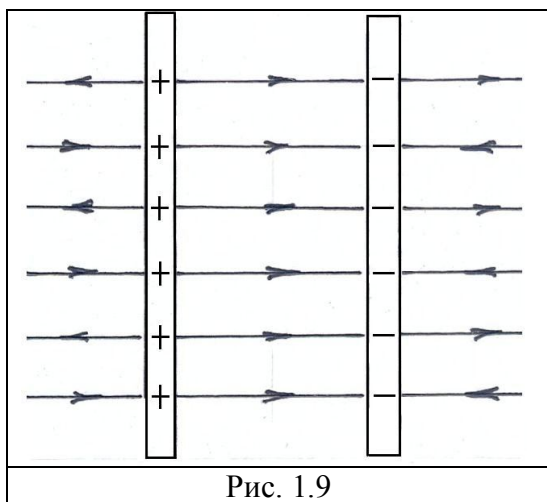


Рис. 1.9

Во внешнем пространстве линии напряженности электростатического поля разноименно заряженных пластин имеют противоположные направления, поэтому вне этих пластин результирующая напряженность поля практически равна нулю (рис. 1.9). Модуль вектора электрического смещения поля между пластинами, согласно формуле (1.3.1), равен

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon E = \sigma. \quad (1.3.15)$$

Модуль вектора \bar{D} поля вне пластин равен нулю.

3. *Поле бесконечной равномерно заряженной нити.* Выделим участок нити длины l . Если линейная плотность заряда на нити

$$\tau = \frac{q}{l}, \quad (1.3.16)$$

то заряд выделенного участка (рис. 1.10) равен

$$q = \tau l. \quad (1.3.17)$$

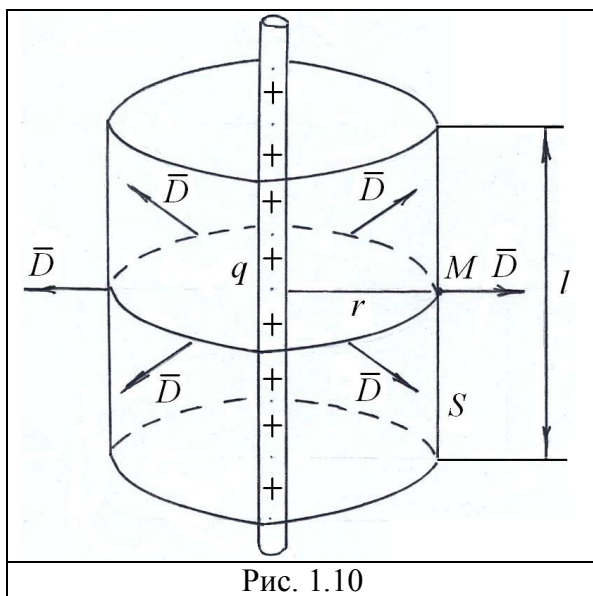


Рис. 1.10

Рассчитаем напряженность поля в любой точке M , находящейся на расстоянии r от нити. Из соображений симметрии вектор электрического смещения \bar{D} в любой точке M направлен перпендикулярно нити, а следовательно поле радиально симметрично в любой плоскости, перпендикулярной к нити, т.е. поле в поперечных плоскостях изображается расходящимися линиями вектора \bar{D} . Выберем воображаемую замкнутую поверхность в виде цилиндра, ось которого совпадает с нитью, а образующая цилиндра проходит через интересующую нас точку M (рис. 1.10). Высота цилиндра равна l .

Полный поток вектора электрического смещения через поверхность цилиндра равен:

$$\Phi = D 2\pi r l,$$

где $2\pi r l$ - боковая поверхность цилиндра. Поток вектора \bar{D} через основания цилиндра равен нулю, так как согласно формуле (1.3.1) угол $\alpha = 90^\circ$, а $\cos \alpha = 0$.

На основании теоремы Остроградского-Гаусса имеем:

$$\Phi = q = \tau \cdot l.$$

Приравняв правые части последних двух выражений, получим:

$$D = \frac{\tau}{2\pi r}. \quad (1.3.18)$$

Для напряженности поля заряженной нити получим:

$$E = \frac{D}{\epsilon_0 \epsilon} = \frac{\tau}{2\pi \epsilon_0 \epsilon r}. \quad (1.3.19)$$

Из данной формулы следует, что напряженность электростатического поля тонкой, равномерно заряженной, бесконечно длинной и прямой нити обратно пропорционально расстоянию от неё.

4. *Поле равномерно заряженной сферы.* Линии напряженности или линии вектора электрического смещения поля, создаваемого заряженной сферой, расходятся радиально (рис. 1.11а). Для нахождения напряженности поля в произвольной точке M , находящейся вне сферы, выберем воображаемую поверхность радиуса $r > R$, где r - расстояние точки M от центра сферы; R - радиус самой сферы.

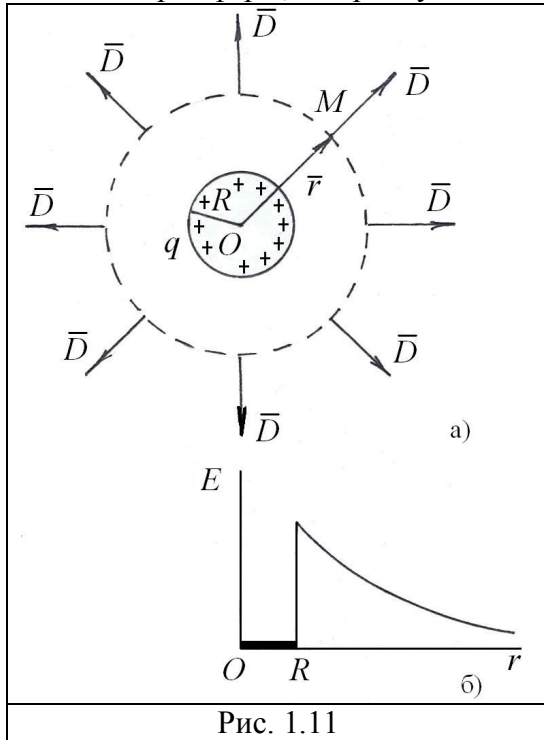


Рис. 1.11

Поток вектора \bar{D} через рассматриваемую поверхность радиуса r равен:

$$\Phi = DS = 4\pi r^2 D.$$

На основании теоремы Остроградского-Гаусса имеем $\Phi = q$, где q - заряд расположенный на поверхности сферы радиусом R . На основании полученных выражений находим:

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}. \quad (1.3.20)$$

Для напряженности поля вне сферы получим:

$$E = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2}. \quad (1.3.21)$$

Анализ этих формул показывает, что электростатическое поле вне равномерно заряженной сферы не отличается от поля точечного заряда, если заряд сферы поместить в её центре (1.3.2) (1.2.4).

Если $\sigma = \frac{q}{S}$ - поверхностная плотность зарядов, сосредоточенных на сфере, то

$$q = \sigma S = 4\pi R^2 \sigma.$$

Полученные формулы (1.3.20) и (1.3.21) принимают вид:

$$D = \frac{\sigma R^2}{r^2}; \quad (1.3.22)$$

$$E = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 \epsilon r^2}. \quad (1.3.23)$$

Можно доказать, что напряженность электростатического поля в любой точке внутри равномерно заряженной сферы ($r < R$) равна нулю ($E = 0$). Это справедливо не только для сферической поверхности, но и для любой замкнутой заряженной поверхности произвольной формы. Этот факт часто используется для создания экранирующих

устройств. На рис. 1.116 показана графическая зависимость напряженности электрического поля заряженной сферы от расстояния r от её центра.

5. *Поле равномерно заряженного шара.* Рассмотрим шар радиуса R , заряженный по всему его объему зарядом q равномерно (рис. 1.12). Объемной плотностью заряда ρ назовем отношение заряда к объему, в котором он распределен:

$$\rho = \frac{q}{V}. \quad (1.3.24)$$

Для рассматриваемого шара найдем:

$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (1.3.25)$$

Из соображений симметрии и рассмотрения поля заряженной сферы следует, что в любой точке M , лежащей вне сферы на расстоянии r от его центра ($r > R$) его поле аналогично полю точечного заряда

$$q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho, \quad (1.3.26)$$

т.е.

$$D = \frac{q}{4\pi r^2}, \quad (1.3.27)$$

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad (1.3.28)$$

или с учетом выражения (1.3.26) найдем:

$$D = \frac{\rho R^3}{3r^2}, \quad (1.3.29)$$

$$E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad (1.3.30)$$

В любой точке M' , лежащей внутри шара на расстоянии r от его центра ($r' < R$), вектор электрического смещения определяется лишь зарядом q' , заключенным внутри сферы радиусом $r' < R$. По теореме Остроградского-Гаусса имеем:

$$\Phi = D4\pi r'^2 = q'. \quad (1.3.31)$$

Заметим, что заряд $(q - q')$, сосредоточенный вне сферы радиуса r' , поле в рассматриваемой точке M' не создает, так как он сосредоточен вне замкнутой поверхности.

Учитывая, что $q' = \frac{4}{3}\pi r'^3 \rho$, из формулы (1.3.31) найдем:

$$D = \frac{\rho r'}{3}, \quad (1.3.32)$$

$$E = \frac{\rho r'}{3\epsilon_0\epsilon}. \quad (1.3.33)$$

Напряженность поля внутри заряженного шара прямо пропорциональна расстоянию до его центра. На рис. 1.126 показана графическая зависимость напряженности электростатического поля от расстояния.

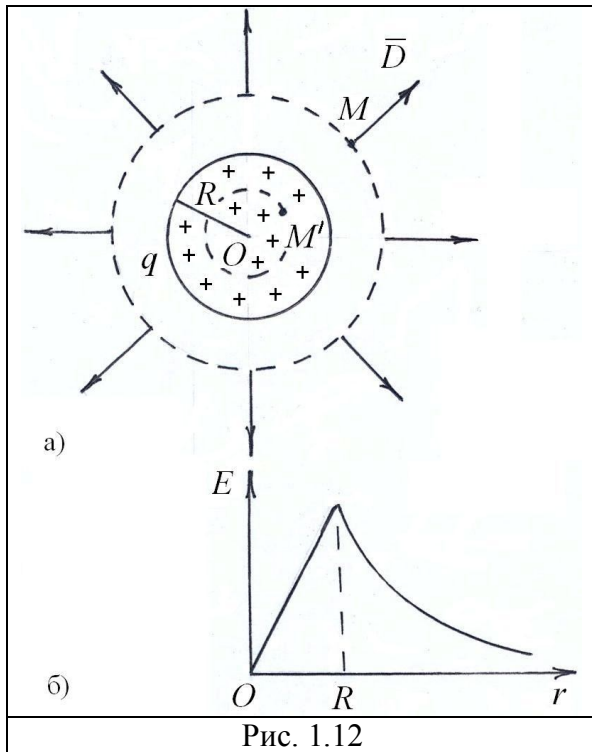


Рис. 1.12

1.4 Работа сил электростатического поля

Изучая механику, мы отмечали, что работа, совершаемая при перемещении какого-либо тела в гравитационном поле, не зависит от формы пути, по которому происходит перемещение, а зависит только от начального и конечного положения этого тела. Этот вывод был следствием того, что силы всемирного тяготения *консервативны*. Работа их связана с изменением потенциальной энергии перемещаемого тела. Формальное сходство закона всемирного тяготения и закона Кулона дает нам основание предполагать, что и электростатические силы так же должны быть консервативными и работа их должна быть связана с изменением потенциальной энергии заряженных тел.

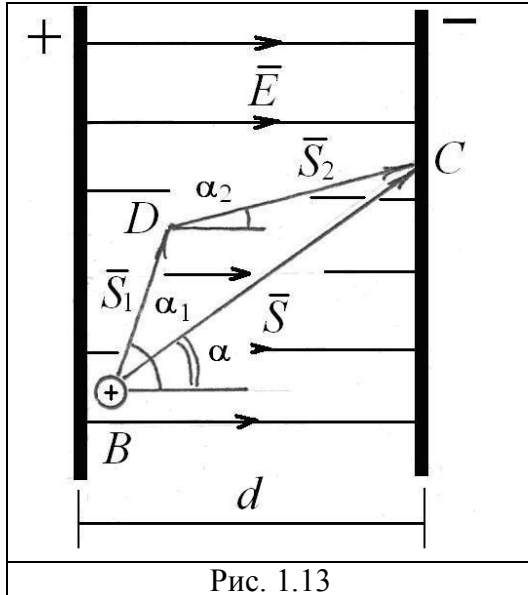


Рис. 1.13

Работа в однородном поле. Пусть заряд q перемещается в однородном электростатическом поле с напряженностью \vec{E} из точки B в точку C (рис. 1.13). Если заряд двигался по прямой BC , то работа поля равна:

$$A_{BC} = FS \cos \alpha = qEd ,$$

(1.4.1)

где S – модуль вектора перемещения, α – угол между направлением кулоновской силой $F = qE$ и вектором перемещения \vec{S} , d – расстояние между заряженными плоскостями, создающими однородное поле.

Если заряд q из точки B сначала двигался по прямой в точку D , а затем по прямой в точку C , то работа сил электростатического поля равна (рис. 1.13):

$$A_{BDC} = A_{BD} + A_{DC} = qES_1 \cos \alpha_1 + qES_2 \cos \alpha_2 ,$$

или

$$A_{BDC} = qE(S_1 \cos \alpha_1 + S_2 \cos \alpha_2) = qEd . \quad (1.4.2)$$

Мы видим, что работа сил однородного электростатического поля при перемещении электрического заряда по прямой BC и ломаной BDC одинакова и равна произведению электрического заряда на напряженность поля E и расстояние d , на которое переместился заряд вдоль линии напряженности поля:

$$A = qEd . \quad (1.4.3)$$

Из изложенного следует, что работа по перемещению заряда в однородном электростатическом поле не зависит от формы траектории, а определяется начальным и конечным положением заряда. Следовательно, сила электростатического взаимодействия является консервативной.

Допустим, что заряд q перемещается по замкнутой траектории: вначале по пути BDC , а затем – возвращается из точки C в точку B (рис. 1.13). Работа, совершаемая полем на первом участке BDC , определяется выражением (1.4.2) и является положительной величиной. Так как при переходе из точки C в точку B вектор перемещения \vec{S} изменяет свое направление, то работа при обратном движении будет равна:

$$A_{CB} = qES \cos(180^\circ - \alpha) , \quad (1.4.4)$$

где $(180^\circ - \alpha)$ – угол между векторами \vec{F} и \vec{S} при перемещении из точки C в точку B . Так как $\alpha < 90^\circ$, то угол $(180^\circ - \alpha) > 90^\circ$ и $\cos(180^\circ - \alpha) < 0$. Следовательно, работа A_{CB} отрицательна, т.е. работа равна:

$$A_{CB} = -qEd . \quad (1.4.5)$$

Таким образом, при перемещении заряда по замкнутой траектории в однородном электростатическом поле согласно формулам (1.4.2) и (1.4.5) сумма работ на всех участках оказывается равной нулю.

$$A_O = A_{BDC} + A_{CB} = 0. \quad (1.4.6)$$

Поле, работа сил которого по любой замкнутой траектории равна нулю, называется *потенциальным*. Следовательно, электростатическое поле потенциально.

Работа в поле точечного заряда. Определим работу по перемещению заряда q по произвольной траектории 1-2 в поле неподвижного точечного заряда Q (рис. 1.14).

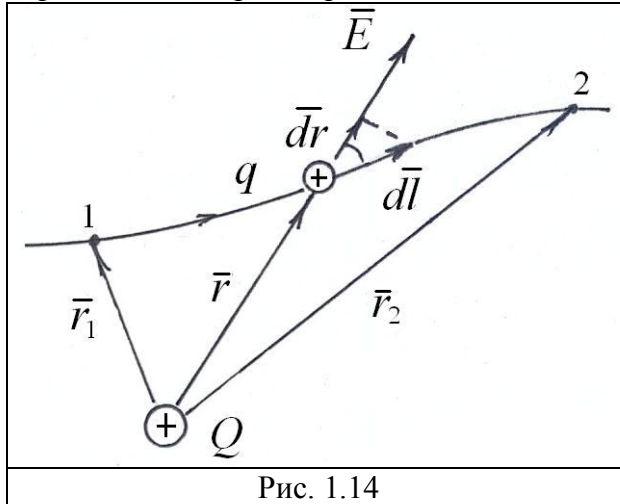


Рис. 1.14

Работа электростатического поля на элементарном участке dl равна:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{l} = Fdl \cos \alpha = Fdr, \quad (1.4.7)$$

где $dr = dl \cos \alpha$ - приращение радиус-вектора \vec{r} . На основе закона Кулона имеем:

$$dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{qQ}{r^2} dr. \quad (1.4.8)$$

Интегрируя данное выражение, найдем работу, совершаемую полем по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2:

$$A_{12} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$\text{или } A_{12} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} - \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2}, \quad (1.4.9)$$

где r_1 и r_2 - расстояния между точечными зарядами в начальном и конечном положениях. Из полученного выражения следует, что работа, совершаемая при перемещении заряда q в поле точечного заряда Q , не зависит от формы пути, по которому движется заряд q . Она зависит лишь от начального и конечного положения q , а также от величины зарядов q и Q . Следовательно, и в рассматриваемом случае электростатические силы являются консервативными.

Учитывая, что сила, действующая на единичный заряд ($q=1$) равна: $\vec{F} = q\vec{E} = \vec{E}$, для элементарной работы (1.4.8) можно записать выражение: $dA = \vec{E}d\vec{l} = Edr$. Работа, которую совершают силы электростатического поля, перемещая единичный заряд по замкнутому пути L , численно равна линейному интегралу:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L Edr. \quad (1.4.10)$$

где \vec{E} - напряженность электростатического поля. Этот интеграл называется *циркуляцией вектора напряженности* вдоль замкнутого контура. По своему физическому смыслу циркуляция определяет работу по перемещению единичного заряда в электростатическом поле.

В случае замкнутого пути (рис. 1.14) начальная и конечная точки перемещения заряда q совпадают. Поэтому, как следует из формулы (1.4.9) при $r_2 = r_1$, работа, совершаемая полем при перемещении заряда q по любому замкнутому пути, равна нулю. Следовательно, циркуляция вектора напряженности электростатического поля вдоль любого замкнутого контура равна нулю, т.е.:

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = 0. \quad (1.4.11)$$

Данное выражение является необходимым и достаточным условием *потенциальности* электростатического поля.

В механике показано, если силы взаимодействия являются консервативными, то работа совершается ими за счет убыли потенциальной энергии:

$$A_{12} = -\Delta W = W_1 - W_2, \quad (1.4.12)$$

где W_1 и W_2 - значения потенциальной энергии в начальном и конечном положении. Сравнивая эти выражения с формулой (1.4.9), найдем потенциальную энергию взаимодействия двух точечных зарядов q и Q :

$$W = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (1.4.13)$$

При этом предполагается, что при расстоянии между точечными зарядами стремящемся к бесконечности ($r \rightarrow \infty$) потенциальная энергия взаимодействия стремится к нулю ($W = 0$).

1.5 Потенциал электростатического поля

Так как силовое электростатическое поле потенциально (см. разд. 1.4), введем энергетическую характеристику поля – потенциал:

$$\varphi = \frac{W}{q}. \quad (1.5.1)$$

Потенциалом электростатического поля в данной точке называется отношение потенциальной энергии, которой обладает пробный заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда. По своему физическому смыслу потенциал показывает, какой потенциальной энергией обладает единичный пробный заряд в данной точке поля.

В международной системе СИ единицей потенциала служит *вольт* (В). Если пробный заряд в 1 Кл в данной точке поля обладает энергией 1 Дж, то потенциал электростатического поля равен 1 В.

Подставляя формулу (1.4.13) в выражение (1.5.1), найдем потенциал электростатического поля точечного заряда Q :

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (1.5.2)$$

По этой формуле можно вычислить потенциал поля, созданного точечным зарядом Q на расстоянии r от него. Учитывая это выражение, формулу (1.4.9) можно записать в виде:

$$A_{12} = q \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_1} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r_2} \right) = q(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (1.5.3)$$

где $(\varphi_1 - \varphi_2)$ - называется разностью потенциалов. Таким образом, работа по перемещению электрического заряда между двумя точками поля равна произведению переносимого заряда на разность потенциалов начальной и конечной точек. Разность потенциалов, так же как и потенциал, измеряется в вольтах.

Электростатические поля принято изображать графически не только с помощью линий напряженности, но и с помощью *эquipотенциальных поверхностей*. В любом электростатическом поле всегда можно найти совокупность точек, которые имеют одинаковый потенциал. Поверхность, проведенная в электростатическом поле, все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется *эquipотенциальной поверхностью*.

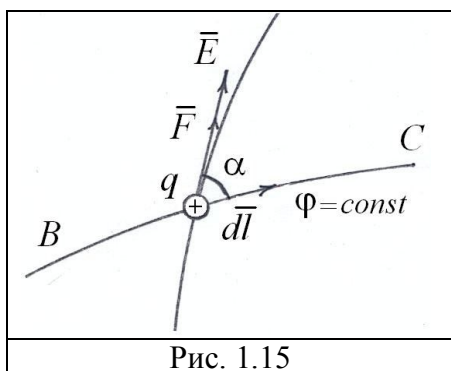


Рис. 1.15

Выясним, как должны быть расположены эквипотенциальные поверхности относительно линий напряженности поля. Для этого вычислим работу по перемещению заряда q вдоль линии BC , расположенной на эквипотенциальной поверхности ($\varphi = \text{const}$) (рис. 1.15). С одной стороны, элементарная работа равна:

$$dA = Fdl \cos \alpha = qEdl \cos \alpha,$$

где α - угол между вектором напряженности \vec{E} поля и элементарным перемещением $d\vec{l}$. С другой стороны, эту же работу можно выразить через разность потенциалов:

$$dA = qd\varphi.$$

Следовательно, получим:

$$qEdl \cos \alpha = qd\varphi. \quad (1.5.4)$$

Но, так как потенциал всех точек эквипотенциальной поверхности одинаков ($\varphi = \text{const}$), то $d\varphi = 0$. Выражение (1.5.4) будет иметь вид: $Edl \cos \alpha = 0$. Оно будет выполняться, если $\cos \alpha = 0$, т.е. угол между векторами \vec{E} и $d\vec{l}$ равен $\alpha = 90^\circ$. Таким образом, линии напряженности электростатического поля всегда расположены перпендикулярно к эквипотенциальным поверхностям.

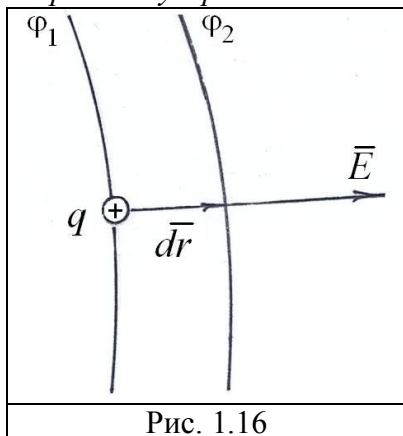


Рис. 1.16

Между двумя характеристиками электростатического поля: потенциалом и напряженностью существует тесная взаимосвязь, найдем её. Пусть имеются две эквипотенциальные поверхности $\varphi_1 = \varphi$ и $\varphi_2 = \varphi + d\varphi$, расположенные очень близко друг к другу (рис. 1.16). Пусть кратчайшее расстояние между этими поверхностями вдоль силовой линии равно dr . С одной стороны, работа по перемещению заряда вдоль силовой линии равна:

$$dA = qEdr, \quad (1.5.5)$$

где E - напряженность поля в области между эквипотенциальными поверхностями. С другой стороны, данная работа равна:

$$dA = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -qd\varphi. \quad (1.5.6)$$

Приравняв правые части последних двух выражений, найдем:

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}, \quad (1.5.7)$$

где величина $\frac{d\varphi}{dr}$ - характеризует быстроту изменения потенциала в направлении линии напряженности, которая численно равна изменению потенциала на единичном отрезке вдоль линии напряженности. Данную величину $\frac{d\varphi}{dr}$ называют *градиентом потенциала*:

$\frac{d\varphi}{dr} = \text{grad} \varphi$. Следовательно, получаем:

$$E = -\text{grad} \varphi, \quad (1.5.8)$$

т.е. напряженность поля в какой-либо точке численно равна градиенту потенциала в этой же точке, взятому с обратным знаком. Знак минус в формулах (1.5.7) и (1.5.8) указывает на то, что вектор \vec{E} напряженности поля направлен в сторону наиболее быстрого убывания потенциала.

Для однородного поля, образованного двумя разноименно заряженными плоскостями, находящимися на расстоянии d друг от друга (рис. 1.13), связь между напряженностью поля и потенциалом имеет вид:

$$E = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d}. \quad (1.5.9)$$

Из этой формулы следует, что за единицу измерения напряженности принимается $\frac{В}{м}$.

Заметим, что потенциал – величина скалярная, причем потенциал может быть как положительной, так и отрицательной величиной. Так, например, знак потенциала точечного заряда Q согласно формуле (1.5.2) определяется знаком этого заряда Q . Если в некоторой точке пространства двумя зарядами (источниками поля) одновременно созданы электростатические поля с потенциалами φ_1 и φ_2 , то потенциал результирующего поля равен алгебраической сумме потенциалов φ_1 и φ_2 , т.е.

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (1.5.10)$$

Аналогичным способом можно найти потенциал электростатического поля, созданного любым числом дискретных электрических зарядов, а также зарядом, распределенным на некоторой поверхности.

1.6 Проводники в электростатическом поле

Проводниками называются такие материалы, в которых имеются свободные носители электрических зарядов. Примерами могут служить металлические тела, жидкие растворы и расплавы электролитов.

На свободные заряды проводника, помещенного во внешнее электростатическое поле, действуют силы, пропорциональные напряженности поля. Эти силы приводят в движение заряды проводника. Под действием внешнего поля заряды в проводнике перераспределяются так, чтобы напряженность поля в любой точке внутри проводника была равна нулю. На поверхности проводника, помещенного во внешнее поле, вектор напряженности должен быть направлен по нормали к этой поверхности ($\vec{E} = \vec{E}_n$), иначе под действием тангенциальной составляющей \vec{E}_τ вектора напряженности, касательной к поверхности проводника, свободные заряды перемещались бы по проводнику, что противоречит их статическому равновесию.

Весь объем проводника, находящегося в электростатическом поле имеет одинаковый потенциал, т.е. является эквипотенциальным. Действительно, для любой точки внутри проводника имеем:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\vec{E} = 0.$$

Откуда следует постоянство потенциала:

$$\varphi = const. \quad (1.6.1)$$

Поверхность проводника также эквипотенциальна, так как для любого направления на поверхности имеем:

$$\frac{d\varphi}{dr} = -E_\tau = 0.$$

Откуда следует: $\varphi = const$.

Докажем, что в заряженном проводнике uncompensированные заряды располагаются только по поверхности проводника. Действительно, проведем внутри проводника произвольную замкнутую поверхность. Согласно теореме Остроградского-Гаусса суммарный заряд, находящийся в объеме ограниченном рассматриваемой поверхностью, равен:

$$q = \oint_S D_n dS = \oint_S \varepsilon_0 E_n dS.$$

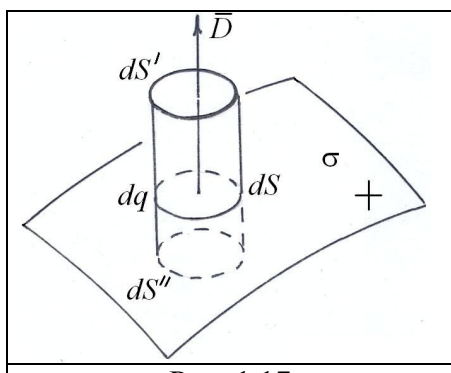


Рис. 1.17

Но, так как во всех точках поверхности S , находящейся внутри проводника, $E_n = 0$, то получим $q = 0$.

Определим напряженность поля вблизи поверхности заряженного проводника. Для этого выделим на его поверхности (рис. 1.17) малую площадку dS и построим на ней цилиндр с образующей, перпендикулярной к площадке dS . На поверхности проводника векторы \vec{E} и \vec{D} направлены перпендикулярно к этой поверхности. Поэтому поток вектора смещения \vec{D} сквозь боковую поверхность

цилиндра равен нулю. Поток вектора \vec{D} сквозь основание цилиндра dS'' также равен нулю, так как поле внутри проводника отсутствует. Следовательно, поток вектора электрического смещения сквозь всю замкнутую поверхность равен потоку сквозь одно верхнее основание цилиндра:

$$d\Phi = DdS.$$

Если на площадке dS расположен заряд dq , то согласно теореме Остроградского-Гаусса имеем:

$$d\Phi = dq = \sigma dS,$$

где σ - поверхностная плотность зарядов. Очевидно, что

$$D = \sigma \text{ или } E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}. \quad (1.6.2)$$

Таким образом, если электростатическое поле создается заряженным проводником, то напряженность этого поля вблизи поверхности проводника пропорциональна поверхностной плотности зарядов, находящихся на нем.

Экспериментальные исследования распределения зарядов на проводниках различной формы показывает, что распределение зарядов по внешней поверхности проводника зависит только от её формы: где больше кривизна поверхности, там больше и поверхностная плотность зарядов, а следовательно, согласно формуле (1.6.2), больше и напряженность электростатического поля. Что же касается внутренних поверхностей замкнутых полых проводников, то избыточные заряды на них отсутствуют: $\sigma = 0$.

1.7 Электроемкость проводников. Конденсаторы

Рассмотрим проводник, находящийся вдали заряженных тел и других проводников. Такой проводник назовем *уединенным*. При сообщении уединенному проводнику электрического заряда q , он приобретает потенциал ϕ . Опыт показывает, что потенциал уединенного проводника пропорционален находящемуся на нем заряду q , т.е. увеличение в несколько раз заряда приводит к возрастанию его потенциала во столько же раз.

Следовательно, отношение $\frac{q}{\phi}$ является постоянной величиной для данного проводника и может служить характеристикой проводника, называемой *электрической емкостью* или *электроемкостью* проводника.

Электроемкость проводника равна отношению заряда q на проводнике к его потенциалу ϕ :

$$C = \frac{q}{\phi}. \quad (1.7.1)$$

По своему физическому смыслу электроемкость показывает, какой электрический заряд необходимо сообщить данному проводнику, чтобы изменить его потенциал на единицу. За единицу электроемкости принимается 1 Ф (Фарад). Это электроемкость

такого проводника, потенциал которого изменяется на 1 В при сообщении ему заряда в 1 Кл.

Следует заметить, что емкость проводника не зависит от потенциала проводника и заряда, находящегося на нем. Эксперимент показывает, что емкость зависит от формы и размеров проводника, а также от свойств среды, в которой находится проводник.

Для примера рассчитаем емкость шара радиуса R , помещенного в среду с диэлектрической проницаемостью ϵ . Пусть шару сообщен заряд q . Учитывая, что напряженность поля шара определяется формулой (1.3.28), вычислим потенциал шара:

$$\varphi = -\int_R^{\infty} E dr = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \int_R^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}. \quad (1.7.2)$$

Подставляя это выражение в формулу (1.7.1), окончательно найдем емкость шара:

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon R. \quad (1.7.3)$$

Отсюда следует, что емкость шара прямо пропорциональна его радиусу и относительной диэлектрической проницаемости среды.

Рассмотрим два проводника, находящихся на небольшом расстоянии друг от друга. При сообщении первому проводнику заряда q второй проводник зарядится через влияние, причем ближайшими к наводящему заряду q оказываются заряды противоположного знака. Наведенные заряды на втором проводнике понижают потенциал первого проводника. Вследствие этого емкость первого проводника при наличии второго проводника повышается. Система двух проводников, заряды которых численно равны, но противоположны по знаку, называется *конденсатором*, а проводники, образующие его *обкладками конденсатора*. Емкость конденсатора определяется отношением заряда q одной из обкладок конденсатора к разности потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ между ними:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \text{ или } C = \frac{q}{U}, \quad (1.7.4)$$

где U – напряжение на обкладках конденсатора. По своему физическому смыслу емкость конденсатора показывает, какие заряды противоположного знака необходимо сообщить обкладкам конденсатора, чтобы изменить разность потенциалов между ними на 1 В. Емкость конденсатора также измеряется в фарадах (Ф).

Таким образом, конденсатор – система из двух проводников (обкладок), разделенных диэлектриком, толщина которого мала по сравнению с линейными размерами проводников. В зависимости от формы обкладок конденсаторы делятся на *плоские*, *сферические* и *цилиндрические*.

Найдем емкость плоского конденсатора, который состоит из двух параллельных металлических пластин площадью S каждая, расположенных на близком расстоянии d одна от другой и несущих заряды $+q$ и $-q$. Если линейные размеры пластин велики по сравнению с расстоянием d , то электростатическое поле между пластинами можно считать однородным, а его напряженность согласно формуле (1.3.14) равна:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon} = \frac{q}{\epsilon_0\epsilon S}, \quad (1.7.5)$$

где σ – поверхностная плотность зарядов на пластинах конденсатора. Учитывая выражение (1.5.3) для однородного поля, найдем напряжение или разность потенциалов на обкладках плоского конденсатора:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = Ed = \frac{qd}{\epsilon_0\epsilon S}.$$

Подставляя полученное выражение в формулу (1.7.4), окончательно найдем емкость плоского конденсатора:

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}, \quad (1.7.6)$$

где ϵ - относительная диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора.

Сферический конденсатор состоит из металлической сферы радиусом R_1 , окруженной концентрической с ней полый металлической сферой R_2 ($R_2 > R_1$). Вне конденсатора поле, создаваемое заряженными сферами, взаимно компенсируется. Поле между обкладками создается только зарядом сферы радиуса R_1 , так как сфера радиуса R_2 внутри себя поле не создает. В соответствие с формулой (1.5.2) разность потенциалов между обкладками сферического конденсатора равна:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{q(R_2 - R_1)}{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (1.7.4), найдем емкость сферического конденсатора:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0\epsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}. \quad (1.7.7)$$

Для получения различной величины емкости конденсаторы соединяют в батареи. Соединение конденсаторов в батареи может быть параллельным, последовательным и смешанным.

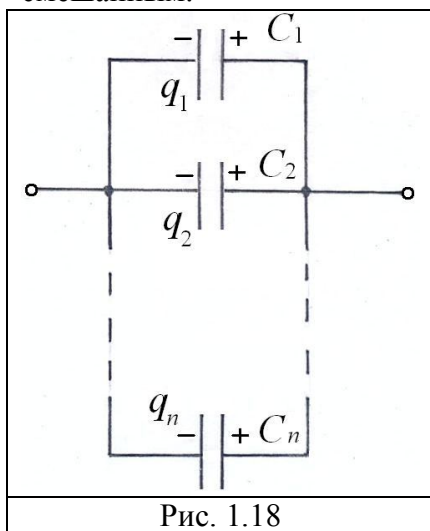


Рис. 1.18

Параллельное соединение конденсаторов показано на рис. 1.18. Пусть электроемкости отдельных конденсаторов равны: C_1, C_2, \dots, C_n . Так как на конденсаторы подается одно и тоже напряжение U , то электрические заряды на них могут быть различными:

$$q_1 = C_1 U,$$

$$q_2 = C_2 U,$$

.....

$$q_n = C_n U.$$

Осуществляя сложение полученных выражений, найдем общий электрический заряд q всей батареи:

$$q = \sum_n q_n = U(C_1 + C_2 + \dots + C_n).$$

Если через C обозначить емкость всей батареи конденсаторов, то для неё можно записать:

$$q = CU.$$

Сравнивая полученные соотношения, найдем:

$$C = C_1 + C_2 + \dots + C_n, \quad (1.7.8)$$

т.е. при параллельном соединении конденсаторов общая емкость батареи равна сумме емкостей отдельных конденсаторов, входящих в эту батарею.

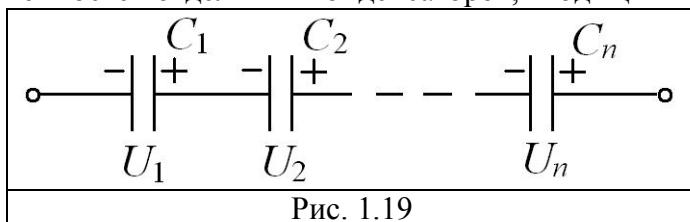


Рис. 1.19

Последовательное соединение конденсаторов показано на рис. 1.19. При таком соединении конденсаторов напряжение U , подаваемое на батарею, равно сумме напряжений, существующих на отдельных

конденсаторах:

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n,$$

а заряды на всех конденсаторах оказываются одинаковыми и равными q . Учитывая что:

$$U_1 = \frac{q}{C_1},$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2},$$

.....

$$U_n = \frac{q}{C_n},$$

получим:

$$U = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} + \dots + \frac{q}{C_n} = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \right).$$

Если через C обозначить емкость всей батареи, то для неё можно записать:

$$U = \frac{q}{C}.$$

Сравнивая последние два выражения, найдем:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}. \quad (1.7.9)$$

Из этой формулы следует, что емкость батареи при последовательном соединении конденсаторов всегда меньше минимальной электроемкости конденсатора, входящего в батарею.

1.8 Энергия заряженного проводника. Энергия электростатического поля.

Заряжая проводник, необходимо совершить определенную работу против кулоновских сил отталкивания между одноименными зарядами. Пусть в некоторый момент времени потенциал проводника равен φ , а его электроемкость C . Элементарная работа, совершаемая против сил электростатического поля при перенесении заряда dq из бесконечности на проводник, равна:

$$dA = \varphi dq.$$

При сообщении проводнику заряда dq его потенциал изменяется на $d\varphi$, причем $dq = C d\varphi$. Следовательно, получаем:

$$dA = C \varphi d\varphi.$$

Полная работа, необходимая для зарядки проводника от нулевого потенциала $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_0$, равна:

$$A = \int_0^{\varphi_0} C \varphi d\varphi = \frac{C \varphi_0^2}{2}. \quad (1.8.1)$$

Эта работа идет на увеличение электрической потенциальной энергии заряженного проводника. Поэтому естественно предположить, что собственная энергия заряженного тела есть не что иное, как его электростатическая потенциальная энергия:

$$W = \frac{C \varphi_0^2}{2}. \quad (1.8.2)$$

Эту формулу можно применить для расчета энергии заряженного конденсатора. В этом случае под φ_0 следует понимать напряжение U на обкладках конденсатора:

$$W = \frac{CU^2}{2}. \quad (1.8.3)$$

Учитывая, что $U = \frac{q}{C}$, получим ещё одну важную формулу для вычисления потенциальной энергии заряженного конденсатора:

$$W = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.8.4)$$

При увеличении заряда конденсатора происходит соответствующее увеличение его электростатического поля. Поэтому естественно предположить, что собственная потенциальная энергия заряженного тела есть не что иное, как *энергия его электростатического поля*.

Проверим это предположение на примере однородного электростатического поля плоского конденсатора. Учитывая, что для плоского конденсатора $C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{d}$, $U = Ed$ на основании формулы (1.8.3) найдем:

$$W = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} V, \quad (1.8.5)$$

где $V = Sd$ - объем электростатического поля между обкладками конденсатора. На основании полученной формулы найдем энергию, заключенную в единице объема электростатического поля, т.е. *объемную плотность энергии*:

$$\varpi = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2} = \frac{D^2}{2\epsilon_0 \epsilon}, \quad (1.8.6)$$

где \vec{D} - вектор электрического смещения поля. Объемная плотность энергии измеряется в $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$.

Таким образом, объемная плотность энергии однородного электростатического поля определяется его напряженностью \vec{E} или смещением \vec{D} .

Согласно формуле (1.8.5) энергия dW бесконечно малого объема dV неоднородного поля равна:

$$dW = \varpi dV = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} dV. \quad (1.8.7)$$

Полную энергию, сосредоточенную в произвольном объеме V неоднородного поля, найдем соответствующим интегрированием:

$$W = \int_V \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} dV. \quad (1.8.8)$$

Следовательно электростатическое поле как одна из форм материи обладает энергией, которая рассредоточена по всему объему, занимаемому полем, а не локализована только в заряженном теле.

1.9 Диэлектрики в электростатическом поле

К диэлектрикам относятся вещества не проводящие электрический ток. При обычных условиях в диэлектриках нет свободных носителей зарядов. Молекулы диэлектрика в целом электрически нейтральны: положительные заряды молекул равны по абсолютной величине их отрицательным зарядам. Однако это не означает, что молекулы диэлектриков не обладают электрическими свойствами.

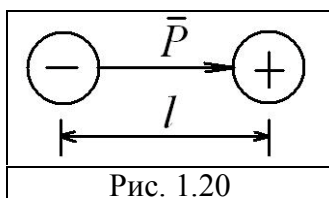


Рис. 1.20

В зависимости от строения молекул диэлектрики можно разделить на две группы. Первую группу диэлектриков составляют такие вещества, у которых центры суммарного положительного и суммарного отрицательного зарядов каждой молекулы сдвинуты относительно друг друга на некоторое расстояние l . Такие молекулы диэлектрика можно рассматривать как *электрические диполи* (рис. 1.20). Каждый электрический диполь принято характеризовать *электрическим дипольным моментом*:

$$\vec{p} = q\vec{l}, \quad (1.9.1)$$

где q - суммарный электрический заряд одного знака. Вектор \vec{p} направлен от отрицательного заряда к положительному. Диэлектрики, молекулы которых обладают дипольным моментом \vec{p} в отсутствие внешнего поля, называют *полярными*. К ним относятся, например, вода, хлористый водород, бромистый водород, аммиак. Ко второй группе принадлежат диэлектрики, у которых центры суммарного положительного и суммарного отрицательного зарядов совпадают. Дипольный электрический момент каждой молекулы такого диэлектрика в отсутствие внешнего электрического поля равен нулю: $\vec{p} = 0$. Поэтому молекулы таких диэлектриков называют *неполярными*. К неполярным диэлектрикам относятся, например, водород, азот, углеводороды.

Если диэлектрик с полярными молекулами не находится во внешнем электростатическом поле, то вследствие беспорядочного теплового движения молекул векторы их дипольных моментов ориентированы хаотично. Поэтому векторная сумма дипольных моментов всех молекул, содержащихся в произвольном объеме диэлектрика, равна нулю. При внесении неполярного диэлектрика во внешнее поле, дипольные моменты \vec{p} молекул под действием электрических сил \vec{F} стремятся повернуться так, чтобы векторы их дипольных моментов \vec{p} совпали по направлению с напряженностью \vec{E} внешнего электростатического поля (рис. 1.21). Однако тепловое движение молекул хаотически «разбрасывает» диполи и препятствует установлению их дипольных моментов вдоль поля. В результате совместного действия обеих причин в диэлектрике возникает преимущественная ориентация дипольных моментов молекул вдоль поля.

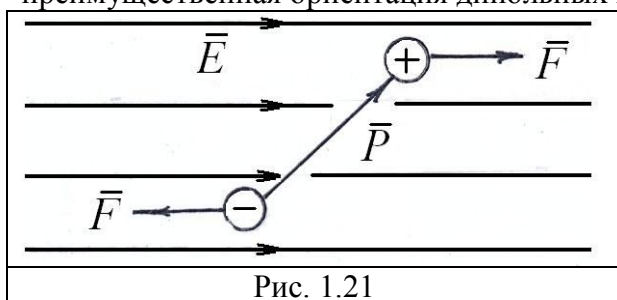


Рис. 1.21

При отсутствии внешнего поля дипольные моменты каждой молекулы диэлектрика, состоящего из неполярных молекул, равны нулю. При внесении данного диэлектрика в электростатическое поле \vec{E} на положительные и отрицательные заряды каждой молекулы действуют силы \vec{F} , направленные в противоположные стороны.

Под действием этих сил молекула деформируется, вследствие чего центры положительного и отрицательного зарядов смещаются на некоторое расстояние l . Следовательно, во внешнем поле молекулы неполярного диэлектрика приобретают наведенный или *индуцированный дипольный момент*: $\vec{p} = q\vec{l}$. Этот индуцированный момент каждой неполярной молекулы диэлектрика всегда направлен вдоль внешнего электростатического поля, а его величина пропорциональна напряженности поля:

$$\vec{p}_i = \epsilon_0 \alpha \vec{E}, \quad (1.9.2)$$

где α - называется *поляризуемостью молекулы*.

Явление ориентации дипольных моментов полярных молекул во внешнем поле и появление под действием поля индуцированных дипольных моментов неполярных молекул, ориентированных вдоль него, называется *поляризацией диэлектрика*. Мерой поляризации диэлектрика является *вектор поляризации* \vec{P} , под которым понимается

предел отношения электрического дипольного момента некоторого объема диэлектрика к этому объему, когда последний стремится к нулю:

$$\bar{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_{i=1}^N \bar{p}_i}{\Delta V}, \quad (1.9.3)$$

где ΔV - элементарный объем диэлектрика; \bar{p}_i - электрический момент i -го диполя. Так как индуцированные дипольные моменты неполярных молекул \bar{p}_i одинаковы по величине и имеют одно и то же направление, то для вектора поляризации можно записать:

$$\bar{P} = n\bar{p}_i, \quad (1.9.4)$$

где $n = \frac{N}{V}$ - концентрация молекул. Учитывая формулу (1.9.2), получим:

$$\bar{P} = \alpha n \epsilon_0 E = \epsilon_0 \chi \bar{E}, \quad (1.9.5)$$

$$\chi = n\alpha \quad (1.9.6)$$

называется *диэлектрической восприимчивостью вещества* или *поляризуемостью единицы объема диэлектрика*. Формула (1.9.5) применима и для полярных молекул диэлектрика в случае слабых электрических полей. Диэлектрическая восприимчивость полярных молекул зависит от температуры: $\chi \sim \frac{1}{T}$.

Рассмотрим электростатическое поле внутри диэлектрика. Пусть в вакууме создано двумя бесконечными разноименно заряженными плоскостями однородное поле с напряженностью \bar{E}_0 . Вектор электрического смещения при этом равен:

$$D = \epsilon_0 E. \quad (1.9.7)$$

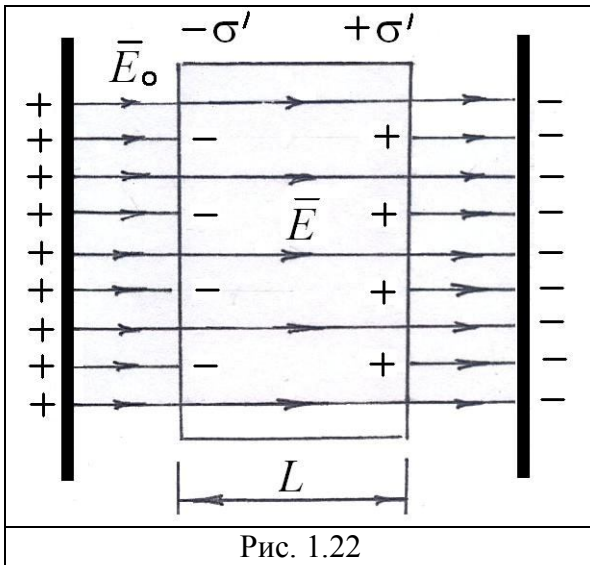


Рис. 1.22

Внесем в рассматриваемое поле пластину однородного диэлектрика так, чтобы его боковые грани были перпендикулярны напряженности внешнего поля (рис. 1.22). Под действием внешнего поля диэлектрик поляризуется и на его гранях появляются связанные заряды противоположного знака с поверхностной плотностью σ' . Эти связанные поверхностные заряды создают внутри пластинки диэлектрика однородное поле с напряженностью \bar{E}' . Оба поля \bar{E}_0 и \bar{E}' в диэлектрике направлены навстречу друг другу. Следовательно, внутри диэлектрика результирующее поле равно:

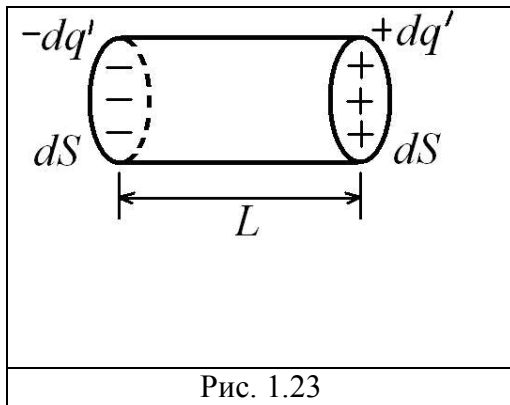
$$E = E_0 - E'. \quad (1.9.8)$$

Согласно формуле (1.3.14) имеем:

$$E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (1.9.9)$$

Подставляя это выражение в формулу (1.9.8), получим:

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad (1.9.10)$$



Для определения поверхностной плотности связанных зарядов σ' выделим мысленно в рассматриваемом диэлектрике цилиндр, площадь каждого основания которого равна dS , а образующие параллельны вектору напряженности; длина цилиндра равна толщине рассматриваемой пластины диэлектрика (рис. 1.23). На каждом из оснований цилиндра находится связанный электрический заряд $dq' = \sigma' dS$. Рассматривая этот цилиндр как большой диполь, найдем его электрический дипольный момент:

$$dp = dq' L = \sigma' dSL. \quad (1.9.11)$$

По определению вектора поляризации найдем его численное значение:

$$P = \frac{dp}{dV} = \frac{\sigma' L dS}{dV} = \sigma', \quad (1.9.12)$$

где $dV = LdS$ - объем выделенного цилиндра. Учитывая полученное выражение, на основании (1.9.10) найдем напряженность поля внутри диэлектрика:

$$E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} \text{ или } \epsilon_0 E = \epsilon_0 E_0 - P.$$

Учитывая формулу (1.9.7), получим связь трех величин D, E, P :

$$D = \epsilon_0 E + P. \quad (1.9.13)$$

На основании выражения (1.9.5) получим:

$$D = \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi E = \epsilon_0 (1 + \chi) E. \quad (1.9.14)$$

Сравнивая данное выражение с формулой (1.3.1):

$$D = \epsilon_0 \epsilon E, \quad (1.9.15)$$

найдем связь относительной диэлектрической проницаемости диэлектрика с его электрической восприимчивостью:

$$\epsilon = 1 + \chi. \quad (1.9.16)$$

Обе эти характеристики диэлектрика являются безразмерными величинами. Для вакуума: $\epsilon = 1$, $\chi = 0$.

1.10 Применение диэлектриков

В некоторых диэлектриках поляризация не исчезает сразу после устранения внешнего электрического поля. Диэлектрики, длительно сохраняющие поляризацию после устранения внешнего электрического поля и создающие в окружающем пространстве собственное электрическое поле, называют *электретами*. Электреты применяются в фильтрах для очистки газов от взвешенных в них мелких твердых частиц, а также для изготовления маломощных источников тока. На основе электретов созданы малогабаритные микрофоны и телефоны.

Относительная диэлектрическая проницаемость большинства кристаллических диэлектриков почти не изменяется с изменением температуры, что говорит о том, что в этих диэлектриках имеет место индуцированная поляризация. Однако существует группа кристаллических диэлектриков, называемых *сегнетоэлектриками*, у которых наблюдается резкое возрастание диэлектрической проницаемости в определенном температурном интервале. Свое название эта группа диэлектриков получила по первому исследованному веществу такого типа – сегнетовой соли.

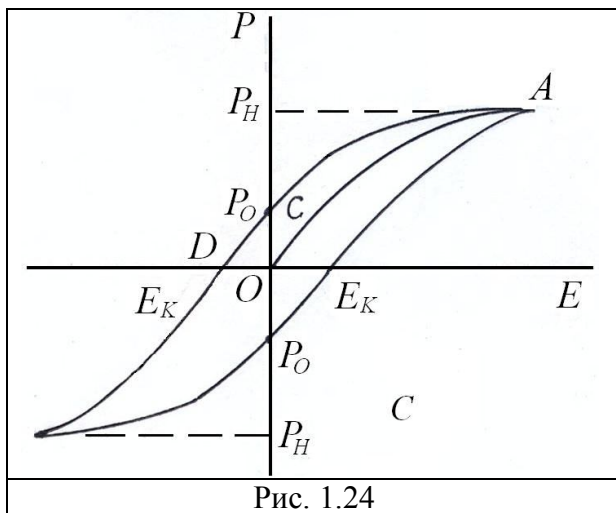


Рис. 1.24

Другой особенностью сегнетоэлектриков является зависимость относительной диэлектрической проницаемости ϵ и электрической восприимчивости χ от напряженности E электрического поля в веществе, тогда как в остальных диэлектриках ϵ и χ являются характеристиками, не зависящими от E . Поэтому в сегнетоэлектриках отсутствует прямая пропорциональная зависимость между векторами \vec{D} и \vec{E} , а также между вектором поляризации \vec{P} и напряженностью поля \vec{E} . Для сегнетоэлектриков характерно явление насыщения, состоящее в том, что

начиная с некоторого достаточно большого значения напряженности поля E , вектор поляризации не изменяется (кривая OA на рис.1.24). Эти особенности сегнетоэлектриков объясняются их *доменной структурой*. Монокристалл сегнетоэлектрика состоит из ряда самопроизвольно и спонтанно поляризованных областей – *доменов*. В каждом домене дипольные моменты всех молекул ориентированы в некотором определенном направлении, вследствие чего каждый домен может рассматриваться как диполь. При отсутствии внешнего поля области спонтанной поляризации располагаются так, что результирующий вектор поляризации сегнетоэлектрика равен нулю. При внесении кристалла сегнетоэлектрика во внешнее поле происходит ориентация дипольных моментов доменов, и весь кристалл оказывается поляризованным. В достаточно сильном электрическом поле ориентация всех доменов может быть полностью завершена (состояние A на рис. 1.24), P_H -вектор поляризации сегнетоэлектрика при насыщении. При уменьшении напряженности E внешнего поля из состояния насыщения A до нулевого значения (состояние C на рис. 1.24) поляризация в сегнетоэлектрике частично сохраняется из-за того, что многие домены сохраняют созданную электрическим полем ориентацию; P_0 - остаточная поляризация сегнетоэлектрика. Для устранения остаточной поляризации в сегнетоэлектрическом образце его необходимо поместить в электрическое поле с противоположным направлением вектора напряженности (состояние D на рис. 1.24). Напряженность поля E_K , необходимая для устранения остаточной поляризации, называется *коэрцитивной силой*.

Таким образом, для сегнетоэлектриков характерно явление *гистерезиса*, при котором процесс создания поляризации не совпадает с процессом снятия поляризации.

При циклических изменениях внешнего поля зависимость P от E изображается замкнутой кривой (рис. 1.24), называемой *петлей гистерезиса*.

Вследствие доменной структуры сегнетоэлектрики обладают большой диэлектрической проницаемостью ϵ ($10^3 - 10^4$), что позволяет создавать малогабаритные конденсаторы.

Для сегнетоэлектриков характерно наличие предельной температуры – *точки Кюри*, выше которой спонтанная поляризация исчезает и сегнетоэлектрик становится обычным диэлектриком.

Если подвергнуть образец сегнетоэлектрика одностороннему сжатию вдоль направления остаточной поляризации, то уменьшается расстояние между центрами положительного и отрицательного зарядов в каждой элементарной кристаллической ячейке, уменьшается и остаточная поляризация в целом. Вследствие этого изменяется разность потенциалов между гранями образца, перпендикулярными направлению силы. При растяжении образца остаточная поляризация и соответствующая ей поверхностная

плотность зарядов на гранях увеличивается, что приводит к возникновению разности потенциалов противоположного знака.

Явление возникновения поляризационных зарядов при деформации кристалла называют *прямым пьезоэлектрическим эффектом*. Существует и *обратный пьезоэффект* – деформация пьезоэлектрика, помещенного в электрическое поле. Обратный пьезоэффект объясняется тем, что под действием поля элементарные ячейки удлиняются или укорачиваются, а это приводит к макроскопической деформации образца. Прямой и обратный пьезоэффект широко применяют в практике для преобразования механических колебаний в электрические и наоборот. Пьезоэлемент находится в головке современного электрофона для воспроизведения грамзаписи, в пьезоэлектрических микрофонах и телефонах, в эхолотах, гидролокаторах, в тензометрах –измерителях давлений и механических напряжений и т.п.

Глава 2. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

2.1 Понятие об электрическом токе. Электродвижущая сила источника тока

Под *электрическим током* понимают всякое упорядоченное движение электрических зарядов. Носители заряда принимают участие в тепловом хаотическом движении с некоторой скоростью \bar{v} и в отсутствие электрического поля. Но в этом случае через произвольную площадку, проведённую мысленно в проводнике, проходит в обе стороны в среднем одинаковое количество носителей. При наличии же внешнего электрического поля на хаотическое движение зарядов со скоростью \bar{v} накладывается упорядоченное движение со скоростью \bar{u} . Электрический ток, возникающий в проводнике вследствие того, что в нём создаётся электрическое поле, называется *током проводимости*. Основной характеристикой тока проводимости является *сила тока* – скалярная величина, равная отношению заряда q , переносимому носителями через рассматриваемую поверхность, например, через поперечное сечение проводника, ко времени t , за которое этот перенос проходит:

$$I = \frac{q}{t}. \quad (2.1.1)$$

В случае неравномерного движения зарядов вводится понятие *среднего тока* в течение некоторого промежутка времени Δt :

$$I_{cp} = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad (2.1.2)$$

где Δq – заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время Δt . В случае переменных токов *мгновенное значение силы тока* определяется пределом, к которому стремится среднее значение тока, когда время, за которое оно определяется, стремится к нулю:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} I_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}, \quad (2.1.3)$$

т.е. мгновенный ток численно равен производной по времени от заряда. За единицу силы тока принимается 1 А (ампер).

Электрический ток может быть распределён неравномерно по сечению проводника. В этом случае ток принято характеризовать *плотностью тока* \bar{j} . Этот вектор численно равен заряду, протекающему в единицу времени через единичную площадку, установленную перпендикулярно перемещению зарядов:

$$\bar{j} = \frac{dq}{dtdS_{\perp}}. \quad (2.1.4)$$

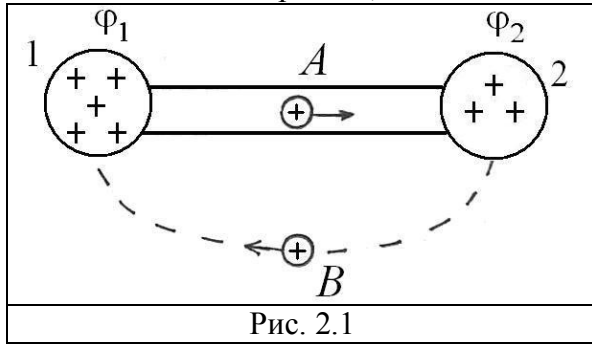
Учитывая формулу (2.1.3), для плотности тока получим выражение:

$$\bar{j} = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (2.1.5)$$

Направление вектора плотности тока \bar{j} совпадает с направлением упорядоченного движения положительных зарядов. Плотность тока измеряется в $\frac{A}{m^2}$.

Для появления и существования электрического тока необходимо выполнение некоторых условий. Во-первых, необходимо наличие в данной среде электрических зарядов, которые могли бы в ней свободно перемещаться. Такими зарядами в металлах являются электроны проводимости; в жидкостях – положительные и отрицательные ионы; в газах – ионы и электроны. Во-вторых, для существования тока необходимо наличие в данной среде электрического поля, энергия которого затрачивалась бы на перемещение зарядов. Для того, чтобы ток был длительным, энергия электрического поля должна

пополняться за счёт устройства, в котором какой-либо вид энергии непрерывно преобразовывался бы в энергию электрического поля. Таким устройством является источник тока. В-третьих, необходимо наличие замкнутой электрической цепи.



Рассмотрим это более подробно. Пусть имеется два проводника 1 и 2 в виде шаров, заряженных до потенциалов Φ_1 и Φ_2 , причём $\Phi_1 > \Phi_2$ (рис. 2.1). Соединим шары проводником А. Положительные заряды будут перемещаться по проводнику от шара 1 с большим потенциалом к шару 2 с меньшим потенциалом. Однако это перемещение зарядов будет продолжаться до тех пор, пока

потенциалы шаров не выровняются. Другими словами, электрический ток в проводнике А будет кратковременным. Для того, чтобы поддерживать ток достаточно длительное время необходимо от шара 2 с меньшим потенциалом непрерывно отводить переносимые сюда током положительные заряды, а к шару 1 с большим потенциалом их подводить по пути: 2-В-1, т.е. необходимо осуществить круговорот зарядов, при котором они двигались бы по замкнутому пути. Поэтому в замкнутой цепи наряду с участком 1-А-2, на котором положительные заряды движутся под действием электрического поля в сторону убывания потенциала, должен быть участок 2-В-1, на котором перенос положительных зарядов происходит в направлении возрастания потенциала, то есть против сил электрического поля. Перемещение носителей зарядов на этом участке возможно лишь с помощью сил *неэлектрического* происхождения, называемых *сторонними силами*. Это могут быть механические силы, химические, механические и т.п.

Сторонние силы создаются благодаря источнику тока, основной характеристикой которого является *электродвижущая сила*. Под электродвижущей силой (ЭДС) понимается физическая величина, численно равная отношению работы A_{cm} , совершаемой сторонними силами по перемещению заряда q , к величине этого заряда:

$$\varepsilon = \frac{A_{cm}}{q}. \quad (2.1.6)$$

Единица измерения ЭДС та же, что и потенциала – вольт.

Стороннюю силу \vec{F}_{cm} , действующую на заряд q , формально можно представить по аналогии с электростатической силой:

$$\vec{F} = q\vec{E}_{cm}, \quad (2.1.7)$$

где \vec{E}_{cm} - напряжённость формально введённого поля сторонних сил. Элементарную работу сторонних сил можно записать в виде:

$$dA = \vec{F}_{cm} d\vec{l} = q\vec{E}_{cm} d\vec{l},$$

где $d\vec{l}$ - элементарное перемещение заряда. Работу сторонних сил над зарядом q на всём протяжении замкнутой цепи можно выразить следующим образом:

$$A = \oint_l \vec{F}_{cm} d\vec{l} = q \oint_l \vec{E}_{cm} d\vec{l}. \quad (2.1.8)$$

Подставляя это выражение в формулу (2.1.6), получим:

$$\varepsilon = \oint_l \vec{E}_{cm} d\vec{l}. \quad (2.1.9)$$

Таким образом, ЭДС, действующая в замкнутой цепи, численно равна циркуляции вектора напряжённости поля сторонних сил. ЭДС, действующая на конечном участке 1-2, очевидно, равна:

$$\varepsilon_{12} = \int_1^2 E_{cm} dl. \quad (2.1.10)$$

По своему физическому смыслу ЭДС источника тока численно равна работе сторонних сил по перемещению единичного заряда. Согласно, формуле (1.5.3) разность потенциалов численно равна работе электростатических (кулоновских) сил по перемещению единичного заряда:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q}. \quad (2.1.11)$$

Если на участке 1-2 электрической цепи на заряд проводимости действуют одновременно кулоновские и сторонние силы, вводится понятие *падения напряжения* или просто *напряжение* U_{12} . Напряжение показывает, какая работа совершается одновременно кулоновскими и сторонними силами по перемещению единичного заряда на данном участке:

$$U_{12} = \frac{A_{cm}}{q} + \frac{A_{12}}{q} = \varepsilon + (\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.1.12)$$

Если на рассматриваемом участке цепи 1-2 отсутствуют источники тока ($\varepsilon = 0$), то

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (2.1.13)$$

то есть для такого участка 1-2 понятия падения напряжения и разности потенциалов совпадают.

2.2 Закон Ома

Выделим в замкнутой электрической цепи (рис. 2.2) *однородный* участок 1-2. Участок называется однородным, если он состоит из различных по своим свойствам металлических проводников и на нём отсутствуют источники тока. Основной характеристикой однородного участка является *сопротивление* проводника R . Величина сопротивления проводника зависит от его формы, размеров, а также от свойств материала, из которого он изготовлен. Для однородного цилиндрического проводника:

$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (2.2.1)$$

где l - длина проводника, S - площадь поперечного сечения, ρ - *удельное сопротивление* проводника, которое показывает, каким сопротивлением обладает проводник длиной 1 м и площадью сечения 1 м^2 . Единицей измерения удельного сопротивления является $1 \text{ Ом} \cdot \text{м}$.

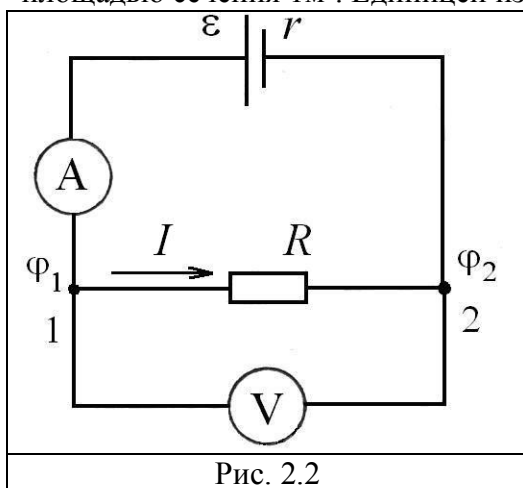


Рис. 2.2

Опыт показывает, что сила тока в однородном участке цепи прямо пропорциональна разности потенциалов, приложенной к этому участку, и обратно пропорциональна сопротивлению этого участка:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{R}, \quad (2.2.2)$$

Учитывая, что для однородного участка справедлива формула (2.1.13), получим:

$$I = \frac{U_{12}}{R}. \quad (2.2.3)$$

Эта формула выражает *закон Ома для однородного участка цепи*, записанный в интегральной форме. Закон Ома можно записать так же в дифференциальной форме. Для этого выделим в окрестности некоторой точки внутри однородного проводника элементарный цилиндрический объём так, чтобы его образующие были параллельны вектору плотности тока \vec{j} в данной точке (рис.2.3) проводника. Для данного элементарного участка проводника закон Ома можно записать в виде:

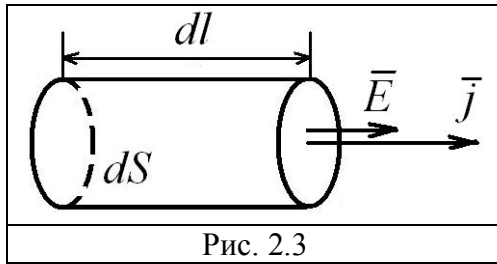


Рис. 2.3

$$dI = \frac{dU}{dR}, \quad (2.2.4)$$

где dU – напряжение приложенное к цилиндру $dU = Edl$, $dR = \rho \frac{dl}{dS}$. На основании формулы (2.2.4) найдём:

$$j = \frac{1}{\rho} E, \quad (2.2.5)$$

или

$$j = \sigma E, \quad (2.2.6)$$

где $\sigma = \frac{1}{\rho}$ – величина, обратная удельному сопротивлению, называется *удельной электропроводностью* проводника. Формулы (2.2.5) и (2.2.6) выражают закон Ома для однородного участка цепи, записанного в дифференциальной форме: *плотность тока в некоторой точке однородного проводника прямо пропорциональна напряжённости поля в этой точке и удельной электропроводности.*

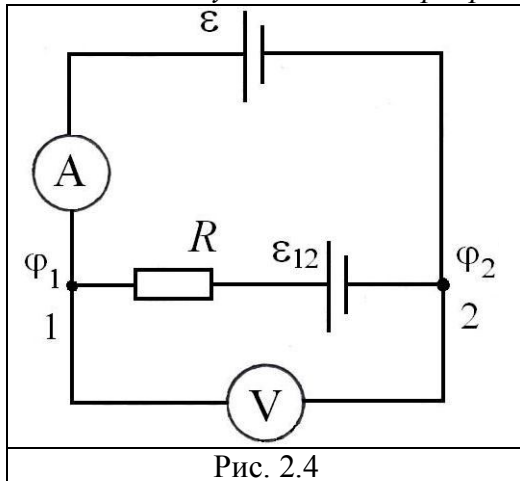


Рис. 2.4

Рассмотрим теперь неоднородный участок 1-2 неоднородной цепи (рис.2.4), который включает в себя сопротивление R и источник тока с ЭДС ε_{12} . Если напряжение на неоднородном участке 1-2 равно U_{12} , то согласно закона Ома (2.2.3) имеем:

$$I = \frac{U_{12}}{R}. \quad (2.2.7)$$

Учитывая выражение (2.1.12), получим выражение:

$$I = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}}{R}, \quad (2.2.8)$$

которое соответствует *закону Ома для неоднородного участка цепи*. Это выражение можно записать в виде:

$$IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_{12}. \quad (2.2.9)$$

Рассмотрим замкнутую цепь постоянного тока (рис. 2.2). ЭДС источника равна ε , его внутреннее сопротивление r , сопротивление внешнего участка цепи (нагрузки) R , сопротивлением проводов пренебрегаем. Ток течёт в направлении, указанном стрелкой.

По закону Ома для внешнего участка цепи 1-2 имеем:

$$IR = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Внутренний участок цепи является неоднородным: он содержит ЭДС ε , которое имеет внутреннее сопротивление r . На основании (2.2.9) закон Ома для этого участка запишется в виде:

$$Ir = (\varphi_2 - \varphi_1) + \varepsilon.$$

Сложив оба равенства, получим:

$$IR + Ir = \varepsilon.$$

Откуда имеем:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (2.2.10)$$

Эта формула выражает *закон Ома для полной цепи*: *сила тока в полной цепи равна электродвижущей силе источника тока, деленной на сумму сопротивлений внешнего и внутреннего участков цепи.*

2.3 Соединение проводников электрической цепи

Различают последовательное и параллельное соединение проводников.

Последовательное соединение. При последовательном соединении проводников (рис. 2.5) сила тока во всех проводниках одинакова:

$$I = I_1 = I_2 = \dots = I_n. \quad (2.3.1)$$

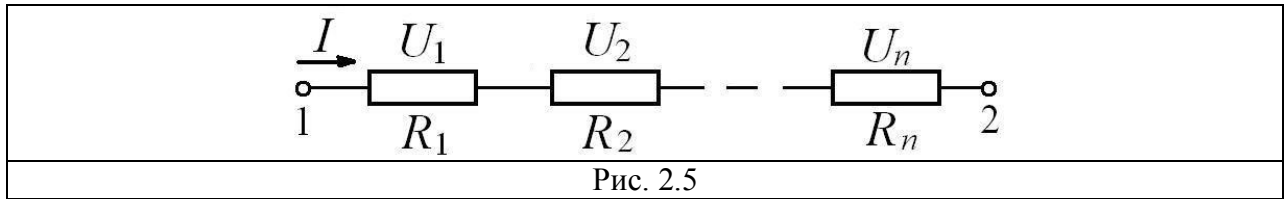


Рис. 2.5

Измерив напряжение U на всей цепи, а затем на каждом из её участков, можно установить, что

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n. \quad (2.3.2)$$

Применяя закон Ома для участка цепи по всей внешней цепи, сопротивление которой R , и к каждому из последовательно соединённых проводников R_1, R_2, \dots, R_n , получим:

$$U = IR; U_1 = IR_1; U_2 = IR_2, \dots, U_n = IR_n. \quad (2.3.3)$$

Отсюда с учётом соотношения (2.3.2) следует:

$$IR = IR_1 + IR_2 + \dots + IR_n,$$

или

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (2.3.4)$$

При последовательном соединении полное сопротивление цепи равно сумме сопротивлений всех его отдельных проводников.

Из формул (2.3.3) следует, например, что

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1}{R_2}. \quad (2.3.5)$$

Напряжения на последовательно соединённых проводниках распределяются пропорционально их сопротивлениям.

При *параллельном соединении* проводников (рис. 2.6) напряжения U_1, U_2, \dots, U_n на них одинаковы и равны напряжению на всей цепи:

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n \quad (2.3.6)$$

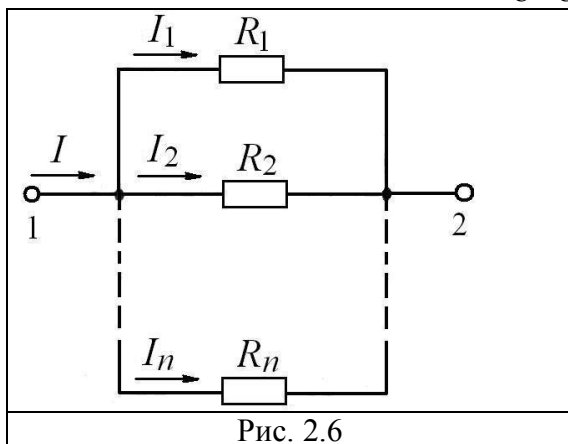


Рис. 2.6

Измерив силу тока I в неразветвлённой цепи и в каждой её ветви: I_1, I_2, \dots, I_n получим:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (2.3.7)$$

Обозначим полное сопротивление разветвлённой цепи (между точками 1 и 2) через R , а сопротивления каждого проводника через R_1, R_2, \dots, R_n . Из закона Ома для участка цепи следует:

$$I = \frac{U}{R}; I_1 = \frac{U}{R_1}; I_2 = \frac{U}{R_2}, \dots, I_n = \frac{U}{R_n}. \quad (2.3.8)$$

Отсюда с учётом соотношения (2.3.7)

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (2.3.9)$$

получаем:

Величина, обратная сопротивлению всего разветвлённого участка цепи, равна сумме величин, обратных сопротивлениям каждого из параллельно соединённых проводников.

Из соотношений (2.3.8) можно, например, получить:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (2.3.10)$$

Силы токов в проводниках, соединённых параллельно, обратно пропорциональны их сопротивлениям.

2.4 Работа и мощность постоянного электрического тока

Если по проводнику сопротивлением R в течение времени t протекает постоянный ток, то работа сил электрического поля (или работа электрического тока) по перемещению заряда q равна:

$$A = qU, \quad (2.4.1)$$

где $U=IR$ – падение напряжения на данном проводнике. Учитывая, что согласно формуле (2.1.1) $q=It$, найдём:

$$A = IUt = I^2 Rt = \frac{U^2 t}{R}. \quad (2.4.2)$$

Мощность P электрического тока равна:

$$P = \frac{A}{t} = I^2 R = \frac{U^2}{R} = IU. \quad (2.4.3)$$

Единицей работы электрического тока в СИ является *джоуль*, единицей мощности – *ватт*:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В}; \quad 1 \text{ Вт} = \frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ с}} = 1 \text{ А} \cdot 1 \text{ В}.$$

Для расчётов работы и мощности тока пригодны любые выражения из соотношений (2.4.2) и (2.4.3). Если же мы хотим сравнить, в каком из резисторов R_1 и R_2 выделится большая мощность (совершится большая работа), то следует учесть способы соединения этих резисторов. При последовательном соединении резисторов сила тока в них одинакова; по формуле $P = I^2 R$ видим, что большая мощность выделится у резистора с большим сопротивлением. При параллельном же соединении эти резисторы будут находиться под одинаковым напряжением. Поэтому согласно формуле $P = \frac{U^2}{R}$ большая мощность выделится на резисторе с меньшим сопротивлением.

Если электрический ток протекает в цепи, где не происходят химические реакции и не совершается механическая работа, то энергия электрического поля превращается во внутреннюю энергию проводника и его температура возрастает. Путем теплообмена эта энергия в форме теплоты передаётся окружающим более холодным телам. Из закона сохранения энергии следует, что количество теплоты, выделяемой в проводнике, равно работе электрического тока:

$$Q = A = I^2 Rt = \frac{U^2 t}{R}. \quad (2.4.4)$$

Этот закон называется *законом Джоуля – Ленца*, записанный в интегральной форме. Тепловое действие электрического тока находит широкое применение в быту и технике: лампы накаливания, электрические плиты, кипятильники, печи для плавления металлов и полупроводников и т.д.

От формулы (2.4.4), определяющей количество теплоты, выделяемое во всём проводнике, можно перейти к выражению, характеризующему выделение теплоты в различных точках проводника. Для нахождения дифференциальной формы записи закона Джоуля – Ленца выделим в проводнике элементарный объём в виде цилиндра, образующие которого совпадают с вектором плотности тока (рис.2.3). Согласно закону

Джоуля – Ленца за время dt в рассматриваемом элементарном объёме проводника выделяется теплота:

$$dQ = dI^2 dR dt. \quad (2.4.5)$$

Учитывая, что $dI = j dS$, $dR = \rho \frac{dl}{dS}$, найдём

$$dQ = \rho j^2 dS dl dt$$

или

$$dQ = \rho j^2 dV dt, \quad (2.4.6)$$

где, $dV = dS dl$ - величина элементарного объёма проводника. Количество теплоты dQ , отнесённое к единице времени и к единице объёма проводника назовём *удельной тепловой мощностью тока*:

$$\omega = \frac{dQ}{dt dV} = \frac{dP}{dV}. \quad (2.4.6)$$

Учитывая выражение (2.4.6), найдём:

$$\omega = \rho j^2. \quad (2.4.7)$$

Воспользовавшись известными соотношениями: $\rho = \frac{1}{\sigma}$; $j = \sigma E$, получим

$$\omega = \sigma E^2. \quad (2.4.8)$$

Выражения (2.4.7) и (2.4.8.) представляют собой дифференциальную запись закона Джоуля – Ленца. Единицей измерения удельной тепловой мощности является: $1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^3}$.

2.5 Коэффициент полезного действия источника тока

Рассмотрим замкнутую электрическую цепь (рис.2.2), состоящую из источника тока с ЭДС ε и внутренним сопротивлением r , а так же внешней цепи, полное сопротивление которой равно R . Сопротивлением подводящих проводов будем пренебрегать. Согласно закону Ома для полной цепи имеем:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r}. \quad (2.5.1)$$

Полезная мощность, выделяемая на внешнем участке цепи, то есть на нагрузке, согласно формуле (2.4.3) равна:

$$P = IU = I^2 R, \quad (2.5.2)$$

где $U = IR$ - падение напряжения на нагрузке. С учётом формулы (2.5.1) получим:

$$P = \frac{\varepsilon^2 R}{(R + r)^2}. \quad (2.5.3)$$

Исследуем, как изменяется ток в цепи и величина полезной мощности, выделяемой в нагрузке, от величины внешнего сопротивления R .

Во-первых, при $R \rightarrow \infty$ (т.е. когда цепь разомкнута) получаем: $I=0$ и $P=0$. Во-вторых, при $R \rightarrow 0$ (так как сопротивление нагрузки равно нулю, мы имеем *короткое замыкание* цепи) ток в цепи достигает максимального значения:

$$I_{\text{к.з.}} = \frac{\varepsilon}{r} \quad (2.5.4)$$

которое называется *током короткого замыкания*. Согласно формулам (2.5.2) и (2.5.3) при $R \rightarrow 0$ полезная мощность также стремится к нулю: $P=0$. Из этих рассуждений следует, что при некотором соотношении между R и r полезная мощность, выделяемая на нагрузке, имеет максимальное значение. Для нахождения максимума функции (2.5.3) продифференцируем её по R (считая $r = \text{const}$ и $\varepsilon = \text{const}$) и приравняем производную к нулю:

$$\frac{dP}{dR} = \varepsilon^2 \frac{d}{dR} \left[\frac{R}{(R+r)^2} \right] = \varepsilon^2 \frac{(R-r)}{(R+r)^3} = 0$$

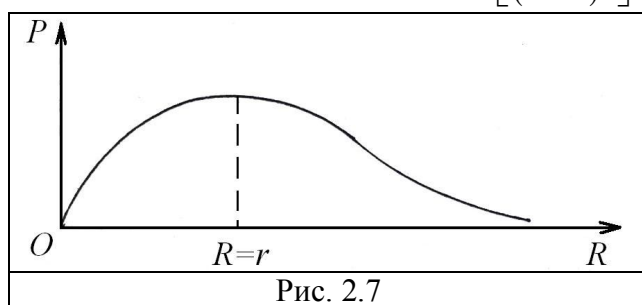


Рис. 2.7

Данное выражение выполняется, если $(R-r)=0$. Следовательно, полезная мощность, развиваемая источником тока в нагрузке, будет максимальной, если сопротивление R внешней цепи равно внутреннему сопротивлению r источника тока: $R=r$. Такая нагрузка называется *согласованной*. На рис.2.7. показана графическая зависимость полезной

мощности от сопротивления нагрузки.

При прохождении тока по замкнутой цепи мощность выделяется также и в самом источнике тока: $P' = I^2 r$. Мощность, выделяемая во всей замкнутой цепи, называется *полной мощностью*:

$$P_o = P + P' = I^2 R + I^2 r = I^2 (R + r). \quad (2.5.5)$$

Учитывая формулу (2.5.1), найдём:

$$P_o = \frac{\varepsilon^2}{R + r}. \quad (2.5.6)$$

Отсюда следует, что при $R \rightarrow \infty$ полная мощность стремится к нулю: $P_o = 0$. При $R=0$ (т.е. при коротком замыкании) полная мощность достигает максимального значения:

$$P_{om} = \frac{\varepsilon^2}{r} = I_{к.з.} \varepsilon, \quad (2.5.7)$$

но эта мощность выделяется в самом источнике тока.

Коэффициентом полезного действия источника тока называется отношение полезной мощности P к полной мощности P_o :

$$\eta = \frac{P}{P_o}. \quad (2.5.8)$$

Учитывая формулы (2.5.2) и (2.5.5) найдём:

$$\eta = \frac{R}{R + r}, \quad (2.5.9)$$

или

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{r}{R}}. \quad (2.5.10)$$

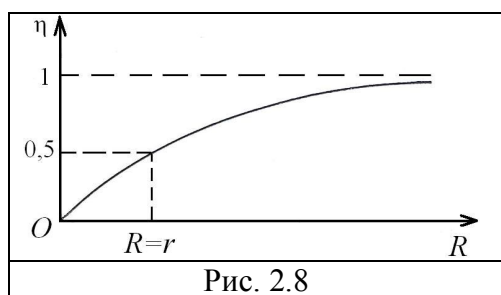


Рис. 2.8

Из полученных формул следует, что при коротком замыкании ($R=0$), $\eta = 0$. При $R = \infty$ (цепь разомкнута) $\eta = 1$. При согласованной нагрузке ($R=r$), когда развивается максимальная полезная мощность КПД источника тока равен $\eta = 0,5$, т.е. $\eta = 50\%$. На рис.2.8 дана графическая зависимость коэффициента полезного действия от сопротивления нагрузки.

2.6 Правила Кирхгофа для разветвлённых электрических цепей

Пользуясь законом Ома, можно рассчитать силу тока на любом участке цепи. Проще всего рассчитывается сила тока в том случае, если внешняя цепь состоит только из однородных участков. Расчёты разветвлённых цепей, содержащих неоднородные участки цепи, значительно сложнее. Для упрощения расчета таких цепей Г.Р. Кирхгофом были созданы специальные правила, называемые *правилами Кирхгофа*.

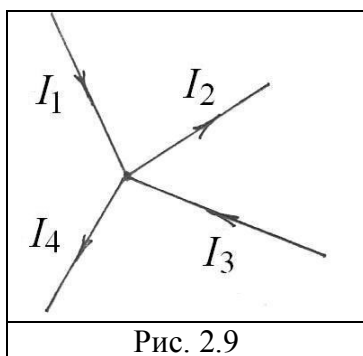


Рис. 2.9

Первое правило относится к узлам цепи. Узлом называется точка электрической цепи, в которой сходится более, чем два проводника (рис. 2.9). Первое правило Кирхгофа гласит: *алгебраическая сумма токов для каждого узла равна нулю, т.е.*

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0, \quad (2.6.1)$$

где n – число проводников, сходящихся в узле, а I_i – токи в проводниках. При этом токи, подходящие к узлу, считаются положительными, а отходящие от него – отрицательными. В частности, для узла изображённого на рис. 2.9 имеем:

$$I_1 - I_2 + I_3 - I_4 = 0.$$

Второе правило Кирхгофа состоит в следующем: *в любом замкнутом произвольно выбранном контуре разветвлённой электрической цепи алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивления R_i соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС ε_k , действующих в этом контуре:*

$$\sum_{i=1}^{n_1} I_i R_i = \sum_{k=1}^{n_2} \varepsilon_k, \quad (2.6.2)$$

где n_1 – число отдельных участков, на которые разбит контур, n_2 – число ЭДС, действующих в данном контуре. При составлении уравнений (2.6.2) необходимо условиться о направлении обхода контура и знаках сил токов I_i и ЭДС ε_k . За направление обхода каждого контура принято принимать направление обхода по часовой стрелке. Все токи I_i , совпадающие по направлению с обходом контура, считаются положительными, токи I_i , не совпадающие с направлением обхода контура, считаются отрицательными. ЭДС ε_k источника тока, относящаяся к данному контуру, считаются положительными, если они создают собственный ток, направленный в сторону обхода контура. В противном случае ЭДС считается отрицательной. Другими словами, ЭДС считаются положительными, если при обходе контура по часовой стрелке они встречаются от минуса (-) к плюсу (+), в противном случае ЭДС – отрицательны.

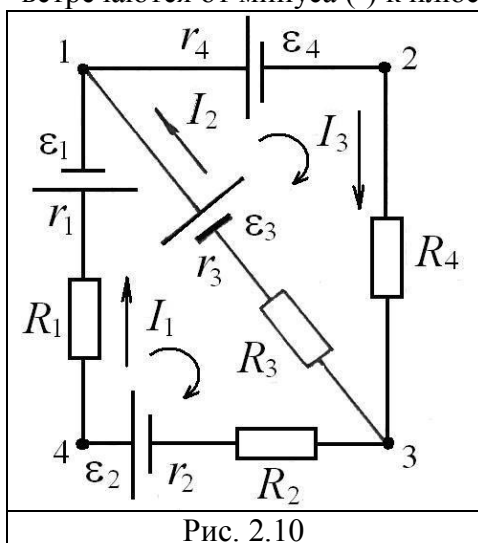


Рис. 2.10

В качестве примера составим уравнения (2.6.2) для некоторых контуров цепи, изображённой на рис. 2.10.

Для контура: 1-2-3-1 имеем:

$$I_3 r_4 + I_3 R_4 + I_2 R_3 + I_2 r_3 = \varepsilon_3 - \varepsilon_4. \quad (2.6.3)$$

Для контура: 1-3-4-1 имеем:

$$I_1 R_2 + I_1 R_1 + I_1 r_2 + I_1 r_1 - I_2 r_3 - I_2 R_3 = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3. \quad (2.6.4)$$

При составлении уравнений (2.6.1) и (2.6.2) следует руководствоваться следующим:

1. Произвольно выбрать и обозначить на схеме направление токов во всех ветвях (участках цепи между соседними узлами) цепи.
2. Записать для m -узлов, имеющих в схеме, $(m-1)$ уравнение (2.6.1). Так как в

схеме (рис. 2.10) два узла, то уравнение (2.6.1) следует записать только для одного узла.

3. Выделить в цепи произвольные замкнутые контуры и записать для них систему уравнений (2.6.2). Если в разветвлённой цепи p -ветвей и m -узлов, то число независимых уравнений (2.6.2) равно: $p-m+1$. Так как в схеме (рис. 2.10) $p=3$; $m=2$, то число независимых уравнений (2.6.2) равно: $p-m+1=2$, т.е. (2.6.3) и (2.6.4).

2.7 Электрический ток в металлах

Высокая электропроводность металлов обусловлена тем, что кроме электронов, связанных с ядрами атомов, в металлах имеются *свободные электроны*, оторванные от атомов. Эти свободные электроны могут двигаться хаотично в пространстве между ионами кристаллической решётки. Электронная теория проводимости металлов была создана П. Друде в начале прошлого века и получила дальнейшее развитие в работах Г.Лоренца. Предположение о том, что носителями тока в металлах являются электроны, было экспериментально доказано в опытах, поставленных в 1913г. российскими физиками Л.И Мандельштамом и Н.Д. Папалекси и в 1916г. Английскими физиками Р.Толменом и Т. Стюартом. В основе этих опытов лежит предположение о том, что если металлический проводник привести в движение и резко затормозить, то свободные электроны должны по инерции продолжать движение относительно ионной решётки. Следовательно, в проводнике при его быстрой остановке должен возникнуть кратковременный ток.

Указанные опыты позволили определить удельный заряд $\frac{q}{m}$ носителей тока в металлах.

Вычисленная величина удельного заряда $\frac{q}{m}$ оказалась близкой к величине $\frac{e}{m}$ характерной для электрона (e - заряд электрона, m - его масса).

В классической электронной теории свободные электроны металла уподобляются идеальному молекулярному газу и рассматриваются как своеобразный *электронный газ*. Полагая, что на электронный газ можно распространить результаты молекулярно-кинетической теории, оценим среднюю скорость хаотического теплового движения электронов:

$$v_{cp} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}, \quad (2.7.1)$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{Дж}{К}$ - постоянная Больцмана, $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг – масса электрона. Для комнатной температуры ($T=300K$), получим: $v_{cp} \approx 10^5 \frac{м}{с}$. Следовательно, скорость теплового движения электронов в сотни раз превышает скорость молекул идеального газа.

При включении внешнего электрического поля на хаотическое тепловое движение, происходящее со скоростью v_{cp} , накладывается упорядоченное движение электронов с некоторой средней скоростью u_{cp} . Оценим величину этой скорости. По определению плотности тока имеем:

$$j = \frac{I}{S} = \frac{q}{St} = \frac{eN}{St}, \quad (2.7.2)$$

где S – площадь поперечного сечения проводника, N – число электронов, проходящих через поперечное сечение проводника за время t , e – величина заряда электрона. Умножим числитель и знаменатель последнего выражения на длину l проводника и учтём, что $Sl=V$ – объём проводника. Получим:

$$j = \frac{eNl}{Vt} = enu_{cp}, \quad (2.7.3)$$

где $u_{cp} = \frac{l}{t}$ - скорость направленного движения электронов по проводнику; $n = \frac{N}{V}$ - концентрация носителей тока. Взяв, например, для меди ($n=10^{29} \text{ м}^{-3}$) предельно допустимую техническими нормами плотность тока $j=107 \text{ А/м}^2$, на основании (2.7.3) найдём:

$$u_{cp} = \frac{j}{en} = \frac{10^7}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{29}} \approx 10^{-3} \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) = 1 \text{ мм/с}.$$

Следовательно, даже при очень больших плотностях тока средняя скорость упорядоченного движения электронов в металле очень мала, она в 10^8 раз меньше средней скорости теплового движения молекул реального газа.

Классическая электронная теория позволяет обосновать закон Ома и найти удельную электропроводность металлов. Действительно, электрическое поле с напряжённостью E действует на каждый свободный электрон с силой $F = eE$. Под действием этой силы электрон приобретает ускорение:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m}. \quad (2.7.4)$$

За время τ между последовательными столкновениями электрона с ионами решетки на длине свободного пробега λ электрон приобретает скорость:

$$u_{\max} = a\tau = \frac{eE\tau}{m}. \quad (2.7.5)$$

При этом считается, что скорость электрона после соударения с ионом равна нулю. Следовательно, средняя скорость упорядоченного движения электрона равна:

$$u_{cp} = \frac{u_{\max}}{2} = \frac{eE\tau}{2m}. \quad (2.7.6)$$

Подставляя эту формулу в выражение (2.7.3) найдём закон Ома:

$$j = \frac{e^2 n \tau}{2m} E = \sigma E, \quad (2.7.7)$$

где величина:

$$\sigma = \frac{e^2 n \tau}{2m} \quad (2.7.8)$$

определяет удельную электропроводность металла.

Отношение средней скорости упорядоченного движения электронов к напряжённости поля, вызывающего это движение, называется *подвижностью* электронов:

$$u_o = \frac{u_{cp}}{E}. \quad (2.7.9)$$

Подвижность носителя тока показывает, какую среднюю скорость направленного движения приобретает носитель в электрическом поле единичной напряжённости.

Подставляя формулу (2.7.6) в выражение (2.7.9), получим:

$$u_o = \frac{e\tau}{2m}. \quad (2.7.10)$$

Учитывая это выражение, формулу (2.7.8) для удельной электропроводности можно записать в виде:

$$\sigma = enu_o. \quad (2.7.11)$$

Таким образом электронная теория позволяет не только обосновать закон Ома, но и найти удельную электропроводность металла. Учитывая, что время свободного пробега электрона равно:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_{cp}},$$

на основании формулы (2.7.8) найдём:

$$\sigma = \frac{e^2 n \lambda}{2 m v_{cp}} \quad (2.7.12)$$

Однако, классическая электронная теория имеет недостатки. Подставив формулу (2.7.1) в последнее выражение, получим соотношение, из которого следует, что $\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{T}}$, а следовательно, сопротивление проводника ($R = \frac{1}{\sigma}$) будет пропорционально \sqrt{T} , т.е. $R \sim \sqrt{T}$. Но эксперимент показывает, что сопротивление металлов прямо пропорционально температуре: $R \sim T$.

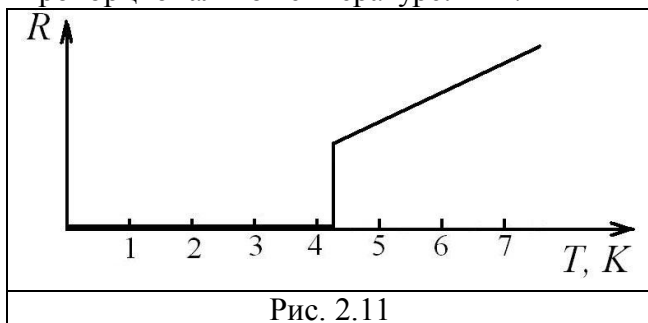


Рис. 2.11

Классическая электронная теория не позволяет объяснить явление сверхпроводимости. Это явление было открыто в 1911 г. Камерлинг-Оннесом. Исследуя сопротивление ртути при её постоянном охлаждении, он обнаружил, что при температуре 4,12 К сопротивление ртути скачком падало до нуля (рис.2.11). Это явление наблюдается у ряда других

металлов и их сплавах. Явление полной потери металлом электрического сопротивления при определённой температуре, называемой критической, получило название *сверхпроводимости*. В последние годы обнаружены материалы, у которых сверхпроводимость наступает при более высоких температурах – примерно 100К. Это температура жидкого азота. Технология получения жидкого азота хорошо разработана и стоит он недорого, по сравнению с жидким гелием, который используется для получения температур, близких к абсолютному нулю.

В энергетике сверхпроводящие кабели способны передавать огромную энергию на большие расстояния без потерь. Сверхпроводящие обмотки электромагнитов дают возможность получать сверхмощные магнитные поля с индукцией до 10 – 20 Тл. Сверхпроводимость предполагается использовать при создании скоростных поездов на «магнитной подушке» и др.

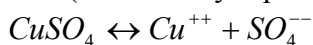
2.8 Электрический ток в растворах и расплавах электролитов

Электрический ток в металлах никакими химическими процессами не сопровождается. Объясняется это тем, что носителями тока в металлах являются электроны. Но существует такой класс проводников, в которых электрический ток всегда сопровождается определёнными химическими изменениями: растворы солей, кислот и оснований, то есть растворы электролитов, а также их расплавы.

Носителями тока в электролитах служат ионы, на которые диссоциируют (расщепляются) в растворе молекулы растворённого вещества. Например, молекула соляной кислоты HCl диссоциирует в растворе на положительно заряженный ион водорода H^+ и отрицательно заряженный ион Cl^- :



Диссоциация сернокислой меди (медного купороса) протекает по схеме:



Следовательно, растворы электролитов всегда содержат некоторое число ионов: катионов (положительных ионов) и анионов (отрицательных ионов). Пока электрическое поле отсутствует, ионы совершают беспорядочное тепловое движение. Но в электрическом поле ионы начинают дрейфовать в направлении действующей на них силы. Для наблюдения прохождения тока через электролит опускают угольные электроды,

например, в раствор медного купороса ($CuSO_4$). Подают на электроды электролитической ванны напряжение от источника постоянного тока и по амперметру судят о величине тока, проходящего через электролит. В электрическом поле ионы, подобно электронам в металлах, начинают дрейфовать в направлении действующей на них силы: катионы – к катоду, анионы – к аноду (рис. 2.12). Достигнув соответствующего электрода, ионы отдают ему избыточные или получают недостающие электроны и превращаются в нейтральные атомы или молекулы. В зависимости от химической природы электролита и электродов нейтрализовавшиеся ионы либо выделяются на электродах, либо вступают в реакцию с электродами или растворителем.

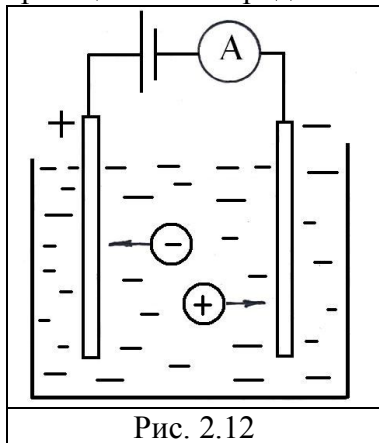


Рис. 2.12

Таким образом, прохождение тока через электролит сопровождается выделением на электродах составных частей электролита. Это явление получило название *электролиза*.

Например, в процессе электролиза водного раствора соляной кислоты HCl на электродах выделяются газообразные хлор и водород. При электролизе медного купороса на катоде выделяются атомы меди. Нейтральная группа атомов SO_4 реагирует часто с водой; в результате чего на аноде выделяется кислород.

Электронная теория позволяет рассчитать массу веществ, выделяющихся на электродах при электролизе. Она равна произведению массы одного иона m_o на число ионов N , которые осели на электроде:

$$m = m_o N, \quad (2.8.1)$$

Масса одного иона равна $m_o = \frac{\mu}{N_A}$, где μ – молярная масса, N_A – число Авогадро.

Число ионов N , осевших на электроде, можно выразить через заряд q , прошедший через электролит и заряд одного иона: $q_o = ez$, где e – элементарный электрический заряд, z – валентность иона: $N = \frac{q}{q_o} = \frac{q}{ez}$.

Таким образом, на основе выражения (2.8.1) получаем:

$$m = \frac{\mu}{N_A ez} q \quad (2.8.2)$$

Учитывая то, что $q = It$, где I – ток, проходящий через электролит, t – время, найдём:

$$m = \frac{\mu}{N_A ez} It. \quad (2.8.3)$$

Величины N_A и e являются универсальными постоянными, а μ и z постоянны для данного вещества. Поэтому выражение $\frac{\mu}{N_A ez}$ – величина постоянная для данного вещества.

Из формул (2.8.2) и (2.8.3) следует, что *масса вещества, выделившегося на электроде, пропорциональна заряду, прошедшему через раствор, или, другими словами, пропорциональна силе тока и времени*. Эта зависимость впервые была установлена М.Фарадеем в 30^х годах 19-го века и носит название *закона Фарадея для электролиза*.

Если постоянный множитель в формулах (2.8.2) и (2.8.3) обозначить K :

$$K = \frac{\mu}{N_A ez}, \quad (2.8.4)$$

то закон Фарадея можно записать в виде:

$$m = Kq = KIt.$$

Коэффициент K называется *электрохимическим эквивалентом* данного вещества. Он выражается в (кг/Кл).

Закон Фарадея позволяет определить заряд одновалентного иона, т.е. элементарный заряд. Из формулы (2.8.3) получаем:

$$e = \frac{\mu I t}{m N_A z}. \quad (2.8.5)$$

Следовательно, чтобы определить элементарный заряд e , необходимо в опыте с электролизом, например, медного купороса, определить массу m выделившейся меди, время процесса t и силу тока I в цепи. Тогда, зная молярную массу меди и её валентность, можно вычислить заряд электрона. Опыты, проведённые с различными электролитами, показали, что $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл. Это есть наименьший элементарный электрический заряд, существующий в природе. Любой другой электрический заряд состоит из целого числа элементарных зарядов, т.е. кратен модулю элементарного заряда.

Электролиз получил широкое применение в технике. На явлении электролиза основаны такие распространённые технологические процессы, как *гальваностегия* и *гальванопластика*. Для предохранения металлов от коррозии их поверхность часто покрывают трудно окисляемыми металлами, т.е. производят никелирование или хромирование. Этот процесс называется гальваностегией. Гальваностегию также применяют для покрытия ювелирных изделий тончайшими слоями серебра или золота. С помощью электролиза можно также изготовить рельефные металлические копии предметов. Этот процесс называется гальванопластикой.

На основе электролиза основана *электрометаллургия* – получение щелочных и щелочноземельных металлов (алюминия, магния, бериллия и др.) путём электролиза расплавленных руд. Электролиз также применяется для очистки металлов от примесей, например, рафинирование меди. На явлении электролиза основано получение тяжёлой воды – эффективного замедлителя нейтронов.

2.9 Электрический ток в газах

Газы, в отличие от металлов и электролитов, при обычных условиях состоят в основном из электрически нейтральных атомов и молекул и не содержат свободных носителей электрического тока. Следовательно, при нормальных условиях газы являются изоляторами. Газы становятся проводниками электрического тока, если часть их молекул ионизируется. *Ионизация* молекул газа состоит в расщеплении их на электроны и положительные ионы. Вследствие соединения части освободившихся при ионизации электронов с нейтральными молекулами в газе могут возникать и отрицательные ионы. Наряду с процессом ионизации в газе происходит обратный процесс – *рекомбинация* ионов и электронов. Таким образом, носителями тока в газах являются: положительные и отрицательные ионы, а также электроны.

Ионизация газа может происходить под действием различных внешних факторов. *Термической* ионизацией называется возникновение носителей тока в газе при нагревании его до высокой температуры. Частично или полностью ионизированный газ, в котором плотности положительных и отрицательных зарядов практически одинаковы, называется *плазмой*. Ионизация атомов или молекул под действием света называется *фотоионизацией*. Ионизация газа может также происходить под действием ультрафиолетового, рентгеновского или гамма-излучений.

Так как при обычных условиях газ всегда подвергается действию космических лучей и радиоактивных излучений, то строго говоря в любом газе всегда имеются носители тока. Однако ионизация под действием космических лучей и распада радиоактивных элементов очень мала. Поэтому проводимость газов при обычных условиях близка к нулю. В дальнейшем мы увидим, что присутствие в газах даже малого количества носителей тока

играет важную роль в возникновении проводимости газов в сильных электрических полях.

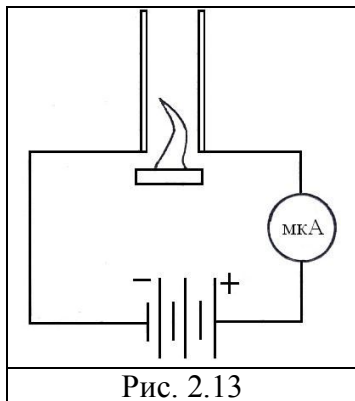


Рис. 2.13

Прохождение электрического тока в газах называется *газовым разрядом*. Для наблюдения газового разряда в воздухе устанавливают две металлические пластинки на небольшом расстоянии друг от друга (рис.2.13) и подают на них высокое напряжение. При обычных условиях отмечают отсутствие тока в воздухе. Вносят в пространство между металлическими пластинками газовую горелку. Отмечают появление тока в газе. Если убрать горелку, выполняющую роль ионизатора, то ток прекращается. Газовый разряд, который возникает под действием внешнего ионизатора и исчезает при прекращении действия ионизатора, называется *несамостоятельным газовым разрядом*.

Исследуем зависимость силы тока при несамостоятельном газовом разряде от напряжения между электродами. Для этого воспользуемся установкой, изображённой на рис.2.14. Газ, находящийся в баллоне, в который впаяны электроды К и А, ионизируется с помощью гамма-лучей. Напряжение, приложенное к электродам, регулируется потенциометром R, а ток измеряется микроамперметром.

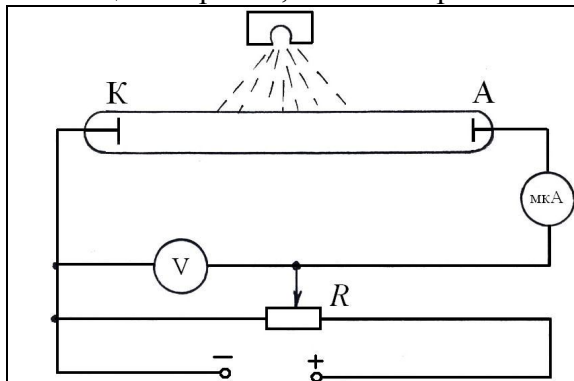


Рис. 2.14

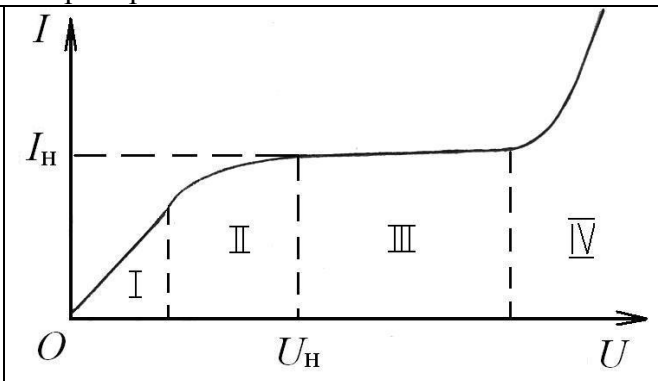


Рис. 2.15

Экспериментальная зависимость силы тока от напряжения при постоянной интенсивности ионизации представлена на рис.2.15. При небольших напряжениях сила тока пропорциональна напряжению (I – область). Объясняется это тем, что концентрация носителей тока постоянна, постоянна и электропроводность газа. Поэтому при малых напряжениях справедлив закон Ома. При дальнейшем увеличении напряжения между электродами линейная зависимость силы тока I от напряжения U нарушается (II область). Объясняется это убывлением концентрации носителей тока вследствие их нейтрализации у электродов, а пополнение ионов и электронов за счёт ионизатора остаётся неизменной. Начиная с некоторого значения напряжения U_n сила тока при несамостоятельном разряде остаётся неизменной несмотря на дальнейшее увеличение напряжения на электродах (III-область). Максимальная сила тока I_n , возможная при данной интенсивности ионизации, называется *током насыщения*. При токе насыщения к электродам каждую секунду прибывает электрический заряд eN_o , где N_o – число пар одновалентных ионов, образующихся в объёме газа под действием ионизатора за одну секунду. Очевидно, что ток насыщения равен: $I_n = eN_o$. Из этой формулы видно, что если увеличить в несколько раз интенсивность ионизации, т.е. число N_o пар ионов, образующихся за секунду в объёме газа, то во столько же раз увеличится ток насыщения. При дальнейшем увеличении напряжения между электродами при прежней интенсивности ионизации сила тока (рис.2.15) снова начинает резко возрастать (IV-область напряжения). Характерной особенностью IV-ой области напряжения является то, что электрический разряд в этой области не прекращается и после прекращения действия внешнего ионизатора.

Электрический разряд в газе, сохраняющийся после прекращения действия внешнего ионизатора, называется *самостоятельным газовым разрядом*. Для его возникновения необходимо, чтобы в результате самого разряда в газе непрерывно происходило образование свободных электрических зарядов. Основным источником свободных зарядов при самостоятельном разряде является *ударная ионизация* молекул газа, суть которой в следующем. При достаточно большом напряжении (IV область напряжения) электроны, возникающие в газе под действием внешнего ионизатора, настолько сильно ускоряются электрическим полем на пути свободного пробега, что, сталкиваясь с нейтральными молекулами, ионизируют их. При этом образуются вторичные электроны и ионы, которые, ускоряясь в свою очередь сильным электрическим полем, ионизируют новые нейтральные молекулы и т.д. Таким образом, число носителей тока, а следовательно, и проводимость газа резко возрастают лавинообразно. В этом состоит причина резкого увеличения электрического тока в начале IV области напряжения (рис. 2.15). Однако, ударная ионизация, производимая одними электронами, недостаточна для поддержания разряда при удалении внешнего ионизатора. Действительно, электроны, разгоняясь в электрическом поле, ионизируют только те молекулы, которые находятся ближе к аноду, по сравнению с местом их собственного возникновения. При прекращении действия внешнего ионизатора, энергия электронов, образовавшихся вблизи анода, недостаточна для ионизации других молекул. В конце концов ударная ионизация и электрический ток в газе прекращаются.

Для возникновения самостоятельного разряда необходимо столь высокое напряжение, чтобы положительные ионы также приобретали способность ионизировать нейтральные молекулы, т.е. порождать вторичные электроны вдали от анода. При этом образуется двухстороннее движение в газе электронов и положительных ионов во всём объёме газа. В этом случае уже внешний ионизатор не играет никакой роли в существовании и поддержании газового разряда, так как число создаваемых им первичных электронов и ионов ничтожно мало по сравнению с числом носителей тока, возникающих при ударной ионизации. Таким образом, увеличивая напряжение между электродами газоразрядной трубки (рис.2.14), можно осуществить переход несамостоятельного разряда в самостоятельный. Этот переход называется *электрическим пробоем газа*, а соответствующее ему напряжение называют *напряжением пробоя* или *напряжением зажигания*.

Из изложенного становится понятным, что для возникновения самостоятельного разряда необходимо, чтобы в нём имелось хотя бы небольшое начальное число свободных зарядов, способных сыграть роль «запала» для пробоя газа. Такие свободные носители тока в газе всегда имеются даже в естественных условиях, так как газ подвергается действию космического излучения и радиоактивного излучения поверхности Земли.

Самостоятельный разряд сопровождается свечением газа. Объясняется это следующим образом. Сталкиваясь с молекулами газа, электроны и ионы, обладающие недостаточной энергией для ионизации молекул, переводят их в возбужденное состояние. Возвращаясь в нормальное состояние, возбуждённые молекулы излучают кванты света.

Световое излучение, попадая на катод, может вызвать фотоэффект, т.е. выбивать из катода фотоэлектроны, которые могут участвовать в образовании ударной ионизации. Вырывание электронов из катода происходит также в результате его нагревания при бомбардировке положительными ионами (термоэлектронная эмиссия) и под действием сильного электрического поля (холодная эмиссия). Электроны, ударяясь об анод, могут выбивать из него положительные ионы.

В зависимости от условий возникновения самостоятельные разряды в газах подразделяются на следующие типы: искровой, коронный, дуговой и тлеющий разряды.

Самостоятельный разряд называется *искровым*, если источник тока не может поддерживать самостоятельный электрический разряд в течение длительного времени. Искровой разряд прекращается через короткий промежуток времени после начала разряда

в результате значительного уменьшения напряжения. Примеры искрового разряда – искры, возникающие при расчёсывании волос, или разряда конденсатора. Самые большие «искры» - молнии, возникают во время грозы.

Коронный разряд возникает в сильно неоднородных электрических полях, образующихся, например, между остриём и плоскостью или между проводом линии электропередачи и поверхностью Земли. Основная особенность коронного разряда заключается в том, что процесс ионизации атомов электронным ударом происходит лишь на небольших расстояниях от одного из электродов в области с высокими значениями напряжённости электрического поля. Свечение в виде «короны» наблюдается вблизи острого электрода. Коронный разряд используется в электрофильтрах для очистки газов, выходящих из топок, от твёрдых примесей.

В 1802г. В.В.Петров обнаружил, что при разведении первоначально соприкасающихся угольных электродов, подключенных к источнику тока, между электродами вспыхивает ослепительное свечение. При горизонтальном расположении электродов нагретый светящийся газ изгибается в виде дуги, в связи с чем данный самостоятельный разряд называется *дуговым разрядом*. Сила тока в дуге может достигать огромных значений (10^3 - 10^4 А) при напряжении в несколько десятков вольт. Вследствие высокой температуры (4000°C) дуга широко используется для сварки и резки металлов. Электрическую дугу применяют в электропечах для плавки стали, а также щелочных и щелочноземельных металлов.

Тлеющий разряд возникает при низких давлениях. Его можно наблюдать в стеклянной трубке длиной около 0,5 м с впаянными у концов плоскими металлическими электродами. На электроды подаётся напряжение в несколько киловольт. При атмосферном давлении ток через трубку не идёт. При понижении давления до 40мм.рт.ст. возникает разряд в виде светящегося извилистого тонкого шнура, соединяющего анод с катодом. По мере понижения давления шнур утолщается и при 5мм.рт.ст. заполняет всё сечение трубки, т.е. устанавливается тлеющий разряд. Цвет свечения разряда зависит от природы газа.

Свечение при тлеющем разряде нашло широкое применение в осветительной технике. Для рекламы, например, используются различные газосветные трубки. Широкое распространение получили лампы дневного света, в которых электрический разряд происходит в парах ртути. Тлеющий разряд нашёл применение в газоразрядных приборах: неоновые лампы, тиратроны, стабилитроны и др.

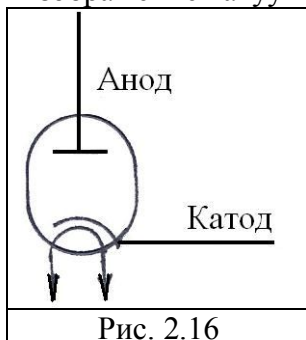
2.10 Электрический ток в вакууме

Если два электрода поместить в герметичный сосуд и удалить из сосуда воздух, то, как показывает опыт, электрический ток в вакууме не возникает. Причина заключается в том, что в вакууме нет заряженных частиц, способных переносить электрические заряды от одного электрода к другому. Однако в вакуумной стеклянной колбе может возникнуть электрический ток, если один из находящихся в ней электродов нагреть до высокой температуры. При нагревании металлического электрода он испускает электроны, которые образуют вокруг него «электронное облако». Это явление получило название – *термоэлектронная эмиссия*.

Явление термоэлектронной эмиссии объясняется тем, что при повышении температуры тела увеличивается кинетическая энергия некоторой части свободных электронов в веществе. Если кинетическая энергия электрона превысит работу выхода, то он может преодолеть действие сил притяжения со стороны положительных ионов и выйти с поверхности тела в вакуум.

На явлении термоэлектронной эмиссии основана работа различных электронных ламп. Простейшей электронной лампой является *вакуумный диод*. Он представляет собой вакуумированный баллон, обычно стеклянный, в котором находятся два электрода – анод и катод. Катодом лампы служит проволоочная спираль с двумя выводами для подключения

к источнику тока, либо цилиндр из тонкой фольги, внутри которого находится спиральная нить накала. Второй электрод – анод – представляет собой металлический диск, находящийся над катодом, либо цилиндр, на оси которого находится катод. Условное изображение вакуумного диода в схемах показано на рис.2.16.



При подключении выводов нити накала к источнику тока катод нагревается и с его поверхности испускаются свободные электроны. При отсутствии электрического поля между катодом и анодом лишь небольшая часть электронов, испускаемых катодом, достигает анода. Большинство вылетевших из катода электронов возвращаются на катод под действием сил электростатического отталкивания со стороны электронов, ранее вылетевших с катода и образующих вокруг него «электронное облако».

При подключении положительного полюса источника постоянного тока к аноду и отрицательного полюса к катоду электроны, испускаемые нагретым катодом, движутся под действием электрического поля через вакуум к аноду – в цепи течёт электрический ток. При изменении полярности источника анодного напряжения на противоположное – электрический ток в лампе отсутствует.

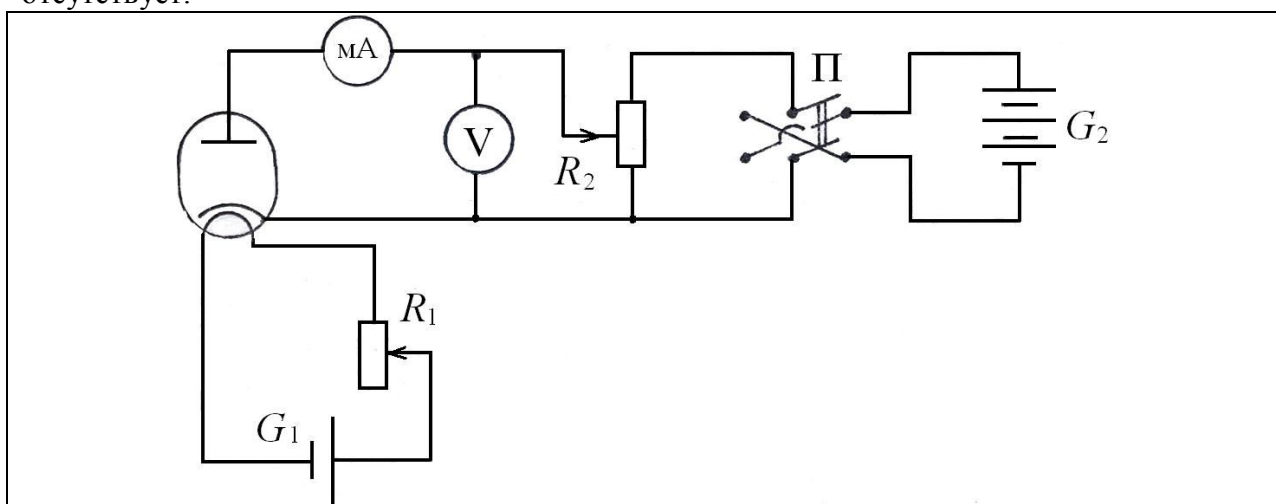


Рис. 2.17

Исследуем зависимость анодного тока от приложенного к лампе анодного напряжения при постоянной температуре катода. Эта зависимость называется вольт-амперной характеристикой. Эти исследования удобно провести с помощью схемы, изображённой на рис.2.17. Источник тока G_1 обеспечивает ток накала катода. Меняя с помощью реостата R_1 ток накала, можно изменять температуру катода. Анодное напряжение обеспечивается источником постоянного тока G_2 . Величина анодного напряжения регулируется с помощью потенциометра R_2 . Переключатель Π позволяет изменять полярность анодного напряжения.

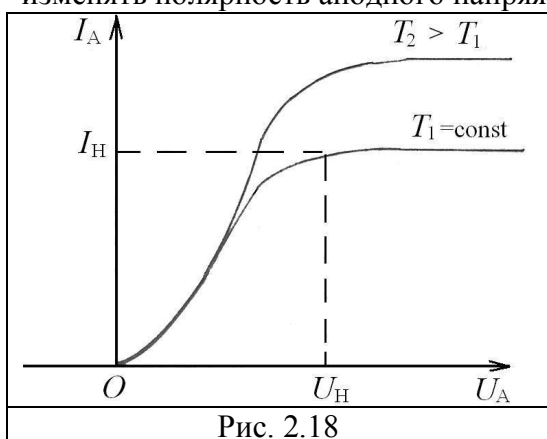
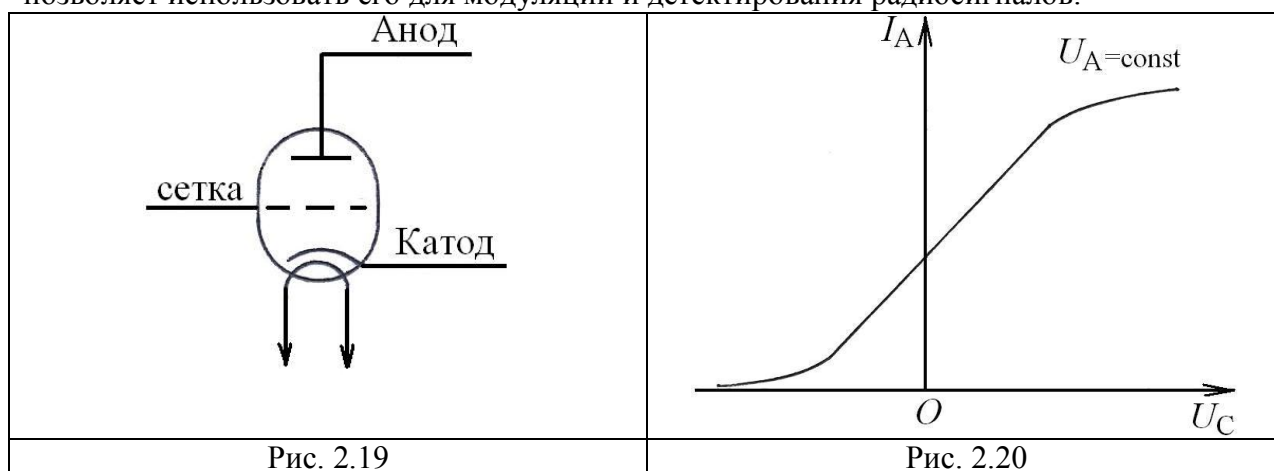


Рис. 2.18

Экспериментальные вольтамперные характеристики при различной температуре катода показаны на рис.2.18. При отрицательных напряжениях на аноде ток в лампе практически отсутствует. При небольших положительных напряжениях на лампе анодный ток возрастает с ростом напряжения. Объясняется это тем, что при малых напряжениях лишь небольшая часть носителей тока «электронного облака» участвует в движении к аноду. При увеличении анодного напряжения возрастает число электронов «облака», которые участвуют в движении к аноду,

возрастает при этом и величина анодного тока. При достижении анодного напряжения значения U_n рост тока прекращается. Объясняется это, тем, что при $U \geq U_n$ электронное облако полностью «рассасывается», то есть все электроны, испускаемые катодом в единицу времени, участвуют в обеспечении тока и все они достигают анода. Максимальное значение анодного тока I_H , возможное при данной температуре катода, называется *током насыщения*. Из рис.2.18 следует, что при увеличении температуры катода возрастает и величина тока насыщения. При малых напряжениях вольтамперные характеристики при различных температурах практически совпадают.

Таким образом, вольтамперная характеристика вакуумного диода *не линейна*. Вакуумный диод обладает односторонней проводимостью электрического тока, а именно: диод пропускает ток только в том случае, когда потенциал анода выше потенциала катода; в противном случае ток в лампе отсутствует. Это свойство позволяет использовать его для выпрямления переменного тока. Вакуумный диод, предназначенный для этой цели, называют *кенотроном*. Нелинейность вольтамперной характеристики лампового диода позволяет использовать его для модуляции и детектирования радиосигналов.



Если между катодом и анодом поместить третий электрод в виде сетки, получится трёхэлектродная лампа – *вакуумный триод* (рис. 2.19). Сетка может быть изготовлена в виде спирали, обвивающей катод. Если на сетку подать небольшой положительный потенциал по отношению к катоду, электроны будут в большем количестве отсасываться от катода. Некоторые из них попадут на сетку, что приведёт к возникновению небольшого сеточного тока, но основная часть электронов пролетит сквозь сетку и достигнет анода. При увеличении положительного сеточного напряжения анодный ток будет возрастать. Отрицательное напряжение на сетке приводит к уменьшению анодного тока. При этом в обоих случаях анодное напряжение U_a постоянно и имеет достаточно большое значение. При дальнейшем увеличении отрицательного напряжения на сетке при $U_a = const$ анодный ток прекращается и лампа оказывается запертой. На рис. 2.20 показана зависимость анодного тока I_A от сеточного напряжения U_c . Из-за близости сетки к катоду небольшие изменения на сетке оказывают сильное влияние на величину анодного тока. Подавая на сетку, например, небольшое синусоидальное напряжение можно получить значительное переменное анодное напряжение. На этом основано применение триода как усилителя различных электрических сигналов. Вакуумные триоды применяются для генерирования электрических сигналов различной частоты и т.п. (см. разд. 5.5).

Глава 3. Магнетизм

Введение

Магнитные явления, как и электрические, были известны с глубокой древности. Однако, природа магнитных взаимодействий долгое время была неизвестной. Казалось даже, что магнитные и электрические явления не имеют между собой ничего общего. Однако, зимой 1819 – 20г.г. Ганс Христиан Эрстед обнаружил магнитное действие проводника с током на магнитную стрелку. Опыт состоял в том, что при пропускании электрического тока по проводнику параллельному стрелке компаса, последняя отклонялась от первоначального направления. Когда же электрический ток пропускаться в обратном направлении, стрелка компаса отклонялась в другую сторону. Опыт Эрстеда показал, что магнетизм является одной из «скрытых форм» электричества. Прошло немного времени и из экспериментальных открытий Эрстеда, Ампера, Фарадея и других выросла классическая теория электромагнетизма, математическую формулировку которой придал Максвелл, а Г.Герц в 1888г. блестяще подтвердил её экспериментально, показав существование электромагнитных волн. Создание А.Эйнштейном специальной теории относительности позволило выявить роль релятивистских эффектов в законах электромагнетизма и установить глубокую связь между электрическими и магнитными явлениями.

3.1 Взаимодействие движущихся электрических зарядов

Из школьного курса физики известно, если по двум параллельным проводникам пропустить токи одинакового направления, то они притянутся друг к другу; если же токи текут по указанным проводникам в противоположных направлениях, то они оттолкнутся друг от друга. При отсутствии электрического тока проводники не взаимодействуют друг с другом. Этот опытный факт приводит к выводу, что *силы взаимодействия между движущимися электрическими зарядами в проводниках отличаются от сил взаимодействия между неподвижными зарядами*, то есть появление магнитных сил взаимодействия связано с движением зарядов.

Следует отметить, что происхождение магнитных сил невозможно объяснить с точки зрения классической механики. Действительно, в ньютоновской механике силы взаимодействия связаны с ускорением. Поэтому согласно принципа относительности Галилея силы взаимодействия между равномерно движущимися зарядами не должны бы отличаться от сил взаимодействия между неподвижными зарядами. Однако это не соответствует проведенному выше эксперименту. Возникновение магнитных сил можно объяснить лишь на основе специальной теории относительности А. Эйнштейна.

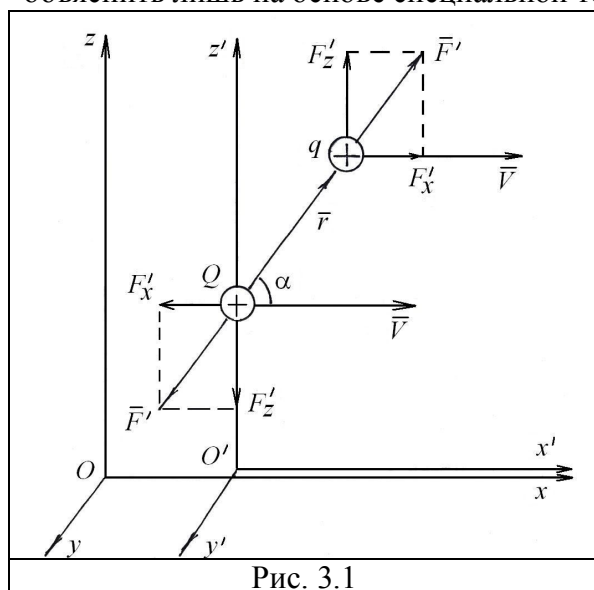


Рис. 3.1

Рассмотрим взаимодействие двух точечных электрических зарядов q и Q по отношению к подвижной $X'Y'Z'$ и неподвижной XYZ систем отсчёта. Заряды q и Q жестко связаны с системой отсчёта $X'Y'Z'$, которая движется равномерно и прямолинейно относительно инерциальной неподвижной системы отсчёта XYZ со скоростью \vec{v} вдоль оси OX (рис. 3.1). Электрическое взаимодействие в вакууме двух точечных зарядов q и Q , расположенных на расстоянии \vec{r} и неподвижных по отношению к системе $X'Y'Z'$, выражается законом Кулона:

$$F' = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (3.1.1)$$

Силу \vec{F}' можно разложить на две

составляющие: поперечную:

$$F_z' = F' \sin \alpha = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin(\bar{v} \wedge \bar{r}) \quad (3.1.2)$$

и продольную:

$$F_x' = F \cos \alpha = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos(\bar{v} \wedge \bar{r}), \quad (3.1.3)$$

где α – угол между векторами \bar{v} и \bar{r} .

Найдём силу \bar{F} , с которой взаимодействуют движущиеся заряды q и Q по отношению к системе отсчёта XYZ . При этом будем считать, что величина зарядов q и Q не зависит от скорости их движения, то есть заряды инвариантны по отношению к преобразованию Лоренца. Этот факт находит опытное обоснование. Согласно следствиям специальной теории относительности Эйнштейна продольная составляющая силы взаимодействия движущихся и неподвижных зарядов одинаковы, то есть:

$$F_x = F_x', \quad (3.1.4)$$

а поперечная составляющая силы взаимодействия движущихся и неподвижных зарядов различны, то есть:

$$F_z = F_z' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (3.1.5)$$

где c – скорость света в вакууме. Подставляя формулу (3.1.2) в последнее выражение, найдём поперечную составляющую силы взаимодействия движущихся электрических зарядов:

$$F_z = \frac{qQ \sin(\bar{v} \wedge \bar{r})}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.1.6)$$

Умножив числитель и знаменатель этого выражения на $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, найдём:

$$F_z = \frac{qQ \sin(\bar{v} \wedge \bar{r})}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - \frac{qQ v^2 \sin(\bar{v} \wedge \bar{r})}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.1.7)$$

Первое слагаемое этого выражения можно рассматривать как поперечную составляющую *электрической силы* взаимодействия движущихся зарядов:

$$F_{z\epsilon} = \frac{qQ \sin(\bar{v} \wedge \bar{r})}{4\pi\epsilon_0 r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.1.8)$$

Если скорость движения зарядов мала по сравнению со скоростью света в вакууме ($v \ll c$), то поперечная составляющая электрической силы взаимодействия движущихся зарядов (3.1.8) будет равна поперечной составляющей силы взаимодействия неподвижных зарядов согласно формуле (3.1.2), то есть: $F_{z\epsilon} = F_z'$. Второе слагаемое в выражении (3.1.7) является новой поперечной составляющей взаимодействия движущихся электрических зарядов, то есть *силой магнитного взаимодействия*:

$$F_{zM} = \frac{qQ v^2 \sin(\bar{v} \wedge \bar{r})}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.1.9)$$

Из этого выражения следует, что согласно теории относительности Эйнштейна сила магнитного взаимодействия возникает только при равномерном движении электрических

зарядов, ибо если $v=0$, то $F_{zM} = 0$. Учитывая формулы (3.1.8) и (3.1.9), выражение (3.1.7) можно кратко записать:

$$F_z = F_{zэ} - F_{zM}. \quad (3.1.10)$$

Отсюда видно, что при однонаправленном движении двух одинаково заряженных частиц (рис.3.1) магнитная сила F_{zM} приводит к уменьшению поперечной составляющей силы взаимодействия F_z . Как будет показано далее, если поперечная электрическая сила $F_{zэ}$ в рассматриваемом случае отталкивает частицы, то магнитная сила F_{zM} их притягивает (см. разд. 3.3). Из полученных выражений (3.1.8) и (3.1.9) видно, что

$$\frac{F_{zM}}{F_{zэ}} = \frac{v^2}{c^2}. \quad (3.1.11)$$

Отсюда видно, что при $v \ll c$ магнитная сила взаимодействия значительно меньше поперечной составляющей силы электрического взаимодействия. Поэтому при вычислении силы взаимодействия между свободными зарядами в первом приближении можно пренебречь магнитной силой. Если же заряды (электроны) движутся в проводниках, то электрические силы оказываются скомпенсированными и определяющую роль во взаимодействии проводников с токами играют магнитные силы.

3.2 Магнитное поле движущегося электрического заряда

Согласно теории дальнего действия предполагается, что магнитное взаимодействие распространяется мгновенно и вокруг движущихся электрических зарядов возникает магнитное поле. Запишем формулу (3.1.9) в следующем виде:

$$F_{zM} = qv \left[\frac{Qv \sin(\vec{v} \wedge \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right]. \quad (3.2.1)$$

Эту формулу можно трактовать так: F_{zM} есть магнитная сила, которая действует на заряд q , движущейся со скоростью v в магнитном поле, которое создаёт заряд Q , движущейся также со скоростью v (рис. 3.1). Допускается и обратное утверждение. Следовательно, величина, заключённая в квадратные скобки выражения (3.2.1), характеризует магнитное поле, создаваемое зарядом Q , движущимся со скоростью v . Эту силовую характеристику магнитного поля принято называть *магнитной индукцией*:

$$B = \frac{Qv \sin(\vec{v} \wedge \vec{r})}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.2.2)$$

Введём новую константу – *магнитную постоянную вакуума*:
 $\mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$. Тогда величина индукции магнитного поля движущегося заряда принимает вид:

$$B = \frac{\mu_0 Qv \sin(\vec{v} \wedge \vec{r})}{4\pi r^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3.2.3)$$

Эта формула позволяет рассчитать модуль индукции B магнитного поля, которое создаёт точечный заряд Q , движущейся со скоростью v , на расстоянии r от него. Легко видеть, что при $v=0$ индукция магнитного поля: $B=0$. Индукция B магнитного поля векторная величина. Умножим числитель и знаменатель выражения (3.2.3) на r и учтём, что $vr \sin(\vec{v} \wedge \vec{r}) = [\vec{v} \times \vec{r}]$ - векторное произведение векторов \vec{v} и \vec{r} . Тогда получим:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Q [\vec{v} \times \vec{r}]}{4\pi r^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.2.4)$$

Опыт показывает, что индукция магнитного поля зависит от свойств среды, в которой создаётся магнитное поле. Поэтому в выражение (3.2.4) введём ещё относительную магнитную проницаемость среды μ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu Q [\vec{v} \times \vec{r}]}{4\pi r^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.2.5)$$

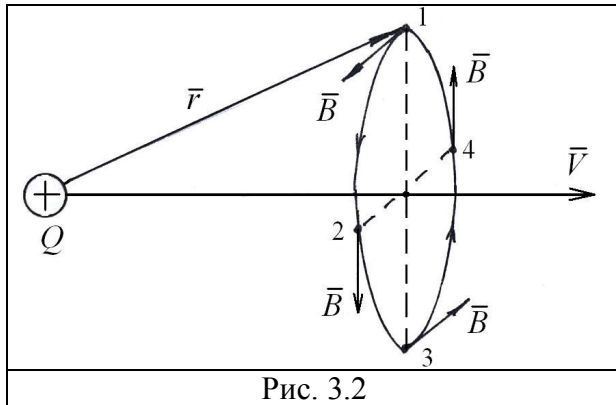


Рис. 3.2

Вектор \vec{r} направляется от движущегося заряда Q к точке, в которой определяется вектор индукции \vec{B} магнитного поля. Для положительного заряда Q вектор \vec{B} индукции магнитного поля направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы \vec{v} и \vec{r} , причём, если смотреть в конец вектора \vec{B} , то кратчайший поворот вектора \vec{v} к вектору \vec{r} виден, происходящим против часовой стрелки. Другими словами, векторы \vec{v} ; \vec{r} и

\vec{B} для положительного заряда Q образует правовинтовую тройку векторов. На рис. 3.2 показано направление вектора \vec{B} в четырёх точках 1; 2; 3; 4, расположенных на одинаковом расстоянии r от заряда Q . Магнитное поле принято изображать графически силовыми линиями, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора \vec{B} магнитного поля. Так как в точках 1; 2; 3; 4 (рис. 3.2) индукция магнитного поля имеет одинаковое численное значение, то силовой линией в данном случае является окружность радиуса $R = r \sin(\vec{v} \wedge \vec{r})$. Направление силовой линии магнитного поля для положительного заряда можно определять, используя правовинтовой буравчик.

3.3 Сила Лоренца

Учитывая выражение (3.2.2), формулу (3.2.1) можно записать в виде:

$$F_{\text{зм}} = qvB. \quad (3.3.1)$$

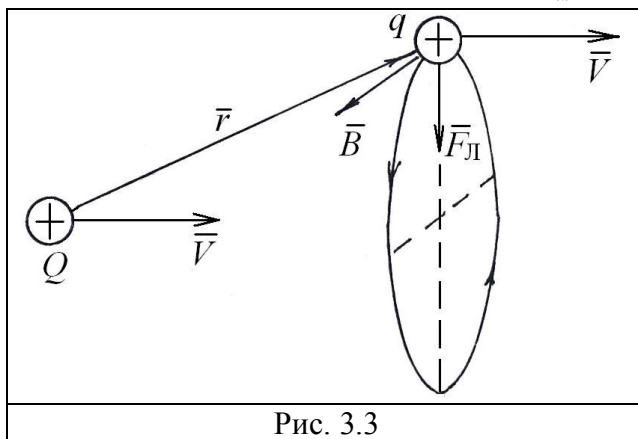


Рис. 3.3

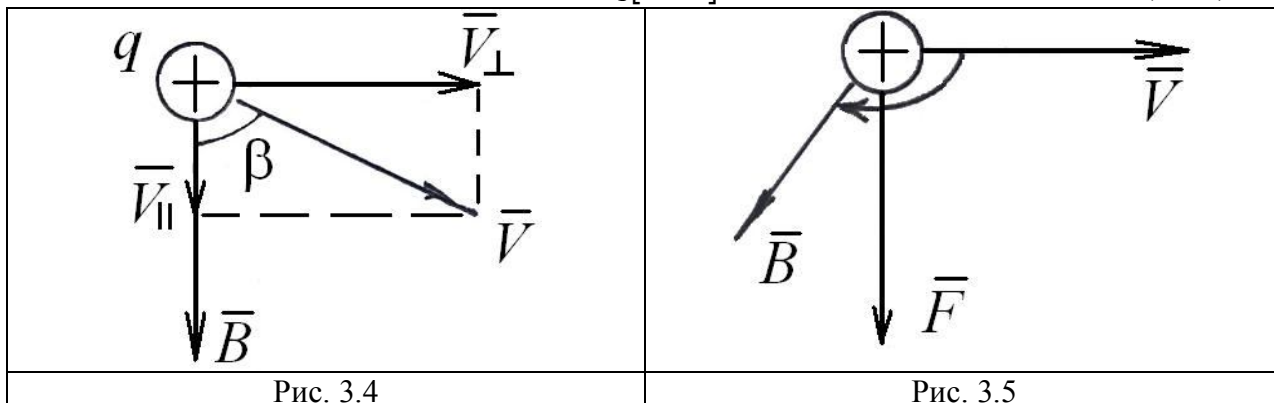
Следовательно, полученная теоретически магнитная сила является силой Лоренца. Однако, эта формула найдена для частного случая, так как в рассматриваемом случае вектор \vec{v} скорости заряда q направлен перпендикулярно к вектору \vec{B} индукции магнитного поля движущегося заряда Q (рис.3.3). Найдём общий вид формулы для силы Лоренца и определим её направление. Пусть вектор \vec{v} скорости заряда q составляет произвольный угол β с

вектором \vec{B} индукции магнитного поля (рис.3.4). Разложим вектор \vec{v} на две составляющие: $v_{\perp} = v \sin \beta$ и $v_{\parallel} = v \cos \beta$. Как показано выше величина силы Лоренца определяется составляющей v_{\perp} скорости v заряда q , то есть:

$$F = qv_{\perp} B = qvB \sin \beta = qvB \sin(\vec{v} \wedge \vec{B}). \quad (3.3.2)$$

Учитывая, что $vb \sin(\vec{v} \wedge \vec{B}) = [\vec{v} \times \vec{B}]$, найдём вектор силы Лоренца:

$$\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}] \quad (3.3.3)$$



Для положительного заряда q векторы: \vec{v} ; \vec{B} ; \vec{F} составляют правовинтовую тройку векторов (рис.3.5). При этом для заряда $+q$ можно использовать правило левой руки, которое известно из курса физики школы. Из рис. 3.3 видно, что сила Лоренца \vec{F} при взаимодействии положительных зарядов q и Q , движущихся в одном направлении является силой притяжения. Это объясняет причину притяжения двух проводников, по которым текут токи одинакового направления.

Формула (3.3.2) позволяет выявить физический смысл вектора магнитной индукции, как силовой характеристики магнитного поля:

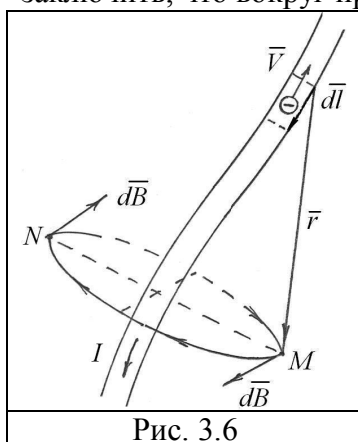
$$B = \frac{F}{qv_{\perp}}. \quad (3.3.4)$$

Численное значение вектора магнитной индукции равно силе, действующей со стороны магнитного поля на единичный заряд, который движется с единичной скоростью перпендикулярно вектору \vec{B} в данной точке поля. Единица измерения индукции магнитного поля в СИ называется *тесла* (Тл) – это индукция поля, которое действует на заряд в 1 Кл, движущейся со скоростью 1 м/с перпендикулярно силовым линиям, с силой 1 Н, т.е.

$$1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{Кл} \cdot \text{м}} = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}.$$

3.4 Закон Био-Савара-Лапласа

Из изложенного выше (см. разд. 3.2) следует, что магнитное поле возникает вокруг движущихся электрических зарядов. Учитывая, что электрический ток в проводниках обусловлен направленным движением отрицательно заряженных электронов, можно заключить, что вокруг проводников с током также должно возникать магнитное поле.



Пусть имеется проводник произвольной формы (рис.3.6), по которому течет постоянный ток I . Каждый электрон с отрицательным зарядом e движется в проводнике со скоростью \vec{v} . Направление вектора \vec{v} противоположно току I . На основании выражения (3.2.5) каждый электрон создаёт в произвольной точке M магнитное поле с индукцией:

$$\vec{B}_e = - \frac{\mu_0 \mu_e [\vec{v} \times \vec{r}]}{4\pi r^3 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.4.1)$$

Выделим вокруг рассматриваемого электрона элементарный участок проводника длиной dl . Выберем

направление вектора $d\vec{l}$ так, чтобы он совпадал с направлением электрического тока в проводнике. Согласно принципа суперпозиции магнитное поле $d\vec{B}$, создаваемое в произвольной точке M всеми электронами, находящимися в элементе длины dl проводника, представляет собой векторную сумму магнитных полей, создаваемых каждым электроном, то есть

$$d\vec{B} = \sum_{e=1}^N \vec{B}_e, \quad (3.4.2)$$

где N – число электронов, находящихся в участке проводника длиной dl . Ввиду малости участка dl можно считать, что векторы \vec{B}_e магнитных полей, создаваемых каждым электроном, равны по величине и направлению. Следовательно, имеем $d\vec{B} = N\vec{B}_e$. Учитывая, что скорость v направленного движения электронов в проводнике значительно меньше скорости света в вакууме ($v \ll c$), найдём:

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 \mu N e [\vec{v} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}, \quad (3.4.3)$$

где \vec{r} – радиус-вектор, направленный от элемента dl тока в точку M наблюдения. На основании определения силы тока имеем:

$$Ne = Idt, \quad (3.4.3)$$

где dt – время, за которое электроны проходят расстояние dl . Следовательно, выражение (3.4.2) принимает вид:

$$d\vec{B} = -\frac{\mu_0 \mu I [\vec{v} dt \times \vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (3.4.4)$$

Учитывая, что $\vec{v} dt = -d\vec{l}$, найдём вектор $d\vec{B}$ индукции магнитного поля, создаваемого элементарным участком $d\vec{l}$ проводника, на расстоянии \vec{r} от него, т.е. в точке M :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}. \quad (3.4.5)$$

Это выражение называют законом Био-Савара-Лапласа. Согласно правилу векторного произведения векторы $d\vec{l}$; \vec{r} ; $d\vec{B}$ составляют правовинтовую тройку векторов. На рис.3.5 в точках M и N показано направление вектора $d\vec{B}$, а также изображена силовая линия, которая представляет собой замкнутую кривую. Направление силовой линии определяется правилом правовинтового буравчика.

Учитывая, что $[d\vec{l} \times \vec{r}] = dl r \sin(d\vec{l} \wedge \vec{r})$, найдём численное значение вектора $d\vec{B}$ в законе Био-Савара-Лапласа:

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I dl \sin(d\vec{l} \wedge \vec{r})}{4\pi r^2}. \quad (3.4.5)$$

Закон Био-Савара-Лапласа позволяет найти величину и направление вектора индукции магнитного поля $d\vec{B}$, которое создаёт элемент длины dl проводника с током I на расстоянии r от него. В соответствии с принципом суперпозиции магнитное поле \vec{B} , созданное всей длиной l проводника с током в точке M равно векторной сумме $\Delta\vec{B}_i$ элементарных магнитных полей, создаваемых всеми отдельными участками Δl_i этого проводника:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^N \Delta\vec{B}_i, \quad (3.4.7)$$

где N – общее число участков, на которое разбит проводник. Неограниченно увеличивается число участков N и переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, можно суммирование заменить интегрированием:

$$\vec{B} = \int_l d\vec{B}, \quad (3.4.8)$$

где символ l означает интегрирование по всей длине проводника.

Наряду с магнитной индукцией \vec{B} вводится другая векторная характеристика магнитного поля – *напряжённость* \vec{H} , связанная с \vec{B} для однородной и изотропной среды соотношением:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu} \quad (3.4.9)$$

Единицей измерения напряжённости магнитного поля является: $\frac{\text{Тл} \cdot \text{м}}{\text{Гн}} = \frac{\text{А}}{\text{м}}$. Из формулы (3.4.4) следует, что

$$d\vec{H} = \frac{I[d\vec{l} \times \vec{r}]}{4\pi r^3}; \quad (3.4.10)$$

или

$$dH = \frac{Idl \sin(d\vec{l} \wedge \vec{r})}{r^2}. \quad (3.4.11)$$

Эти формулы представляют собой часто употребляемый вид записи закона Био-Савара-Лапласа. Из формул (3.4.9) и (3.4.10) следует, что напряжённость магнитного поля электрического тока не зависит от свойств среды.

3.5 Магнитное поле прямолинейного проводника с током

Пусть имеется часть замкнутой электрической цепи – прямолинейный проводник NM (рис.3.7). Вычислим вектор индукции \vec{B} магнитного поля, создаваемого током I , текущим по проводнику, в произвольной точке A , отстоящей от проводника на расстоянии r_0 . Согласно закону Био-Савара-Лапласа (3.4.5), модуль вектора индукции $d\vec{B}$ магнитного поля, создаваемого в точке A элементом dl проводника численно равен:

$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Idl \sin \varphi}{r^2}, \quad (3.5.1)$$

где φ - угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} , т.е. $\angle CPD$. Векторы $d\vec{l}$ и \vec{r} для всех участков прямолинейного проводника лежат в плоскости чертежа. Поэтому в точке A векторы $d\vec{B}$, характеризующие магнитные поля, создаваемые отдельными участками, направлены перпендикулярно плоскости рисунка 3.7. Следовательно, результирующий вектор \vec{B} магнитного поля также направлен перпендикулярно к плоскости чертежа и численно равен алгебраической сумме модулей векторов $d\vec{B}$, то есть

$$B = \int_l dB = \int_l \frac{\mu_0 \mu I dl \sin \varphi}{4\pi r^2}.$$

Считая величины: μ_0 ; μ ; I постоянными, получим:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \int_l \frac{dl \sin \varphi}{r^2}. \quad (3.5.2)$$

Для того, чтобы вычислить этот интеграл, выразим dl и r через одну независимую переменную φ . Для этого из точки A проведём дугу окружности CD , радиус которой,

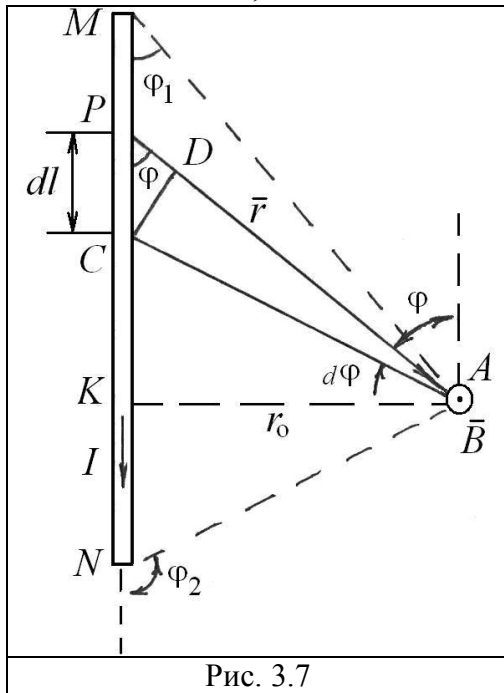


Рис. 3.7

вследствие малости длины dl , можно считать r . По этой причине треугольник PDC можно считать прямоугольным. Из $\triangle PDC$ имеем:

$$dl = \frac{CD}{\sin \varphi} = \frac{rd\varphi}{\sin \varphi}. \quad (3.5.3)$$

Из $\triangle APK$ найдём:

$$r = \frac{r_o}{\sin \varphi}. \quad (3.5.4)$$

Подставляя это выражение в (3.5.3), найдём

$$dl = \frac{r_o d\varphi}{\sin^2 \varphi}. \quad (3.5.5)$$

Подставляя формулы (3.5.4) и (3.5.5) в выражение (3.5.2), после сокращения найдём:

$$B = \frac{\mu_o \mu I}{4\pi r_o} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi d\varphi,$$

где φ_1 и φ_2 значение угла φ для крайних точек M и N проводника. Интегрирование по всей длине проводника даёт:

$$B = \frac{\mu_o \mu I}{4\pi r_o} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2). \quad (3.5.6)$$

Согласно формуле (3.4.8) напряжённость магнитного поля прямолинейного проводника с током конечной длины равна:

$$H = \frac{I}{4\pi r_o} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \quad (3.5.7)$$

В случае проводника MN бесконечной длины: $\varphi_1 = 0$; $\varphi_2 = \pi$. Тогда для индукции и напряжённости магнитного поля получим:

$$B = \frac{\mu_o \mu I}{2\pi r_o}; \quad (3.5.8)$$

$$H = \frac{I}{2\pi r_o}. \quad (3.5.9)$$

Направление силовой линии магнитного поля прямолинейного проводника определяется правилом правовинтового буравчика.

3.6 Магнитное поле на оси кругового тока

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое током, текущим по тонкому проводу, имеющему форму окружности радиуса R (рис.3.8). По закону Био-Савара-Лапласа (3.4.5) магнитная индукция $d\vec{B}$ поля создаваемого в точке O элементом $d\vec{l}$ витка равна:

$$dB = \frac{\mu_o \mu I dl}{4\pi R^2},$$

так как угол: $(d\vec{l} \wedge \vec{r}) = \frac{\pi}{2}$ и $r=R$. Все векторы $d\vec{B}$ магнитных полей, создаваемых в точке O различными участками dl кругового тока перпендикулярны к плоскости самого контура. Поэтому индукция результирующего поля в центре кругового тока равна:

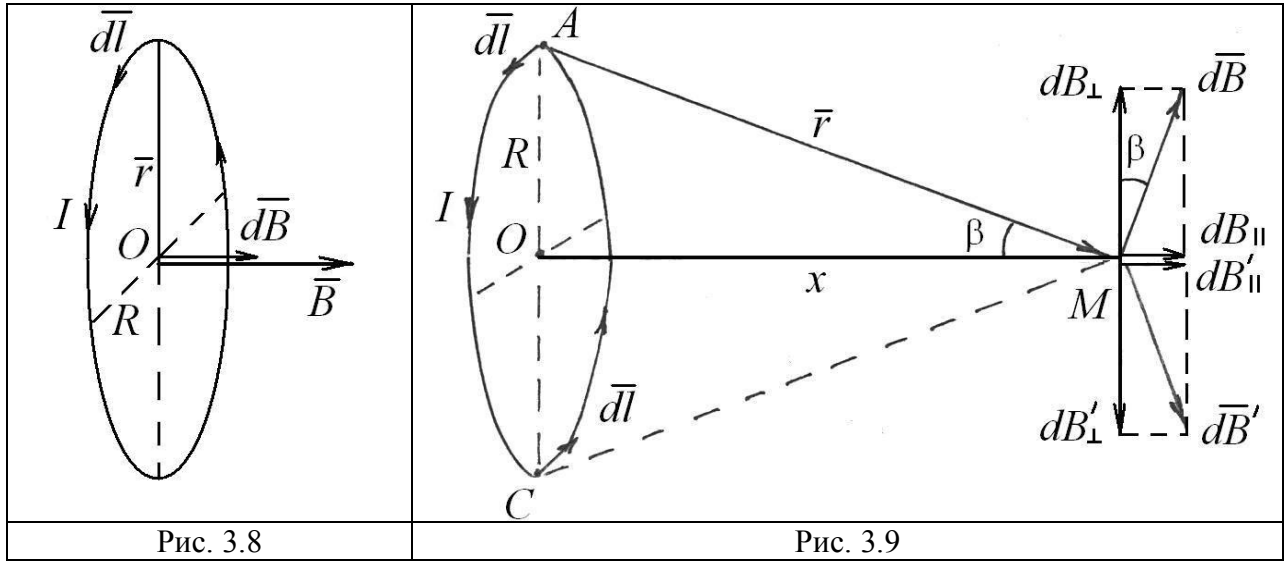
$$B = \frac{\mu_o \mu I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl.$$

Интегрирование даёт:

$$B = \frac{\mu_o \mu I}{2R}. \quad (3.6.1)$$

Согласно формуле (3.4.8) напряжённость магнитного поля в центре кругового тока равна:

$$H = \frac{I}{2R}. \quad (3.6.2)$$



Теперь найдём вектор индукции B на оси кругового тока, на расстоянии x от плоскости, в которой лежит контур (рис. 3.9). По закону Био-Савара-Лапласа (3.4.5) вектор индукции $d\vec{B}$ поля, создаваемого элементом длины $d\vec{l}$ проводника, находящегося в точке A , перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $d\vec{l}$ и \vec{r} . Вектор $d\vec{B}$ разложим на две составляющие: $dB_{\perp} = dB \cos \beta$ и $dB_{\parallel} = dB \sin \beta$, где β - угол между осью x и радиус-вектором \vec{r} . Вектор индукции $d\vec{B}'$ поля, создаваемого элементом длины $d\vec{l}$ проводника, находящегося в точке C , также можно разложить на две составляющие: dB'_{\perp} и dB'_{\parallel} (рис.3.9). Так как составляющие dB_{\perp} и dB'_{\perp} равны по величине и противоположны по направлению, то геометрическая сумма всех элементарных индукций $dB_{\perp k}$ равна нулю, то есть: $\sum_k dB_{\perp k} = 0$. Следовательно, результирующая индукции магнитного поля в точке M будет равна:

$$\vec{B} = \sum_k d\vec{B}_{\parallel k} = \sum_k dB \sin \beta$$

Векторную сумму можно заменить алгебраической суммой и перейти к интегралу:

$$B = \int dB \sin \beta = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \int \frac{dl \sin(d\vec{l} \wedge \vec{r})}{r^2} \cdot \sin \beta.$$

Учитывая, что: $\sin(d\vec{l} \wedge \vec{r}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$; $\sin \beta = \frac{R}{r}$, получим:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I R}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 \mu I R^2}{2r^3}$$

Из $\triangle OAM$ имеем: $r = \sqrt{R^2 + x^2}$, где $x = OM$. Следовательно, окончательно найдём:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (3.6.3)$$

По этой формуле можно определить индукцию магнитного поля на оси кругового тока на расстоянии x от него. Для напряжённости магнитного поля имеем:

$$H = \frac{IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (3.6.4)$$

При $x \rightarrow 0$ приходим к формулам (3.6.1) и (3.6.2). Направление векторов \vec{B} и \vec{H} магнитного поля определяется по правилу правовинтового буравчика.

3.7 Закон полного тока

Изучая электростатику, мы отмечали, что необходимым условием потенциальности электростатического поля является равенство нулю циркуляции вектора напряжённости \vec{E} этого поля вдоль любого замкнутого контура, т.е.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad (3.7.1)$$

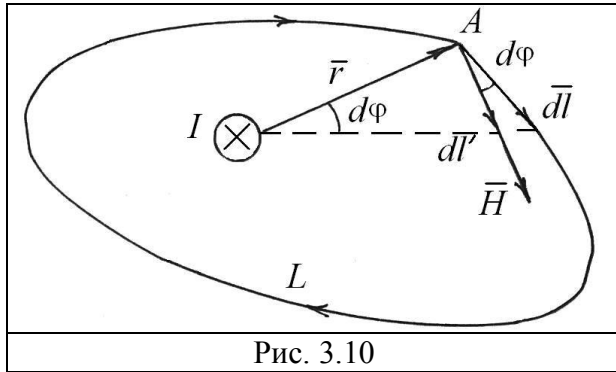


Рис. 3.10

Возьмём произвольный контур L , охватывающий прямолинейный бесконечный проводник с током I , расположенный перпендикулярно к плоскости чертежа (рис.3.10). Вычислим циркуляцию вектора \vec{H} напряжённости магнитного поля вдоль замкнутого контура L :

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \oint_L H dl \cos(\vec{H} \wedge d\vec{l}). \quad (3.7.2)$$

Вектор \vec{H} магнитного поля прямолинейного тока направлен в любой точке A по касательной к окружности радиуса r . Угол $(\vec{H} \wedge d\vec{l}) = d\varphi$. Учтём что величина: $dl \cos(\vec{H} \wedge d\vec{l}) = dl \cos \varphi = dl'$ является проекцией вектора $d\vec{l}$ на направление вектора \vec{H} . Следовательно, имеем:

$$dl \cos(\vec{H} \wedge d\vec{l}) = dl' = r d\varphi. \quad (3.7.3)$$

Напряжённость магнитного поля прямолинейного тока согласно формуле (3.5.9) равна:

$$H = \frac{I}{2\pi r} \quad (3.7.4)$$

Подставляя полученные формулы в выражение (3.7.2), получим:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi r} r d\varphi$$

Интегрирование даёт:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I, \quad (3.7.5)$$

т.е. циркуляция вектора напряжённости магнитного поля \vec{H} по замкнутому контуру L равна току I , охватываемому этим контуром. Так как циркуляция вектора \vec{H} не равна нулю, то магнитное поле непотенциально.

Очевидно, если замкнутый контур L охватывает несколько токов: $I_1; I_2; I_3 \dots I_n$, то циркуляция вектора \vec{H} по этому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых контуром, т.е.

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum_{k=1}^n I_k. \quad (3.7.6)$$

При этом токи I_k считаются положительными, если их направление и направление обхода контура образуют правовинтовую систему (рис.3.10), в противном случае – токи I_k считаются отрицательными. Нетрудно показать, если контур L не охватывает токи, то циркуляция вектора \vec{H} равна нулю. Таким образом, уравнение (3.7.6) является математическим выражением закона полного тока проводимости: циркуляция вектора

напряжённости магнитного поля постоянного электрического тока вдоль замкнутого контура равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром.

3.8. Магнитное поле тороида и соленоида

Тороид представляет собой тонкий провод, плотно навитый на каркас, имеющий форму тора (рис.3.11). Он эквивалентен системе одинаковых круговых токов, центры которых расположены по окружности радиуса R . Выберем контур L обхода в виде окружности радиуса $r=R$. Вектор \vec{H} в каждой точке отмеченной окружности совпадает с её касательной и имеет постоянную величину. Вычислим циркуляцию вектора \vec{H} по замкнутому контуру:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = H \int_0^{2\pi R} dl = 2\pi R H. \quad (3.8.1)$$

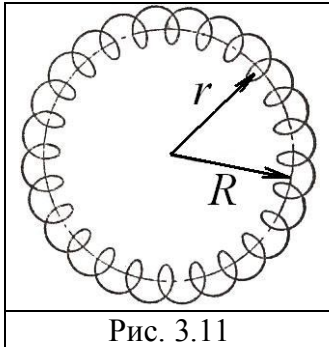


Рис. 3.11

Согласно закону полного тока имеем:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = NI, \quad (3.8.2)$$

так как указанный контур охватывает N токов, где N – общее число витков тороида. Приравнявая правые части последних выражений, найдем напряженность поля внутри витков тороида:

$$H = \frac{N}{2\pi R} I. \quad (3.8.3)$$

Отношение

$$\frac{N}{2\pi R} = n \quad (3.8.4)$$

называют *числом витков на единицу длины тороида*. Следовательно, получим:

$$H = nI. \quad (3.8.5)$$

Для индукции магнитного поля тороида получаем:

$$B = \mu_0 \mu H = \mu_0 \mu n I. \quad (3.8.6)$$

Если выбрать контур обхода L в виде окружности радиуса $r \ll R$ или $r \gg R$, то такой контур L в первом случае не охватывает токов, а во втором случае контур охватывает N положительных токов и столько же – отрицательных. Следовательно, вне тороида: $H=0$; $B=0$, т.е. магнитное поле отсутствует.

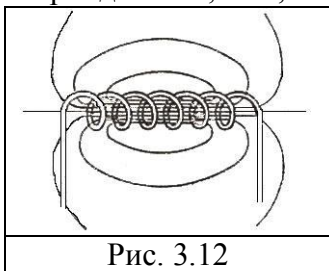


Рис. 3.12

Полученные формулы (3.8.5) и (3.8.6) можно применить для бесконечно длинного *соленоида* (рис. 3.12), то есть для катушки, длина l которой значительно превосходит диаметр её витков. В этом случае, под n понимают число витков, приходящихся на единицу длины соленоида:

$$n = \frac{N}{l}, \quad (3.8.7)$$

где N – общее число витков соленоида. В отличие от тороида магнитное поле внутри соленоида *однородно*.

3.9 Поток вектора магнитной индукции

Введём аналогично тому, как это было сделано в электростатике, понятие о *потоке вектора магнитной индукции* (рис. 3.13). Элементарным потоком вектора \vec{B} магнитной индукции сквозь элементарную площадку dS называется физическая величина, равная произведению величины площадки и проекции B_n вектора \vec{B} на направление нормали к ней:

$$d\Phi = B_n dS. \quad (3.9.1)$$

Учитывая, что $B_n = B \cos(\vec{B} \wedge \vec{n})$, получим:

$$d\Phi = B dS \cos(\vec{B} \wedge \vec{n}). \quad (3.9.2)$$

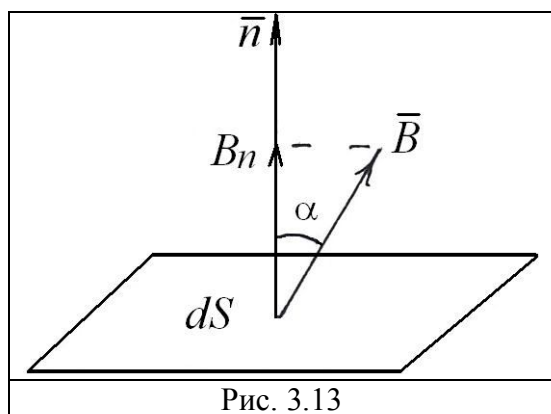


Рис. 3.13

Интегрируя это выражение по всей поверхности S , получим поток вектора магнитной индукции сквозь произвольную поверхность:

$$\Phi = \int_S B_n dS. \quad (3.9.3)$$

Единицей магнитного потока является Вебер (Вб): $1\text{Вб}=1\text{Тл}\cdot\text{м}^2$.

Так как силовые линии магнитного поля всегда замкнутые кривые, то *поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю*:

$$\oint_S B_n dS = 0, \quad (3.9.4)$$

Объясняется это тем, что поток, входящий в эту поверхность, равен потоку, выходящему из неё. Соотношение (3.9.4) является математическим выражением теоремы Остроградского-Гаусса для магнитного поля. Эта теорема является следствием того, что в природе не существует магнитных «зарядов», то есть «источников» и «стоков» поля.

3.10 Движение зарядов в магнитном поле

Как показано в разд. 3.3, на электрический заряд, движущейся с некоторой скоростью v в магнитном поле \vec{B} , действует сила Лоренца:

$$F = qvB \sin(\vec{v} \wedge \vec{B}). \quad (3.10.1)$$

Очевидно, что сила Лоренца не действует на движущийся электрический заряд, если направление его перемещения происходит вдоль силовой линии магнитного поля. В этом случае угол $(\vec{v} \wedge \vec{B}) = 0$ и, следовательно, $F=0$.

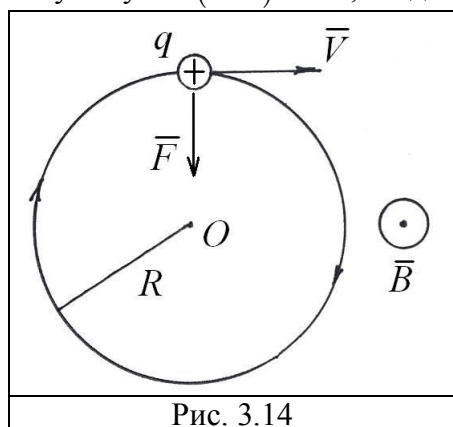


Рис. 3.14

Рассмотрим заряженную частицу, которая влетает в однородное ($\vec{B}=\text{const}$) магнитное поле с начальной скоростью \vec{v} , перпендикулярной вектору \vec{B} . В этом случае угол $(\vec{v} \wedge \vec{B}) = \frac{\pi}{2}$. На рис. 3.14 направление вектора \vec{B} совпадает с нормалью к плоскости чертежа. Вектор \vec{B} направлен «к нам». Согласно правилу левой руки сила Лоренца направлена перпендикулярно к вектору скорости частицы, а её модуль равен:

$$F = qvB.$$

Направление действия силы \vec{F} таково, что она не может изменить вектор скорости \vec{v} по величине. Сила Лоренца изменяет лишь направление вектора скорости частицы и выполняет роль центростремительной силы:

$$F = \frac{mv^2}{R}, \quad (3.10.3)$$

где m – масса движущейся частицы; R – радиус окружности. Приравнявая правые части последних уравнений, найдём радиус окружности, по которой движется частица:

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (3.10.4)$$

Период обращения T заряженной частицы в однородном магнитном поле равен отношению длины окружности $2\pi R$ к её скорости:

$$T = \frac{2\pi R}{v}.$$

Подставляя сюда выражение (3.10.4), получим:

$$T = \frac{2\pi m}{qB}. \quad (3.10.5)$$

Отсюда видно, что период обращения заряженной частицы не зависит от её скорости. Объясняется это тем, что медленные частицы описывают окружности малого радиуса, а быстрые – большого радиуса, а время, за которое совершается один оборот, оказывается одинаковым.

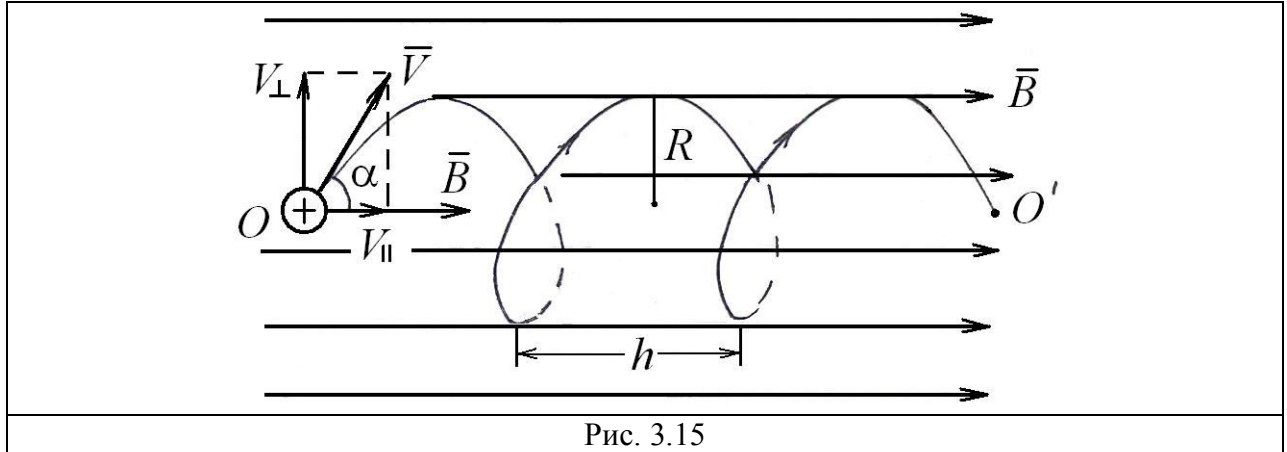


Рис. 3.15

Рассмотрим более сложный пример движения заряженной частицы в однородном магнитном поле. Пусть скорость \vec{v} частицы направлена под углом α к вектору магнитной индукции (рис.3.15). Разложим вектор скорости на две составляющие: параллельную вектору \vec{B} и перпендикулярную этому вектору \vec{B} :

$$v_{II} = v \cos \alpha; \quad (3.10.6)$$

$$v_{\perp} = v \sin \alpha. \quad (3.10.7)$$

Очевидно, что частица одновременно участвует в двух движениях: во-первых, она равномерно вращается со скоростью v_{\perp} по окружности радиуса (3.10.4):

$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv \sin \alpha}{qB}. \quad (3.10.8)$$

Во-вторых, частица движется поступательно с постоянной скоростью v_{II} в направлении, перпендикулярном плоскости вращения. Поэтому траектория заряженной частицы представляет собой винтовую линию, ось которой совпадает с направлением вектора магнитной индукции. Радиус витков определяется формулой (3.10.8), а расстояние между соседними витками (шаг винтовой линии) равен:

$$h = v_{II} T = T v \cos \alpha,$$

где

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (3.10.9)$$

период обращения заряженной частицы. Следовательно, шаг винтовой линии равен:

$$h = \frac{2\pi m}{qB} v \cos \alpha. \quad (3.10.10)$$

За время $\tau = \frac{l}{v_{II}} = \frac{l}{v \cos \alpha}$ частица окажется в точке O' , лежащей на расстоянии l от точки

O (рис. 3.15). При этом частица сделает целое число оборотов:

$$n = \frac{\tau}{T} = \frac{l}{T v \cos \alpha},$$

где $n=1; 2; 3; \dots$ – целые числа. Подставляя в это выражение значение периода (3.10.9), получим дискретный набор значений модуля вектора магнитной индукции, при которых частицы будут попадать в точку O' , то есть будет наблюдаться их *фокусировка*:

$$B = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{ql} n. \quad (3.10.11)$$

Подобная магнитная фокусировка пучка электронов применяется в электронно-лучевых приборах.

3.11 Силы, действующие на проводник с током в магнитном поле

Рассмотрим проводник с током I , который расположен в однородном магнитном поле с индукцией B . На каждый электрон, движущийся в проводнике со скоростью \bar{v} , действует сила Лоренца:

$$\bar{F}_e = -e[\bar{v} \times B], \quad (3.11.1)$$

где e – отрицательный заряд электрона. Следует отметить, что за направление тока принимается направление движения положительных зарядов. Поэтому направление движения электронов противоположно току (рис.3.16).

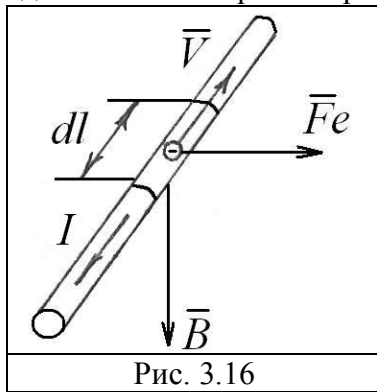


Рис. 3.16

Вычислим силу, действующую на элемент проводника длиной dl . Вектор $d\bar{l}$ совпадает с направлением тока в проводнике. Если в элементе проводника длиной dl находится N электронов, то искомая сила равна:

$$d\bar{F} = -Ne[\bar{v} \times \bar{B}]. \quad (3.11.2)$$

На основании определения силы тока (2.1.3) имеем:

$$Ne = Idt, \quad (3.11.3)$$

где dt – время, за которое электроны проходят расстояние от одного основания участка dl до другого. Следовательно, выражение (3.11.2) преобразуется к виду:

$$d\bar{F} = -Idt[\bar{v} \times \bar{B}],$$

или

$$d\bar{F} = -I[\bar{v}dt \times \bar{B}].$$

Учитывая, что $\bar{v}dt = -d\bar{l}$, получим:

$$d\bar{F} = I[d\bar{l} \times \bar{B}]. \quad (3.11.4)$$

Численное значение силы, действующей со стороны магнитного поля на элемент проводника длиной dl , равно:

$$dF = IBdl \sin(\bar{dl} \wedge B) \quad (3.11.5)$$

Таким образом, сила, действующая на элемент проводника длиной dl в магнитном поле, прямо пропорциональна силе тока I в проводнике, элементу длины dl , магнитной индукции B и синусу угла между направлением тока в проводнике и вектором \bar{B} . Этот закон был получен экспериментально А.Ампером и носит его имя.

В случае однородного магнитного поля, когда величина и направление вектора \bar{B} во всех точках пространства одинакова, получим:

$$F = IBl \sin(\bar{l} \wedge \bar{B}), \quad (3.11.6)$$

где l – длина проводника, находящегося в однородном магнитном поле. Направление силы $d\bar{F}$ и \bar{F} определяется в соответствии с формулой (3.11.4): то есть векторы $d\bar{l}$; \bar{B} ; $d\bar{F}$ составляют правую тройку векторов. Справедливо использовать правило левой руки, известное из курса физики средней школы.

3.12 Плоский замкнутый контур тока в магнитном поле

Поместим в однородное магнитное поле прямоугольную рамку с током так, чтобы угол α между направлением нормали \vec{n} к плоскости рамки и вектором \vec{B} магнитной индукции был произвольным (рис.3.17а). Пользуясь правилом левой руки легко убедиться, что силы \vec{F}' , действующие на участки CD и AN равны по величине и противоположны по направлению. Эти силы стремятся деформировать рамку. Силы \vec{F} , действующие на участки AC и ND , так же одинаковы, но они образуют пару сил, которая создаёт вращающий момент вокруг вертикальной оси (рис.3.17а). Для вычисления момента силы, действующей на рамку, обратимся к рис.3.17б, где изображено поперечное сечение рамки. Обозначим стороны рамки: $AN=CD=a$; $AC=DN=l$. Момент сил, действующих на рамку, равен:

$$M = Fd. \quad (3.12.1)$$

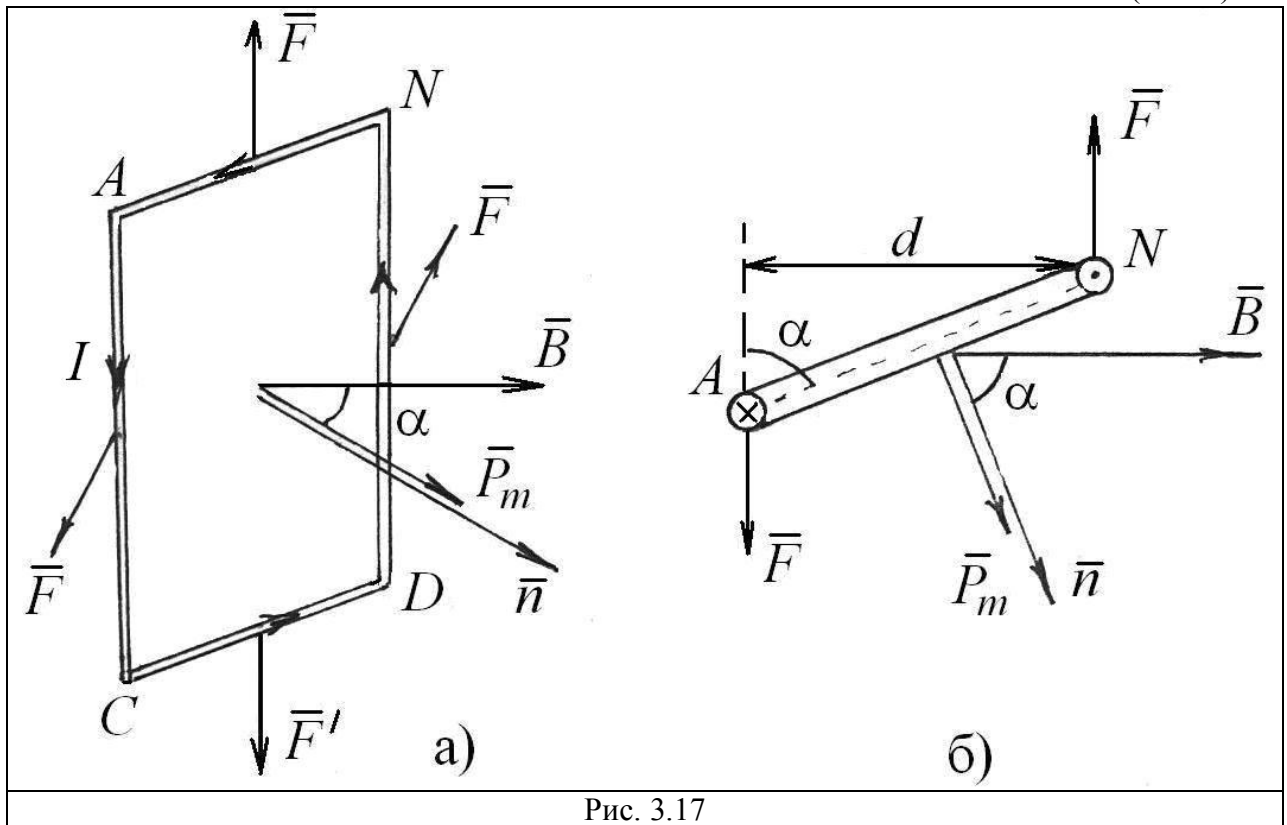


Рис. 3.17

Учитывая, что $F = IBl$; $d = a \sin \alpha$, получим:

$$M = IBla \sin \alpha$$

или

$$M = ISB \sin \alpha, \quad (3.12.2)$$

где $S = al$ - площадь рамки с током.

Произведение силы тока в рамке на её площадь назовём *магнитным моментом кругового тока*:

$$p_m = IS. \quad (3.12.3)$$

Магнитный момент кругового тока векторная величина. Вектор \vec{p}_m направлен перпендикулярно к плоскости рамки так, что из конца вектора \vec{p}_m ток в рамке виден, идущим против часовой стрелки (рис.3.17а). На основании выражения (3.12.3) формулу (3.12.2) можно записать в виде:

$$M = p_m B \sin \alpha = p_m B \sin(\vec{p}_m \wedge \vec{B}), \quad (3.12.4)$$

где α – угол между векторами \vec{p}_m и \vec{B} . Вращающий момент сил \vec{M} , действующий на рамку, стремится установить рамку так, чтобы векторы \vec{p}_m и \vec{B} были параллельны или

антипараллельны. При этом плоскость рамки в магнитном поле стремится установиться перпендикулярно к силовым линиям магнитного поля. Выражение (3.12.4) можно записать в векторной форме:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]. \quad (3.12.5)$$

Все три вектора \vec{p}_m ; \vec{B} и \vec{M} образуют правую тройку векторов, причём вектор \vec{M} направлен вдоль оси вращения рамки.

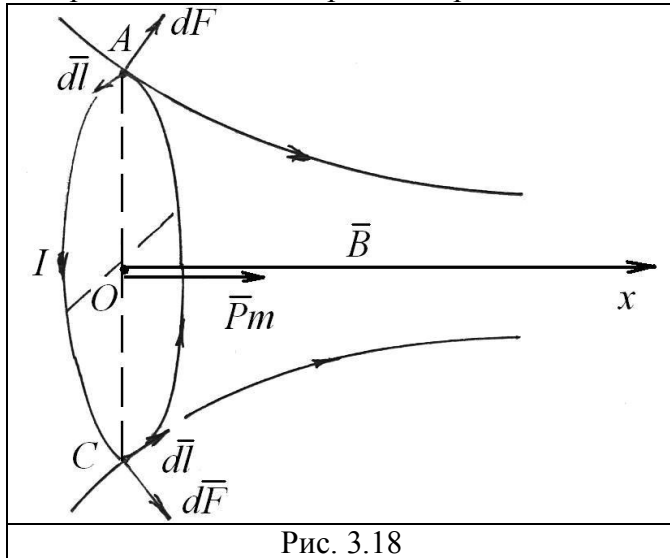


Рис. 3.18

Рассмотрим действие неоднородного магнитного поля на контур с током. Пусть в направлении положительной оси x магнитное поле \vec{B} увеличивается (рис.3.18). На контур с током также действует вращающий момент сил. Допустим что, контур с током в неоднородном магнитном поле ориентируется так, что его магнитный момент \vec{p}_m совпадает с внешним полем \vec{B} . Силы $d\vec{F}$, действующие на элементы длины $d\vec{l}$ контура в точках A и C перпендикулярны к вектору \vec{B} . Если изобразить силы $d\vec{F}$, действующие на другие точки контура, то они образуют

симметричный конический веер. Причём результирующая \vec{F} всех элементарных сил $d\vec{F}$ направлена вдоль магнитного поля. Следовательно, сила \vec{F} *втягивает контур в область более сильного поля \vec{B}* . Нетрудно показать, что если магнитный момент \vec{p}_m контура с током будет направлен против вектора \vec{B} неоднородного поля, то контур будет выталкиваться из сильного поля.

3.13 Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

В разд. 3.11 отмечено, что на проводник с током в магнитном поле действует сила, подчиняющаяся закону Ампера. Если проводник с током не закреплен, то под действием магнитных сил он будет перемещаться, совершая при этом механическую работу против внешних сил.

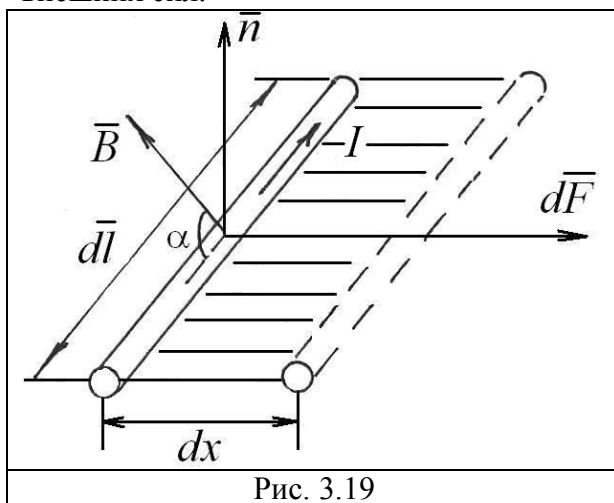


Рис. 3.19

Вычислим работу dA , совершаемую магнитными силами при перемещении элемента dl проводника с током I в магнитном поле B . Для простоты предположим, что элемент проводника перемещается в направлении действующей на него силы $d\vec{F}$ (рис.3.19). При этом элементарная работа dA равна:

$$dA = dF dx. \quad (3.13.1)$$

По закону Ампера имеем:

$$dF = IB dl \sin \alpha,$$

где α – угол между векторами \vec{B} и $d\vec{l}$. Подставив это выражение силы в формулу (3.13.1), получим:

$$dA = IB dl dx \sin \alpha. \quad (3.13.2)$$

Учитывая, что $dldx = dS$ представляет собой площадь поверхности, описанной элементом проводника при его перемещении на расстояние dx , получим:

$$dA = IBdS \sin \alpha$$

Из рис.3.19 видно, что $B \sin \alpha = B_n$ - проекция вектора \vec{B} на направление нормали \vec{n} к площадке dS . Следовательно, имеем:

$$dA = IB_n dS. \quad (3.13.3)$$

Согласно определению, данному в разд. 3.9, величина $B_n dS$ представляет собой элементарный поток вектора магнитной индукции сквозь поверхность dS , т.е.

$$B_n dS = d\Phi.$$

На основании этого, выражение (3.13.3) можно записать в виде:

$$dA = Id\Phi. \quad (3.13.4)$$

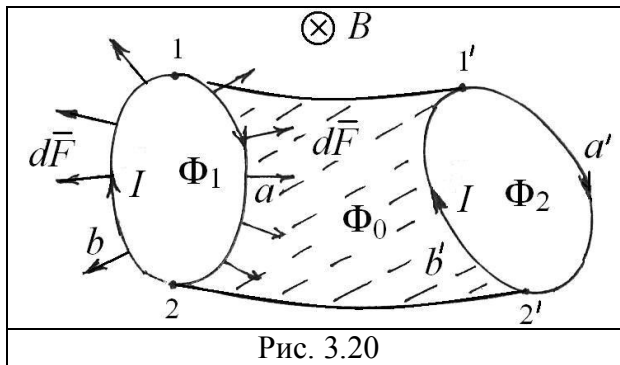
Интегрируя это выражение для конечного процесса:

$$\int_0^A dA = I \int_0^\Phi d\Phi,$$

получим:

$$A = I\Phi. \quad (3.13.5)$$

Таким образом, приходим к выводу: *работа, совершаемая магнитными силами при перемещении проводника с током в магнитном поле, равна произведению силы тока на величину магнитного потока сквозь поверхность, которую описывает проводник при своём движении.*



Найдём выражение работы, совершаемой силами Ампера при перемещении в магнитном поле замкнутого контура с током. Пусть замкнутый контур 1 – а – 2 – в – 1 с током I перемещается в магнитном поле \vec{B} в новое положение 1' – а' – 2' – в' – 1' (рис. 3.20). Вектор магнитного поля \vec{B} направлен перпендикулярно к плоскости данного чертежа. Обозначим через Φ_1 поток вектора

магнитной индукции сквозь поверхность контура 1 – а – 2 – в – 1 в его начальном положении, а через Φ_2 - поток сквозь поверхность контура 1' – а' – 2' – в' – 1' - в конечном положении. Будем считать, что поток через поверхность 1 – 1' – в' – 2' – 2 – а – 1 равен: Φ_0 . Данная поверхность на рис. 3.20 отмечена штриховкой. Пользуясь правилом левой руки, нетрудно показать, что силы, приложенные к участку 1 – а – 2 совпадают с перемещением. Следовательно, работа по перемещению данного участка положительна:

$$A_1 = I(\Phi_0 + \Phi_2). \quad (3.13.6)$$

Силы, приложенные к участку 2 – в – 1, направлены против перемещения. Следовательно, работа этих сил отрицательна:

$$A_2 = -I(\Phi_1 + \Phi_0). \quad (3.13.7)$$

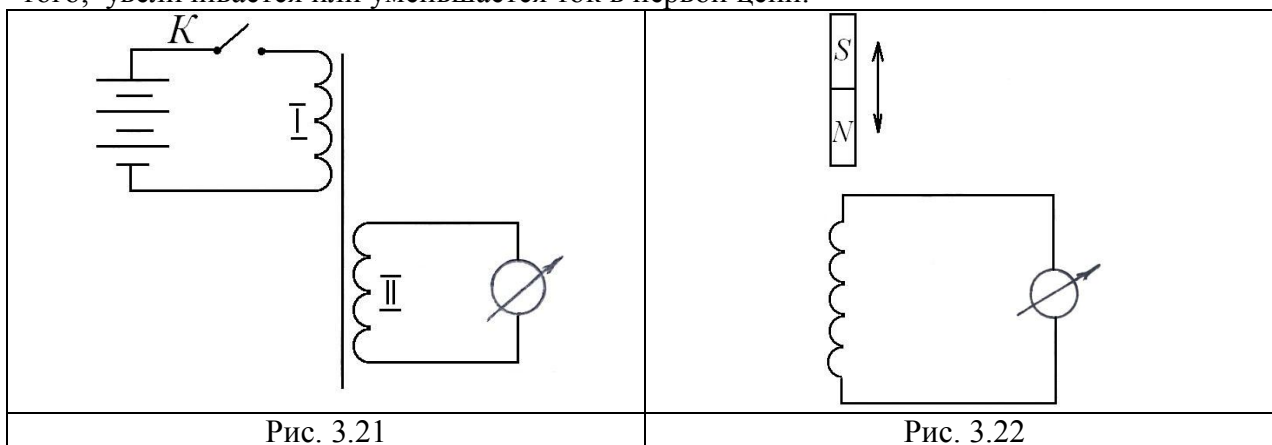
Работа по перемещению всего контура равна:

$$A = A_1 + A_2 = I(\Phi_2 - \Phi_1). \quad (3.13.8)$$

Таким образом, *работа совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле замкнутого контура, по которому проходит постоянный ток, равна произведению силы тока на изменение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром.*

3.14 Явление электромагнитной индукции

Основываясь на том, что вокруг проводника с током возникает магнитное поле, Фарадей в 1831г. пришел к выводу, что с помощью магнитного поля можно создать электрический ток в проводнике. Принципиальная схема опытов Фарадея приведена на рис. 3.21. На деревянном стержне намотаны две катушки. Концы первой I из них присоединены через ключ K к источнику постоянного тока, а концы другой II – к гальванометру. При неизменной величине тока в первой катушке или при токе равном нулю в ней гальванометр показывал отсутствие тока во второй катушке. Однако при замыкании и размыкании ключа K стрелка гальванометра отклонялась и затем возвращалась в положение равновесия, что свидетельствовало о возникновении во второй катушке кратковременного тока, названного Фарадеем *индукционным* током. Направления индукционных токов при замыкании и размыкании первой цепи были противоположными. Если заменить ключ реостатом, то при изменении тока в первой цепи, во – второй по-прежнему наводится индукционный ток. Направление его зависит от того, увеличивается или уменьшается ток в первой цепи.



Из описанного опыта не ясно, что является причиной появления индукционного тока: или изменение тока в первой цепи, или изменение магнитного поля в области расположения второй катушки. Для выяснения этого вопроса Фарадеем был поставлен следующий опыт. По первой катушке пропусклся постоянный ток и она оставалась неподвижной. При перемещении второй катушки относительно первой индукционный ток снова возникал. Его направление зависело от приближения второй катушки к первой или при её удалении. Индукционный ток возникал при этом независимо от движения второй или первой катушки. Этот опыт показал, что причиной возникновения индукционного тока во второй катушке является *изменение магнитного поля*, пронизывающую её. Фарадей провёл ещё один опыт, чтобы убедиться в этом. Первая катушка с током была заменена длинным полосовым магнитом (рис.3.22). Перемещая магнит вдоль оси катушки, Фарадей обнаружил возникновение в ней индукционного тока, направление которого зависело от того, каким полюсом был обращён к катушке магнит и удалялся или приближался он к ней. Результаты этих опытов подтвердили вывод о том, что причиной возникновения индукционного тока во второй катушке является *изменение магнитного потока* вектора \vec{B} сквозь поверхность, ограниченную её витками. Для подтверждения этого опыта был проделан ещё один эксперимент. Фарадей заменил деревянный сердечник (рис.3.21) на железный. Это привело к значительному увеличению индукционного тока. Это доказывает, что в явлении возникновения индукционного тока основную роль играет вектор \vec{B} , а не \vec{H} . Открытое Фарадеем явление возникновения индукционного тока при изменении магнитного поля, пронизывающего контур, получило название *электромагнитной индукции*.

Согласно закону Ома электрический ток в замкнутой цепи может возникнуть только при наличии электродвижущей силы. Поэтому возникновение индукционного тока в опытах Фарадея свидетельствует о том, что *в замкнутом контуре, находящемся в*

изменяемом магнитном поле, возникает электродвижущая сила индукции – ЭДС электромагнитной индукции.

Опыты показывают, что ЭДС индукции ε_i в контуре пропорциональна скорости или скорости изменения магнитного потока Φ сквозь поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (3.14.1)$$

Данное выражение называют *законом Фарадея*. Направление индукционного тока определяется правилом Ленца: *индукционный ток имеет такое направление, при котором его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока, вызывающему данный ток.*

Объяснение явления электромагнитной индукции зависит от того, что движется в описанном опыте (рис.3.22): катушка или полосовой магнит. Допустим, что магнит неподвижен, а значит и неподвижным будет его магнитное поле. При движении катушки, вместе с ней движутся, находящиеся в ней электроны. На движущиеся электроны в магнитном поле действует сила Лоренца, которая будет выполнять роль сторонней силы, приводящей электроны проводника в движение. Можно показать, что ЭДС индукции, возникающая в движущемся проводнике, равна:

$$\varepsilon_i = vBl \sin(\vec{v} \wedge \vec{B}), \quad (3.14.2)$$

где v – скорость движения проводника, l – его длина.

Допустим теперь, что проводник (рис.3.22) неподвижен, а перемещается полосовой магнит. В данном случае на неподвижные электроны проводника сила Лоренца не действует. При движении полосового магнита в области расположения проводника изменяется вектор индукции \vec{B} магнитного поля. *Изменение магнитного поля приводит к возникновению индукционного электрического поля, которое и приводит электроны проводника в движение.* Индуцированное электрическое поле обладает следующими особенностями. Индуцированное электрическое поле *не является потенциальным*. Силовые линии индуцированного поля всегда замкнуты сами на себя, т.е. электрическое поле является *вихревым*. При изменении магнитного поля силовые линии вихревого электрического поля охватывают силовые линии магнитного поля (рис.3.23).

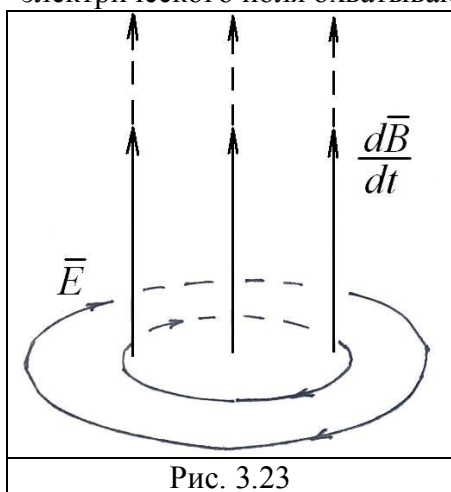


Рис. 3.23

До сих пор мы рассматривали индукционные токи в линейных проводниках, поперечные размеры которых пренебрежительно малы по сравнению с их длиной. Однако индукционные токи могут возникать и в массивных проводниках. В этом случае их называют *токами Фуко*. Например, если в катушку с большим числом витков поместить металлический стержень, а на катушку подать переменное напряжение, то стержень за счет вихревых токов Фуко быстро нагревается. Объясняется это тем, что переменное магнитное поле катушки индуцирует изменяющееся электрическое поле, которое и вызывает появление токов Фуко. Тепловое действие вихревых токов используется в индукционных печах для нагрева при закалке деталей. Направление

токов Фуко подчиняется правилу Ленца, поэтому движущиеся в магнитном поле проводники испытывают силовое торможение, обусловленное взаимодействием вихревых токов с магнитным полем. Этим пользуются для успокоения подвижных частей электроизмерительных приборов. Во многих случаях токи Фуко бывают нежелательными и для борьбы с ними принимают специальные меры. Например, сердечники трансформаторов набираются из тонких пластин изолированных друг от друга.

3.15 ЭДС – индукции во вращающемся витке

Рассмотрим наиболее часто встречающийся на практике вращение плоского витка в однородном магнитном поле, когда ось вращения OO' лежит в плоскости витка и перпендикулярно к вектору \vec{B} магнитной индукции (рис.3.24). Проведём вектор \vec{n} , нормальный к плоскости витка, и обозначим через α угол между векторами \vec{n} и \vec{B} . Выберем начало отсчёта времени t так, чтобы при $t=0$ угол $\alpha = 0$. Если угловая скорость вращения рамки постоянна и равна ω , то угол α в произвольный момент равен:

$$\alpha = \omega t.$$

Поток вектора магнитной индукции сквозь площадь S , ограниченную рамкой, согласно определению равен:

$$\Phi = \int_s NBS \cos \alpha = NBS \cos \omega t, \quad (3.15.1)$$

где N – число витков в рамке. По закону (3.14.1) электромагнитной индукции найдём мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \omega NBS \sin \omega t, \quad (3.15.2)$$

или

$$\varepsilon_i = \varepsilon_m \sin \omega t, \quad (3.15.3)$$

где

$$\varepsilon_m = \omega NBS \quad (3.15.4)$$

амплитуда ЭДС индукции. Таким образом, в плоской рамке, равномерно вращающейся в однородном магнитном поле, возбуждается ЭДС, которая изменяется во времени по гармоническому закону. Данное явление явилось основой для создания промышленных генераторов переменного тока.

3.16 Явление самоиндукции

Рассмотрим замкнутую цепь, состоящую из источника постоянного тока и реостата. Электрический ток I , проходя по проводнику, создаёт магнитное поле (рис.3.25). Это магнитное поле с индукцией \vec{B} создаёт собственный поток Φ_c сквозь поверхность, ограниченную контуром:

$$\Phi_c = \int_s B_n dS, \quad (3.16.1)$$

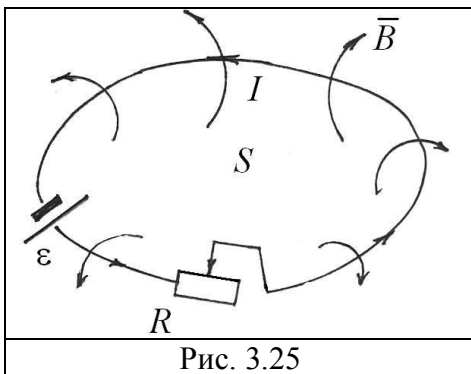


Рис. 3.25

где B_n – проекция вектора \vec{B} на нормаль к элементу поверхности dS . Из закона Био-Савара-Лапласа следует, что при неизменной форме проводника и отсутствии ферромагнитной среды величина вектора магнитной индукции \vec{B} пропорциональна току I , то есть $B \sim I$. Следовательно, и собственный магнитный поток Φ_c согласно выражению (3.16.1) будет пропорционален силе тока I :

$$\Phi_c = LI, \quad (3.16.2)$$

где L – коэффициент пропорциональности называется *индуктивностью* рассматриваемого контура. По своему физическому смыслу индуктивность показывает величину собственного потока вектора магнитной индукции сквозь поверхность, ограниченную контуром при токе в нем, равном единице:

$$L = \frac{\Phi_c}{I}. \quad (3.16.3)$$

Можно считать, что

$$L = \frac{\Delta\Phi_c}{\Delta I}, \quad (3.16.4)$$

т.е. индуктивность показывает, на сколько изменяется собственный магнитный поток через поверхность, ограниченную контуром, при изменении тока в нём на единицу.

Из приведённых выше соображений следует, что величина индуктивности контура должна зависеть от геометрических размеров и формы проводника, а так же от магнитной проницаемости окружающей среды. В этом отношении индуктивность контура является аналогом электрической ёмкости уединённого проводника.

За единицу индуктивности принимается индуктивность такого контура, собственный магнитный поток которого равен 1 Веберу при токе в 1 Ампер. Эта единица называется – генри (Гн):

$$1\text{Гн} = \frac{1\text{Вб}}{1\text{А}} = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}}$$

Покажем, что индуктивность длинного соленоида действительно зависит от магнитной проницаемости среды и его геометрических параметров. На основании (3.16.3) имеем:

$$L = \frac{N\Phi_c}{I},$$

где N – общее число витков соленоида. Для однородного поля длинного соленоида можно положить, что собственный поток сквозь его поперечное сечение равен:

$$\Phi_c = BS,$$

где S – площадь ограниченная одним витком. Следовательно, получим

$$L = \frac{NBS}{I}. \quad (3.16.5)$$

Учитывая, что индукция \bar{B} магнитного поля внутри соленоида определяется формулами (3.8.6) и (3.8.7), т.е.

$$B = \mu_o \mu \frac{N}{l} I,$$

где l – длина соленоида, найдём

$$L = \mu_o \mu n^2 V, \quad (3.16.6)$$

где $n = \frac{N}{l}$ – число витков на единице длины соленоида, $V = Sl$ – его объём. Таким образом, индуктивность соленоида пропорциональна квадрату числа витков на единице длины, объёму соленоида и магнитной проницаемости материала, из которого изготовлен сердечник.

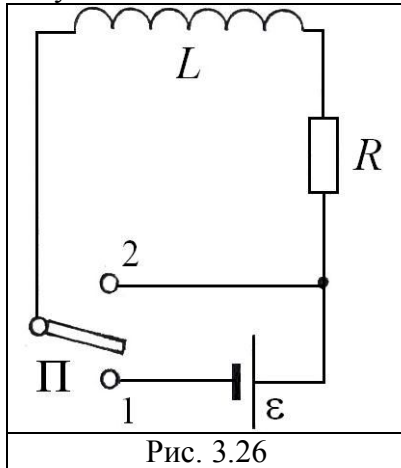
Будем с помощью реостата (рис.3.25) изменять ток в замкнутой цепи. При изменении тока в контуре будет изменяться собственный поток вектора магнитной индукции Φ_c , пронизывающий поверхность S , ограниченную контуром. На основании закона электромагнитной индукции в контуре будет наводиться ЭДС индукции, численно равная:

$$\varepsilon_{si} = -\frac{d\Phi_c}{dt} \quad (3.16.7)$$

Учитывая выражение (3.16.2), найдём:

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (3.16.8)$$

При этом считается, что индуктивность контура $L=const$. Явление возникновения электродвижущей силы индукции в результате изменения тока в цепи получило название *явления самоиндукции*. Электродвижущая сила индукции в этом случае называется *ЭДС самоиндукции*. Как видно из формулы (3.16.8), величина ЭДС самоиндукции зависит от скорости изменения тока в цепи с индуктивностью. Следовательно, явление самоиндукции особенно чётко проявляется при замыкании и размыкании электрических цепей, которые содержат катушки индуктивности. Под действием ЭДС самоиндукции в контуре может появляться индукционный ток самоиндукции, который согласно правилу Ленца направлен так, что он противодействует изменению основного тока, обусловленного гальваническим источником.



Найдём характер измерения тока в цепи (рис.3.26) при переводе переключателя П из положения 1 в положение 2. Пусть переключатель П находится в положении 1 и в цепи установится постоянный ток

$$I_o = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (3.16.9)$$

Внутреннее сопротивление источника тока можно считать пренебрежительно малым. В момент $t=0$ переведём переключатель П из положения 1 в положение 2, то есть мы отключаем гальванический источник тока ε и замыкаем накоротко катушку. Резкое изменение тока в контуре приведёт к возникновению ЭДС самоиндукции:

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{O - I_o}{\Delta t}. \quad \text{Запишем уравнение Кирхгофа для}$$

замкнутого контура, когда переключатель П установлен в положении 2:

$$IR = \varepsilon_{si} \quad \text{или} \quad L \frac{dI}{dt} + IR = 0.$$

Разделив на L , получим линейное однородное дифференциальное уравнение 1-го порядка:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = 0 \quad (3.16.10)$$

Разделим переменные и

проинтегрируем его:

$$\int_{I_o}^I \frac{dI}{I} = - \int_0^t \frac{R}{L} dt$$

Откуда найдём

$$\ln \frac{I}{I_o} = - \frac{R}{L} t$$

Потенцирование этого выражения даёт:

$$I = I_o e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (3.16.11)$$

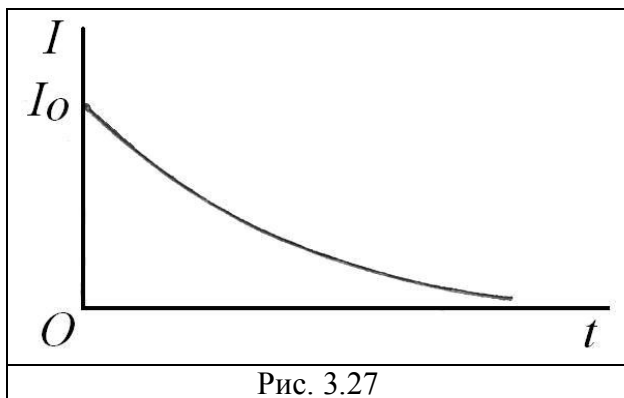


Рис. 3.27

Таким образом, после короткого замыкания катушки, в которой протекал ток I_o , сила тока в цепи не обращается мгновенно в нуль, а убывает по экспоненциальному закону (рис.3.27). Из формулы (3.16.11) следует, что чем больше величина индуктивности L катушки и меньше её сопротивление R , тем медленнее спадает ток в цепи.

Рассмотрим теперь случай подключения катушки индуктивности L к

источнику постоянного тока, обладающему ЭДС равной ε (рис.3.28). После замыкания ключа K , до тех пор пока сила тока не достигнет установившегося значения (3.16.9), в цепи кроме ЭДС источника тока (ε) будет действовать ЭДС самоиндукции (ε_{si}). Запишем закон Кирхгофа для данного контура:

$$IR = \varepsilon + \varepsilon_{si},$$

или

$$IR = \varepsilon - L \frac{dI}{dt}$$

Преобразуем это уравнение к виду:

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L} I = \frac{\varepsilon}{L}. \quad (3.16.12)$$

Мы получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение, которое отличается от однородного уравнения (3.16.10) наличием правой части. Уравнение (3.16.12) имеет два решения: общее решение однородного уравнения:

$$I_1 = ce^{-\frac{R}{L}t},$$

где c – постоянная интегрирования, частное решение:

$$I_2 = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Следовательно, получаем:

$$I = I_1 + I_2 = ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\varepsilon}{R} \quad (3.16.12)$$

Значение тока должно удовлетворять начальному условию: при $t=0$, $I=0$. Из выражения (3.16.12) найдём

$$I|_{t=0} = c + \frac{\varepsilon}{R} = 0$$

Откуда найдём, $c = -\frac{\varepsilon}{R} = -I_o$ - установившееся значение тока в цепи.

Следовательно, окончательно получаем:

$$I = I_o(1 - e^{-\frac{R}{L}t}). \quad (3.16.13)$$

Данная функция описывает нарастание тока в цепи с индуктивностью после подключения к ней источника постоянного тока. Графически эта зависимость показана на рис.3.29.

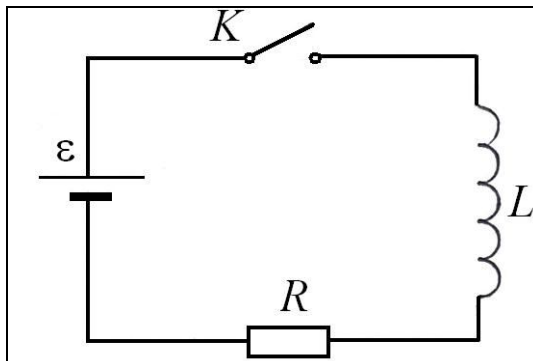


Рис. 3.28

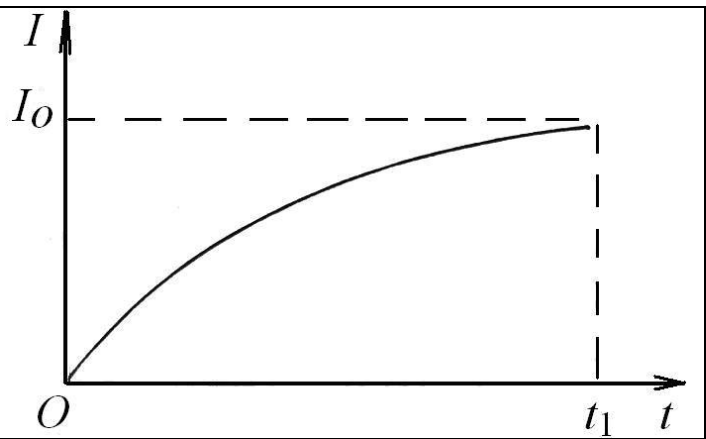


Рис. 3.29

При выключении описанной (рис.3.28) цепи контакты ключа K расходятся и в цепь последовательно включается сопротивление воздушного промежутка. Так как сопротивление воздуха велико, то ток в цепи должен почти мгновенно уменьшиться в момент t_1 до нуля (рис.3.29). Вследствие этого в контуре возникает очень большая ЭДС самоиндукции. Эта ЭДС создаёт во всей цепи сильное вихревое электрическое поле, которое в свою очередь создаёт очень значительную разность потенциалов между контактами ключа K . Разность потенциалов приводит к ионизации воздуха и даже к вырыванию с поверхности контактов свободных электронов. Возможно также появление искрового и даже дугового разрядов. Однако после расхождения контактов на достаточно большое расстояние условие для существования тока самоиндукции (*наличие замкнутой цепи*) нарушается и переходной процесс прекращается достаточно быстро. Экспоненциальный спад тока после размыкания цепи (рис.3.28) невозможен, что подтверждается опытами.

3.17 Энергия магнитного поля

Установим переключатель Π цепи с индуктивностью в положение 1 (рис.3.26). В соленоиде установится ток I , который создаёт магнитное поле \vec{B} . Если отключив соленоид от батареи, замкнуть его через сопротивление R , то есть переключатель установить в положение 2, то в образовавшейся цепи будет некоторое время идти ток за счёт ЭДС самоиндукции. Работа этого тока за время dt равна:

$$dA = \varepsilon_{si} Idt$$

Учитывая, что $\varepsilon_{si} = -\frac{d\Phi_c}{dt}$, получим:

$$dA = -Id\Phi_c. \quad (3.17.1)$$

Если индуктивность L не зависит от тока, то $d\Phi_c = LdI$ и формула (3.17.1) принимает вид:

$$dA = -LIdI. \quad (3.17.2)$$

Проинтегрировав это выражение по I в пределах от первоначального его значения I до нуля, получим работу, совершаемую в цепи за всё время, в течение которого происходит исчезновение магнитного поля катушки:

$$A = -\int_I^0 LIdI = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.17.3)$$

Очевидно, что данная работа совершается за счёт исчезающего магнитного поля катушки. Таким образом, мы приходим к выводу, что катушка с индуктивностью L , по которой течёт ток I обладает энергией:

$$W_L = \frac{LI^2}{2}. \quad (3.17.4)$$

Естественно предположить, что энергия тока (3.17.4) есть ни что иное как *энергия магнитного поля* соленоида. Выразим энергию магнитного поля через величины характеризующие само поле бесконечного соленоида. Согласно формулам (3.16.6) и (3.8.5):

$$L = \mu_o \mu n^2 V ,$$

$$H = nI \text{ или } I = \frac{H}{n} ,$$

на основании выражения (3.17.4) получим:

$$W_H = \frac{1}{2} \mu_o \mu H^2 V , \quad (3.17.5)$$

где $V = lS$ - объём соленоида.

Энергию, приходящуюся на единицу объёма магнитного поля, назовём *объёмной плотностью энергии* и обозначим:

$$\omega = \frac{W_H}{V} \quad (3.17.6)$$

Единицей объёмной плотности энергии является: $\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}$.

Подставляя выражение (3.17.5) в формулу (3.17.6), получим:

$$\omega = \frac{1}{2} \mu_o \mu H^2 \quad (3.17.7)$$

то есть объёмная плотность энергии магнитного поля определяется квадратом напряженности магнитного поля. Учитывая, что $\mu_o \mu H = B$, получим:

$$\omega = \frac{1}{2} BH , \quad (3.17.8)$$

Полученные формулы (3.17.7) и (3.17.8) аналогичны формулам (1.8.6) для плотности энергии электростатического поля. Для этого достаточно заменить: H на E , а B на D . Это ещё раз подчеркивает единство электрических и магнитных полей.

Глава 4. Магнитные свойства вещества

4.1 Описание поля в магнетиках и их классификация

Пусть проводники с токами находятся в вакууме и создают магнитное поле с индукцией \vec{B}_0 . Если проводники с токами находятся в какой-либо среде, то магнитное поле существенным образом изменяется. Это объясняется тем, что всякое вещество является *магнетиком*, т.е. способным под действием внешнего поля намагничиваться. Если поместить магнетик в магнитное поле \vec{B}_0 , обусловленное токами, то намагниченное вещество создает «собственное» магнитное поле \vec{B}' , которое часто называют *внутренним полем*. Вектор \vec{B} индукции результирующего магнитного поля в магнетике равен геометрической сумме магнитных индукций внешнего и внутреннего полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' . \quad (4.1.1)$$

Для объяснения возникновения внутреннего поля в магнетиках Ампер выдвинул гипотезу о существовании в молекулах вещества круговых токов i_e . Каждый такой ток обладает магнитным моментом $P_m = i_e S$, где S – площадь кругового тока. Эти круговые молекулярные токи создают в окружающем пространстве магнитное поле \vec{B}' . Ампер считал, что в отсутствие внешнего поля молекулярные токи ориентированы беспорядочным образом, вследствие чего результирующее внутренне поле равно нулю. Под действием внешнего поля магнитные моменты \vec{P}_m атомов или молекул ориентируются в одном направлении, вследствие чего магнитные поля отдельных молекулярных токов не компенсируют друг друга и возникает отличное от нуля внутреннее поле \vec{B}' . Ориентация магнитных моментов молекулярных токов приводит к намагничиванию вещества.

Степень намагниченности магнетика принято характеризовать результирующим магнитным моментом всех молекул, находящихся в единице объема вещества. Эту величину называют *вектором намагничивания* \vec{I} . Для однородного магнетика вектор \vec{I} в данной точке определяется выражением:

$$\vec{I} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \vec{P}_m}{\Delta V} , \quad (4.1.2)$$

где ΔV – бесконечно малый объем, взятый в окрестности рассматриваемой точки

магнетика. Единицей измерения вектора намагничивания является: $\frac{A \cdot m^2}{m^3} = \frac{A}{m}$, т.е.

вектор намагничивания и напряженность поля имеют одинаковую размерность. Теория и опыт показывают, что для однородных и изотропных сред вектор индукции \vec{B}' внутреннего магнитного поля пропорционален вектору намагничивания \vec{I} :

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{I} , \quad (4.1.3)$$

где μ_0 – магнитная постоянная вакуума.

Учтем, что магнитная индукция внешнего поля равна:

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H} , \quad (4.1.4)$$

так как для вакуума относительная магнитная проницаемость $\mu = 1$. Подставляя выражения (4.1.3) и (4.1.4) в формулу (4.1.1), найдем соотношение:

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{I} . \quad (4.1.5)$$

Как показывает опыт, для большинства веществ вектор намагничивания \vec{I} связан с напряженностью \vec{H} магнитного поля соотношением:

$$\vec{I} = \chi \vec{H} , \quad (4.1.6)$$

где χ - характеристика магнетика, называемая *магнитной восприимчивостью*. Так как размерность величин \vec{I} и \vec{H} совпадают, то магнитная восприимчивость является безразмерной величиной. Учитывая формулу (4.1.6), на основании выражения (4.1.5) находим индукцию магнитного поля внутри магнетика:

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi)\vec{H}. \quad (4.1.7)$$

На основании формулы (3.4.8) находим:

$$\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}. \quad (4.1.8)$$

Сравнивая два последних выражения, находим связь между относительной магнитной проницаемостью μ вещества и его магнитной восприимчивостью χ :

$$\mu = 1 + \chi. \quad (4.1.9)$$

В зависимости от знака и величины магнитной восприимчивости все магнетики подразделяются на три основных группы:

1. *диамагнетики*, у которых χ отрицательна и мала по абсолютной величине ($\chi < 0, \mu < 1$);
2. *парамагнетики*, у которых χ положительна и достигает небольших значений ($\chi > 0, \mu > 1$);
3. *ферромагнетики*, у которых χ положительна и достигает больших значений ($\chi \gg 0, \mu \gg 1$). В отличие от диамагнетиков и парамагнетиков, у которых величины χ и μ постоянны, магнитная восприимчивость ферромагнетиков, а так же относительная магнитная проницаемость, являются некоторыми функциями напряженности магнитного поля (см. разд. 4.5).

Так как магнитная восприимчивость диамагнетика отрицательна, то согласно формуле (4.1.6) вектор намагничивания \vec{I} и вектор напряженности \vec{H} имеют разные знаки. Следовательно внутренне поле \vec{B}' в диамагнетике по направлению противоположно внешнему \vec{B}_0 и результирующее магнитное поле согласно (4.1.1) ослабляется.

Для пара- и ферромагнетиков векторы \vec{I} и \vec{H} имеют одинаковые знаки, так как для этих веществ $\chi > 0$. Следовательно, внутреннее поле \vec{B}' в пара- и ферромагнетиках совпадает по направлению с внешним магнитным полем \vec{B}_0 и результирующее магнитное поле увеличивается.

4.2 Магнитные свойства атома. Теорема Лармора

Очевидно, различие в намагниченности различных магнетиков объясняется внутренним строением атомов, их магнитными свойствами. Согласно классическим представлениям, электроны в атомах движутся по замкнутым орбитам. Такое движение отдельного электрона эквивалентно круговому току i (рис. 4.1). Магнитный момент \vec{P}_e электрического тока, обусловленного движением электрона по орбите, принято называть *орбитальным магнитным моментом* электрона:

$$P_i = iS, \quad (4.2.1)$$

где $S = \pi r^2$ - площадь круговой орбиты электрона радиуса r . Если $T = \frac{2\pi r}{V}$ - период обращения электрона, V - его скорость, то орбитальный ток равен:

$$i = \frac{|e|}{T} = \frac{|e|V}{2\pi r}.$$

Следовательно, для орбитального магнитного момента одного электрона имеем:

$$P_i = \frac{1}{2} e V r . \quad (4.2.2)$$

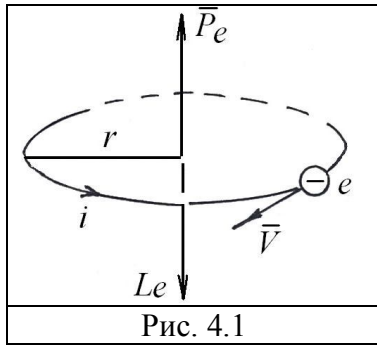


Рис. 4.1

Каждый электрон, равномерно вращающийся на орбите, обладает механическим моментом импульса \bar{L}_i , который равен:

$$L_i = m V r . \quad (4.2.3)$$

Отношение орбитального магнитного момента электрона к его моменту импульса называется *гиромагнитным отношением*:

$$g = \frac{P_i}{L_i} = \frac{e}{2m} . \quad (4.2.4)$$

Вектором орбитального магнитного момента атома назовем геометрическую сумму орбитальных магнитных моментов всех его электронов:

$$\bar{P}_m = \sum_{i=1}^z \bar{P}_i , \quad (4.2.5)$$

где z – число электронов в атоме.

В 20-х годах прошлого столетия было показано, что электрон имеет *собственный механический момент* импульса – спин:

$$L_S = \frac{1}{2} \hbar , \quad (4.2.6)$$

где $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, h – постоянная Планка. Другими словами, электрон представляет вращающийся волчок. Следовательно, каждый электрон имеет собственный магнитный момент P_S . При этом гиромагнитное отношение для электрона равно:

$$g_e = \frac{P_S}{L_S} = \frac{e}{m} , \quad (4.2.7)$$

т.е. оно в два раза больше, чем g .

Из формул (4.2.6) и (4.2.7) найдем собственный магнитный момент электрона, который часто называют магнетон Бора:

$$P_S = \frac{e \hbar}{2m} . \quad (4.2.8)$$

Расчет показывает, что $P_S = 0,927 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{Тл}}$.

Дальнейшие исследования показали, что частицы ядра атома – протоны и нейтроны – также обладают магнитными свойствами. Поэтому полный магнитный момент атома должен включать не только орбитальные магнитные моменты электронов, но и собственные магнитные моменты электронов и ядер.

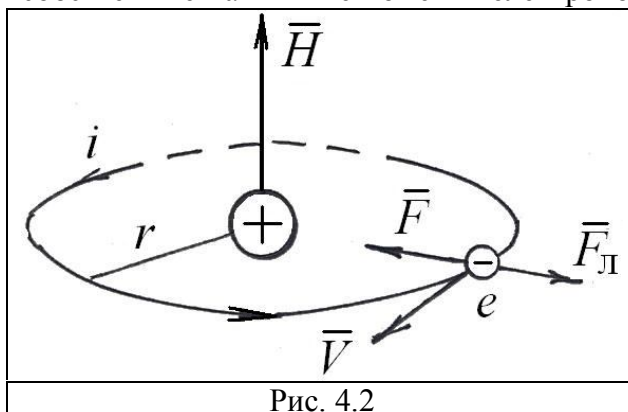


Рис. 4.2

Рассмотрим влияние магнитного поля на орбитальное движение электронов в атомах любого вещества. Допустим, что электрон в атоме движется по круговой орбите, плоскость которой перпендикулярна вектору \bar{H} напряженности магнитного поля (рис. 4.2). При отсутствии магнитного поля на электрон действует только электрическая сила \bar{F} притяжения к ядру, которая выполняет роль центростремительной

силы:

$$F = m\omega_0^2 r, \quad (4.2.9)$$

где m - масса электрона, r - радиус орбиты, ω_0 - угловая скорость вращения электрона по орбите при отсутствии магнитного поля.

При наложении магнитного поля на электрон будет дополнительно действовать сила Лоренца F_L , которая в случае, изображенном на рис. 4.2, будет направлена противоположно электрической силе. Уравнение движения электрона запишется в виде:

$$F - F_L = m\omega^2 r, \quad (4.2.10)$$

где ω - угловая скорость орбитального вращения электрона в атоме при наличии магнитного поля. Учитывая выражение (4.2.9) и то, что $F_L = |e|VB$, найдем:

$$m\omega_0^2 r - eVB = m\omega^2 r.$$

Учитывая связь линейной и угловой скорости $V = \omega r$, получим:

$$m\omega_0^2 - e\omega B = m\omega^2.$$

Откуда видно, что:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = -\frac{e\omega B}{m}.$$

Учитывая, что $\omega^2 - \omega_0^2 = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\omega\Delta\omega$, где $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, $\omega + \omega_0 \approx 2\omega$, найдем изменение угловой скорости вращения электрона при наличии магнитного поля:

$$\Delta\omega = -\frac{eB}{2m} = -\frac{e\mu_0 H}{2m}. \quad (4.2.11)$$

Отсюда видно, что при наложении магнитного поля частота вращения электрона в атоме уменьшается на величину $\Delta\omega$. Этот результат является частным случаем *теоремы Лармора*, так как мы рассмотрели влияние магнитного поля на движение электрона по орбите, плоскость которой перпендикулярна вектору напряженности \vec{H} магнитного поля. Если орбита электрона расположена произвольно и вектор орбитального магнитного момента \vec{P}_i электрона составляет с направлением \vec{H} произвольный угол α , то согласно теореме Лармора вся орбита приходит в *прецессионное движение*, при котором вектор магнитного момента \vec{P}_i , сохраняя неизменным угол α , вращается вокруг направления \vec{H} с угловой скоростью:

$$\omega_L = -\frac{e\mu_0 H}{2m}. \quad (4.2.12)$$

Изменение угловой скорости вращения электрона или появление прецессии орбиты приводит к изменению орбитального тока (его уменьшению), что эквивалентно появлению дополнительного тока Δi противоположного направления. Если $\Delta T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$ - изменение периода обращения электрона, то дополнительный орбитальный ток равен:

$$\Delta i = \frac{|e|}{\Delta T} = \frac{|e\Delta\omega|}{2\pi}.$$

Учитывая выражение (4.2.11), найдем:

$$\Delta i = -\frac{e^2 \mu_0 H}{4\pi m}. \quad (4.2.13)$$

Току Δi соответствует наведенный орбитальный момент электрона $\Delta \vec{p}_i$, численно равный:

$$\Delta p_i = \Delta i \cdot S_{\perp} = -\frac{e^2 \mu_0 S_{\perp}}{4\pi m} H, \quad (4.2.14)$$

где S_{\perp} - площадь проекции орбиты на плоскость, перпендикулярную вектору \vec{H} . Направление вектора $\Delta\vec{p}_i$ противоположно вектору напряженности магнитного поля:

$$\Delta\vec{p}_i = -\frac{e^2\mu_0 S_{\perp}}{4\pi m} \vec{H}. \quad (4.2.15)$$

Если в атоме z электронов, то при внесении атома в магнитное поле \vec{H} , в нем индуцируется дополнительный магнитный момент, который примерно равен:

$$\Delta\vec{p}_m = \sum_{i=1}^N \Delta\vec{p}_i = -\frac{e^2 z \mu_0 \bar{S}_{\perp}}{4\pi m} \vec{H}, \quad (4.2.16)$$

где \bar{S}_{\perp} - среднее значение площади проекции орбит электрона на плоскость, перпендикулярную \vec{H} .

Таким образом, при внесении любого атома в магнитное поле в нем наводится дополнительный магнитный момент $\Delta\vec{p}_m$, который направлен противоположно магнитному полю.

4.3 Диамагнетики в магнитном поле

Как показывают исследования, к диамагнетикам относятся вещества, в которых атомы и молекулы в отсутствие внешнего поля \vec{H} имеют магнитные моменты, равные нулю, т.е. $\vec{P}_m = 0$. Это можно объяснить тем, что орбитальные электрические токи электронов компенсируют друг друга. Диамагнетиками являются инертные газы, многие металлы (цинк, золото, медь, серебро, висмут и др.), вода, смолы, стекло, большинство органических соединений.

При внесении диамагнетика в магнитное поле в каждом его атоме наводится магнитный момент $\Delta\vec{p}_m$ (4.2.16), который направлен противоположно напряженности \vec{H} внешнего магнитного поля. Для однородного диамагнетика в однородном магнитном поле наведенные орбитальные магнитные моменты $\Delta\vec{p}_m$ во всех атомах можно считать одинаковыми. Поэтому вектор намагничивания диамагнетика равен:

$$\vec{I} = \frac{N\Delta\vec{p}_m}{V} = n \cdot \Delta\vec{p}_m, \quad (4.3.1)$$

где $n = \frac{N}{V}$ - концентрация атомов. На основании выражения (4.2.16) получим:

$$\vec{I} = -\frac{ne^2 z \bar{S}_{\perp} \mu_0}{4\pi m} \vec{H}. \quad (4.3.2)$$

Сравнивая эту формулу с выражением (4.1.6), найдем численное значение магнитной восприимчивости диамагнетика:

$$\chi = -\frac{ne^2 z \bar{S}_{\perp} \mu_0}{4\pi m}. \quad (4.3.3)$$

Как и следовало ожидать, для диамагнетиков: $\chi < 0$, а $\mu = 1 + \chi < 1$. Магнитная восприимчивость газов очень мала: для азота - $6,76 \cdot 10^{-9}$, аргона - $10,9 \cdot 10^{-9}$, водорода - $2,25 \cdot 10^{-9}$ и т.п. У жидкостей и твердых тел концентрация атомов больше, больше и магнитная восприимчивость: для воды - $9 \cdot 10^{-6}$, для серебра - $25 \cdot 10^{-6}$ и т.д.

4.4 Парамагнетизм

Рассмотренный в предыдущем разделе механизм намагничивания диамагнетиков сводится к наведению дополнительного магнитного момента у атомов под действием внешнего магнитного поля. Это явление характерно для атомов любого вещества,

следовательно, все вещества должны обладать диамагнитными свойствами. Откуда же берутся парамагнетики?

Оказывается, что в отличие от диамагнетиков, у которых магнитные моменты электронов при их орбитальном движении скомпенсированы, атомы парамагнетиков имеют не скомпенсированные магнитные моменты $\bar{p}_m \neq 0$. Причем эти магнитные моменты p_m значительно больше наведенных магнитных моментов Δp_m (4.2.16) при диамагнитном эффекте. Можно считать, что $\Delta p_m \ll p_m$, и следовательно, возникновение дополнительных моментов $\Delta \bar{p}_m$ в атомах парамагнетиков можно не учитывать. К парамагнетикам относятся: кислород, алюминий, платина, щелочные металлы и др.

При внесении парамагнитного вещества в магнитное поле $\bar{B}_0 = \mu_0 \bar{H}$ каждый магнитный момент \bar{p}_m атома или молекулы стремится установиться вдоль поля \bar{B}_0 (см. разд. 3.2). Однако, тепловое движение атомов или молекул стремится разбросать магнитные моменты так, что все направления векторов \bar{p}_m будут равновероятны. В результате действия этих двух противоположных факторов устанавливается некоторая равновесная преимущественная ориентация магнитных моментов вдоль внешнего поля.

Классическая теория парамагнетизма была развита П. Ланжевеном в начале прошлого века. Очевидно, что ориентирующее действие магнитного поля на атомы парамагнетика зависит от величин \bar{p}_m и \bar{B}_0 . Причем, чем больше \bar{p}_m и \bar{B}_0 , тем сильнее проявляется ориентирующее действие поля. Разбрасывающее действие теплового движения определяется средней тепловой энергией молекул, т.е. величиной пропорциональной kT (k - постоянная Больцмана, T - абсолютная температура). Очевидно, чем больше температура, тем меньше ориентирующее действие поля. Таким образом, действие двух противоположных факторов можно характеризовать безразмерной величиной:

$$a = \frac{p_m B_0}{kT} = \frac{p_m \mu_0 H}{kT} . \quad (4.4.1)$$

При не очень сильных магнитных полях можно считать, что намагниченность парамагнетика равна:

$$I = \frac{1}{3} n_0 p_m a , \quad (4.4.2)$$

где n_0 - концентрация атомов. Учитывая выражение (4.4.1), получим:

$$I = \frac{n_0 p_m^2 \mu_0}{3kT} H . \quad (4.4.3)$$

Сравнивая это выражение с формулой (4.1.6), найдем значение магнитной восприимчивости для парамагнетиков:

$$\chi = \frac{n_0 p_m^2 \mu_0}{3kT} . \quad (4.4.4)$$

Отсюда видно, что χ - положительная величина и следовательно, направления векторов \bar{I} и \bar{H} совпадают. Исследования показывают, что восприимчивость кислорода при комнатных температурах равна $18,6 \cdot 10^{-7}$, для окиси азота - $0,8 \cdot 10^{-7}$. У твердых парамагнетиков восприимчивость в 1000 раз больше: для платины - $2,58 \cdot 10^{-4}$, для лития - $2,3 \cdot 10^{-5}$ и т.п.

Таким образом, теория и опыт показывают, что магнитная восприимчивость парамагнетиков примерно в 100 раз больше восприимчивости диамагнетиков. Это позволяет объяснить почему у парамагнетиков не проявляются диамагнитные свойства.

Оказывается, что более сильный парамагнитный эффект перекрывает слабый диамагнитный.

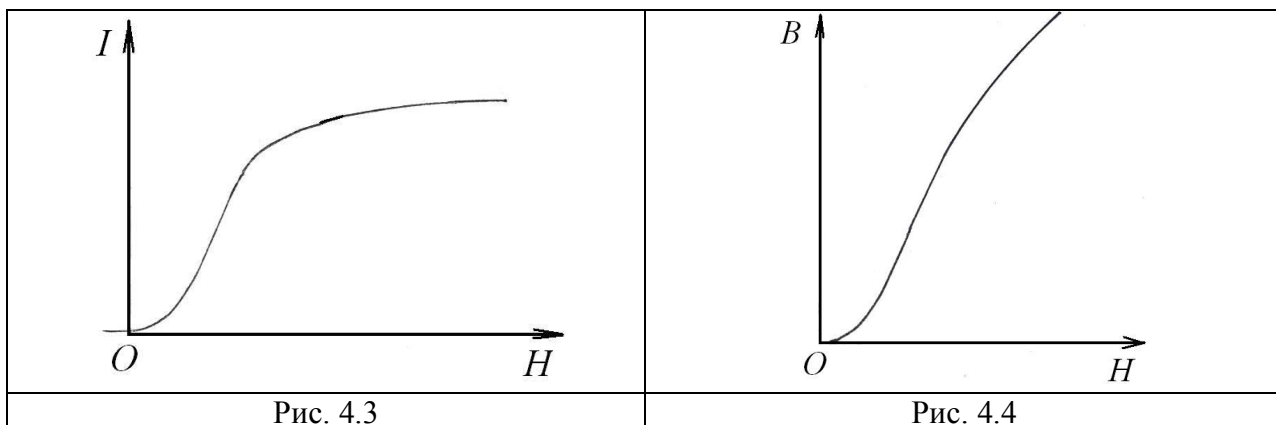
Из формулы (4.4.4) следует, что магнитная восприимчивость парамагнетиков в отличие от диамагнетиков обратно пропорционально абсолютной температуре (закон Кюри):

$$\chi = \frac{c}{T}, \quad (4.4.5)$$

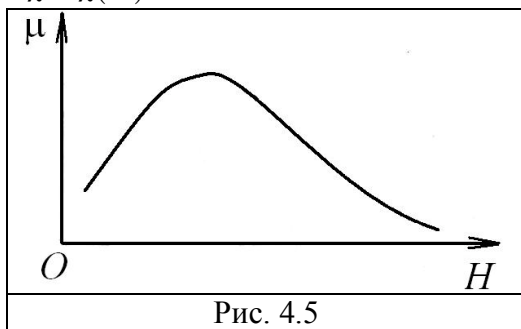
где c – постоянная величина. Закон Кюри подтверждается экспериментально.

4.5 Ферромагнетизм

Ферромагнетиками называются такие вещества, в которых внутреннее магнитное поле \bar{B}' может в сотни и тысячи раз превышать вызвавшее его поле \bar{B}_0 (см. разд. 4.1). Для ферромагнетиков характерна также остаточная намагниченность. К ферромагнетикам относятся железо, никель, кобальт и их сплавы. В отличие от диа- и парамагнетиков, у которых вектор намагниченности \bar{I} прямо пропорционален напряженности \bar{H} намагничивающего поля, у ферромагнетиков намагниченность является весьма сложной функцией напряженности (рис. 4.3). Как видно из этого рисунка намагниченность ферромагнетиков сначала быстро нарастает с ростом напряженности магнитного поля. Затем наступает *магнитное насыщение*, когда намагниченность уже практически перестает зависеть от величины намагничивающего поля.



Поскольку намагниченность ферромагнетиков не прямо пропорциональна напряженности поля, то согласно формуле (4.1.6) можно предположить, что магнитная восприимчивость χ не является постоянной величиной для данного ферромагнетика, а является довольно сложной функцией напряженности намагничивающего поля, т.е. $\chi = \chi(H)$.



Исследования показывают, что зависимость магнитной индукции \bar{B} от напряженности поля \bar{H} для ферромагнетиков также является нелинейной (рис. 4.4). Следовательно, согласно формуле (4.1.8) следует предположить, что относительная магнитная проницаемость μ ферромагнетика также зависит от напряженности намагничивающего поля \bar{H} , т.е. $\mu = \mu(H)$. Относительная магнитная проницаемость ферромагнетиков вначале быстро

растет с возрастанием \bar{H} , достигает максимума, а затем убывает (рис. 4.5). Максимальное значение μ для ферромагнетиков очень велико. Так для железа $\mu_{\max} = 5000$, для пермаллоя (78% никеля и 22% железа) $\mu_{\max} = 100000$.

Следующее важное отличие ферромагнетиков заключается в том, что если парамагнитные или диамагнитные свойства вещества проявляются в любом агрегатном состоянии, то ферромагнитные свойства наблюдаются только у кристаллов и поликристаллических веществ. В жидком или газообразном состоянии ферромагнитные вещества ведут себя как обычные парамагнетики. Отсюда следует, что ферромагнитные свойства определяются не особыми свойствами их атомов, а особой структурой их кристаллической решетки.

Оказывается, что для каждого ферромагнетика имеется определенная температура – точка Кюри, выше которой ферромагнитные свойства исчезают и вещество становится обычным парамагнетиком. Для железа точка Кюри составляет 770°C , для никеля 360°C , для пермаллоя – 70°C .

Характерным свойством ферромагнетиков является *гистерезис*. Явление заключается в том, что намагниченность ферромагнетика зависит не только от напряженности намагничивающего поля в данный момент, но и от предварительного намагничивания образца. Явление гистерезиса приводит к тому, что процесс намагничивания ферромагнетика не совпадает с процессом размагничивания.

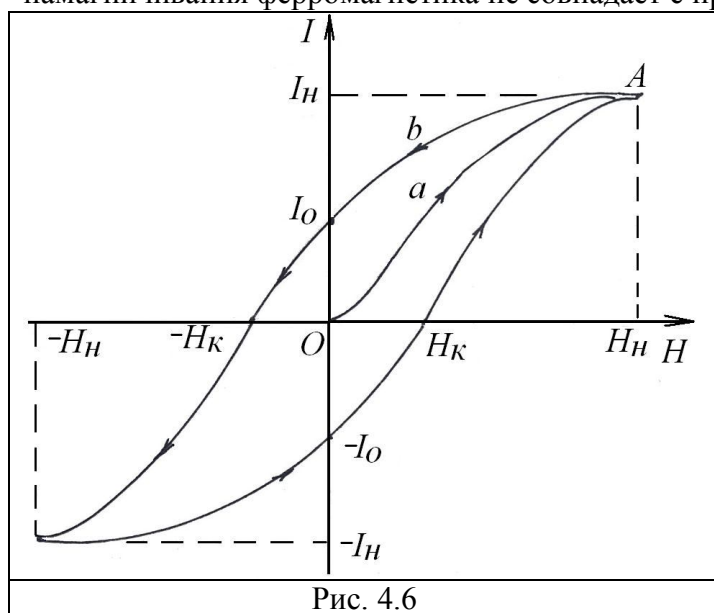


Рис. 4.6

График на рис. 4.3 характеризует ход первоначальной намагниченности. Кривая OaA на рис. 4.6 также относится к первоначальному намагничиванию ферромагнетика до насыщения I_H . Будем уменьшать напряженность магнитного поля от H_H до нуля. Намагниченность будет уменьшаться (кривая AbI_0 на рис. 4.6) в процессе размагничивания, но величина намагниченности остается все время большей, чем в процессе намагничивания. Когда магнитное поле H станет равной нулю ($H = 0$), намагниченность ферромагнетика не

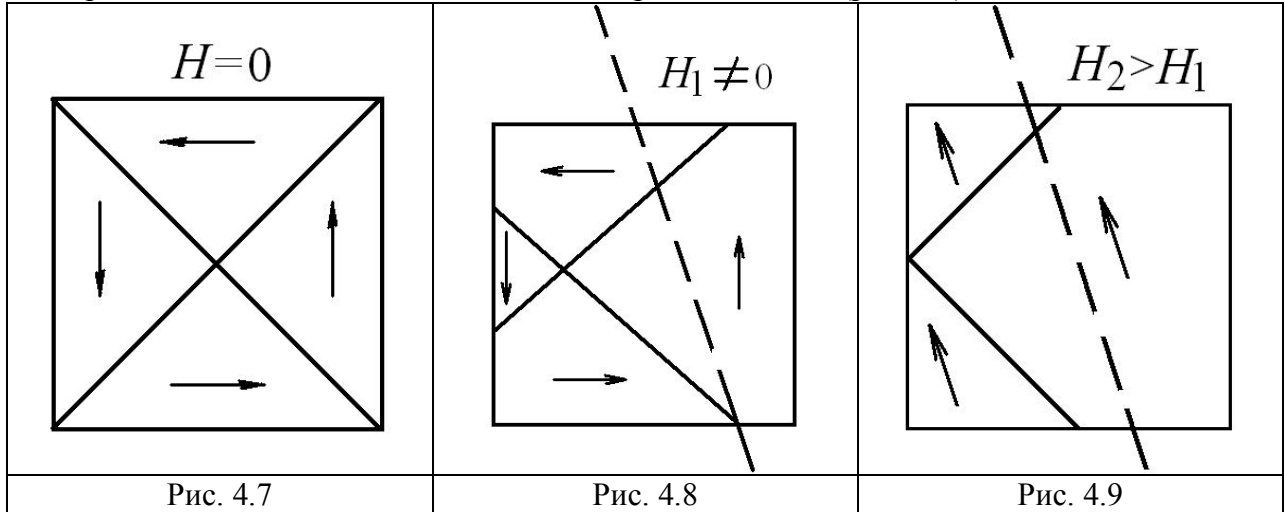
обратится в ноль – образец сохранит некоторую *остаточную намагниченность* I_0 и только в том случае, когда на образец будет подано магнитное поле H_K противоположного направления, намагниченность образца обратится в ноль. Напряженность размагничивающего поля H_K называется *коэрцитивной силой*.

Кривая, изображенная на рис. 4.6 называется *гистерезисной петлей*.

Ферромагнетики с большой коэрцитивной силой называются «магнитотвердыми». Для них характерна широкая петля гистерезиса. Ферромагнетики с малой коэрцитивной силой называются «магнитомягкими». Для них характерна узкая петля гистерезиса. Так, для изготовления постоянных магнитов используются магнитотвердые ферромагнетики, а для изготовления сердечников трансформаторов – магнитомягкие.

Особенности ферромагнетиков можно объяснить, следуя классической теории ферромагнетизма, предложенной П. Вейссом. Согласно этой теории, при температуре ниже точки Кюри ферромагнетик состоит из микроскопических областей, называемых *доменами*, в каждой из которых магнитные моменты атомов расположены строго в одном направлении. Тем самым каждый домен оказывается намагниченным до насыщения независимо от наличия внешнего магнитного поля и от его величины. Размеры доменов достигают $10^{-2} - 10^{-3}$ см, вследствие чего их можно наблюдать в микроскоп.

При отсутствии внешнего магнитного поля магнитные моменты доменов ориентированы хаотично, так что суммарный магнитный момент всего образца равен нулю (рис. 4.7). Действие внешнего поля на домены при небольших напряженностях полей приводит к увеличению тех доменов, моменты которых составляют меньший угол с вектором \vec{H} (рис. 4.8). При больших напряженностях магнитных полей происходит поворот магнитных моментов доменов в направлении поля (рис. 4.9).



Классическая теория ферромагнетизма позволила объяснить закономерности намагничивания ферромагнетиков, и в частности, явление насыщения и наличия остаточной намагниченности. Очевидно, что магнитное насыщение наступает тогда, когда векторы магнитных моментов во всех областях спонтанной намагниченности устанавливаются параллельно внешнему полю (рис. 4.9). Остаточная намагниченность ферромагнетиков объясняется сохранением преимущественной ориентации магнитных моментов доменов после снятия внешнего поля. Перемагничивание ферромагнетика связано с поворотом областей спонтанной намагниченности.

Опыт показывает, что изменение ориентации областей спонтанной намагниченности при изменении внешнего поля происходит скачкообразно. Это явление носит название эффекта Баркгаузена.

При намагничивании ферромагнетиков происходит изменение его формы и объема. Это явление называется *магнитострикцией*. Оно нашло применение для изготовления ультразвуковых излучателей.

В классической теории ферромагнетизма не вскрывалась причина самопроизвольной намагниченности доменов. Вначале предполагалось, что самопроизвольная намагниченность доменов до насыщения может быть объяснено полной ориентацией результирующих орбитальных магнитных моментов всех электронов атомов, входящих в домен. Гиромагнитное отношение для орбитального движения электрона согласно формуле (4.2.4) равно : $g = \frac{e}{2m}$. Однако опыты А. Эйнштейна и А. де-Гааза показали, что для ферромагнитных веществ гиромагнитное отношение в два раза больше, чем для пара-

и диамагнитных веществ (4.2.2), т.е. $g_s = 2g = \frac{e}{m}$. Объяснить опыты можно, если предположить, что электроны обладают собственным *спиновым магнитным моментом* $\vec{P}_s = \frac{e\hbar}{2m}$ (4.2.8).

Таким образом, намагниченность ферромагнетиков не связана с орбитальным движением электронов, а объясняется наличием спиновых магнитных моментов у электронов. Так, например, расчеты показывают, что в каждом атоме железа четыре электронных спина третьей оболочки остаются не скомпенсированными. При температуре ниже точки Кюри в ферромагнетике возникают так называемые *силы обменного*

взаимодействия, которые заставляют магнитные моменты указанных электронов выстраиваться в области каждого домена параллельно друг другу. В результате чего области спонтанного намагничивания оказываются намагниченными до насыщения. Следует отметить, что силы обменного взаимодействия не имеют классического аналога, а являются особым видом квантового взаимодействия.

Обменные силы приводят к возникновению так называемого *антиферромагнетизма*. Примером антиферромагнитных веществ являются *ферриты*. Их получают путем спекания порошков, состоящих из тщательно перемешанных окислов железа (Fe_2O_3) с окислами других металлов – марганца, лития, никеля и др. При температуре ниже точки Кюри спиновые магнитные моменты двух разнородных атомов (железа и, например, марганца) попарно направлены в противоположную сторону в объеме всего образца. Но благодаря тому, что магнитные моменты двух соседних атомов различны по абсолютной величине, ниже точки Кюри феррит окажется спонтанно намагниченным и его восприимчивость отлична от нуля.

В зависимости от состава и технологии производства ферритов их свойства могут быть самыми разнообразными. Так, коэрцитивная сила никель-цинковых ферритов составляет всего $1 \frac{A}{M}$, а у кобальтовых ферритов – около $2 \cdot 10^5 \frac{A}{M}$. У магний-марганцевых ферритов гистерезисная петля близка к прямоугольной, что позволяет применять их в качестве элементов запоминающих устройств в электронных вычислительных машинах.

Магнитная индукция у ферритов значительно меньше, чем у металлических ферромагнетиков. Но ферриты обладают одним важным преимуществом: если металлические ферромагнетики являются хорошими проводниками электрического тока, то ферриты обладают сравнительно низкой электропроводностью. Это позволяет использовать ферриты в качестве сердечников различных устройств, работающих на токах высокой частоты, где применять стальные сердечники невозможно.

Глава 5. Электромагнитные колебания

5.1 Свободные колебания в идеальном контуре

Колебания тока или электрического заряда могут возникать в цепи, состоящей из индуктивности и емкости. Такая электрическая цепь называется *колебательным контуром*. Если активное сопротивление колебательного контура равно нулю, то его принято называть *идеальным* (рис. 5.1).

Чтобы вызвать колебания, зарядим от источника тока конденсатор, который предварительно был отключен от катушки индуктивности (рис. 5.1а). Электрическое поле конденсатора обладает энергией:

$$W_C = \frac{q_m^2}{2C}, \quad (5.1.1)$$

где q_m - заряд, сообщенный конденсатору. Отключив от источника тока конденсатор, замкнем его на индуктивность. Конденсатор начнет разряжаться и благодаря явлению самоиндукции в цепи будет нарастать электрический ток. В некоторый момент ток в катушке достигнет максимального значения I_m , а конденсатор полностью разрядится. Магнитное поле катушки будет иметь максимальное значение (рис. 5.1б):

$$W_L = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (5.1.2)$$

Так как активное сопротивление контура равно нулю, то отсутствуют потери энергии на нагревание проводников. Следовательно, по закону сохранения энергии имеем:

$$W_C = W_L \text{ или } \frac{q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}. \quad (5.1.3)$$

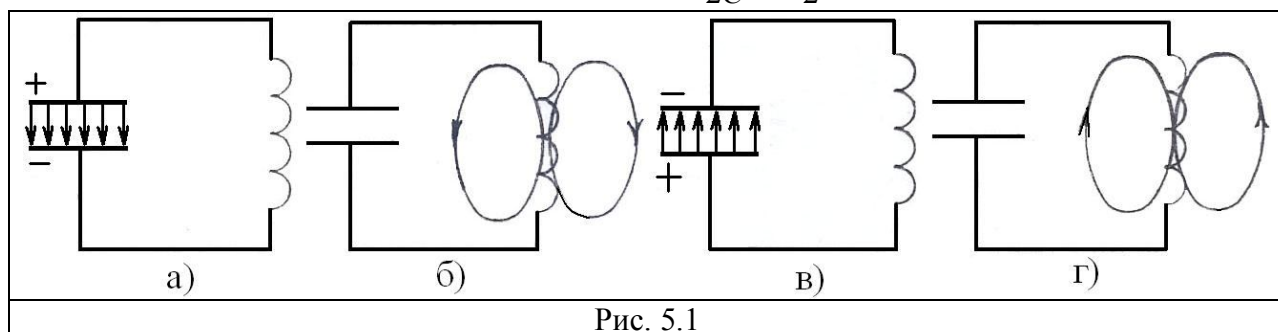


Рис. 5.1

В дальнейшем ток будет уменьшаться, а заряд на конденсаторе будет увеличиваться, т.е. энергия магнитного поля катушки будет передаваться энергии электрического поля конденсатора. Наступит такой момент, что ток превратится в ноль, а заряд на обкладках конденсатора достигнет максимального значения (рис. 5.1в), т.е. произойдет перезарядка конденсатора. Далее конденсатор начнет разряжаться и ток течет в обратном направлении, достигая в некоторый момент (рис. 5.1г) максимального значения. Энергия электрического поля при этом превращается в энергию магнитного поля. Затем энергия магнитного поля перейдет в энергию электрического поля. Далее колебательный процесс будет повторяться. Легко видеть, что в описанном контуре совершают колебания: электрический заряд q , сила тока I , напряжение U на конденсаторе.

По правилу Кирхгофа для замкнутой цепи в любой момент времени напряжение на конденсаторе U_C равно ЭДС самоиндукции катушки ε_{si} :

$$U_C = \varepsilon_{si}. \quad (5.1.4)$$

Если заряд конденсатора равен q , то $U_C = \frac{q}{C}$. Учитывая, что мгновенное значение силы тока $I = \frac{dq}{dt}$, ЭДС самоиндукции равна $\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2q}{dt^2}$. Следовательно, согласно (5.1.4) получим:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Разделив это выражение на L , получим *дифференциальное уравнение колебаний в идеальном контуре*:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (5.1.5)$$

Сравнивая это уравнение с уравнением колебаний пружинного маятника, убеждаемся в их тождественности. Решением дифференциального уравнения (5.1.5) является *уравнение гармонических колебаний*:

$$q = q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.1.6)$$

Действительно, продифференцируя эту функцию дважды по времени, получим:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\omega_0^2 q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (5.1.7)$$

Подставляя формулы (5.1.6) и (5.1.7) в уравнение (5.1.5), найдем собственную круговую частоту колебаний в контуре:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5.1.8)$$

Для периода собственных колебаний имеем:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (5.1.9)$$

Из этих формул следует, что собственная частота и период колебаний не зависят от условий запуска контура, а зависят от параметров колебательного контура: индуктивности катушки и емкости конденсатора.

Найдем закон изменения силы тока в контуре. Для этого продифференцируем выражение (5.1.6) по времени:

$$I = \frac{dq}{dt} = \omega_0 q_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad (5.1.10)$$

или

$$I = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5.1.11)$$

где

$$I_m = \omega_0 q_m \quad (5.1.12)$$

амплитуда силы тока. Сравнивая формулы (5.1.6) и (5.1.11), видно, что изменение силы тока отстает по фазе на $\frac{\pi}{2}$ от изменения заряда на конденсаторе (рис. 5.2). Найдем закон изменения напряжения на конденсаторе:

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_m}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \text{ или } U_C = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (5.1.13)$$

где

$$U_m = \frac{q_m}{C} \quad (5.1.14)$$

амплитуда напряжения на конденсаторе.

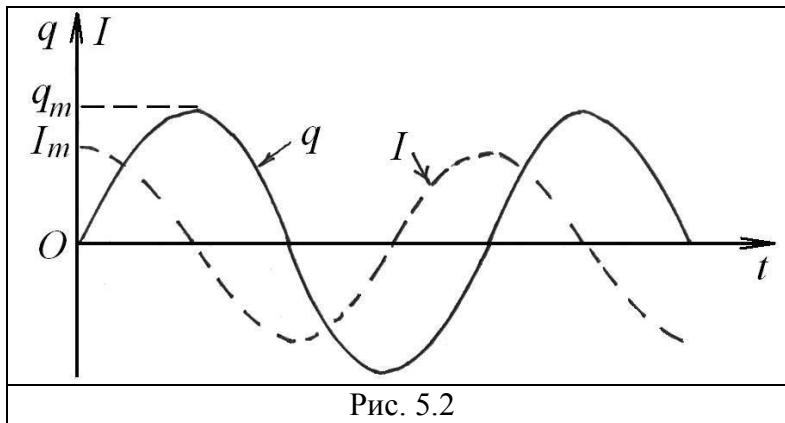


Рис. 5.2

Сравнивая формулы (5.1.6) и (5.1.13), видно, что изменение напряжения на конденсаторе и изменение заряда на его обкладках происходят в одинаковой фазе.

Волновым сопротивлением колебательного контура называется отношение амплитуды напряжения U_m на конденсаторе к амплитуде силы тока I_m в катушке:

$$\rho = \frac{U_m}{I_m}. \quad (5.1.15)$$

Величины U_m и I_m отличаются по времени на $\frac{T_0}{4}$. На основании формул (5.1.12) и (5.1.14), найдем:

$$\rho = \frac{1}{\omega_0 C} = \frac{\sqrt{LC}}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5.1.16)$$

Следует заметить, что идеальных колебательных контуров нет, так как проводники, образующие колебательный контур всегда имеют активное сопротивление, которое не равно нулю ($R \neq 0$). Полученные выводы этого параграфа можно использовать, если сопротивление R мало и им можно пренебречь. Но это не всегда возможно.

5.2 Свободные колебания в реальном колебательном контуре

Любой реальный контур (рис. 5.3) обладает активным сопротивлением ($R \neq 0$). Первоначально запасенная энергия, например в конденсаторе, будет постепенно расходоваться на нагревание проводников, вследствие чего свободные колебания будут *затухающими*. Согласно правилу Кирхгофа для замкнутой цепи имеем:

$$U_R + U_C = \varepsilon_{si}, \quad (5.2.1)$$

где

$$U_R = IR = R \frac{dq}{dt} \quad (5.2.2)$$

падение напряжения на резисторе;

$$U_C = \frac{1}{C} q \quad (5.2.3)$$

напряжение на конденсаторе;

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{d^2 q}{dt^2} \quad (5.2.4)$$

ЭДС самоиндукции. Следовательно, имеем:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0.$$

Разделив это уравнение на L , получим дифференциальное уравнение для реальных свободных колебаний в контуре:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (5.2.5)$$

Введем обозначения:

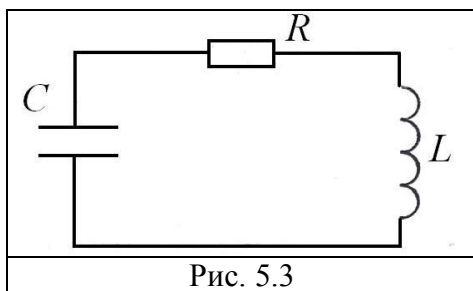


Рис. 5.3

$$\frac{R}{L} = 2\beta \text{ или } \beta = \frac{R}{2L} \quad (5.2.6)$$

где β - коэффициент затухания;

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2 \quad (5.2.7)$$

где ω_0 - собственная частота идеальных колебаний.

Таким образом, дифференциальное уравнение для реальных свободных колебаний имеет вид:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (5.2.8)$$

В зависимости от величины активного сопротивления контура решение этого дифференциального уравнения будет различным.

Рассмотрим случай малых потерь энергии. Будем считать, что $\beta < \omega_0$ или $\frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}$, т.е. $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ или $R < 2\rho$ - активное сопротивление меньше двух волновых сопротивлений контура. В этом случае решением дифференциального уравнения (5.2.8) является уравнение затухающих колебаний заряда на конденсаторе:

$$q = q_{0m} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5.2.9)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (5.2.10)$$

частота реальных колебаний в контуре. Легко заметить, что ω и ω_0 отличаются на небольшую величину ($\omega < \omega_0$). Так как $\cos(\omega t + \varphi_0)$ с течением времени изменяется периодически от +1 до -1, то величина

$$q_{0m} e^{-\beta t} = q_m \quad (5.2.11)$$

называется амплитудой колебаний в произвольный момент времени, а q_{0m} - амплитуда колебаний в начальный момент времени при $\varphi_0 = 0$. Следовательно, согласно формуле (5.2.11) амплитуда при затухающих колебаниях уменьшается по экспоненциальному закону (рис. 5.4). Выясним физический смысл коэффициента затухания β . Положим, что время

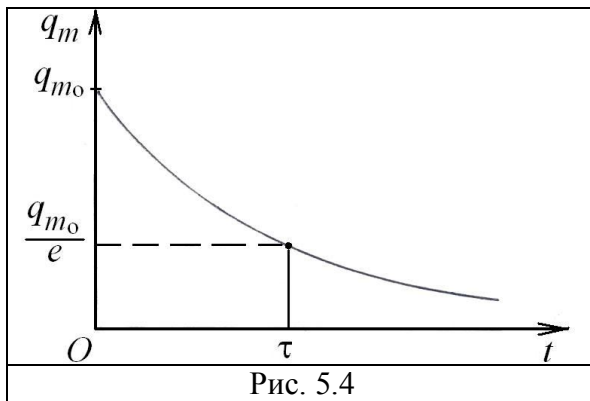
$$t = \tau = \frac{1}{\beta}. \quad (5.2.12)$$

Тогда на основании выражения (4.2.11) получим

$$q_m = q_{0m} e^{-1} = \frac{q_{0m}}{e},$$

т.е. за время τ амплитуда колебаний в контуре уменьшается в e раз (рис. 5.4). Следовательно, согласно выражению (5.2.12) коэффициент затухания β обратно пропорционален времени τ , в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз:

$$\beta = \frac{1}{\tau}. \quad (5.2.13)$$



Время τ часто называют временем затухания колебаний.

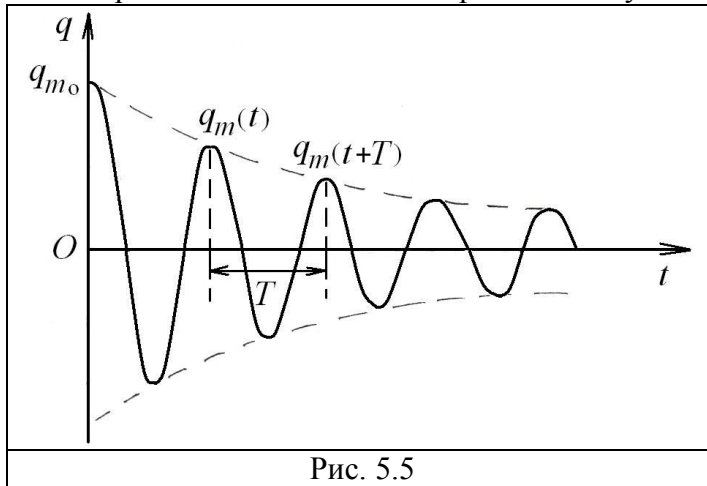


Рис. 5.5

На рис. 5.5 изображен график затухающих колебаний, выполненный согласно формуле (5.2.9) при $\varphi_0 = 0$. Найдем закон изменения напряжения на конденсаторе $U_C = \frac{q}{C}$. На основании выражения (5.2.9) получим:

$$U = U_{0m} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (5.2.14)$$

где $U_{0m} = \frac{q_{0m}}{C}$ — амплитуда напряжения на конденсаторе в

начальный момент времени ($t = 0$) при $\varphi_0 = 0$.

Затухающие колебания принято характеризовать логарифмическим декрементом затухания, который показывает относительную убыль амплитуды колебаний за период:

$$\lambda = \ln \frac{q_m(t)}{q_m(t+T)}, \quad (5.2.15)$$

т.е. логарифмический декремент затухания численно равен натуральному логарифму отношения двух амплитуд, отличающихся во времени на период. На основании закона затухания (4.2.11) найдем:

$$\lambda = \ln \frac{e^{-\beta t}}{e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \quad (5.2.16)$$

Учитывая выражение (5.2.13), найдем:

$$\lambda = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

где $N_e = \frac{\tau}{T}$ — число полных колебаний, совершив которые амплитуда уменьшается в e раз. Можно сказать, что логарифмический декремент затухания обратно пропорционален числу колебаний, совершив которые амплитуда уменьшается в e раз.

Учитывая выражение (5.2.6), на основании (5.2.16) найдем:

$$\lambda = \frac{RT}{2L}. \quad (5.2.17)$$

При малом активном сопротивлении можно считать, что $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Поэтому имеем:

$$\lambda = \frac{\pi R}{\omega L}. \quad (5.2.18)$$

Отсюда видно, что чем больше активное сопротивление, тем больше β и λ и, следовательно, быстрее происходит затухание.

Колебательный контур часто характеризуют его *добротностью* Q , которая обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda}. \quad (5.2.19)$$

Согласно формуле (5.2.18) получим:

$$Q = \frac{\omega L}{R}, \quad (5.2.20)$$

т.е. добротность контура обратно пропорциональна активному сопротивлению. По своему физическому смыслу добротность характеризует относительное уменьшение энергии за период. На рис. 5.6 показаны графики затухающих колебаний в контуре при различной добротности: $Q_2 < Q_1$, $\lambda_2 > \lambda_1$, $R_2 > R_1$, $\tau_2 < \tau_1$, $\beta_2 > \beta_1$.

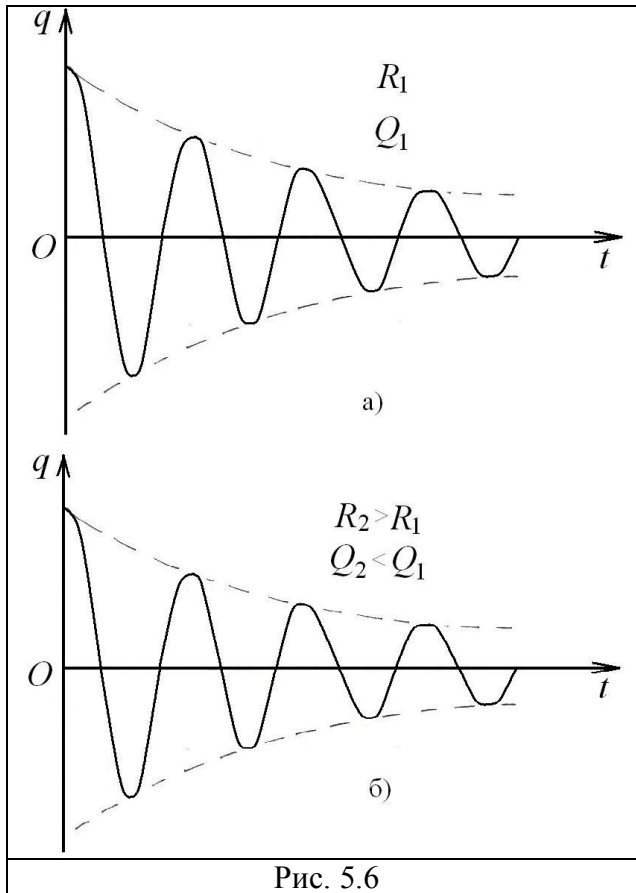


Рис. 5.6

Очевидно, что при дальнейшем увеличении активного сопротивления R контура, время затухания τ будет уменьшаться. При так называемом *критическом сопротивлении* контура:

$$R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5.2.21)$$

согласно формуле (5.2.10) частота колебаний ω превращается в ноль, а период колебаний стремится к бесконечности:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

При активном сопротивлении контура $R \geq R_{кр}$ колебательный процесс становится *апериодическим*, т.е. происходит *апериодический разряд* конденсатора.

5.3 Вынужденные электромагнитные колебания

Под *вынужденными колебаниями* в контуре понимают колебания, которые возникают в нем под действием внешней периодически изменяющейся ЭДС. Пусть на последовательный контур, состоящий из конденсатора емкостью C , катушки индуктивности L и активного сопротивления R (рис. 5.7), подается внешняя ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону:

$$\varepsilon = \varepsilon_m \sin \omega t, \quad (5.3.1)$$

где ε_m - амплитуда ЭДС, ω - круговая частота внешней ЭДС. Для получения дифференциального уравнения вынужденных колебаний воспользуемся правилом Кирхгофа для замкнутой цепи:

$$U_R + U_C = \varepsilon_{si} + \varepsilon, \quad (5.3.2)$$

где $U_R = IR$ - мгновенное падение напряжения на

активном сопротивлении, $U_C = \frac{q}{C} = \frac{1}{C} \int_0^t Idt$ -

напряжение на конденсаторе, $\varepsilon_{si} = -L \frac{dI}{dt}$ - ЭДС самоиндукции. Следовательно, получаем:

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{1}{C} \int_0^t Idt = \varepsilon_m \sin \omega t. \quad (5.3.3)$$

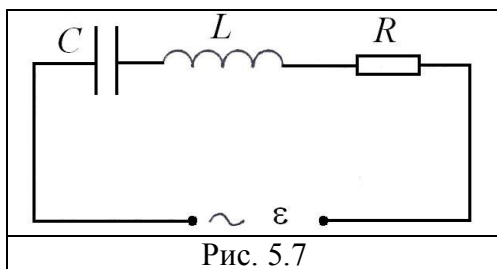


Рис. 5.7

Полное решение этого неоднородного уравнения равно сумме решения соответствующего однородного линейного уравнения, которое представляет собой затухающие колебания частоты ω_0 , и частного решения с частотой ω вынуждающей ЭДС:

$$I = I_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (5.3.4)$$

Различие частот ω_0 и ω приводит к тому, что в начальный момент подключения ЭДС в контуре возникают биения тока. Но так как затухающие колебания вскоре исчезают, то в установившемся режиме остаются чисто вынужденные колебания тока (5.3.4). Чтобы найти амплитуду I_m вынужденных колебаний и их начальную фазу φ продифференцируем и проинтегрируем выражение (5.3.4):

$$\frac{dI}{dt} = \omega I_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega I_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.3.5)$$

$$\int_0^t I dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{I_m}{\omega} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right). \quad (5.3.6)$$

Подставляя формулы (4.3.4)-(4.3.6) в уравнение (4.3.3) получим:

$$\omega L I_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + R I_m \sin(\omega t + \varphi) + \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon_m \sin \omega t. \quad (5.3.7)$$

Физический смысл этого уравнения: сумма мгновенных напряжений на индуктивности U_L , на активном сопротивлении U_R и емкости U_C равно мгновенной внешней ЭДС, приложенной к контуру. Следовательно, можно записать, во-первых:

$$U_L = \omega L I_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) = U_{mL} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \quad (5.3.8)$$

где

$$U_{mL} = \omega L I_m \text{ или } I_m = \frac{U_{mL}}{\omega L}. \quad (5.3.9)$$

Величину

$$\omega L = X_L \quad (5.3.10)$$

принято называть *реактивным сопротивлением катушки индуктивности*.

Во-вторых,

$$U_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = U_{mC} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right), \quad (5.3.11)$$

где

$$U_{mC} = \frac{I_m}{\omega C} \text{ или } I_m = \omega C U_{mC}. \quad (5.3.12)$$

Величину

$$\frac{1}{\omega C} = X_C \quad (5.3.13)$$

называют *реактивным сопротивлением конденсатора*.

В-третьих,

$$U_R = I_m R \sin(\omega t + \varphi) = U_{mR} \sin(\omega t + \varphi), \quad (5.3.14)$$

где

$$U_{mR} = I_m R \text{ или } I_m = \frac{U_{mR}}{R}. \quad (5.3.15)$$

Величина R - активное сопротивление контура, U_{mR} - падение напряжения на активном сопротивлении.

Таким образом, выражение (5.3.7) можно записать в виде:

$$U_{mL} \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + U_{mR} \sin(\omega t + \varphi) + U_{mC} \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = \varepsilon_m \sin \omega t. \quad (5.3.16)$$

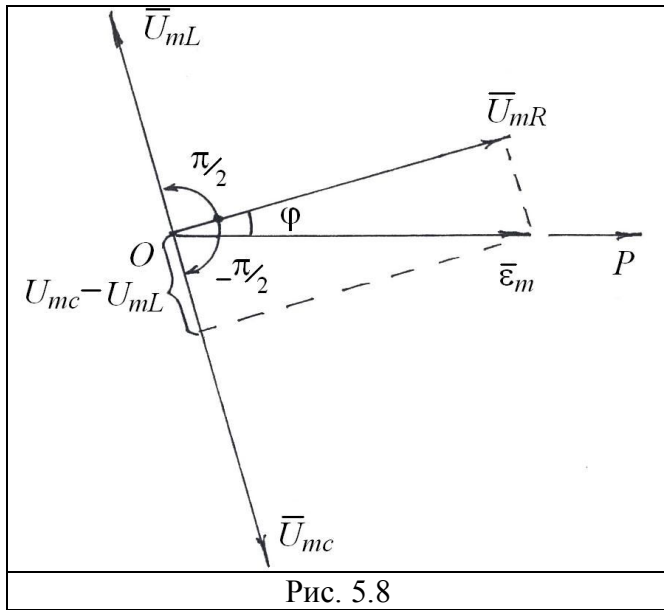


Рис. 5.8

Представим это выражение в виде векторной диаграммы (рис. 5.8), где OP - опорная линия.

Воспользовавшись теоремой Пифагора, получим:

$$\varepsilon_m^2 = (U_{mC} - U_{mL})^2 + U_{mR}^2. \quad (5.3.17)$$

Учитывая выражение (5.3.9), (5.3.12) и (5.3.15) получим:

$$\varepsilon_m^2 = I_m^2 \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2 + I_m^2 R^2. \quad (5.3.18)$$

Откуда найдем амплитуду тока для вынужденных колебаний в контуре:

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2}} \quad (5.3.19)$$

или

$$I_m = \frac{\varepsilon_m}{Z} \quad (5.3.20)$$

где

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L \right)^2} \quad (5.3.21)$$

называется *полным сопротивлением* последовательного контура. Выражение (5.3.19) часто называют законом Ома для замкнутой цепи переменного тока.

Как видно из формулы (5.3.19) амплитуда силы тока I_m в контуре зависит не только от параметров контура (R, L, C) и амплитуды внешней ЭДС ε_m , но и от частоты ω воздействия внешней ЭДС. При определенной частоте ω_p воздействия на контур, может оказаться, что выражение в скобках формулы (5.3.19) обратится в ноль:

$$\frac{1}{\omega_p C} - \omega_p L = 0. \quad (5.3.22)$$

Откуда имеем:

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0. \quad (5.3.23)$$

При частоте ω_p воздействия, которая совпадает с собственной частотой ω_0 колебаний в контуре, амплитуда тока согласно (5.3.19) достигает максимально возможного значения:

$$I_{mp} = \frac{\varepsilon}{R}, \quad (5.3.24)$$

которое называется *резонансным*. Зависимость амплитуды вынужденных колебаний в контуре от частоты воздействия принято называть резонансными кривыми (рис. 5.9). Из векторной диаграммы найдем фазу вынужденных колебаний:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}. \quad (5.3.25)$$

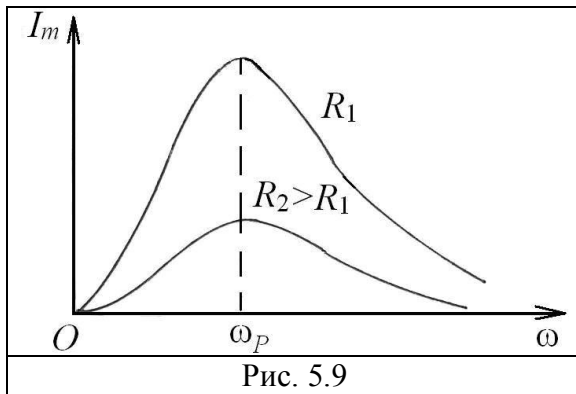


Рис. 5.9

Очевидно, что при резонансе согласно (5.3.25) $\varphi = 0$ и ток в контуре (5.3.4) совпадает по фазе с внешней ЭДС, фазу которой мы принимаем (5.3.1) за ноль.

Если внешняя ЭДС представляет собой сумму синусоидальных ЭДС с различными частотами, то результирующий ток в контуре также будет представлять сумму гармонических токов с теми же частотами. Однако, благодаря явлению резонанса, контур сильнее всего реагирует на ту составляющую

ЭДС, частота которой равна или наиболее близка к резонансной частоте. Другими словами, контур «откликается» лишь на частоты близко расположенные к резонансной частоте. Эти частоты создают токи с наибольшей амплитудой. Пусть I_{mp} - амплитуда тока при резонансе. Если внешняя ЭДС с частотой ω создает ток в контуре с амплитудой

$I_m \geq \frac{I_{mp}}{\sqrt{2}}$, то принято считать, что на данную частоту контур «откликается» и она пропускается контуром (рис. 5.10). Спектр частот, которые пропускает контур $\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega$ называется *абсолютной полосой пропускания контура*. Величина, равная отношению абсолютной полосы пропускания контура к его резонансной частоте

называется *относительной полосой пропускания* $\frac{\Delta\omega}{\omega_p}$.

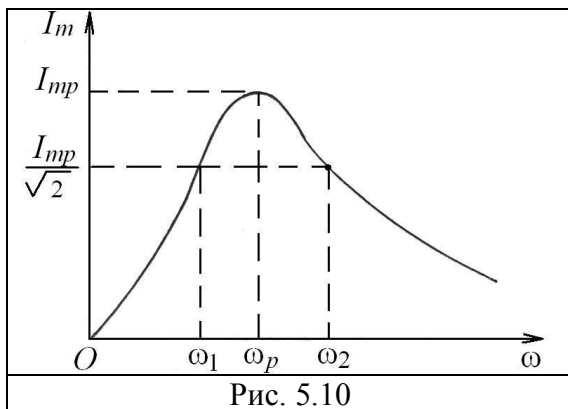


Рис. 5.10

Для колебательных контуров с достаточно большой добротностью справедливо соотношение:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_p} = \frac{1}{Q}, \quad (5.3.26)$$

т.е. относительная полоса пропускания контура обратно пропорциональна его добротности. Для того, чтобы увеличить полосу пропускания контура, его добротность следует уменьшить.

5.4 Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Пусть электрическая цепь состоит из активного сопротивления R , катушки индуктивности L и конденсатора емкостью C , соединенных последовательно (рис. 5.7). Пусть на данную цепь подается переменное напряжение с амплитудой $U_m = \varepsilon_m$. Мгновенное значение напряжения изменяется по закону: $U(t) = U_m \cos \omega t$, а ток в цепи $I(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$, где φ - разность фаз между током и напряжением. Мгновенное значение мощности, выделяемой в цепи равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_m \cos \omega t \cdot I_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Воспользовавшись формулой $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$, получим:

$$P(t) = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi + \frac{1}{2} I_m U_m \cos(2\omega t - \varphi). \quad (5.4.1)$$

Практическое значение имеет среднее по времени величина $P(t)$, которое мы обозначим просто P . Так как среднее значение $\cos(2\omega t - \varphi)$ равно нулю, получим:

$$P = \frac{I_m U_m}{2} \cos \varphi. \quad (5.4.2)$$

Таким образом, мгновенная мощность (5.4.1) колеблется около среднего значения (5.4.2) с частотой 2ω , которая в два раза превышает частоту тока. Величину $\cos \varphi$ можно найти из векторной диаграммы (рис. 5.8):

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (5.4.3)$$

Выражение (5.4.2) можно записать в виде:

$$P = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cos \varphi = IU \cos \varphi \quad (5.4.4)$$

где величина

$$\frac{I_m}{\sqrt{2}} = I \quad (5.4.5)$$

называется *действующим* или *эффективным* значением силы тока. Величина

$$\frac{U_m}{\sqrt{2}} = U \quad (5.4.6)$$

называется *действующим* или *эффективным* значением напряжения.

В выражении (5.4.4) для средней мощности входит множитель $\cos \varphi$, который называют *коэффициентом мощности*. Рассмотрим два предельных случая.

Если реактивное сопротивление $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$ равно нулю (это будет наблюдаться при $\omega L = \frac{1}{\omega C}$), то согласно формуле (5.4.3) получим $\cos \varphi = 1$ и средняя мощность в цепи равна:

$$P = IU. \quad (5.4.7)$$

Переменный ток $\frac{I_m}{\sqrt{2}} = I$ и переменное напряжение $\frac{U_m}{\sqrt{2}} = U$ создают в цепи среднюю мощность, которую развивает постоянный ток величиной I и постоянное напряжение величиной U .

Если цепь имеет чисто реактивное сопротивление ($R = 0$), то $\cos \varphi = 0$ и, следовательно, средняя мощность, выделяемая в цепи равна нулю $P = 0$. В этом случае одну четверть периода энергия поступает из внешней сети в цепь, а следующую четверть периода – возвращается обратно. Таким образом, при $\cos \varphi = 0$ ни при какой силе тока невозможно получить в цепи среднюю мощность, отличную от нуля. В технике стремятся сделать $\cos \varphi$ как можно больше.

5.5 Генерирование незатухающих колебаний

Собственные колебания различных механических и электрических систем всегда являются затухающими. Объясняется это тем, что в механических системах энергия расходуется на преодоление сил трения, а в колебательном контуре энергия в основном рассеивается вследствие нагревания проводников при прохождении электрического тока. Следовательно, свободные незатухающие колебания могут существовать лишь в системах, где отсутствуют потери энергии. Но в природе нет ни механических, ни электрических колебательных систем без потерь энергии.

Очевидно, чтобы получить незатухающие колебания в реальной колебательной системе с потерями, необходимо восполнять потери энергии. Так, чтобы получить незатухающие колебания в контуре, активное сопротивление которого не равно нулю, необходимо периодически кратковременно подзаряжать конденсатор контура от источника постоянного тока, т.е. периодически сообщать контуру порции энергии. Для того чтобы колебания в контуре меньше отличались от гармонических, подзарядку конденсатора необходимо производить один или два раза за период. Очевидно, чтобы колебания в контуре имели постоянную амплитуду, необходимо, чтобы порции энергии, поступающие в контур в результате подзарядки за время, равное периоду колебаний, были равны потерям энергии в контуре за тот же промежуток времени. Это условие баланса амплитуд). Необходимо также, чтобы моменты подзарядки конденсатора, т.е. моменты поступления порций энергии в контур, были согласованы с колебаниями в самом контуре. Чтобы выполнить это условие, необходимо кратковременную подзарядку конденсатора колебательного контура производить так, чтобы полярность источника тока совпадала с полярностью заряженных пластин конденсатора. Это условие баланса фаз.

Устройство, с помощью которого получают незатухающие колебания, характеризуется тем, что колебательная система с потерями, входящая в это устройство, самостоятельно или автоматически управляет процессом поступления энергии от источника к самой колебательной системе в узком смысле этого слова. Поэтому устройства для получения незатухающих колебаний называются *автоколебательными системами*. Автоматическое поступление порций энергии от источника тока в колебательный контур достигается использованием специальных регуляторов, в качестве которых могут выступать трехэлектродные лампы или транзисторы.

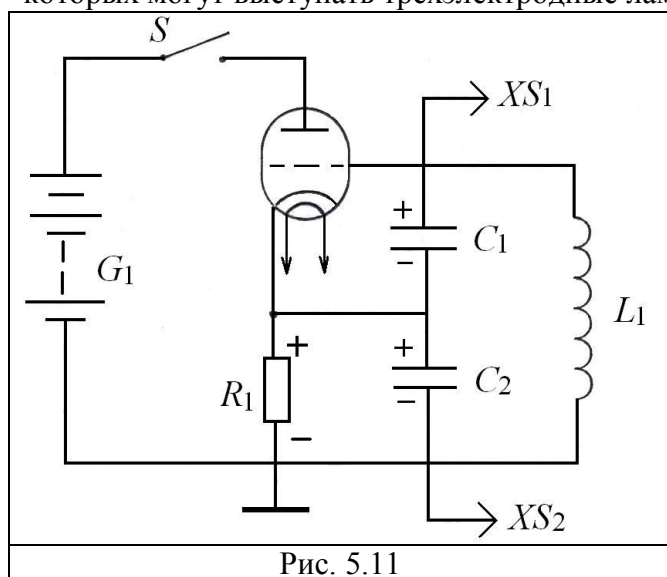


Рис. 5.11

Схема простейшего автогенератора на ламповом триоде показана на рис. 5.11. Колебательный контур с потерями состоит из катушки L_1 и двух последовательно соединенных конденсаторов C_1 и C_2 . Для наблюдения временной диаграммы автоколебаний зажимы $XS_1 - XS_2$ соединяются с входом осциллографа.

Рассмотрим работу данного автогенератора. Для запуска этого генератора, как и, например часового механизма, нужен первоначальный «толчок». Но для этого не обязательно предварительно заряжать конденсаторы колебательного контура. Дело в том, что

при замыкании ключа S анодный ток, проходящий через открытую лампу, создает падение напряжения на резисторе R_1 . За счет этого напряжения произойдет зарядка конденсатора C_2 , вследствие чего в контуре возникнут колебания. Однако эти колебания не будут затухающими, так как потери энергии в контуре компенсируются источником G_1 анодного напряжения. Объясняется это следующим образом.

Допустим, что в течение первого полупериода колебаний в контуре верхние пластины конденсаторов C_1 и C_2 заряжены положительно, как показано на рис. 5.11. За счет напряжения конденсатора C_1 на сетке лампы создается положительный потенциал по отношению к катоду. Следовательно, в течение первого полупериода колебаний лампа открыта и через неё от источника постоянного тока G_1 течет анодный ток, который создает падение напряжения на резисторе R_1 . Так как полярность этого напряжения совпадает с полярностью зарядов на конденсаторе C_2 , то в течение первого полупериода колебаний происходит подзарядка конденсатора C_2 колебательного контура. В течение

второго полупериода колебаний верхние пластины конденсаторов $C1$ и $C2$ будут заряжены отрицательно. Напряжение конденсатора $C1$, воздействуя на сетку лампы, создает на ней отрицательный потенциал по отношению к катоду. Следовательно, в течение второго полупериода колебаний лампа будет закрыта, анодный ток в ней будет отсутствовать. Напряжение на резисторе $R1$ создаваться не будет, а следовательно, в контуре не будет происходить подзарядка конденсатора $C2$.

Таким образом, колебательный контур с потерями, управляя потенциалом сетки трехэлектродной лампы, один раз за период получает порцию энергии, сам открывая и закрывая в нужный момент доступ энергии от источника анодного напряжения. Если уменьшить анодное напряжение на лампе, то напряжение, возникающее на резисторе $R1$ будет мало; ток, обеспечивающий подзарядку конденсатора $C2$ не будет компенсировать потери энергии в контуре, и автоколебания прекратятся.

Сущность протекающих в генераторе процессов заключается в том, что колебательный контур управляет работой лампы, которая в свою очередь оказывает воздействие на контур. Управление работой трехэлектродной лампы со стороны колебательного контура с потерями называется *обратной связью*.

Строгая теория не только лампового генератора, но и любой автоколебательной системы достаточно сложна, так как она приводит к нелинейным дифференциальным уравнениям.

Глава 6. Электромагнитное поле

6.1 Первое уравнение Максвелла

Из закона электромагнитной индукции (3.14.1) следует, что при изменении потока вектора магнитной индукции сквозь поверхность, ограниченную проводящим контуром, в нем возникает ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S B_n dS, \quad (6.1.1)$$

где S - произвольная поверхность, опирающаяся на контур. Причиной появления ЭДС, а следовательно, и индукционного тока в проводнике является возникновение вихревого электрического поля \vec{E} , которое выполняет для носителей тока роль сторонних сил (см. разд. 3.14). По определению ЭДС индукции равна циркуляции вектора напряженности поля \vec{E} сторонних сил по любому замкнутому контуру L :

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l}. \quad (6.1.2)$$

Изменим порядок дифференцирования и интегрирования в формуле (6.1.1) и приравняем правые части последних двух выражений:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \left(\frac{dB}{dt} \right)_n dS. \quad (6.1.3)$$

Максвелл предположил, что изменяющееся со временем магнитное поле \vec{B} обуславливает появление в пространстве вихревого электрического поля \vec{E} независимо от присутствия в этом пространстве проводящего контура. Наличие контура позволяет обнаружить по возникновению в нем индукционного тока существование в соответствующих точках пространства электрического поля. Выражение (6.1.3) называется *первым уравнением Максвелла в интегральной форме записи: циркуляция вектора напряженности электрического поля по произвольному замкнутому контуру L равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром.*

Первое уравнение Максвелла (6.1.3) является обобщением закона Фарадея об электромагнитной индукции.

6.2 Ток смещения. Второе уравнение Максвелла

Основная идея Максвелла заключается в том, что между электрическим и магнитным полями имеется взаимосвязь. Если согласно первому уравнению Максвелла изменяющееся во времени магнитное поле создает электрическое поле, то имеет место и обратное соотношение, т.е. изменяющееся со временем электрическое поле должно порождать магнитное поле.

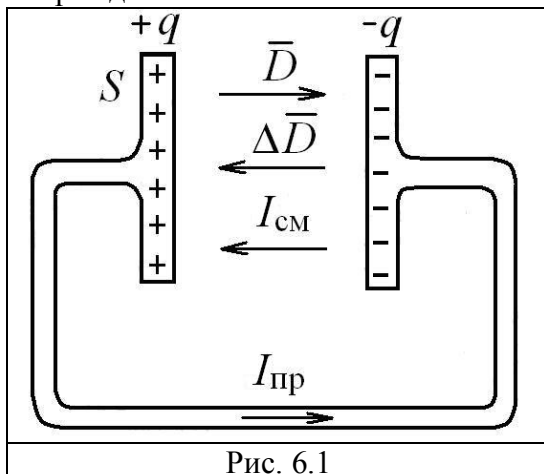


Рис. 6.1

Максвелл впервые показал, что существует электрическое явление, в котором движущиеся заряженные частицы не принимают непосредственного участия и которое, тем не менее, сопровождается магнитным полем.

Рассмотрим процесс разрядки конденсатора (рис. 6.1). Ток проводимости при этом равен:

$$I_{пр} = -\frac{dq}{dt}, \quad (6.2.1)$$

где q - заряд на обкладках конденсатора. Учитывая, что

$$q = \sigma S \text{ или } dq = S d\sigma$$

где σ - поверхностная плотность зарядов на

обкладках конденсатора, получим:

$$I_{np} = -S \frac{d\sigma}{dt}. \quad (6.2.2)$$

Плотность тока проводимости равна:

$$j_{np} = \frac{I_{np}}{S} = -\frac{d\sigma}{dt}. \quad (6.2.3)$$

Ток проводимости имеет место во всей цепи, кроме зазора между обкладками конденсатора. Следовательно, линии тока проводимости терпят разрыв на границах обкладок. Однако в пространстве между обкладками имеется изменяющееся электрическое поле, которое характеризуется вектором электрического смещения \bar{D} . Известно, что в плоском конденсаторе поверхностная плотность заряда на обкладках равна величине вектора электрического смещения, т.е.:

$$\sigma = D.$$

Тогда получим:

$$j_{np} = -\frac{dD}{dt}. \quad (6.2.4)$$

Из формулы (6.2.3) следует, что плотность тока проводимости равна скорости изменения плотности заряда на обкладках конденсатора. С другой стороны, согласно выражению (6.2.4) плотность тока проводимости связана с быстротой изменения вектора электрического смещения, т.е. с величиной $\frac{d\bar{D}}{dt}$. Но эта величина характеризует некоторый электрический процесс в диэлектрике конденсатора и имеет размерность плотности тока $\left(\frac{Кл}{м^2 \cdot с}\right)$. Величину $\frac{d\bar{D}}{dt}$ Максвелл назвал *плотностью тока смещения*:

$$\bar{j}_{см} = \frac{d\bar{D}}{dt}. \quad (6.2.5)$$

Ток смещения не связан с движением зарядов в диэлектрике, а характеризует процесс изменения электрического поля \bar{D} между обкладками конденсатора. Из рис. 6.1 нетрудно установить направление плотности тока смещения. При разрядке конденсатора вектор \bar{D} уменьшается. Следовательно, векторное приращение $\Delta\bar{D}$ направлено противоположно вектору \bar{D} . Туда же будет направлен и вектор $\bar{j}_{см}$ плотности тока смещения. Таким образом, линии вектора плотности тока смещения будут замыкать линии тока проводимости, которые обрываются на обкладках.

Из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно – способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле.

Второе уравнение Максвелла является обобщением закона полного тока (3.7.6):

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \sum_{k=1}^n I_k = I_{np}, \quad (6.2.6)$$

т.е. циркуляция вектора напряженности магнитного поля по любому замкнутому контуру равна результирующему току проводимости, проходящему через поверхность, опирающуюся на этот контур. Учитывая, что $I_{np} = \int_S (\bar{j}_{np})_n dS$, получим:

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S (\bar{j}_{np})_n dS. \quad (6.2.7)$$

Согласно Максвеллу магнитное поле может создаваться не только током проводимости, но и током смещения. Поэтому при расчетах магнитных полей в случае

переменных процессов в формулы нужно подставлять *полную плотность тока*, которая равна сумме плотности тока проводимости и плотности тока смещения:

$$\vec{j} = \vec{j}_{np} + \vec{j}_{см} = \vec{j}_{np} + \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (6.2.8)$$

Следовательно, в формуле (6.2.7), циркуляция вектора \vec{H} по любому контуру должна быть равна:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_n dS = \int_S (\vec{j}_{np} + \vec{j}_{см})_n dS \quad (6.2.9)$$

или

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j}_{np} + \frac{d\vec{D}}{dt} \right)_n dS. \quad (6.2.10)$$

Это выражение называется *вторым уравнением Максвелла в интегральной форме: циркуляция вектора напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна сумме токов проводимости и токов смещения, проходящих через поверхность, ограниченную этим контуром.*

6.3 Электромагнитное поле

Из уравнений Максвелла (6.1.3) и (6.2.10) следует, что вихревые переменные электрические и магнитные поля взаимосвязаны и образуют единое *электромагнитное поле*. Из принципа относительности Эйнштейна вытекает, что раздельное рассмотрение электрического и магнитного полей имеет лишь относительный смысл. Действительно, электростатическое поле создается неподвижными зарядами. Однако, если заряды движутся относительно другой системы отсчета, то появляется кроме электростатического поля магнитное. С другой стороны, неподвижный проводник с током создает в каждой точке пространства постоянное магнитное поле. Однако относительно других инерциальных систем отсчета проводник движется. Поэтому создаваемое им магнитное поле в любой фиксированной точке будет изменяться, а следовательно, будет порождать вихревое электрическое поле. Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы отсчета оказывается «чисто» электрическим или «чисто» магнитным, относительно других систем отсчета будет представлять собой совокупность электрического и магнитного полей.

Для полного описания электрических и магнитных явлений к первым двум уравнениям Максвелла (6.1.3) и (6.2.10) следует добавить еще два уравнения, выражающие теорему Остроградского-Гаусса для электрического и магнитного полей:

$$\oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^N q_i \quad (6.3.1)$$

$$\oint B_n dS = 0, \quad (6.3.2)$$

т.е. поток вектора электрического смещения \vec{D} через замкнутую поверхность равен алгебраической сумме электрических зарядов, находящихся в этой поверхности, а поток вектора \vec{B} через замкнутую поверхность всегда равен нулю.

Эти уравнения должны быть дополнены материальными уравнениями:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \quad (6.3.3)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (6.3.4)$$

а также законом Ома:

$$\vec{j}_{np} = \sigma \vec{E}. \quad (6.3.5)$$

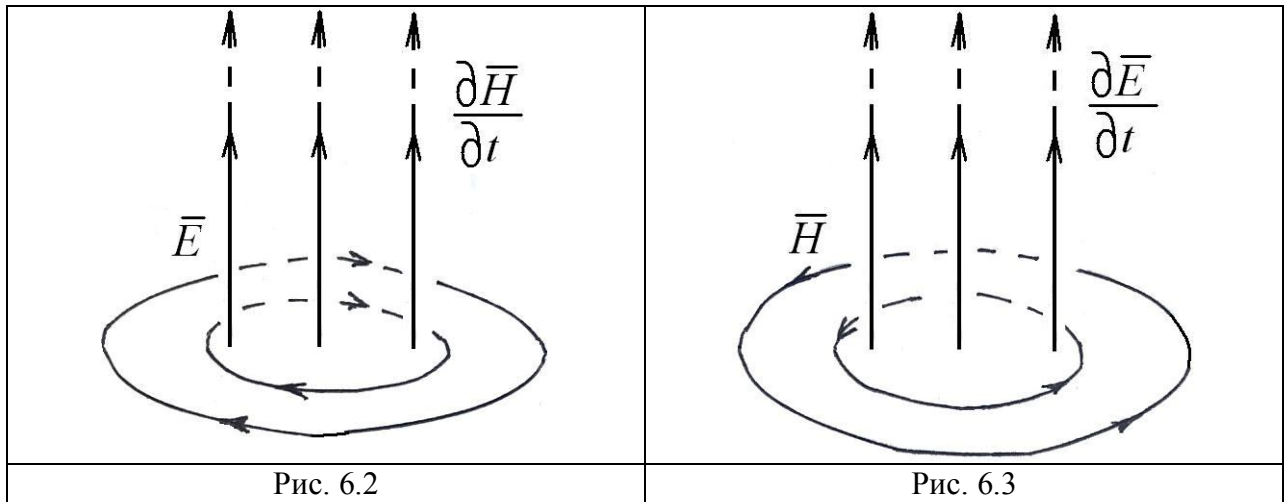
Для свободного пространства, где нет токов проводимости ($j_{np} = 0$), и электрических зарядов ($q_i = 0$) система уравнений Максвелла в интегральной форме для электромагнитного поля принимает вид:

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = -\mu_0 \mu \int_S \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \right) d\bar{S} \quad (6.3.6)$$

$$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \varepsilon_0 \varepsilon \int_S \left(\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) d\bar{S} \quad (6.3.7)$$

$$\oint_S D_n dS = 0 \quad (6.3.8)$$

$$\oint_S B_n dS = 0. \quad (6.3.9)$$



Из уравнения (6.3.6) следует, что при изменении во времени магнитного поля \bar{H} индуцируется вихревое электрическое поле \bar{E} . При этом замкнутые силовые линии электрического поля \bar{E} охватывают силовые линии магнитного поля \bar{H} , причем направления векторов $\frac{\partial \bar{H}}{\partial t}$ и \bar{E} образуют «левовинтовую» систему (рис. 6.2). Из уравнения (6.3.7) следует, что при изменении во времени напряженности \bar{E} электрического поля возникает вихревое магнитное поле с напряженностью \bar{H} . При этом замкнутые силовые линии магнитного поля \bar{H} охватывают силовые линии электрического поля \bar{E} , причем направления векторов $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ и \bar{H} образуют «правовинтовую» систему (рис. 6.3).

Следовательно, вихревые электрические и магнитные поля взаимосвязаны и образуют единое электромагнитное поле. При этом направления векторов электрического \bar{E} и магнитного \bar{H} полей в любой точке свободного пространства взаимно перпендикулярны. Электромагнитное поле распространяется перпендикулярно плоскости, в которой лежат вектора \bar{E} и \bar{H} . Другими словами, электромагнитное поле в свободном пространстве *поперечное*.

6.4 Волновые уравнения для электромагнитного поля

Волновые уравнения связывают процесс распространения электромагнитного поля со свойствами среды. Рассмотрим одномерный случай распространения электромагнитного поля вдоль оси x . Будем считать, что электрические и магнитные поля являются однозначными и непрерывными функциями одной координаты x и времени t :

$E = E(x; t)$ и $H = H(x; t)$. Так как векторы \vec{E} и \vec{H} ортогональны, то пусть вектор $\vec{E} = E_y \vec{j}$ совпадает с осью y , а вектор $\vec{H} = H_z \vec{k}$ - с осью z прямоугольной системы координат (рис. 6.4). Подсчитаем циркуляцию вектора \vec{H} по замкнутому прямоугольному контуру 1-2-3-4-1, расположенному перпендикулярно оси y . Стороны контура равны Δx и Δz , точка 1 имеет координаты $(x; y; z)$:

$$\oint_{1-2-3-4-1} \vec{H} d\vec{l} = \Delta z \cdot H_z(x + \Delta x) - \Delta z \cdot H_z(x).$$

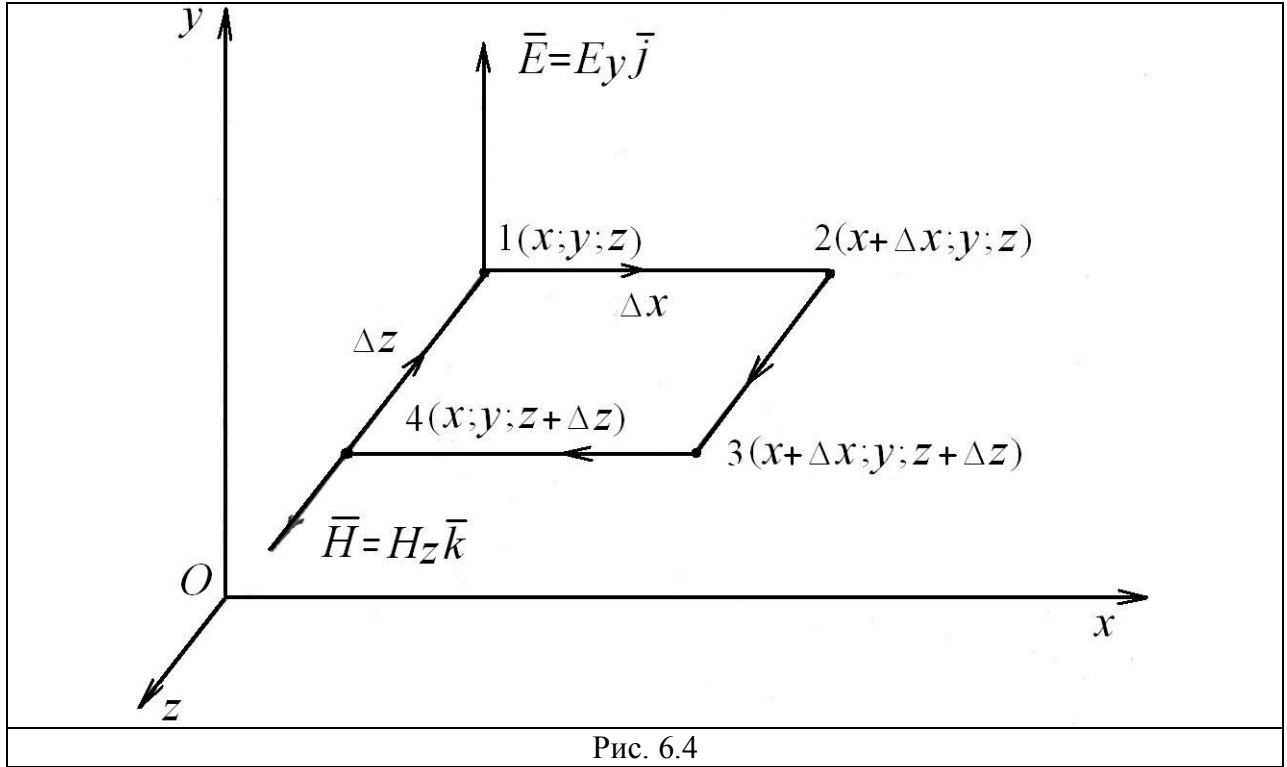


Рис. 6.4

В случае достаточно малого отрезка Δx можно считать, что

$$H_z(x + \Delta x) = H_z(x) + \Delta x \frac{\partial H_z}{\partial x}.$$

Тогда для циркуляции вектора \vec{H} по указанному контуру найдем выражение:

$$\oint_{1-2-3-4-1} \vec{H} d\vec{l} = \Delta x \cdot \Delta z \frac{\partial H_z}{\partial x}. \quad (6.4.1)$$

Вычислим поток вектора $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ через поверхность рассматриваемого (рис. 6.4) контура 1-2-3-4-1 площадью равной $\Delta x \cdot \Delta z$:

$$\int_{\Delta x \Delta z} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = \Delta z \Delta x \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (6.4.2)$$

Подставляя полученные выражения (6.4.1) и (6.4.2) в уравнение (6.3.7) найдем первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме записи для одномерного случая:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (6.4.3)$$

т.е. изменение напряженности магнитного поля \vec{H}_z на единичном отрезке вдоль оси x пропорционально скорости изменения напряженности электрического поля \vec{E}_y .

Вычислим циркуляцию вектора \vec{E} по замкнутому прямоугольному контуру 1-2-3-4-1, расположенному перпендикулярно оси z (рис. 6.5). Стороны контура равны Δx и Δy ,

точка 1 имеет координаты $(x; y; z)$. Вектор $\vec{E} = E_y \vec{j}$ расположен по оси y , вектор $\vec{H} = H_z \vec{k}$ - по оси z :

$$\oint_{1-2-3-4-1} \vec{E} d\vec{l} = -\Delta y \cdot E_y(x + \Delta x) + \Delta y \cdot E_y(x).$$

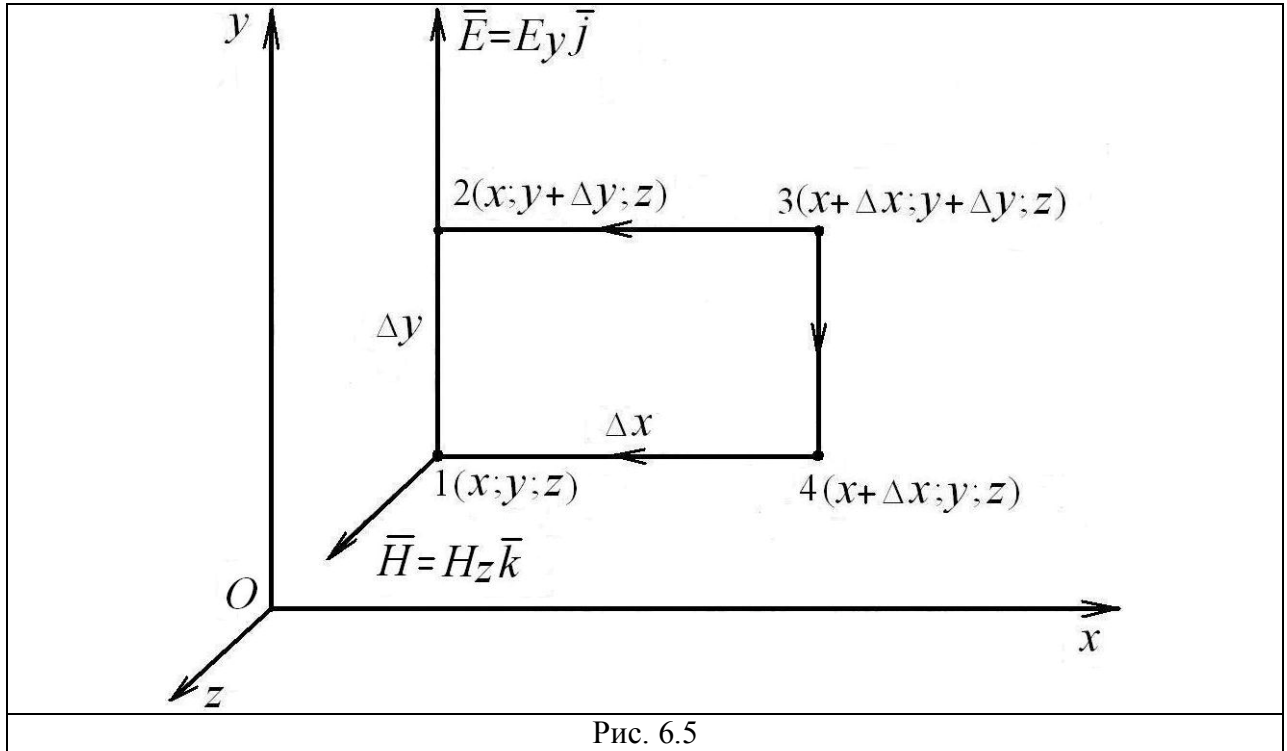


Рис. 6.5

Учитывая, что

$$E_y(x + \Delta x) = E_y(x) + \Delta x \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

найдем:

$$\oint_{1-2-3-4-1} \vec{E} d\vec{l} = -\Delta x \cdot \Delta y \frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (6.4.4)$$

Вычислим поток вектора $\frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ через поверхность рассматриваемого контура 1-2-3-4-1 (рис. 6.5) площадью $\Delta x \cdot \Delta y$:

$$\int_{\Delta x \Delta y} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\vec{S} = \Delta y \Delta x \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (6.4.5)$$

Подставляя выражения (6.4.4) и (6.4.5) в уравнение (6.3.6) найдем второе уравнение Максвелла в дифференциальной форме записи для одномерного случая распространения волн:

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad (6.4.6)$$

т.е. изменение электрического поля E_y на единичном отрезке вдоль оси x пропорционально скорости изменения магнитного поля H_z .

Найдем волновое уравнение для электрической составляющей электромагнитной волны. Для этого продифференцируем по времени первое уравнение Максвелла (6.4.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right) = \epsilon_0 \epsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}.$$

Изменяя порядок дифференцирования по t и x , получим:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_z}{\partial t} \right) = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \quad (6.4.7)$$

Из уравнения (6.4.6) имеем:

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \mu} \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x}. \quad (6.4.8)$$

Подставляя это выражение в соотношение (6.4.7) найдем волновое уравнение для электрической составляющей волны для одномерного случая:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \quad (6.4.9)$$

Легко показать, что волновое уравнение для магнитной составляющей волны имеет такой же вид:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} = 0. \quad (6.4.10)$$

Из волновых уравнений следует, что распространение электромагнитного поля зависит от относительных электрической и магнитной проницаемостей среды.

6.5 Электромагнитные волны

Как показано в предыдущем параграфе электромагнитное поле как особая форма материи, которая распространяется в свободном пространстве, описывается волновыми уравнениями, которые аналогичны для упругих механических волн. Следовательно, электромагнитное поле должно проявлять себя как непрерывно распространяющийся волновой процесс, называемый *электромагнитными волнами*.

Можно показать, что решением волновых уравнений (6.4.9)-(6.4.10) для одномерного случая могут служить уравнения плоской бегущей монохроматической волны:

$$E_y = E_m \sin(\omega t - kx) \quad (6.5.1)$$

$$H_z = H_m \sin(\omega t - kx), \quad (6.5.2)$$

где ω - круговая частота, k - волновое число, E_m и H_m - амплитуды вихревых электрических и магнитных полей. Из формул (6.5.1) и (6.5.2) следует, что в любой фиксированной точке $x = x_0 = const$ свободного пространства электрические и магнитные поля совершают колебания с одинаковой частотой ω , причем их фазы kx_0 совпадают, т.е. поля \vec{E} и \vec{H} одновременно достигают максимального или минимального значения в данной точке пространства $x_0 = const$. С другой стороны, для фиксированного момента времени $t = t_0 = const$ вдоль оси x существует периодическое распределение напряженностей электрического и магнитного полей по одному и тому же закону, т.е. поля \vec{E} и \vec{H} в одних и тех же точках достигают максимального значения, в одних и тех же точках поля обращаются в ноль.

На рис. 6.6 дано графическое изображение плоской монохроматической электромагнитной волны в момент времени t . За время Δt форма волны перемещается на расстояние Δx . Под фазовой скоростью волны понимается быстрота перемещения точки, имеющей постоянную фазу:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}.$$

О величине фазовой скорости можно судить по быстроте перемещения, например, «гребня» электрической или магнитной составляющей волны. Из механики известно, что волновое число равно отношению разности фаз φ двух колеблющихся точек к

расстоянию x между ними: $k = \frac{\varphi}{x}$. Учитывая, что длиной волны λ называется расстояние между точками, совершающими колебания с разностью фаз 2π , имеем $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Фазовая скорость равна:

$$V = \frac{\lambda}{T},$$

где $T = \frac{2\pi}{\omega}$ - период колебаний, $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ длина волны. Следовательно, для скорости получаем:

$$V = \frac{\omega}{k}. \quad (6.5.3)$$

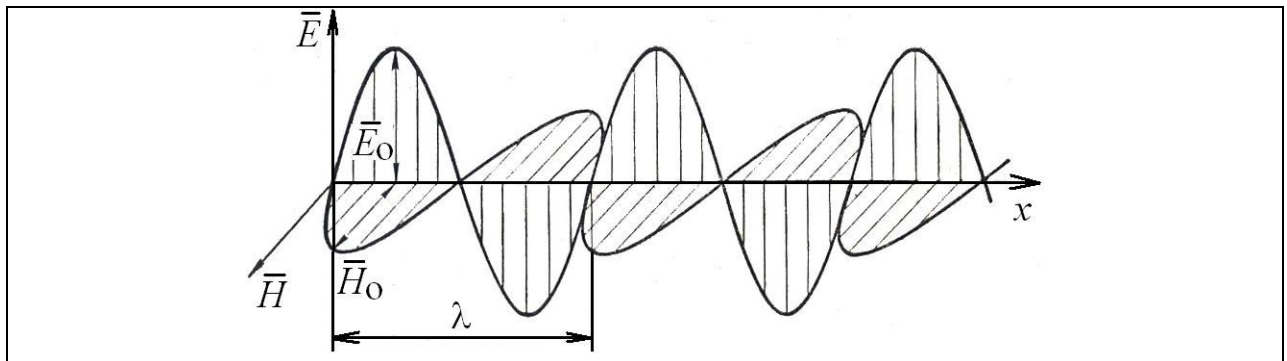


Рис. 6.6

Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в свободном пространстве, является поперечной, так как векторы \vec{E} и \vec{H} совершают колебания в каждой точке пространства в направлении перпендикулярном к скорости распространения волны. Вектор скорости совпадает с осью x . Следовательно, векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{V} взаимно перпендикулярны.

Докажем, что уравнения (6.5.1) и (6.5.2) являются решением волновых уравнений (6.4.9)-(6.4.10). Продифференцируем выражение (6.5.1) дважды по t и по x :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = -\omega^2 E_m \sin(\omega t - kx), \quad (6.5.4)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -k^2 E_m \sin(\omega t - kx). \quad (6.5.5)$$

Подставляя полученные выражения в волновое уравнение (6.4.9) найдем:

$$-k^2 + \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu \omega^2 = 0.$$

Откуда получим:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon \mu}}.$$

Учитывая, что $\frac{\omega}{k} = V$ - фазовая скорость волны, найдем:

$$V = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}. \quad (6.5.6)$$

Отсюда следует, что электромагнитные волны могут распространяться в вакууме ($\varepsilon = 1; \mu = 1$). При этом скорость волн равна скорости света:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ (м/с)}. \quad (6.5.7)$$

Следовательно, скорость электромагнитных волн в любой среде может быть вычислена по формуле:

$$V = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (6.5.8)$$

Отсюда находим абсолютный показатель преломления для электромагнитных волн:

$$n = \frac{c}{V} = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (6.5.9)$$

Дифференцируя уравнения бегущих волн (13-14) по t и по x , найдем:

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \omega E_m \cos(\omega t - kx),$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = k^2 H_m \cos(\omega t - kx).$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение Максвелла (6.4.6) найдем волновое сопротивление среды:

$$\rho = \frac{E_m}{H_m} = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}. \quad (6.5.10)$$

Для вакуума ($\epsilon = 1; \mu = 1$) волновое сопротивление равно:

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \text{ (Ом)}.$$

Из формулы (6.5.8) следует, что фазовая скорость электромагнитных волн зависит от относительных диэлектрической ϵ и магнитной μ проницаемостей среды. Так как для большинства веществ $\epsilon > 1$ и $\mu > 1$, то скорость волн в какой-либо среде всегда меньше скорости света в вакууме, т.е. $V < c$. Следовательно, согласно выражению (6.5.9) абсолютный показатель преломления большинства веществ больше единицы ($n > 1$).

Формула (6.5.9) позволила Максвеллу теоретически рассчитать показатели преломления для многих веществ, для которых показатель преломления был известен из оптических измерений. Для большинства веществ полученная формула (6.5.9) дала хороший результат. Этот факт позволил Максвеллу сделать вывод о том, что *свет представляет собой электромагнитные волны* с очень малой длиной волны.

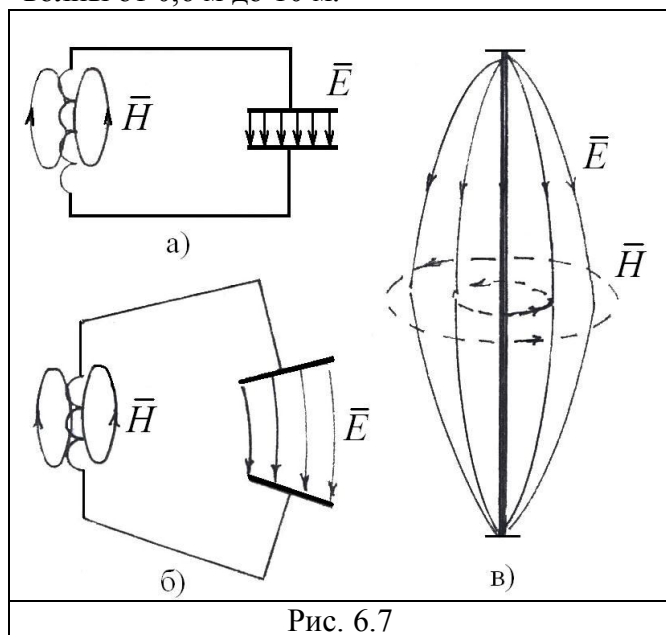
Из оптики известно, что показатель преломления воды $n = 1,33$. Согласно формуле (6.5.9) при $\epsilon = 81$ и $\mu = 1$ получим для воды $n = 9$. Это различие нашло своё объяснение при создании теории дисперсии света.

6.6 Экспериментальное исследование электромагнитных волн

Для получения электромагнитных волн необходимо создать в пространстве достаточно быстро изменяющееся электрическое поле или, соответственно, быстро изменяющееся магнитное поле. Очевидно, что для этого непригодны колебательные контуры с сосредоточенными параметрами L и C (см. разд. 5.1). В таких контурах частота колебаний сравнительно невелика: переменное электрическое поле \vec{E} сосредоточено в конденсаторе, а магнитное \vec{H} внутри катушки индуктивности (рис. 6.7а). Для получения электромагнитных волн необходимо перейти к так называемому *открытому колебательному контуру или электрическому вибратору* (рис. 6.7б,в). В этом случае переменные электрические \vec{E} и магнитные \vec{H} поля взаимодействуют между собой и выходят в свободное пространство, образуя электромагнитную волну.

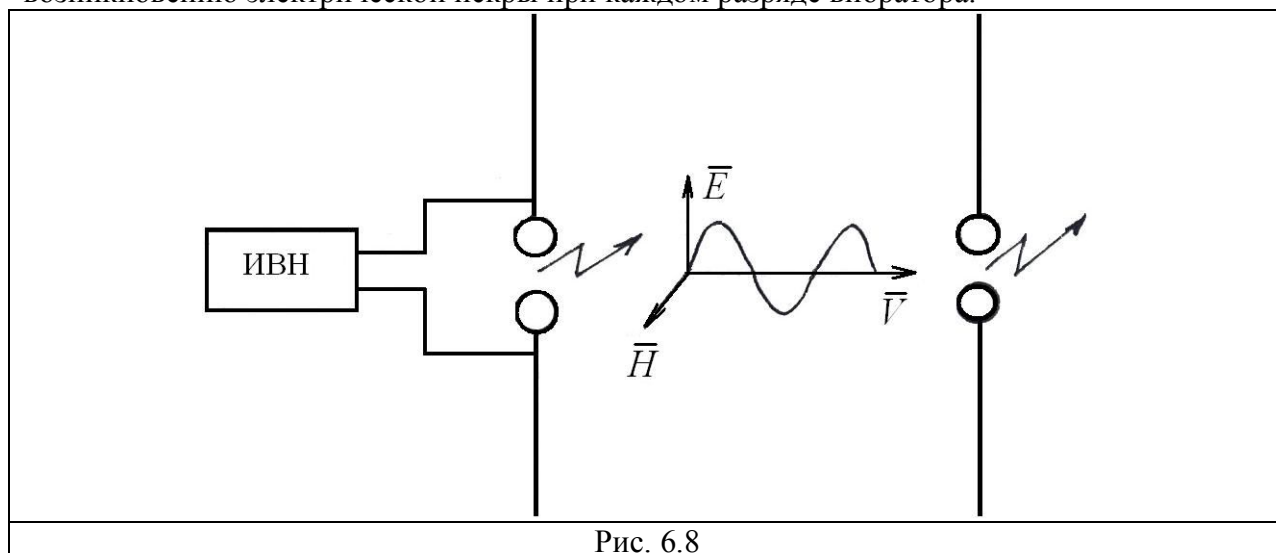
Экспериментальная проверка вывода теории Максвелла о существовании электромагнитных волн была осуществлена Г. Герцем в 1888 году. В качестве излучателя волн Герц использовал вибратор, состоящий из двух одинаковых металлических

стержней, разделенных искровым промежутком (рис. 6.8). Обе половины вибратора заряжались от источника высокого напряжения (ИВН). При достижении пробивного напряжения в разряднике проскакивала искра и в вибраторе возникали затухающие колебания высокой частоты. Колебания продолжались до тех пор, пока искра не исчезла. Во время колебаний в вибраторе устанавливалась стоячая волна тока и напряжения. Сила тока была максимальна в середине вибратора (пучность тока) и обращалась в ноль на концах (узлы тока). Напряжение в середине вибратора имело узел, а на концах – пучности напряжения. Таким образом, электрический вибратор аналогичен натянутой струне, колеблющейся с основной (наименьшей) частотой. Длина волны λ , излучаемая вибратором, примерно в два раза превышает длину вибратора. По этой причине подобный вибратор называется *полуволновым*. Герц получил электромагнитные волны с длиной волны от 0,6 м до 10 м.



Для обнаружения электромагнитных волн Герц использовал также открытый вибратор тех же размеров. Под действием переменного электрического поля принимаемой волны свободные электроны внутри приемного вибратора начинают совершать вынужденные колебания. При этом в приемном вибраторе появляется высокочастотный ток, а между обеими половинками вибратора – переменное напряжение. Если размеры излучающего и приемного вибраторов одинаковы, то благодаря резонансу высокочастотные колебания приемника усиливаются. Появление переменного напряжения в приемном вибраторе Герц обнаруживал по

возникновению электрической искры при каждом разряде вибратора.



Для реализации опытов Г. Герца в лабораторных условиях воспользуемся источником высокого (25 кВ) напряжения «Разряд 1» (рис. 6.9). Высокое напряжение подается на диполь, состоящий из двух металлических стержней длиной 10 см. Воздушный зазор между стержнями излучающего диполя выбирается равным 1 ÷ 2 мм. При включении высокого напряжения между стержнями возникает нестабильный искровой разряд. Непериодические затухающие колебания электрического заряда в

диполе создают в свободном пространстве кратковременные непериодические импульсы затухающих электромагнитных волн. Нестабильность искрового разряда приводит к своеобразной модуляции высокочастотных колебаний. Приемником электромагнитных волн служит диполь тех же размеров, что и диполь источника волн. Роль детектора низкочастотных импульсов электромагнитных колебаний в приемном диполе выполняет полупроводниковый диод Д403, который закрепляется между металлическими стержнями приемной антенны. В качестве регистратора электромагнитных колебаний используется микроамперметр или осциллограф С1-1.

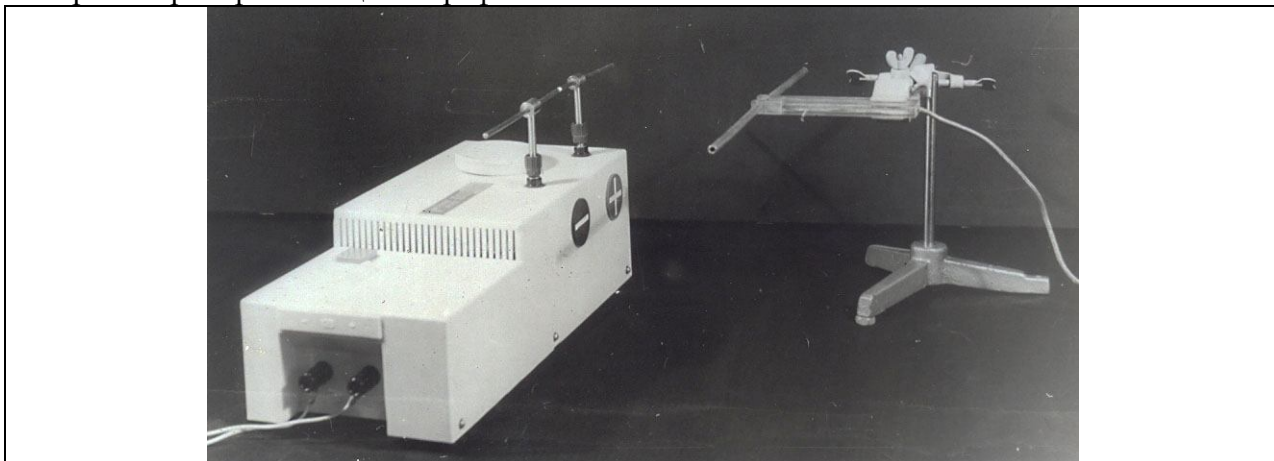


Рис. 6.9

Для проведения опытов Герца располагают передающую и приемную антенны параллельно друг другу на небольшом расстоянии друг от друга. При возникновении искрового разряда в передающем диполе на экране осциллографа наблюдают серию непериодических кратковременных импульсов. Прием электромагнитных волн не прекращается, если между диполями располагается лист прозрачного или непрозрачного диэлектрика. Прием волн полностью прекращается, если между диполями установить металлический лист достаточно больших размеров.

Для получения незатухающих электромагнитных волн используют ламповые генераторы электромагнитных колебаний (см. разд. 5.4). Для получения более коротких волн дециметрового и сантиметрового диапазонов применяют специальные электронные приборы: клистроны и магнетроны. Сверхвысокочастотные колебания при этом модулируются низкочастотным сигналом. Для обнаружения колебаний в приемном вибраторе можно воспользоваться небольшой электрической лампочкой, включенной в середине вибратора. При использовании модуляции передающего сигнала вместо лампочки можно включить кристаллический детектор (полупроводниковый СВЧ-диод), а низкочастотные колебания после усиления подать на гальванометр или осциллограф С1-1. С помощью таких современных технических средств можно экспериментально исследовать основные свойства электромагнитных волн, которые впервые были выполнены Герцем.

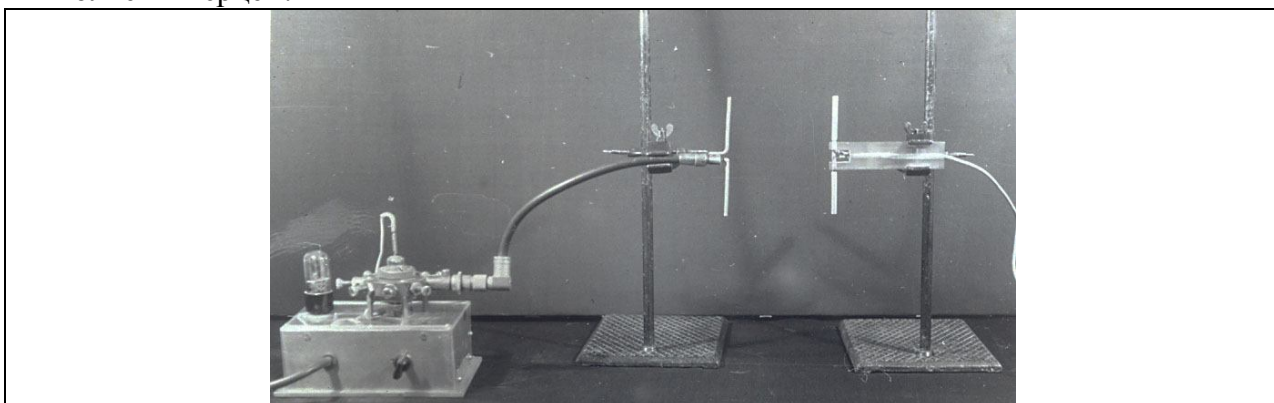


Рис. 6.10

Поместим приемный вибратор (диполь), показанный на рис. 6.10, на некотором расстоянии от излучающего полуволнового вибратора, к которому подводится мощность от клистронного (К-11) генератора СВЧ ($\lambda = 12$ см). Принимаемые колебания имеют наибольшую амплитуду, если оба вибратора (диполя) параллельны. Если же диполи расположены взаимно перпендикулярно, прием электромагнитных волн отсутствует. Так как электрические колебания в приемном диполе наводятся только в том случае, если вектор \vec{E} волны имеет составляющую вдоль продольной оси диполя, то следует предположить, что электрический вектор \vec{E} электромагнитной волны всегда расположен в плоскости, проходящей через излучающий диполь. Опыт доказывает, что электрический вектор \vec{E} совершает колебания вдоль линии, которая перпендикулярна направлению распространения волны. Следовательно, электромагнитная волна, распространяющаяся в свободном пространстве, является *поперечной*.

Электромагнитное поле, излучаемое полуволновым вибратором (рис. 6.10) генератора дециметровых волн, радиально несимметрично. Другими словами, интенсивность волн, излучаемых антенной, не одинакова в различных направлениях. Опыт показывает, что интенсивность излучаемых волн, максимальна в экваториальной плоскости, т.е. в горизонтальной плоскости, проходящей через середину излучающей антенны (рис. 6.10). В этом случае интенсивность принимаемой волны максимальна. Перемещая приемник в вертикальной плоскости по окружности с центром, совпадающим с излучающей антенной, отмечают уменьшение интенсивности принимаемой волны. Прием волн полностью прекращается, когда приемная антенна находится на линии, проходящей через продольную ось излучающей антенны. При этом отсутствие приема наблюдается при любой ориентации в пространстве продольной оси приемной антенны.

С помощью описанного генератора СВЧ ($\lambda = 12$ см) можно показать, что электромагнитные волны проходят с некоторым ослаблением через прозрачные и непрозрачные диэлектрики (оргстекло, текстолит). Если между излучающей и приемной антеннами установить металлический лист достаточно больших размеров, то прием волн прекращается. Электромагнитные волны частично отражаются от диэлектриков. Полное отражение происходит от металлического листа. При этом справедлив закон отражения, известный из оптики. То, что металлы хорошо отражают электромагнитные волны, используется для изготовления вогнутых сферических зеркал, в фокусе которых располагается излучающий или приемный электрический вибратор – диполь. Хорошее отражение металлов для электромагнитных волн позволило создать *волноводы*, т.е. трубы прямоугольного или круглого сечения, вдоль которых за счет многократных отражений от стенок распространяются волны.

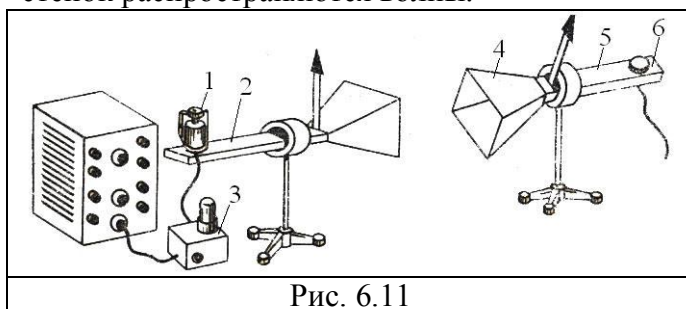


Рис. 6.11

Источник и приемник электромагнитных волн сантиметрового диапазона ($\lambda = 3,2$ см) показаны на рис. 6.11. Отражательный клистрон (1) устанавливается на прямоугольном волноводе (2) сечением 23×10 мм так, чтобы излучающий четвертьволновой вибратор клистрона был расположен внутри волновода

перпендикулярно к его широкой стенке. Четвертьволновой диполь клистрона выполняет роль активного штырька связи и позволяет возбудить в прямоугольном волноводе направляемую электромагнитную волну. Прямоугольный волновод (2) нагружен с одной стороны излучающей рупорной антенной, а с другой волновод закорочен подвижным плунжером, выполняющим роль зеркала. СВЧ колебания модулируются низкой частотой мультивибратора. Приемник сантиметровых электромагнитных волн (рис. 6.11) состоит из рупорной антенны 4, прямоугольного волновода 5 и детекторной секции 6. Роль активного приемного элемента и детектора выполняет СВЧ-диод Д403, который

располагается перпендикулярно к широкой стенке волновода на расстоянии четверти волны от закрытого конца детекторной секции. Сигнал с детектора подается на микроамперметр или осциллограф.

В сантиметровом диапазоне радиоволн так же можно показать поперечность электромагнитных волн. Излучение генератора СВЧ (рис. 6.11) характеризуется тем, что электрический вектор \vec{E} волны перпендикулярен к широкой стенке волновода. Установим между источником и приемником металлическую сетку, состоящую из параллельных медных проволок. Оказывается, что интенсивность принимаемой волны очень сильно зависит от того, как медные проволоки сетки ориентированы по отношению к электрическому вектору \vec{E} волны, излучаемой источником. Если проволоки сетки перпендикулярны вектору \vec{E} волны, то электромагнитное излучение проходит сквозь сетку без заметного ослабления. Если проволоки сетки параллельны вектору \vec{E} волны, то излучение сильно ослабляется. Объясняется это тем, что в первом случае электрическое поле \vec{E} не наводит СВЧ токи в проволоках и излучение не отражается от сетки. Во втором случае под действием поля в проволоках наводятся токи, что приводит к отражению части энергии от сетки и ослаблению проходящего сигнала.

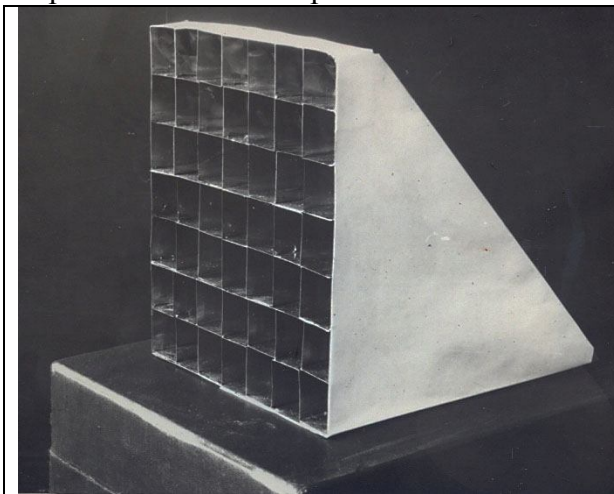


Рис. 6.12

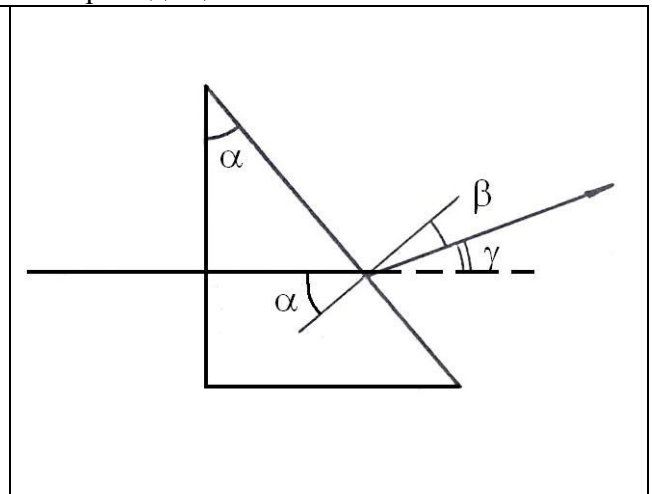


Рис. 6.13

С помощью сантиметровых электромагнитных волн ($\lambda = 3,2$ см) можно показать их преломление. Герц для этих целей использовал призму из асфальта, массой более тонны. Для сантиметровых волн ($\lambda = 3,2$ см) призму можно изготовить из органического стекла или любого другого диэлектрика. В диапазоне СВЧ широкое применение получили искусственные среды: волноводные или металлоленточные структуры. На рис. 6.12 показана волноводная призма для электромагнитных волн. Прямоугольные волноводы имеют сечение: $a_x = 20$ мм, $a_y = 30$ мм, ось x расположена горизонтально. Для волны, электрический вектор \vec{E} которой перпендикулярен оси x , эквивалентный показатель преломления равен:

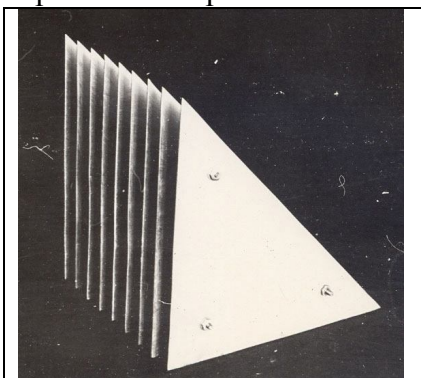


Рис. 6.14

$$n = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a_x} \right)^2} . \quad (6.6.1)$$

При $\lambda = 3,2$ см и $a_x = 2$ см получим $n = 0,6$.

Ход лучей в призме показан на рис. 6.13. По закону преломления имеем:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{n}, \quad (6.6.2)$$

где $\alpha = 45^\circ$ - угол при вершине призмы. Из выражения (6.6.2) найдем угол преломления: $\sin \beta = n \sin \alpha = 0,42$ или

$$\beta = 25^0.$$

Следовательно, волноводная призма должна отклонять падающее на нее излучение на угол $\gamma = \alpha - \beta = 20^0$. Опыт полностью подтверждает этот результат. Вместо волноводной призмы можно использовать металлоленточную (рис. 6.14). Она имеет тот же показатель преломления (6.6.1) для волны, электрический вектор \vec{E} которой параллелен лентам структуры. Расстояние между лентами $a_x = 20$ мм.

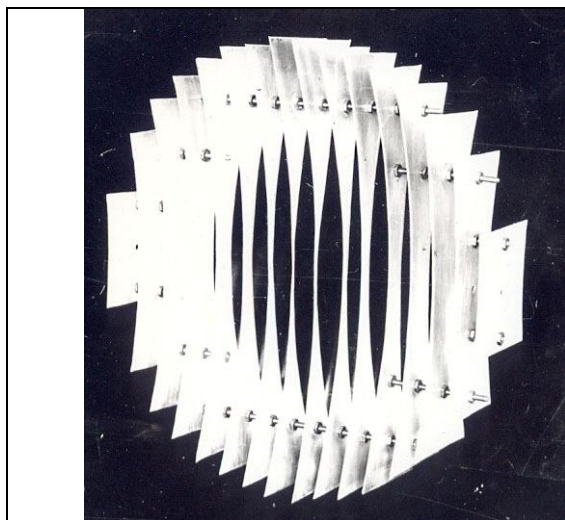


Рис. 6.15а

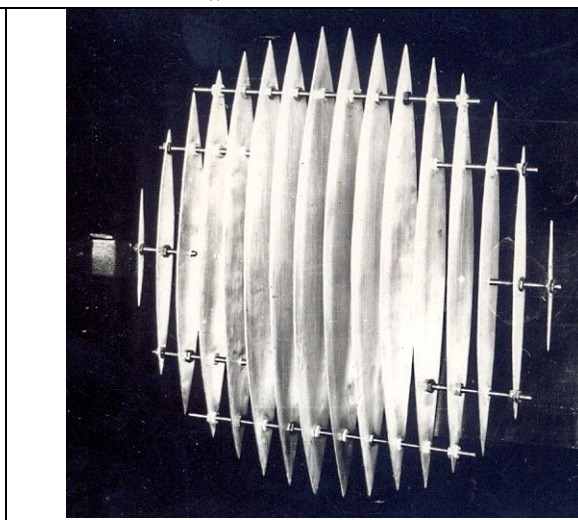


Рис. 6.15б

Электромагнитные волны можно фокусировать с помощью линз, изготовленных как из естественных, так и искусственных диэлектриков. На рис. 6.15 показаны двояковогнутые и двояковыпуклые металлоленточные линзы для электромагнитных волн ($\lambda = 3,2$ см). Так как эквивалентный показатель преломления для волны, вектор \vec{E} которой параллелен лентам, меньше единицы ($n = 0,6$), то двояковогнутая линза (рис. 6.15а) является фокусирующей, а двояковыпуклая (рис. 6.15б) рассеивающей. Эксперимент подтверждает этот результат.

Таким образом, идея Максвелла о том, что свет является электромагнитными волнами малой длины волны нашла своё полное экспериментальное подтверждение.

6.7 Излучение элементарного электрического диполя

Элементарным диполем может служить вибратор, длина которого мала по сравнению с длиной волны. Примером электрического диполя могут служить два металлических шара, которые заряжаются от генератора электрических колебаний высокой частоты (рис. 6.16). Если генератор создает гармоническое колебание, то заряд изменяется по закону: $q = q_0 \sin \omega t$ и момент диполя также изменяется по закону:

$$p = p_0 \sin \omega t, \quad (6.7.1)$$

где $p_0 = q_0 l$ - амплитуда электрического момента диполя.

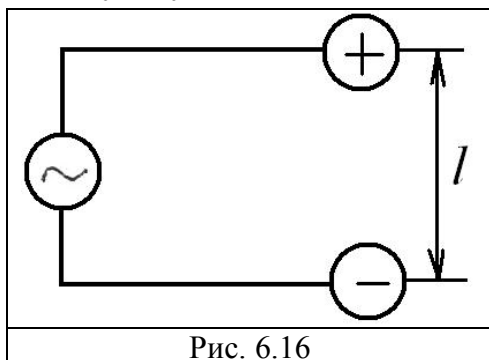


Рис. 6.16

С элементарными диполями приходится встречаться не только в радиотехнике. Наиболее важным примером элементарных диполей являются электроны внутри атома. Движение электрона по круговой или эллиптической орбите можно разложить на два прямолинейных гармонических взаимно перпендикулярных колебания. Электрон, совершающий гармонические колебания вокруг положительно заряженного ядра, представляет собой элементарный диполь, момент которого изменяется по

закону (6.7.1) и создает световую волну. Такое представление об атомах вещества, как об элементарных диполях, позволяет объяснить некоторые особенности излучения света.

Рассмотрим основные свойства электромагнитного поля, излучаемого элементарным диполем. При этом мы не будем приводить строгие доказательства свойств поля.

Выясним, какую форму имеет волновой фронт электромагнитной волны диполя на больших расстояниях от него ($r \gg \lambda$). Так как электромагнитное возмущение в вакууме распространяется во все стороны от диполя со скоростью света, то волновой фронт имеет вид сферы. Следовательно, волна, излучаемая диполем, есть *сферическая волна*.

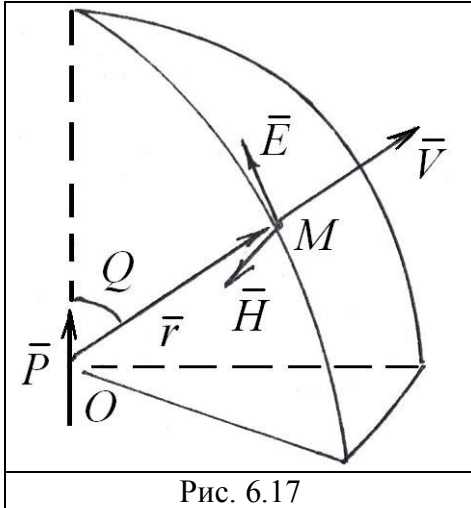


Рис. 6.17

Так как электромагнитная волна поперечная, то электрический вектор \vec{E} в разных точках пространства совершает колебания в направлении перпендикулярном радиус-векторам \vec{r} точки, причем эти колебания вектора \vec{E} совершаются по касательной к меридиану. Вектор \vec{H} также перпендикулярен радиус-вектору и совершает колебания по касательной к широтному кругу, проведенному через точку M на сфере радиуса r с центром в точке O (рис. 6.17).

На рис. 6.18 изображены силовые линии вихревого электрического поля в некоторый момент времени. Силовые линии электрического поля при этом расположены в меридиональной плоскости и представляют собой замкнутые кривые в соответствии

с вихревым характером электрического поля. Направление магнитного поля \vec{H} в каждой точке перпендикулярно вектору \vec{E} и к направлению распространения. Магнитные силовые линии представляют собой концентрические окружности, лежащие в экваториальной плоскости, и имеющие центр на оси диполя. Таким образом, все три вектора \vec{E} , \vec{H} и \vec{V} взаимно перпендикулярны.

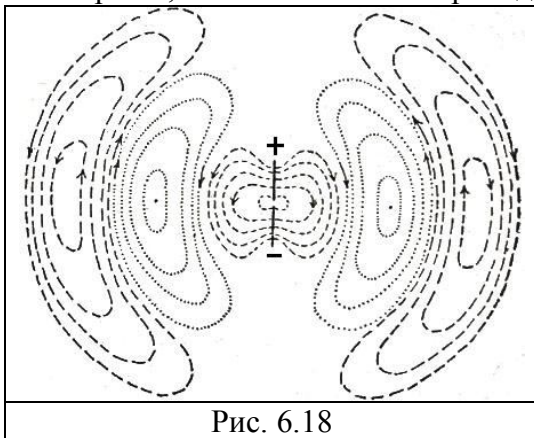


Рис. 6.18

Электромагнитное поле элементарного диполя обладает ещё одним важным свойством. Излучение энергии диполем неодинаково в различных направлениях, т.е. поле диполя радиально несимметрично. Диполь максимально излучает энергию в плоскости, проходящей через середину диполя перпендикулярно к его оси, и совсем не излучает вдоль своей оси. Это подтверждается опытами в дециметровом диапазоне волн. Полуволновой вибратор (рис. 6.9) не излучает вдоль себя и максимально излучает в плоскости, перпендикулярной вибратору.

6.8 Энергия электромагнитных волн

Плотность энергии электромагнитной волны складывается из плотностей энергии вихревых электрических и магнитных полей:

$$\varpi = \varpi_E + \varpi_H = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (6.8.1)$$

Учитывая выражение (6.5.10), найдем:

$$H = E \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}}. \quad (6.8.2)$$

Подставляя это выражение в формулу (6.8.1), получим:

$$\varpi = \varepsilon_0 \varepsilon E^2. \quad (6.8.3)$$

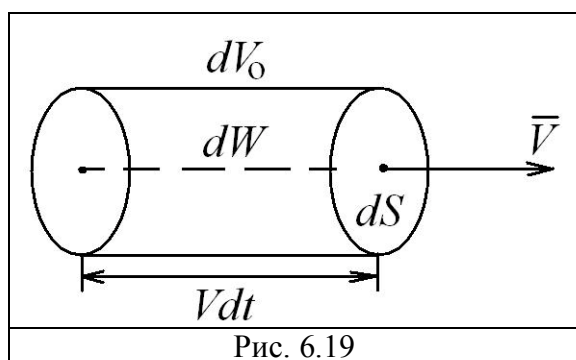
Распространение электромагнитных волн связано с переносом энергии, подобно тому, как распространение упругих волн в веществе связано с переносом механической энергии. Энергия, переносимая волной в единицу времени через некоторую площадку, установленную перпендикулярно направлению распространения, называется *поток энергии*. Мгновенное значение потока энергии определяется соотношением:

$$\Phi = \frac{dW}{dt}. \quad (6.8.4)$$

Единицей измерения потока энергии служит Bm .

Энергия, переносимая в единицу времени через единичную площадку, установленную перпендикулярно направлению распространения волны, называется *плотностью потока энергии или интенсивностью волны*:

$$\Pi = \frac{dW}{dS \cdot dt} = \frac{d\Phi}{dS}. \quad (6.8.5)$$



Единицей измерения плотности потока энергии служит $\frac{Bm}{m^2}$. Для вычисления

плотности потока энергии рассмотрим цилиндр, образующие которого параллельны вектору скорости \bar{V} волны (рис. 6.19). В объеме dV_0 цилиндра содержится энергия dW . Пусть площадь сечения цилиндра равна dS , а его длина Vdt . Тогда за время dt вся энергия,

сосредоточенная в цилиндре пройдет сквозь площадку dS . Учитывая, что $dW = \varpi dV_0$, где ϖ - плотность энергии, найдем:

$$\Pi = \frac{dW}{dS \cdot dt} = \frac{\varpi \cdot dV_0}{dS \cdot dt}.$$

Так как объем цилиндра равен $dV_0 = Vdt dS$, получим:

$$\Pi = \varpi \cdot V. \quad (6.8.6)$$

Плотность потока энергии – векторная величина и характеризуется *вектором Умова-Пойнтинга*:

$$\bar{\Pi} = \varpi \cdot \bar{V}. \quad (6.8.7)$$

Учитывая формулы (6.8.3) и (6.5.6), из выражения (6.8.6) найдем:

$$\Pi = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E^2.$$

На основании формулы (6.8.2) получим:

$$\Pi = E \cdot H. \quad (6.8.8)$$

В векторной форме данное выражение записывается в виде:

$$\bar{\Pi} = [\bar{E} \times \bar{H}]. \quad (6.8.9)$$

Векторы \bar{E} , \bar{H} и $\bar{\Pi}$ взаимно перпендикулярны и образуют правую тройку векторов.

Электромагнитные волны характеризуются не только энергией, но и релятивистской массой:

$$m = \frac{W}{c^2}, \quad (6.8.10)$$

а также импульсом:

$$P = mc = \frac{W}{c}, \quad (6.8.11)$$

где c - скорость света.

6.9 Шкала электромагнитных волн

С помощью современных радиофизических методов можно получить волны с различной длиной волны. Практический радиодиапазон начинается с длин волн порядка 1-2 км, длины волн порядка 200 м относят к среднему диапазону, десятки метров – это уже короткие волны. Ультракороткие волны применяются в специальной радиосвязи. Длины волн от нескольких метров до сантиметра применяются в телевидении и радиолокации. Еще более короткие электромагнитные волны субмиллиметрового диапазона уже перекрывают инфракрасную область теплового излучения.

Участок видимого света весьма мал: он занимает всего лишь длины волн от $7,6 \cdot 10^{-5}$ см до $3,6 \cdot 10^{-5}$ см. Далее следует ультрафиолетовое излучение от $3,6 \cdot 10^{-5}$ см до 10^{-6} см. Длины волн рентгеновского излучения заключены в пределах от 10^{-6} см до 10^{-10} см. Излучение с длиной волны $\lambda < 10^{-10}$ см возникает в процессе радиоактивного распада и называется γ -излучением.

Однако, электромагнитные излучения, длина волны которых отличается на несколько порядков, обладают качественно различными свойствами. При малых длинах волн (ультрафиолетовое, рентгеновское и γ -излучения) в большей мере проявляется квантовый характер излучения. Тем не менее, в настоящее время обнаружена квантовая природа излучения всех участков шкалы электромагнитных волн.