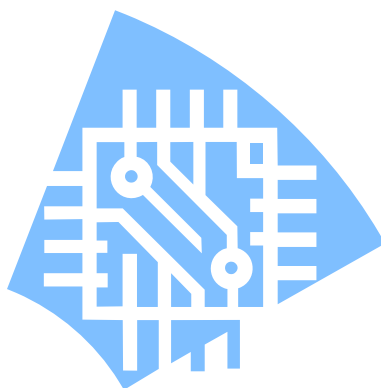


Т.Ю. Дорохова

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ И
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА
ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ**



Тамбов 2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»



Т.Ю. Дорохова

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНСТРУКЦИЙ И
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ПРОИЗВОДСТВА
ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ**

Тамбов 2013

УДК 621.396.6

ББК 32.811

Рецензенты

д.т.н., профессор кафедры «Радиотехника»,
ФГБОУ ВПО «ТГТУ» **С.Н. Данилов**

к.т.н., доцент, зав. заочным отделением ТОГБОУ СПО «Тамбовский
политехнический техникум им. М.С. Солнцева» **И.Н. Князев**

Т.Ю. Дорохова

Моделирование конструкций и технологических процессов производства электронных средств: Учебное пособие / Сост.: Т.Ю. Дорохова, Тамбов 2013, 44 с.

Раскрыты основные понятия, определения и сущность математического моделирования технологических процессов производства радиоэлектронных средств, рассмотрены основные методы построения математических моделей. Приведены методика проведения математического планирования эксперимента, обработки экспериментальных данных, построения и анализа полученной математической модели.

Учебное пособие предназначено для магистрантов, обучающихся по направлению 211000 «Конструирование и технология электронных средств».

УДК 621.396.6
ББК 32.811

© ГОУ ВПО «Тамбовский государственный
технический университет» (ТГТУ), 2013

© Т.Ю. Дорохова, 2013

Введение

Компьютерное моделирование дает возможность инженеру (исследователю) экспериментировать с объектами в тех случаях, когда делать это на реальном объекте практически невозможно или нецелесообразно. Сущность методологии компьютерного моделирования состоит в замене исходного технологического объекта его "образом" – математической моделью – и в дальнейшем изучении модели с помощью реализуемых на компьютерах вычислительно-логических алгоритмов. Этот метод познания, конструирования, проектирования сочетает в себе достоинства как теории, так и эксперимента. Работа не с самим объектом (явлением, процессом), а с его моделью дает возможность относительно быстро и без существенных затрат исследовать его свойства и поведение в любых мыслимых ситуациях (преимущества теории). Имитационные эксперименты с моделями объектов позволяют подробно и глубоко изучать объекты в достаточной полноте и с наименьшими финансовыми затратами.

Основы математического моделирования

Математической моделью объекта будем называть зависимость вектора входных переменных x , внутренних переменных a и возмущающих воздействий ξ , (а также режимных переменных u и конструктив. параметров d).

$$y=F(x, a, \xi, u, d)$$

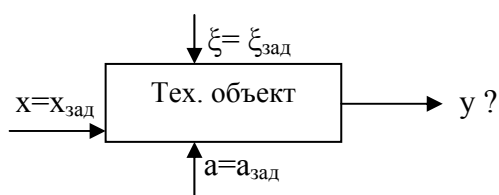


Схема разработки модели представлена на рисунке 1.

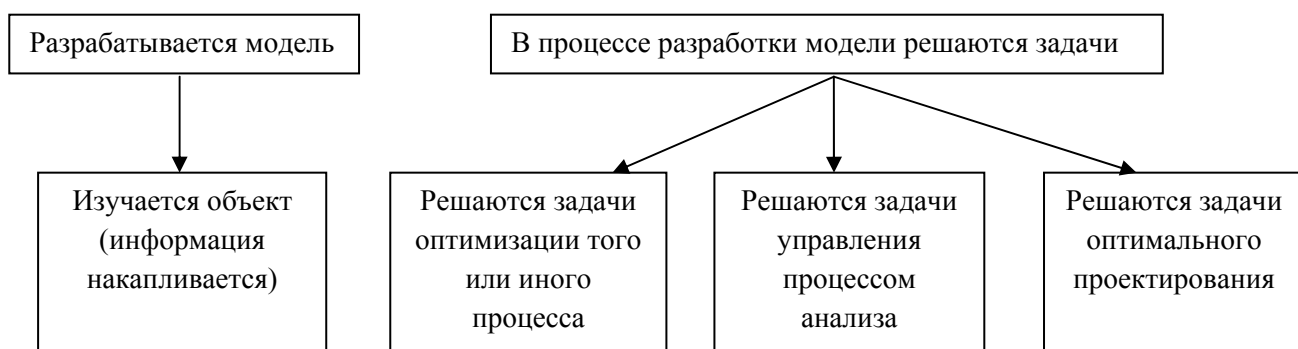
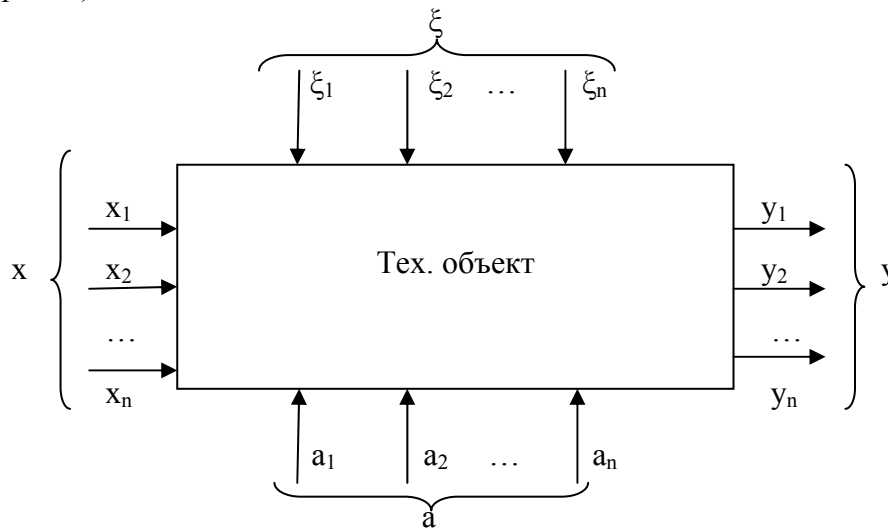


Рис.1 Схема разработки модели

Задача исследования (анализа) технического объекта. Технологический объект: производство радиоэлектронного профиля «Октябрь»; технологическая линия (по производству какого-то блока); технологическая стадия (осуществляется в отдельном аппарате, операция).



x – переменные состояния вход. потоков

ξ – вектор возмущающих воздействий

a – вектор внутренних параметров (геометрический размер, кинет. const)

y – вектор выходных переменных включающий набор технико-экономических показателей (затраты энергии на осуществление каких-то процессов)

Из x и $a \rightarrow u$ – вектор режимных переменных (которым можно управлять)

Из $a \rightarrow d$ – вектор конструктивных параметров или геометрических размеров

Задача оптимизации режимов технологического объекта

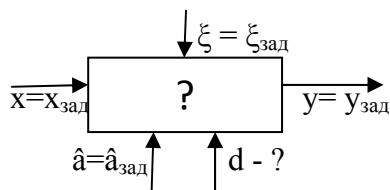


$$I(d, u, y, \xi) \Rightarrow \min u$$

$$\text{при связях } y = F(d, u, \xi)$$

$$\text{и ограничениях } \varphi(y, d, u, \xi) \leq 0$$

Задача оптимального проектирования технологического объекта



тип аппарата - ?



$\varphi(x, d, u, y, \xi) \Rightarrow \min d, u$
 при связях $y=F(d, u, \xi)$
 и ограничениях $\varphi(y, d, u, \xi) \leq 0$

Требуются найти тип аппарата, вектор его геометрических размеров d , и вектор режимных переменных u , таких что приведенные затраты на создание аппарата достигается \min значения при связях $y=F(d, u, \xi)$ и ограничениях $\varphi(y, d, u, \xi) \leq 0$ (на производительность, качество выпускаемой продукции, экологическую безопасность и т.д.)

Технология компьютерного моделирования

Изучая сложные технологические объекты, процессы, аппараты и физико-химические явления, мы не можем учесть все факторы: какие-то оказываются существенными, а какими-то можно пренебречь. При этом формируется модель объекта исследования. В процессе компьютерного моделирования исследователь имеет дело с тремя объектами: системой (реальной, проектируемой, воображаемой), математической моделью и программой ЭВМ. Традиционная схема компьютерного моделирования может быть представлена в следующем виде.



Рис.2 Схема организации процесса компьютерного моделирования

Перечисленные этапы определены в предположении, что задача может быть решена наилучшим образом с помощью компьютерного моделирования. Однако следует изыскивать

все возможные средства, подходящие для решения данной конкретной задачи, стремясь при этом к оптимальному сочетанию стоимости и желаемых результатов. При организации процесса компьютерного моделирования прослеживается цепочка: *модель – алгоритм – программа*.

На первом этапе построения ММ выбирается (или строится) "эквивалент" технологического объекта.

Второй этап фактически представляет собой совокупности алгебраических формул, по которым ведутся вычисления. Вычислительные алгоритмы должны не исказить основные свойства модели. Как правило, для одной и той же математической задачи можно предложить множество вычислительных алгоритмов. Однако, требуется построение эффективных вычислительных методов, которые позволяют получить решение поставленной задачи с заданной точностью за минимальное количество действий (арифметических, логических), т.е. с минимальными затратами машинного времени. Эти вопросы весьма существенны и составляют предмет теории численных методов.

Третий этап – создание программы для реализации разработанного моделирующего алгоритма на ЭВМ. Применение языков программирования СИ++, Паскаль.

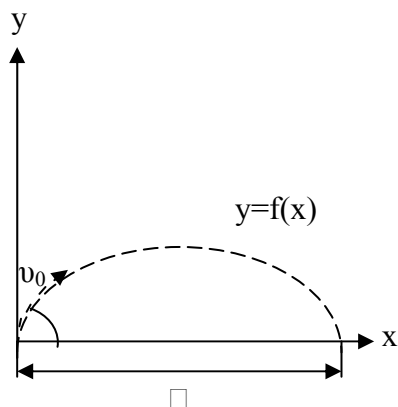
Создав *триаду* "модель – алгоритм – программа", исследователь получает в руки универсальный, гибкий и сравнительно недорогой инструмент, который вначале отлаживается, тестируется в "пробных" вычислительных экспериментах. После того как *адекватность* триады исходному технологическому объекту удостоверена, с моделью можно проводить разнообразные "опыты", дающие все требуемые качественные и количественные свойства и характеристики объекта. Процесс компьютерного моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости, всех звеньев триады.

Вычислительный эксперимент – это собственно проведение расчетов на ЭВМ и получение информации, представляющей интерес для исследователя.

Только после проведения длительной кропотливой работы в вычислительном эксперименте наступает фаза прогноза (имитации) – с помощью компьютерной модели предсказывается поведение исследуемого объекта в условиях, где натурные эксперименты пока не проводились или где они вообще невозможны.

Важное место в вычислительном эксперименте занимает обработка результатов расчетов, их всесторонний анализ и, наконец, выводы (блок 8). Эти выводы бывают в основном двух типов: или становится ясна необходимость уточнения модели, или результаты, пройдя проверку, передаются заказчику.

Схема организации (имитационного) вычислительного эксперимента



Построим для данного случая математическую модель основанную на следующих предположениях (допущениях):

- 1) Земля – инерционная система отсчета
- 2) Ускорение свободного падения $g = \text{const}$
- 3) Кривизной Земли можно пренебречь и считать ее плоской
- 4) Влиянием сопротивления воздуха можно пренебречь
- 5) Движение тела в вертикальном направлении равноускоренно с ускорением $a = -g$

$$\left. \begin{aligned} x &= v_x \cdot t \\ y &= v_y \cdot t - \frac{gt^2}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{x^2 g}{2v_0 \cos^2 \alpha}$$

$$l = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$$

Величина силы лобового сопротивления $F = cS \frac{\rho v^2}{2}$

c – коэффициент лобового сопротивления, зависит от формы тела и режима обтекания этого тела воздухом (критерий $\operatorname{Re} C = C(\operatorname{Re})$)

S – площадь поперечного сечения тела

v – скорость движения тела

ρ – плотность воздуха

$$\operatorname{Re} = \frac{vd\rho}{\mu}$$

d – характер. размер тела

ρ, μ – плотность, вязкость воздуха

$d = 0,2$ м

$v = 30$ м\с

$\operatorname{Re} = 4,6 \cdot 10^5$

$C = 0,15$

Сила тяжести

$$P = mg = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 g$$

$\rho_0 = 2,3 \cdot 10^3$ кг\м³

$l = 100$ м

$R = 0,1$ м

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_{\text{л}}}{\rho} &= \frac{1}{2} c \pi R^3 \rho l g \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_0 g \end{aligned} \right\}$$

Это означает, что мат. модель дает ошибку в определении l около 2÷3% (2-3 метра).

Много это или мало? Все зависит от решаемой задачи.

Проведем оценку роли сопротивления воздуха для наружного ядра.

$l = 1$ км

$$R=0,07 \text{ м}$$

$$\rho_0=7*10^3 \text{ кг}\backslash\text{м}^3$$

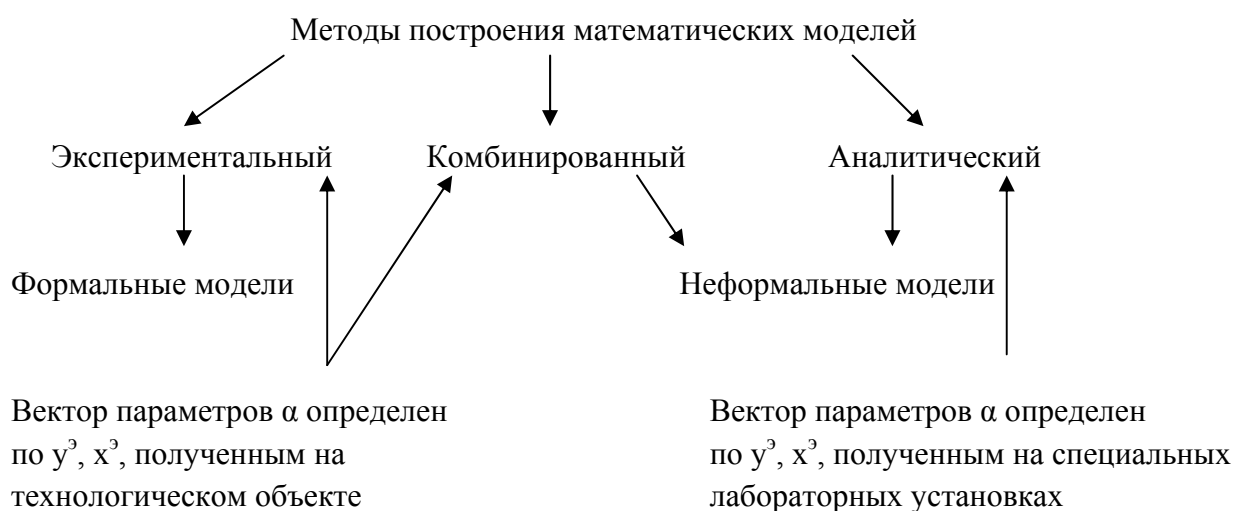
Будем иметь $\frac{F_{\text{л}}}{\rho} = 0,15$, т.е. пренебрежение сопротивлением воздуха приводит к ошибке

15% (около 150м)

Если полученная точность не устраивает исследователя необходимо произвести уточнение модели, путем учета силы лобового сопротивления и т.д.

Методы построения математических моделей.

Создавая модель, необходимо четко определить назначение модели (для чего данная модель будет использоваться). После этого определяется её компонентный состав (включая какой-то компонент в модель или в состав окружающей среды).



1) При построении аналитических математических моделей функции F (для статики), f (для динамики) выводят на основе теоретического анализа физико-химических процессов, происходящих в технологическом объекте, а также на основе заданных конструктивных параметров и характеристик перерабатываемых веществ. При выводе этих уравнений используются фундаментальные законы сохранения вещества, энергии, кинетические закономерности, тепло-, массопереноса и химических превращений. Чем детальнее и полнее математическая модель, тем сложнее структура F, f и выше размерность вектора α , компонентами которого являются параметры уравнений кинетики, характеристики веществ.

Некоторые параметры таких моделей могут быть определены расчетным путем, а другие находятся с помощью принципа подобия по результатам ранее выполненных исследований. Недостатком аналитических методов построения математических моделей является сложность описания F, f . В зависимости от принимаемых допущений математические модели одного и того же технологического объекта могут иметь существенно различающийся вид.

2) Экспериментальный метод используется для управления и исследования объектов в узком диапазоне изменения входных и выходных параметров.

Основным достоинством экспериментального метода является простота получения математического описания, а недостатком – невозможность установки функциональной связи между параметрами модели и конструктивными размерами объекта, физико-химическими свойствами веществ и т.п.

То модели, составленные экспериментальным методом нельзя распространить на другие однотипные объекты, их можно использовать только для объекта, на котором проводились опыты.

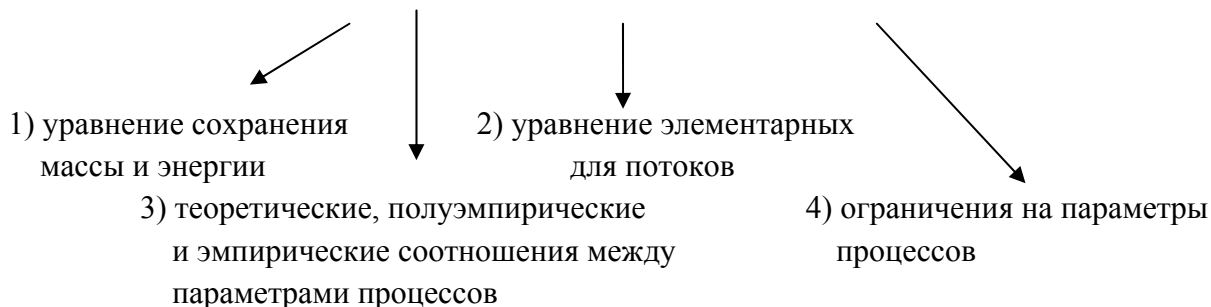
Основные достоинства и недостатки этих методов привели к необходимости создания комбинированного метода построения математических моделей.

Сущность его заключается в аналитической составляющей уравнений модели, проведение экспериментальных исследований и нахождение по их результатам параметров уравнений.

Формально математическое описание представляет собой совокупность зависимости, связывающей различные переменные процессы в единую систему уравнений. Среди этих соотношений могут быть уравнения, отражающие общие физические законы, уравнения, описывающие элементарные физические законы, а также различные эмпирические и полуэмпирические зависимости.

При ограниченном объеме теоретических данных процесса уравнение математической модели может представлять собой систему связывающую входные и выходные, параметры и эмпирические зависимости, полученные в результате их обследования.

В составе математического описания можно выделить следующие группы уравнений, разработанные на основе физической природы моделируемого объекта.



Общим для всех математических моделей является то, что число уравнений модели должно быть равно числу переменных, находимых в результате моделирования.

В результате составления математических моделей могут получиться:

1) системы алгебраических уравнений, описывающие стационарные режимы работы объектов с сосредоточенными параметрами;

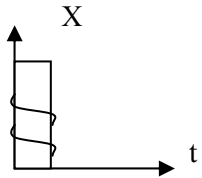
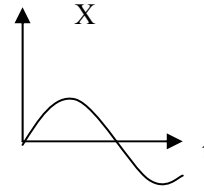
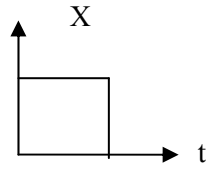
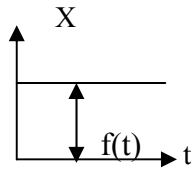
2) системы дифференциальных уравнений – описывающие нестационарные режимы объектов с сосредоточенными параметрами или стационарные режимы объектов с распределенными параметрами, по одной пространственной координате;

3) специальные дифференциальные уравнения, описывающие динамику объектов с распределенными параметрами или стационарные режимы объектов с распределенными параметрами по нескольким пространственным координатам.

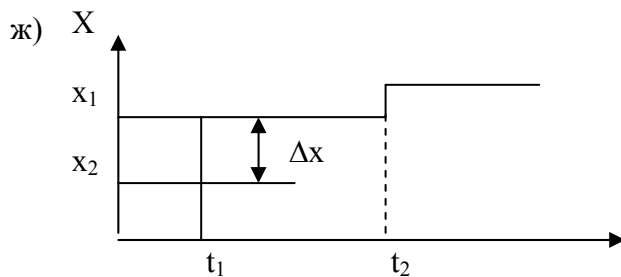
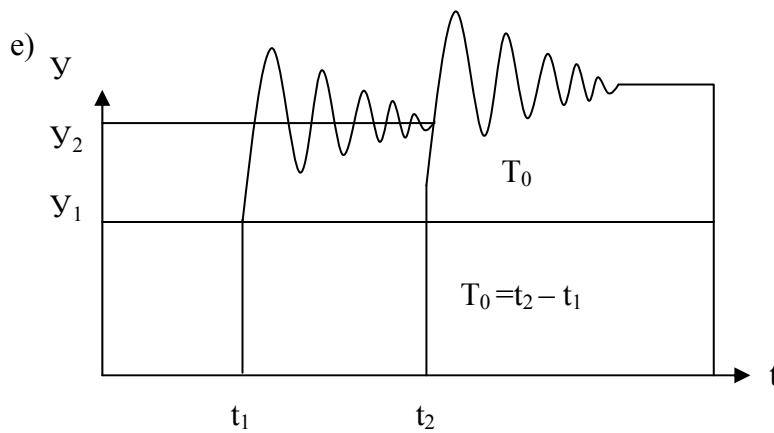
Экспериментальный метод построения математических моделей.

В этом классе методов различают активные и пассивные методы исследования технологических объектов.

При активном методе исследования формируется испытательный сигнал заданной формы на входы в объект и затем регистрируется реакция технологического объекта на заданный испытательный сигнал заданной формы:



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t=0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases}$$



Пассивный метод исследования технологического объекта

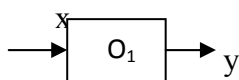
Заключается в наблюдении за работой технологического объекта в ходе его эксплуатации (наблюдение продолжается 2 месяца) при этом регистрируется и записывают в журнал наблюдений все отклонения от нормального состояния технологического объекта, вызванные случайным изменением во входных потоках, после этого полученную информацию анализируют и обрабатывают. Для построения моделей пассивным методом используются статические методы, поскольку фиксируются отклонения, вызванные случайными возмущающими факторами.

Активный метод исследования статики технологического объекта.

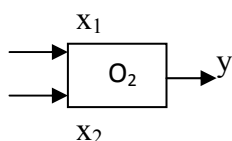
Это экспериментальный метод. План эксперимента представляет собой метод получения с помощью эксперимента необходимой информации, стоимость (важность) r зависит от сбора и обработки данных.

Элементарным экспериментом называется эксперимент с 1 уровнем и 1 фактором. Наиболее часто встречаются объекты со следующими типами структурных схем:

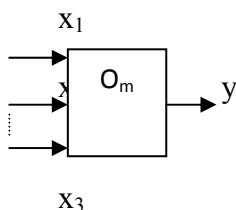
- 1) O_1 – с одной входной x и выходной y переменными



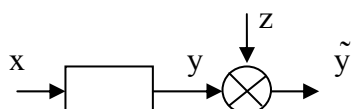
- 2) O_2 с двумя входными x_1 и x_2 переменными и выходной переменной y



- 3) O_m – с m линейно независимыми x_1, x_2, \dots, x_m переменными и выходной переменной y .



- 4) Во многих случаях при проведении эксперимента переменная y изменяется с некоторой погрешностью $\tilde{y} = y + z$



z – погрешность изменения выходных переменных технологического объекта типа «белый шум»

Математические модели статики со структурными схемами имеют вид:

- 1) $y = f_1(x)$;
- 2) $y = f_2(x_1, x_2)$;
- 3) $y = f_m(x_1, x_2, \dots, x_m)$;
- 4) $M\{\tilde{y}|x\} = f(x)$;

где $M\{\bullet\}$ – математическое ожидание случайной величины $\{\bullet\}$

Построение модели-статики объекта O_1

Модель статики объекта еще называют статической характеристикой объекта.

Статические характеристики используют

↓
при оптимизации режимов
технологического объекта

↓
при расчете систем автоматического
регулирования режимов

- 1) Подготовка и планирование эксперимента.

На этом этапе изучается объект, составляется его структурная схема, экспериментальная установка оборудуется приборами контроля (регистрации) переменных x и y .

Выбирается диапазон возможных изменений входных переменных $[x, x]$, выбирается

шаг Δx – изменения входной переменной и определяется число опытов: $\alpha = \frac{x-x}{\Delta x}$, $\alpha \geq (5 \div 10)$

Далее рассчитывается время, необходимое для проведения всех экспериментов:

$$T_3 \geq \alpha \Delta t, \quad \Delta t = (1 \div 1,5) \cdot T_0$$

$$T_0 = t_1 - t_2$$

Существует дисциплина, которая называется «Оптимальное планирование экспериментов», основной целью которого является определение \min количества экспериментов при осуществлении которых достигается поставленные цели.

2) Проведение эксперимента.

Исследователь устанавливает (с помощью специальных устройств) начальное значение переменной.

$x(1)=\underline{x}$ И далее спустя время Δt регистрирует значение выходной переменной $y(1)$.

Затем устанавливается значение входной переменной $x(2)=x(1)+\Delta x$ и измеряет $y(2)$ и.т.д.

В конце эксперимента получаем таблицу

X(j)	Y(j)
X(1)	Y(1)
X(2)	Y(2)
...	...
X(d)	y(d)

3) Обработка результатов эксперимента.

На этом этапе производится первичная статистическая обработка опытных данных и собственно $M(n)$ -статистики технического объекта.

Статистическая характеристика объекта $y=f(x)$ используется для оптимизации и расчета линейных систем автоматического регулирования.

Иногда приближенную функцию целесообразно искать в виде

$$y \approx f(x, a_1, a_2, \dots, a_n),$$

a_1, a_2, \dots, a_n – параметры, которые определяют из условия совпадения $y(j)$ и приближающейся функции $f(x_j)$ в точках X_1, X_2, \dots, X_n -узлах интерполяции.

$y(j) = f(x_j, a_1, a_2, \dots, a_n)$ – этот способ называется интерполяцией.

Например явное представление

$$f(x, a) = \sum_{i=1}^m a_i x_j^{i-1}$$

$$y(j) = f(x_j, a) = \sum_{i=1}^n a_i x_j^{i-1}$$

$J=1, \dots, n$

Пусть \underline{x} - наименьший из x_j узлов интерполяции, \bar{x} -наибольший из них.

Если точка x в которой вычисляется $f(x)$ лежит вне отрезка $[\underline{x}, \bar{x}]$, то употребляется термин «экстраполяция».

Иногда удобнее приближать опытные данные не интерполированием, а тригонометрическими функциями, многочленами.

$$L_n(x) = \sum_{i=1}^n y(i) * \prod_{i \neq j} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

1) Интерполяционный полином Лагранжа

2)Интерполяционный многочлен Ньютона

$$L_n(x) = f(x_1) + (x - x_1) * f(x_1, x_2) + (x - x_1)(x - x_2) * f(x_1, x_2, x_3) + \dots$$

$$+ (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) * f(x_1, x_2, \dots x_n)$$

$f(x_j, x_{j+1} \dots x_{j+k}) =$

$$f(x_j, x_{j+1} \dots x_{j+k}) = \sum_{i=1}^{j+k} \frac{y(i)}{\prod_{e=j}^{j+k} (x_i - x_e)}$$

$f(x_j, x_{j+1} \dots x_{j+k})$ — Разделенная разность n -го порядка.

$l=j$

$l \neq i$

Для того, чтобы избежать больших погрешностей, весь отрезок X и X разбивают на частичные отрезки и на каждом из этих частичных отрезков приближенно замеряют функцию $f(x)$ -многочленом невысокой степени(точка называется строчно - полиномиальная интерполяция)

Пусть на отрезке $[\underline{x}, \bar{x}]$ задана непрерывная функция $\varphi(x)$, введем сетку

$$\underline{x} = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = \bar{x}$$

$$y(j) = \varphi(x_j), j = \overline{0, n}$$

Определение Сплайном соответствующей функции $\varphi(x)$ называется функция $S_p(x)$ удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) На каждом сегменте $[x_{j-1}, x_j]$, $j = \overline{1, n}$ функция $S_p(x)$ является многочленом 3 степени
- 2) Функция $S_p(x)$, а также ее 1 и 2 производные непрерывны на отрезке $[\underline{x}, \bar{x}]$
- 3) Условие интерполяции совпадает

$$S_p(x_j) = \varphi(x_j) = y(j), \quad j = \overline{0, n}$$

Если сплайн определяется условиями 1) и 3) его называют интерполированным кубическим сплайном.

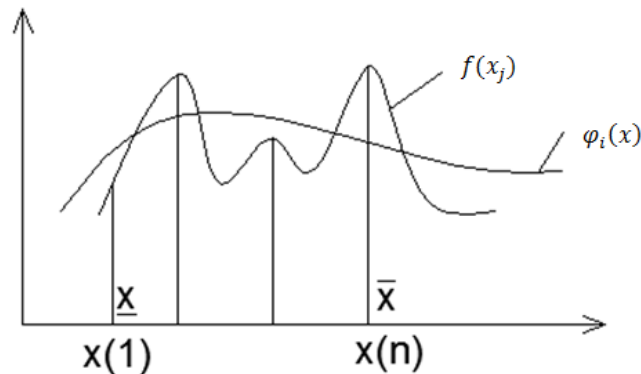
На каждом из отрезков $[x_{j-1}, x_j]$, где $j = \overline{1, n}$ будем искать функцию $S_p(x) = S_{pj}(x)$ в виде многочлена 3 степени

$$S_{pj}(x) = a_j + b_j(x - x_j) + \frac{c_j}{2}(x - x_j)^2 + \frac{d_j}{6}(x - x_j)^3$$

$$x_{j-1} \leq x \leq x_j, \quad j = \overline{1, n}$$

Где a_j, b_j, c_j, d_j -коэффициенты, который подлежат определению.

Наилучшие приближения функций заданных таблично. Аппроксимация экспериментальных данных



Пусть значения табличной функции $f(x_j) = y(j)$ и приближающих ф-ций $\varphi_i(x)$, $i = 0, 1, \dots, m$ известны в точках $x_j \in [\underline{x}, \bar{x}]$, $j = 0, 1, \dots, n$. Если $n > m$, то задача интерполяции (приближения) становится предопределенной. В этом случае имеем задачу о наилучшем приближении (аппроксимации).

Введем обобщенный многочлен: $g(x) = C_0 g_0(x) + C_1 g_1(x) + \dots + C_m g_m(x)$

число экспериментальных точек $g(m) = C_0 g_0(x) + C_1 g_1(x) + \dots + C_{n-1} g_{n-1}(x)$ и будем рассматривать его значения в узлах x_j .

Образует разности:

$$r_j = \varphi(x_j) - g(x_j), \quad j = \overline{0, n}$$

$$r_j = y(j) - g(x_j)$$

которые характеризуют отклонения в узлах x_j экспериментальных данных $y(j)$ от рассчитанных значений, полученных с помощью обобщенного многочлена

$$\varphi(x_j) = C_0 \varphi_0(x_j) + C_1 \varphi_1(x_j) + \dots + C_m \varphi_m(x_j), \quad j = \overline{0, 1, \dots, n}$$

Для вектора $r = (r_0, r_1, \dots, r_n)^T$ можно ввести ту или иную метрику

Например

$$\|r\|_E = \left(\sum_{j=0}^n r_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=0}^n (\varphi(x_j) - y(j))^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|r\|_C = \max_{0 \leq j \leq n} |r_j| = \max_{0 \leq j \leq n} |\varphi(x_j) - y(j)|$$

Задача о наилучшем приближении $y(j)$ состоит в нахождении коэф C_0, C_1, \dots, C_m минимизирующих норму вектора r . В зависимости от выбора нормы получим различные задачи. Так норме $\|r\|_E$ соответствует задача о наилучшем среднеквадратичном приближении, а норме $\|r\|_C$ — задача о наилучшем равномерном приближении экспериментальных данных.

Пример: Построим наилучшее среднеквадратичное приближение для $m=1; n=2$, когда заданы значения

$\varphi(x_j) = y(j), j = \overline{0,2}$ Обозначим $h_0 = x_1 - x_0, h_1 = x_2 - x_1$ и будем искать обобщенный многочлен $\varphi(x) = C_0 + C_1(x - x_1)$, тогда для $r(x) = \varphi(x) - f(x)$, получим $\|r\|^2 = \Phi(C_0, C_1) = (C_0 - C_1 h_0 - y(0))^2 + (C_0 - y(1))^2 + (C_0 + C_1 h_1 - y(2))^2$

$$C_0 + C_1(x_0 - x_1) = C_0 - C_1 h_0$$

$$\min_{C_0, C_1} \Phi(C_0, C_1) \quad (1)$$

Метод определения коэффициента приближенного многочлена из решения задачи (1) называется метод наименьших квадратов

Для решения задачи будем применять необходимые (а для данного случая и достаточные условия экстремума функции многих переменных)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_0} = 0 \quad \frac{\partial \Phi}{\partial C_1} = 0$$

Которые приводят к системе линейных алгебраических уравнений:

$$3C_0 + (h_1 - h_0)C_1 = y(0) + y(1) + y(2)$$

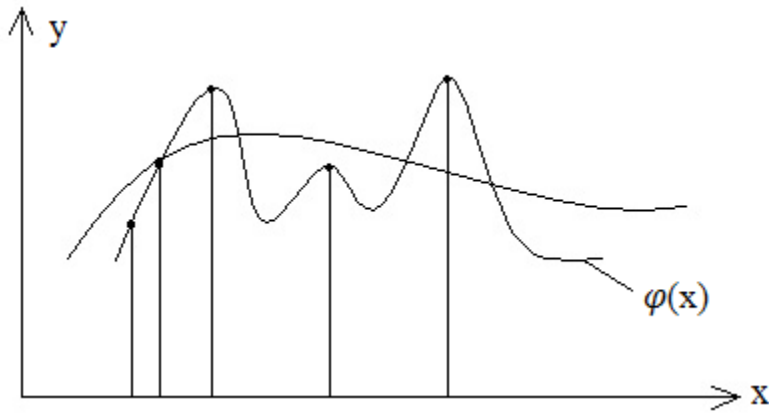
$$(h_1 - h_0)C_0 + (h_0^2 + h_1^2)C_1 = h_1 y(2) - h_0 y(0)$$

Погрешность получившегося приближения на равномерной сетке равна:

$$\|y - g\|_E = \frac{h^2}{\sqrt{6}} |y''(\xi)| \quad \xi \in (x_0, x_2) \quad \text{при } h_0 = h_1$$

Сглаживание сеточных функций

Пусть имеется таблица значений $j=0, \dots, n$, полученных путем измерения некоторой физической величины или с помощью численных расчетов. Может оказаться, что $\varphi(x)$ сильно меняется на отдельных участках.



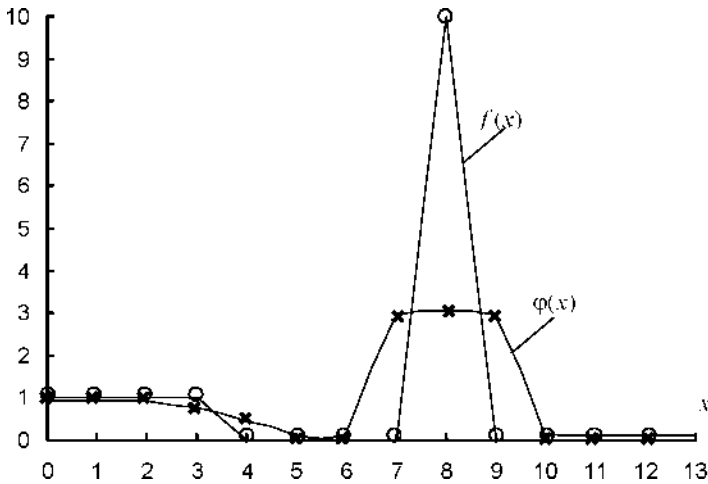
В этом случае иногда целесообразно применить процедуру сглаживания, для построения функции можно воспользоваться среднеквадратическим приближением.

Предположим, что многочлен $P_n(x)$ имеет следующий вид:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \quad (2)$$

Доопределим значения a_0, a_1, \dots, a_n в точках x_0 и x_n и обозначим:

В этом случае процедура сглаживания состоит в замене сеточной функции $f(x)$ более гладкой сеточной $\varphi(x)$, $j=0 \dots n$



В рассматриваемом случае сглаживание свелось к осреднению функции $f(x)$ по трем соседним точкам. Можно проводить осреднение по 5 точкам.

Многомерные задачи. Метод наименьших квадратов. Регуляция

Пусть приближающаяся функция имеется в виде:

Коэффициент C_i будем определять методом наименьших квадратов

В основе метода наименьших квадратов лежит соображение:

Малость величины $\Phi(C)$ обеспечивает близость функции $g(x)$ и $\varphi(x)$

в точках x_j . При $m \ll n$ функция $g(x)$ содержит относительно мало параметров (коэффициентов) и поэтому у нее меньше возможностей отличиться от $f(x)$ вне узлов, по сравнению со случаем $m=n$.

Числа $P_j > 0$ называются весами, которые подбирают в зависимости от плотности распределения точек x_j , кроме того, если значение $y(j)$ содержит случайную ошибку измерения, то веса P_j выбираются в зависимости от дисперсии ошибок измеряемых значений. Там, где x_j распределяется плотнее, числа P_j берутся меньше, значениям $f(x_j)=y(j)$ с большей дисперсией ошибки ставят в соответствие также меньшие значения P_j .

$$\sum_{j=1}^n P_j = 1$$

Используя необходимое и достаточное условие \min функции $\Phi(C)$ получим систему линейных алгебраических уравнений для определения C_i

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\nu \Phi}{\nu C_k} = \sum_{i=1}^m d_{ki} \cdot C_i - d_k = 0, k = \overline{1, m} \\ d_{ki} = \sum_{j=1}^n P_j g_k(x_j) g_i(x_j) \\ d_k = \sum_{j=1}^n P_j g_k(x_j) y(j) \end{cases} \quad (3)$$

Числа C_i будем находить непосредственно решая систему уравнений (3) или минимизируя каким-либо методом функцию $\Phi(C)$.

В основе метода регуляризации непосредственно лежат соображения о сглаживании аппроксимирующих функций.

Наиболее распространенной формой метода регуляризации является преобразование функции $\Phi(C)$ таким образом, чтобы определяемый коэффициент C обеспечил гладкость приближающей функции $g(x)$.

$$\Phi(\omega, g) = \Phi(g) + \omega \cdot \psi(g); \quad \omega > 0 \quad \Phi(g) = \Phi(C)$$

$$\Phi(C)$$

ω - параметр регуляризации.

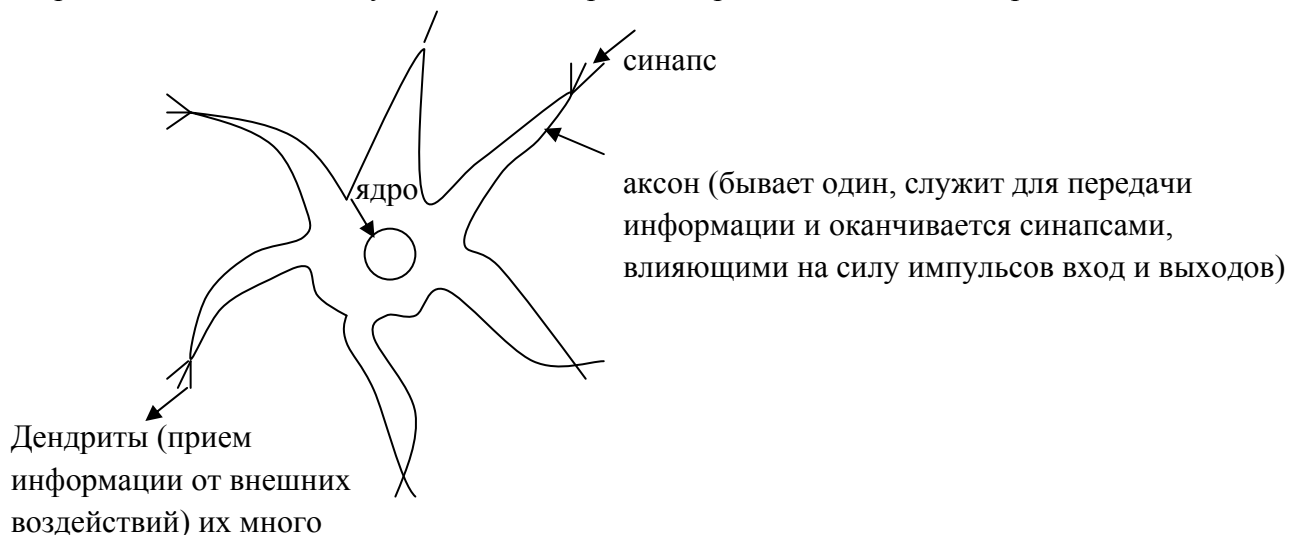
В этой задаче функционал $\psi(g)$ подбирается из следующих соображений: Если значение этого функционала невелико, то функция $g(x)$ обладает определенной гладкостью.

Например, $\varphi(g) = \int_x |grad(x)|^2 dx$ (является приближением к интегралу).

Приближение функций с помощью нейронных сетей

Это приближение функций многих переменных с помощью линейных операций и суперпозиций функций одного переменного. Такое приближение осуществляется с помощью специальных устройств — нейронных сетей, состоящих из формальных нейронов.

Термин «нейрон» появился в 40-е гг. при изучении биологических процессов в организме человека. Было выявлено, что нервная система и мозг человека состоит из нейронов соединенных между собой нервными окончаниями. По аналогии с биологическими нейронами был создан искусственный нейрон, который стал основой нейронных сетей.

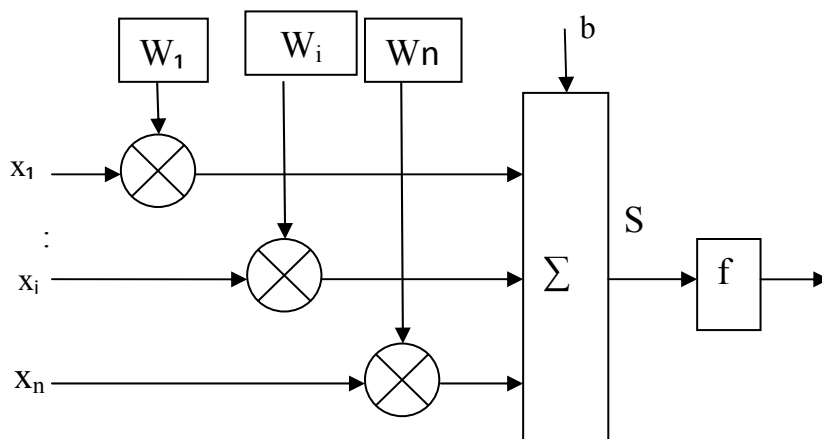


Аппарат искусственных нейронных сетей широко используется для решения следующих задач:

- 1) классификация образов;
- 2) аппроксимация функций;
- 3) задачи прогнозирования и предсказания;
- 4) оптимизация режимов в конкретном оборудовании;
- 5) задачи управления.

Составным элементом искусственных нейронных сетей является искусственный нейрон в состав которого входит: множители (синапсы), сумматор и нелинейный преобразователь.

Структурная схема искусственного нейрона



Синапсы осуществляют связь между нейронами и умножают входной сигнал на число, характеризующее силу связи (вес синапса).

Сумматор выполняет сложение сигналов, поступающие от других нейронов и внешних входных сигналов.

Нелинейный преобразователь реализует нелинейную функцию одного аргумента входа сумматора. Эта функция называется функция активации или передаточная функция нейрона.

Таким образом математическая модель нейрона описывает соотношение

$$\begin{cases} y = f(S) \\ S = \sum_{i=1}^n W_i x_i + b \end{cases}$$

у- выходной сигнал нейрона; W_i - вес синапса; b - смещение.

1) В качестве передаточной функции может использоваться любая функция из ограниченного набора нелинейных функций, но чаще всего используются следующие функции:

2) $f(S) = \frac{1}{1 + e^{-S}}$ - логическая (сигмоидальная)

3) $f(S) = \frac{e^S - e^{-S}}{e^S + e^{-S}}$ - гиперболический тангенс

4) $f(S) = S$

5) $f(S) = e^{-S^2}$ - гауссовая функция (радиально-базисная функция)

Синаптические связи с положительными весами называются возбуждающимися, а с отрицательными—тормозящими. Таким образом нейрон полностью описывается своими весами W_i и передаточной функцией $f(S)$. Получив на входе набор значений x_i , нейрон формирует на выходе значение y .

Классификация нейронных сетей и их свойства

Искусственные нейронные сети—это набор нейронов, соединенных между собой определенным образом, передаточная функция нейронов фиксирована, а веса могут изменяться.

Их работа состоит в преобразовании входного вектора x в выходной вектор y , который задается с помощью весов сети.

Задача построения сети решается в 2 этапа:

- 1) выбор типа и архитектуры сети;
- 2) подбор весов сети (обучение сети).

При выборе архитектуры определяется тип нейронов:

- (количество входных сигналов и передаточной функции);
- способ соединения нейронов между собой;
- входные и выходные воздействия сети.

Наиболее изучена и распространена многослойная архитектура нейронных сетей: многослойный перцептрон, сети с общей регрессией, сети Кохенена.

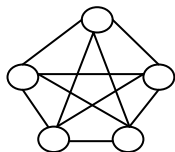
В современных сетях количество весов может составлять несколько десятков тысяч. Для обучения весов используются специальные алгоритмы. Все нейроны составляющие сеть можно разделить на:

- 1) входные (не осуществляет вычислительных преобразований в них);
- 2) выходные (выходы их являются выходами сети);

3) промежуточные (составляют основу сети).

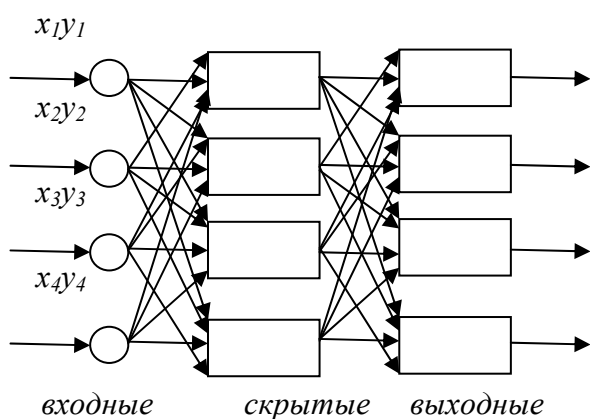
Бывает 3 типа расположения нейронов в сети:

а) полносвязные (каждый нейрон передает свой входной сигнал другому, выходные могут быть все или некоторые).

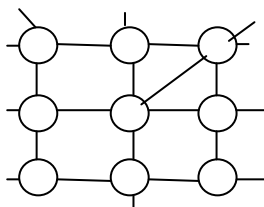


б) многослойные или слоистые сети (нейроны объединяют в слои, которые содержат совокупность нейронов с одинаковыми входными воздействиями).

Число нейронов в каждом слое может быть произвольным, не зависит от числа нейронов в другом слое. Входной сигнал подается на входы нейронов 1 слоя, который называется входным, выходной сигнал снимается с последовательного слоя. Входной сигнал как правило является выраженным (здесь нет суммирования и преобразования).



в) слабосвязанные сети



Многослойные можно разделить на:

- 1) монотонные;
- 2) без обратной связи (прямого распределения);
- 3) с обратной связью.

Для оценки числа нейронов в скрытых слоях однородных нейронных сетей в начале определяется число синаптических весов.

$$\frac{mN}{1 + \log_2 N} \leq Lw \leq m\left(\frac{N}{m} + 1\right)(n + m + 1) + m$$

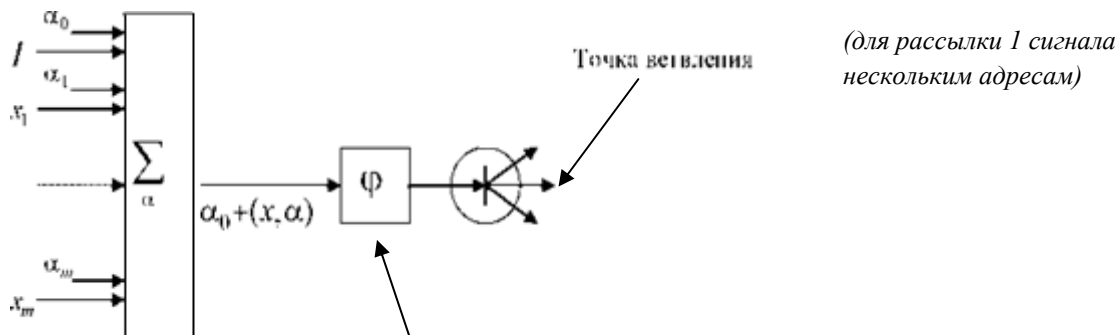
$$L = \frac{Lw}{n + m} - \text{число нейронов в двухслойной сети.}$$

n-разность входного вектора;

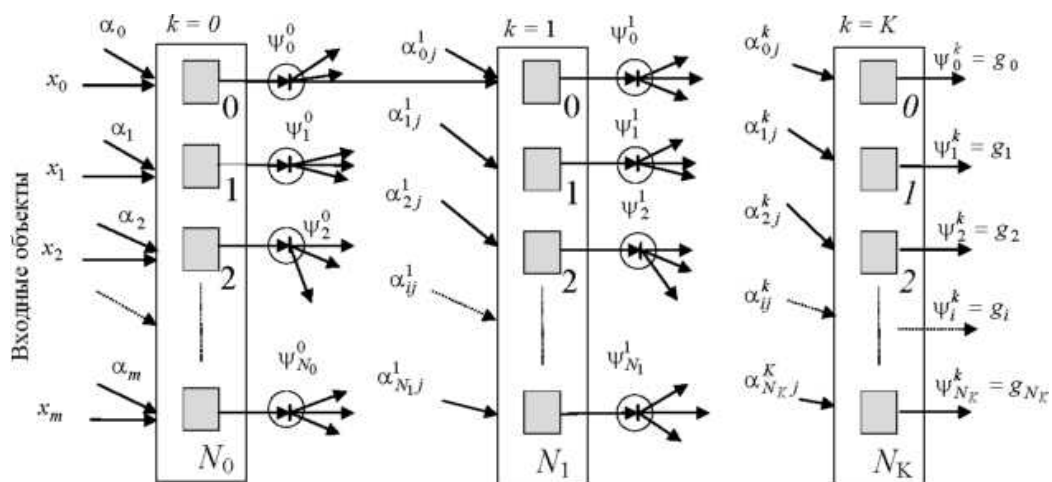
N-число нейронов изучаемой выборки;

m-разность выходного вектора.

Схема формального нейрона



входной сумматор нелинейный преобразователь



$$m = N_0$$

z_i^k - вход i -го нейрона;

Ψ_i^k - выход i -го нейрона.

$$z_i^k = \sum_{j=0}^{N_{k-1}} \alpha_{ij}^k \psi_j^{k-1} \quad i = \overline{1, N_k}, \quad k = \overline{1, N_k}$$

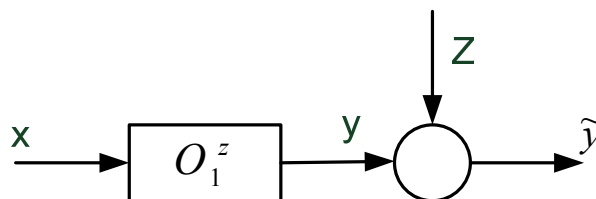
$$\psi_i^k = \varphi(z_i^k) \quad i = \overline{1, N_k}$$

Настроечная функция
$$E(\alpha) = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^m \sum_{i=1}^{N_k} (y_i^x \lambda - q_i(x^{(\lambda)}, \alpha))$$

y_i^x - экспериментальные данные;

q_i - выход сети.

Регрессионный анализ



Z - случайная помеха измерений типа «белый шум»

$$\begin{cases} M\{z\} = 0 \\ D\{z\} = \delta^2 \end{cases}$$

O_1^z – некий объект

Математическое ожидание $M\{\tilde{y}|_x\} = f(x, a)$ – эта зависимость называется регрессионной/

С помощью регрессионных моделей можно прогнозировать значение зависимой случайной величины y , от независимой переменной x .

Уравнения регрессии бывают:

- линейные (корреляционные);
- нелинейные;

Уравнение линейной регрессии (истинное) записывается в виде:

$$\begin{aligned} M\{\tilde{y}|_x\} &= \eta \\ \eta &= \beta_0 + \beta_1(x - \bar{x}) \end{aligned}$$

оценка истинных параметров модели β_0 и β_1 обозначим b_0 и b_1 , а y через \hat{y} , получим уравнение регрессии

$$\hat{y} = b_0 + b_1(x - \bar{x})$$

Для k – факторного эксперимента

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i$$

Процедура построения линейных регрессионных моделей

1) запись в явном виде $f(x, a)$:

- линейная модель $\hat{y} = a_0 + a_1(x - \bar{x})$;
- нелинейная модель

$$\hat{y} = a_0 + a_1(x - \bar{x}) + a_2(x - \bar{x})^2 + \dots + a_t(x - \bar{x})^k;$$

k - необходимо определить

Модель линейная, один фактор выходная величина $y=f(x)$, x – независимая переменная.

Уравнение регрессии имеет вид: $\hat{y} = b_0 + b_1 x_1$.

Наша цель найти коэффициенты b_0, b_1 . Будем их находить методом наименьших квадратов.

$$\Phi(b_0, b_1) = \sum_{i=1}^k (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min_{b_0, b_1}$$

Метод наиболее распространенный, придуман 150 лет тому назад ученым Гауссом.

Для k-факторного эксперимента достаточно k+1 опыта.

Минимум некоторой функции, если он существует, достигается при одновременном равенстве нулю частных производных по всем неизвестным т.е.

$$\begin{cases} \frac{\nu\phi}{\nu b_0} = 0 \\ \frac{\nu\phi}{\nu b_1} = 0 \end{cases}$$

Путем математических выводов имеем формулу для любого числа факторов коэффициенты будут равны:

$$b_j = \sum_{i=1}^N \frac{y_i x_{ji}}{n}$$

j=0,1,2,...k-номер фактора

0-записан для b_0 – аддитивная случайная величина с нулевым матожиданием.

Отбор факторов осуществляется, исходя из существенности проблемы.

Для двух факторов коэффициенты вычисляются:

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{y}_i$$

$$b_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{1i} \bar{y}_i$$

$$b_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{2i} \bar{y}_i$$

После того как коэффициенты $b_0, b_1, b_2, \dots, b_k$ числовые значения их подставляем в уравнение регрессии

Имеем, например: $\hat{y} = 0,37 + 85,6x_1$ – получившаяся модель

2) проверка адекватности модели и оценка значимости коэффициентов регрессии.

Целью дисперсионного анализа является вывод об адекватности модели.

Для этого рассчитывают дисперсию адекватности и дисперсию воспроизводимости.

Физический смысл дисперсии адекватности – величина степени неадекватности модели, т.е. отклонение рассчитанных точек от среднего экспериментального.

$$S_{ад}^2 = \frac{m}{N-l} \sum_{i=1}^N (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2$$

m- количество параллельных повторов в каждом опыте.

l – число значимых коэффициентов.

N – количество опытов (число строк в матрице планирования).

Адекватность проверяют по F-критерию Фишера

$$F_p = \frac{S_{ад}^2}{S_b^2}$$

Найденное сравнивают с табличным $F_{\text{табл}}$, которое определяется при уровне значимости α .

Для технических расчетов $\alpha=0,05$ и числе степеней свободы:

$$f_{\text{ад}} = N - l \text{ и } f_b = N(m - 1)$$

Если $F_p < F_T$ – модель адекватна

Если $F_p > F_T$ – модель неадекватна (следовательно, модель нелинейная, либо неучтены все факторы)

Дисперсия воспроизводимости характеризует меру рассеяния экспериментальных данных относительно средних значений

$$S_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{N(m - 1)}$$

y_{ij} – результаты опытов $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n}$

\bar{y}_i – среднее арифметическое из n_i – параллельных опытов

\hat{y}_i – предсказанное по уравнению регрессии значение в опыте

3) проверка значений коэффициентов модели осущ. 2 способами:

- по t- критерию Стьюдента;

- построением доверительного интервала.

Дисперсия коэффициента регрессии $S_{\{b_1\}}^2$ определяется по формуле:

$$S_{\{b_i\}}^2 = \frac{S_b^2}{N}$$

$$S_{\{b_i\}} = \sqrt{\frac{S_b^2}{N}}$$

δ_{bi} – доверительный интервал для коэффициента модели

$$\delta_{bi} = \pm S_{\{b_i\}} \cdot t$$

t – критерий Стьюдента определяется из таблиц, при числе степеней свободы, с которым определялась S_b^2 и выбранном уровне значимости (обычно 0,05).

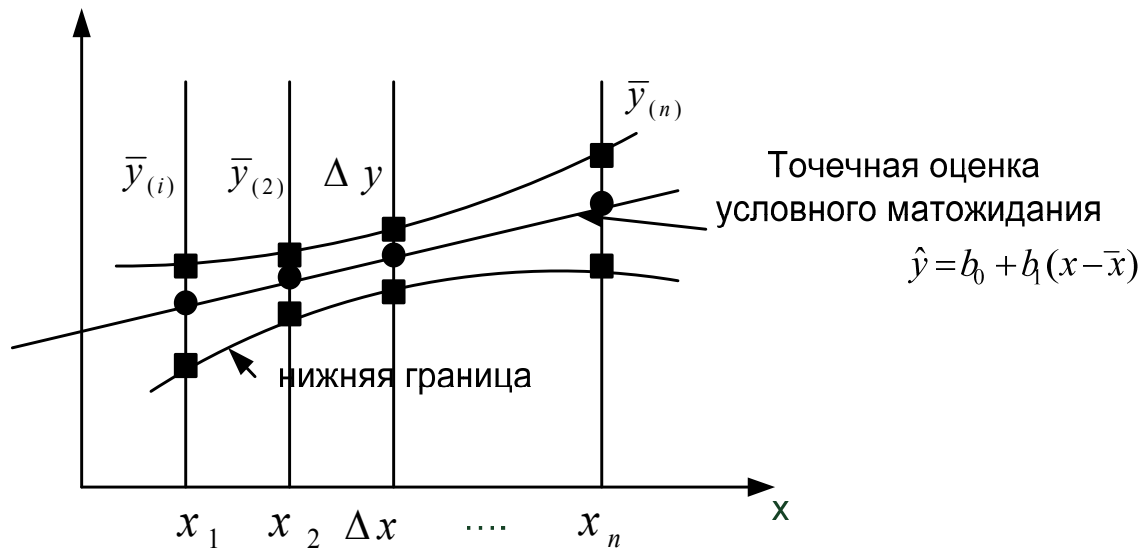
$p=1-\alpha$ – доверительная вероятность

$p=\{0,9;0,95;0,99\}$

$$\underline{b}_i < b_i < \overline{b}_i$$

$$b_0 - t_{(1-\alpha,f)} \cdot S_{\{b_i\}} \leq b_0 \leq b_0 + t_{(1-\alpha,f)} \cdot S_{\{b_i\}}$$

аналогично для b_1



4) проверка однородности по критерию Кохрена

$$G_p = \frac{S_{\{y_i\}max}^2}{\sum_{i=1}^N S_{\{y_i\}}^2}$$

Выбирается max построчная дисперсия и берется отношение Σ всех построчных дисперсий

y_1	y_2	y_3	$S^2_{\{y_i\}}$
			$\Sigma \dots$

Построчная дисперсия определяется по формуле:

$$S_{\{y_i\}}^2 = \sum_1^m \frac{(y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{m - 1}$$

Коэффициент Кохрена показывает какую долю в общей сумме построчных дисперсий занимает max из них.

При идеальной однородности $G_p \rightarrow \frac{1}{N}$

G_p сравнив G_T (α и числа степени свободы $\frac{f_1}{f_2}$) $\frac{f_1=m-1}{f_2=N}$

$G_p < G_T$ – дисперсия однородная

Также сравнивается $S_{ад}^2(y) \gtrless S_b^2(y)$

1) $S_{ад}^2(y) > S_b^2(y)$ – модель плохая, нужно больше параметров

2) $S_{ад}^2(y) < S_b^2(y)$ – слишком «хорошая», нужно уменьшить параметры (модель описывает погрешность)

3) Различия незначимо – хорошая модель, если таких моделей несколько выбрать самую простую.

Нелинейная регрессия

Различают 2 класса нелинейных регрессий:

1) Регрессии линейные по оцениваемым параметрам, но нелинейные, относительно включенных переменных.

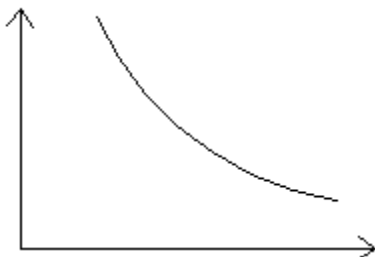
2) Регрессии нелинейные по оцениваемым параметрам.

Примером 1 случая являются функции:



- полиномы разных степеней

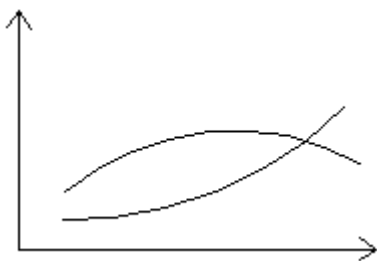
$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \varepsilon$$



равнобочная гипербола

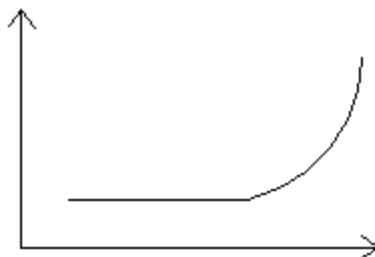
$$y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$$

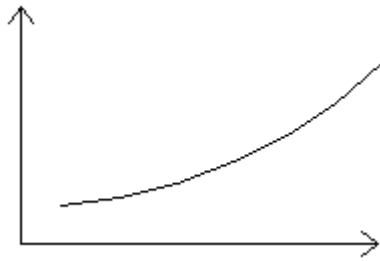
К нелинейным регрессиям по оцениваемым параметрам относятся функции:



- степенная $y = ax^b \varepsilon$

- показательная $y = ab^x \varepsilon$





• экспоненциальная

$$y = e^{a+bx} \varepsilon$$

Приведение к линейному виду регрессий нелинейных по объясняющим параметрам

- Парабола 2 степени

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \varepsilon$$

Заменяя $x_1 = x; x_2 = x^2$ получим 2-ое факторное уравнение линейной регрессии

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \varepsilon$$

- Равносторонняя гипербола $y = a + \frac{b}{x} + \varepsilon$, пусть $\frac{1}{x} = z$ получим $y = a +$

$$bz + \varepsilon$$

Решаем как линейное МНК

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i = na + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \\ \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i} = a \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i^2} \end{cases}$$

- Для нелинейной модели $y = \frac{1}{a+bx+\varepsilon}$, пусть $\frac{1}{y} = z$, а не для $yz = a + bx + \varepsilon$

,однако МНК не эффективен т.к. оценка идет для обратных величин $\frac{1}{y}$, а не для y .

Приведение к линейному виду регрессий нелинейных по параметрам

- $y = ax^b e$

Логарифмирование данного уравнения по основанию e приводит его к линейному виду $\ln y = \ln a + b \ln x + \ln \varepsilon$

Оценки параметров аибмогут быть найдены МНК.

- экспоненциальная модель $y = e^{a+bx} \varepsilon$, логарифмируя, получаем

$$\ln y = a + bx + \ln \varepsilon$$

Построение нелинейных регрессионных моделей и их анализ

Пусть уравнение регрессии задается полиномом k -ой степени

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_k x^k$$

Коэффициенты $b_0, b_1, b_2 \dots b_k$ будем определять МНК по экспериментальным данным.

$$\Phi = \sum_{i=1}^n (\bar{y}_i - \hat{y}_i)^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial b_0} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial b_1} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial b_n} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Преобразовав систему уравнений (1) получим:

$$\begin{cases} nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_i + b_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_i^k = \sum_{i=1}^n y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_i^k + b_1 \sum_{i=1}^n x_i^{k+1} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_i^{2k} = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i x_i^k \end{cases} \quad (2)$$

Метод решения системы уравнений (2)- Гаусса, Крамера, Зейделя

Однако нам неизвестна степень полинома k . Для ее определения используется итерационный метод:

- 1) Задаем степень $k=2$ и определяем b_0, b_1, b_2 МНК.
- 2) Затем вычисляем остаточную дисперсию по формуле

$$S_{ост, k} = \frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \hat{f}(x_j))^2}{n - (k+1)}$$

- 3) $k=3$ (увеличив степень полинома определяем b_0, b_1, b_2, b_3 и $S_{ост, k+1}^2$).
- 4) Как только $S_{ост, k+1}^2 < S_{ост, k}^2$ увеличение степени k нужно прекратить.
- 5) Значимость различия между $S_{ост, k+1}^2$ и $S_{ост, k}^2$ проверяем по критерию Фишера.

$$F = \frac{S_{ост, k}^2}{S_{ост, k+1}^2} < F(\rho, f_1, f_2)$$

f_1, f_2 - число степеней свободы в числителе и знаменателе соответственно

6) Если считать, что уравнение регрессии найдено с достаточной точностью, то остаточная дисперсия обусловлена только наличием дисперсии воспроизводительности, т.е. $S_{ост}^2 \approx S_{восп}^2$ и если $F_p < F_{табл}$ - модель адекватна, если $F_p > F_{табл}$; увеличиваем степень полинома $k = k + 1$.

Пример: пусть нас интересует построение регрессионной модели между переменной x и y .

№	x	y	x^2	x^3	x^4	yx	yx^2	$y_{нор}(x)$
1	1	6	1	1	1	6	6	6,171
2	2	9	4	8	16	18	36	8,516
3	3	10	9	27	81	30	190	10,63
4	6	12	36	126	256	68	142	11,91
5	5	13	25	125	625	65	325	12,97
Σ	17	50	55	279	979	167	669	

$$\begin{cases} 5a + 17b + 55c = 50 \\ 17a + 55b + 279c = 167 \\ 55a + 279b + 979c = 669 \end{cases}$$

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta}; b = \frac{\Delta b}{\Delta}; c = \frac{\Delta c}{\Delta}$$

$$\Delta = 700; \Delta a = 2380; \Delta b = 2090; \Delta c = -150$$

Уравнение имеет вид

$$y_{\text{теор}}(x) = a + bx + cx^2$$

$$y_{\text{теор}}(x) = 3,6 + 2,986x - 0,216x^2$$

Множественная регрессия

Применяется для описания взаимной связи между x_1, x_2, \dots, x_m и выходной величиной \hat{y} .

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^m b_i x_i$$

b_0, b_1, \dots, b_m - находим МНК.

$$b_i = r_{x_i y} \frac{S_y}{S_{x_i}} \quad i = \overline{1, m}$$

$$b_0 = \bar{y} - \sum_{i=1}^m b_i \bar{x}_i$$

$$S_{x_i} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (x_{i,j} - \bar{x}_i)^2}{n-1}} \quad S_y = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n (y_j - \bar{y})^2}{n-1}}$$

$$r_{x_i y} = \frac{1}{n-1} \sum (x_{ij} - \bar{x})(y_j - \bar{y}) / (S_{x_i} S_y)$$

$r_{x_i y}$ - коэффициент корреляции, оцениваемые тесноту связи случайных величин x_i и y

При построении модели нелинейной множественной регрессии следует применять нейронные сети, т.к. получается полином высокого порядка (плохо обусловленная матрица)

Математическое планирование эксперимента

Эксперимент занимает значительное место в НИ, однако его эффективность очень низка, для того, чтобы ее повысить разработаны методы математического планирования эксперимента:

- симплексное;
- ортогональное;
- активно - пассивный эксперимент и др.

Предложил математическое планирование Рональд Фишер в конце 20-х годов 20 века. Он предложил процедуру одновременного варьирования управления всеми параметрами, которые влияют на объект.

В начале 50 гг. 20 века американские ученые Бокс и Уилсон предложили метод ортогонального планирования эксперимента, который получил название оптимального планирования эксперимента, т.к. позволяет находить оптимальные условия существования объекта путем планомерного продвижения в область оптимума.

Математическое планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов для решения задачи с требуемой точностью.

Этим методом возможно решать 2 вида задач:

- интерполяции;
- оптимизации.

Задачи интерполяции имеют своей целью математическое описание поведения объекта в некоторой области его существования.

Задачи оптимизации имеют своей целью нахождение оптимальных условий существования объекта, т.е. определяет сочетания параметров, при которых поведение объекта экстремально.

Очень часто эти задачи решаются в комплексе.

В результате математического планирования эксперимента возможно получить следующие преимущества:

- 1) минимизировать число опытов;
- 2) определить условия проведения опытов с тем, чтобы получить решение задачи с требуемой точностью;
- 3) получить математическое описание объекта;
- 4) выразить логическую информацию для принятия решений по изменению; управлению объектом.

Объект исследования и требования к нему

Для понятия объект исследования чаще всего используется гипотетическая система «черного ящика».

Черный ящик – это объект, закрытый для нашего понимания в отношении его физико-химической сущности, детерминированности взаимосвязи между его отдельными элементами и параметрами, влияющими на его поведение.

Такой объект может быть представлен следующей системой



Объект пригодный для исследования методом математического планирования эксперимента должен подчиняться следующим правилам:

1. Должны быть известны все параметры, от которых зависит его состояние x_1, x_2, \dots, x_n , где n - число различных параметров, влияющих на объект.
2. Черный ящик должен давать отклик y на изменение входов x_1, x_2, \dots, x_n

Параметры, влияющие на объект, называют входами черного ящика или факторами.

Параметры, по которым оценивают реакцию объекта на изменения значения факторов(параметр y) называют выходами черного ящика. Целевой функцией или параметром оптимизации(для задач оптимизации).

Основные требования к объекту исследования

В качестве основных требований к объекту исследования можно выделить следующие:

1) воспроизводимость, которая означает, что каждому сочетанию значений факторов соответствует только одно (с точностью эксперимента) значение целевой функции.

Обратное не действительно, так как одному и тому же значению целевой функции может соответствовать множество сочетаний значений факторов.

2) управляемость означает, что имеется возможность выбрать любое сочетание факторов и поддерживать объект в соответствующем состоянии достаточно длительное время

Если функция или несколько факторов не могут быть установлены на определенном уровне и независимы от нас образом изменяются во времени, то в этом случае необходимо использовать методы активно-пассивного эксперимента.

Вообще объект можно характеризовать бесконечным множеством состояний. Однако, чтобы охарактеризовать объект в интересующем нас аспекте нет необходимости перебирать все возможные его состояния.

Например, чтобы оценить влияние одного из факторов на объект достаточно знать экспериментальную зависимость по соответствующему параметру в 4 точках.

Если количество факторов обозначить k , то число состояний объекта, которые должны быть экспериментально изучены определением по формуле: $N=p^k$

p -число уровней (значений), которые принимает каждый из факторов

Таким образом при числе факторов 4 для экспериментального исследования объекта потребуется $256=4^4$ независимых опытов. Очевидно, что при большом числе факторов решение экспериментальной задачи методом классического эксперимента (когда все факторы кроме 1 фиксируются на 1 уровне и исследуют влияние только выбранного фактора) становится практически невозможно.

Метод математического эксперимента, который целесообразно использовать для объектов типа «черный ящик» сложных многофакторных объектов физико-химическая сущность которых недостаточно изучена. Математическое планирование позволяет определить минимальное необходимое число опытов и условия их проведения, которые необходимы для решения задачи с требуемой точностью.

Целевая функция параметров оптимизации

Параметр оптимизации является обобщенной характеристикой цели исследования. Это параметр, который наиболее полно характеризует объект в интересующем нас аспекте.

Объект характеризуется множеством параметров различной природы (экономическими, качественными, психологическими, эстетическими и др.).

Необходимо выбрать один единственный показатель для характеристики состояния объекта.

Требования к параметру оптимизации

1) параметр должен быть количественным (измеряемым) и выражаться одним числом.

Когда отсутствуют технические средства для измерения параметра, то используется метод ранжирования. Для этого целевой функции присваивается некоторое условное значение в соответствии со шкалой ранга.

2) целевая функция должна отвечать требованиям статистической однородности. Это требование аналогично требованиям воспроизводимости объекта исследования, т.е. одному и тому же сочетанию факторов соответствует одно единственное значение целевой функции, обратное не действует.

3) целевая функция должна соответствовать требованиям универсальности или полноты, т.е. достаточно полно характеризовать объект.

4) желательно, чтобы целевая функция имела физический смысл и была легко определена.

Факторы – это параметры, которые оказывают непосредственное влияние на объект. При реализации методов математического планирования очень важно учесть все существующие (значимые) факторы. Если по ошибке один из существующих факторов выпадает из рассмотрения, то это станет причиной неудовлетворительной воспроизводимости эксперимента объекта.

Основные требования к факторам:

1) они должны быть управляемыми, т.е. должны обеспечивать возможность поддержки любых из факторов на некотором фиксированном уровне;

2) факторы должны непосредственно воздействовать на объект;

3) факторы должны быть независимыми друг от друга – отсутствие взаимной коррелируемости.

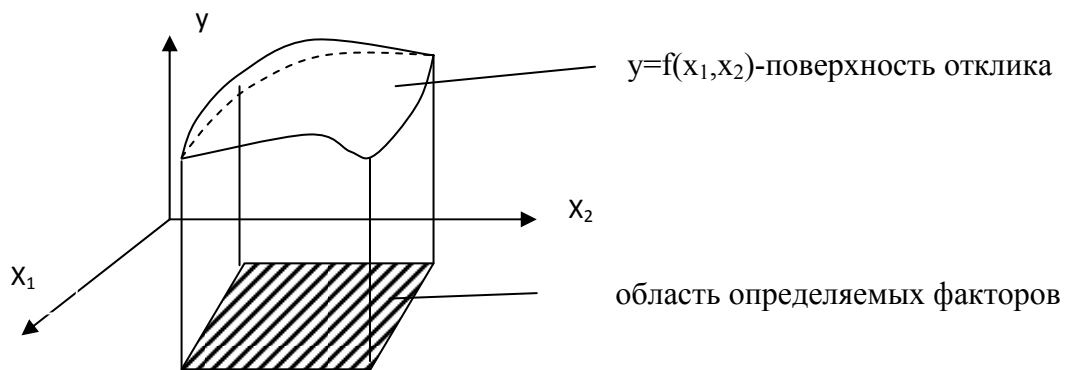
Выбор модели объекта

Выбрать модель объекта - это значит выбрать вид математической зависимости.

$Y=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ которая будет использоваться для описания объекта (взаимосвязи между параметром оптимизации и определенными факторами).

Для обеспечения процедуры выбора моделью используют график аналогичной функции отклика - поверхность отклика. Строго говоря графическая интерпретация поверхности отклика возможна для случая двухфакторного эксперимента. При большом

числе факторов существует гипотетическая гиперповерхность, поскольку у нас отсутствуют навыки для её графического изображения.



Наиболее общей задачей планирования является задача оптимизации, так как требуется определить при этом не только оптимум, но и способ управления объектом.

Для управления объектом требуется определить взаимосвязи между целевой функцией и факторами. Оптимум поверхности отклика можно найти различными методами:

- 1) путём перебора всех возможных состояний;
- 2) путем случайного поиска;
- 3) путем планомерного целенаправленного продвижения в область оптимума

Поверхность отклика может быть представлена в виде некоторого «плоского» аналога и называется линиями равного отклика

Линии равного отклика соединяют между собой точки факторного пространства, которые характеризуются одним и тем же значением целевой функции

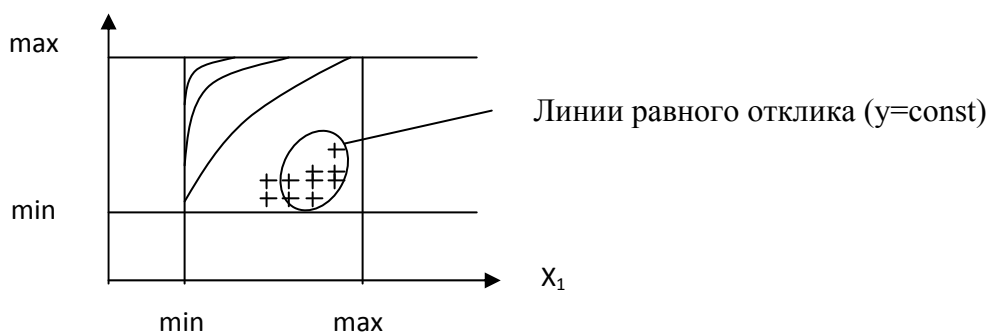


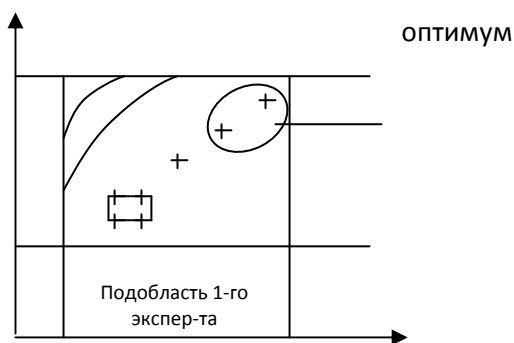
Рис. Классический эксперимент Гаусса

В методе математического планирования эксперимента реализуется принцип целенаправленного продвижения в точку оптимума. Программа направленного продвижения реализуется путём построения модели в некоторой ограниченной (локальной) области определяемых факторов.

Направление продвижения к оптимуму определяется на основе анализа математической модели, построенной для этой локальной области.

При необходимости выбирается дополнительная (ные) локальные области, уточняется направление и т.д. до достижения точки оптимума.

Метод поиска оптимума путём целенаправленного продвижения к нему носит название шагового принципа.



Сущность пошагового принципа заключается в следующем: выбирается подобласть 1 эксперимента на основе априорной информации. Далее проводится эксперимент с использованием метода математического планирования, после обработки результатов эксперимента получаем математическую модель объекта для этой подобласти. Эта модель обладает свойством указывать направление продвижения в оптимуме. Для реализации пошагового принципа необходимо чтобы целевая функция (поверхность отклика характеризовалась следующими свойствами):

- 1) поверхность отклика должна быть гладкой;
- 2) непрерывной;
- 3) иметь только один оптимум.

Модель объекта должна отвечать следующим требованиям:

- 1) достаточно только указывать направление движения к оптимуму
- 2) давать достаточно адекватно описание функции отклика.

Из математического анализа известно, что поверхность отклика характеризуется выше указанными свойствами в окрестностях любой точки может быть разложена в степенной ряд.

В соответствии с методом ортогонального планирования для описания объекта используются отрезки степенных рядов так называемые алгебраические полиномы.

Метод Бобса-Уилсона предполагает использование неполных квадратичных полиномов.

Полином 2 степени для случая 3 факторов:

$$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_{12}x_1x_2+b_{13}x_1x_3+b_{23}x_2x_3+b_{11}x_1^2+b_{22}x_2^2+b_{33}x_3^2.$$

Принятие решений перед началом планирования

Выбирается область определенных факторов. Она учитывает возможный диапазон изменения всех существующих факторов, при г объект может существовать. Далее определяется подобласть 1 эксперимента.

В задачах интерполяции это тот диапазон измененных факторов, при г интересно знать поведение объекта.

В задачах оптимизации – подобласть 1 эксперимента определяется на основе априорной информации , в г наиболее вероятны оптимальные значения отклика.

На следующем этапе определяется основной уровень и интервал варьированный по каждому из факторов.

Основной уровень – это « центр» эксперимента по каждому из факторов.

В задачах интервал он выбирает как среднее значение в диапазоне изменения каждого фактора.

В задачах оптимизации основной уровень должен быть смещен от границы области определенного фактора на величину интервала варьирования.

Интервал варьирования – это определенное число, свое для каждого фактора, а при вычитании нижнее значение фактора. Для облегчения процедуры обработки экспертных данных ,а также для удобства анализа модели , в аспекте относительного влияния каждого из факторов на целевую функцию используют процедуру кодирования факторов.

Для того, чтобы найти кодированное значение фактора, используют формулу : $x_j =$

$$\frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j0}}{u_j}, \text{ где}$$

\tilde{x}_j и x_j - соответственно кодированное и натуральное значение фактора j ;

\tilde{x}_{j0} - натуральное значение на основном (нулевом) уровне;

u_j – интервал варьирования фактора j .

Т.е. кодированное значение фактора на верхнем уровне = +1 ,на нижнем = -1, на нулевом = 0.

Метод ортогонального планирования предполагает варьирование каждого фактора на двух уровнях: верхнем и нижнем.

В таком случае число независимых опытов будет = $N=2^k$, где

k – число факторов ;

2 – число уровней.

При выборе интервала варьирования учитывают априорную (доопытную) информацию, касающуюся кривизны поверхности отклика, диапазон изменения y , а также точность определенного значения факторов.

При большой кривизне поверхности, высокой точности фиксированных факторов и большом диапазоне изменения y , выбирается малый интервал варьирования, в противном случае большой, а в остальных 25 случаях – это сложная задача.

Реализация эксперимента

Для упрощения записи условий опытов пользуются обозначением соответствующих уровней « \pm » (для двухфакторного эксперимента).

Означает, что 1 фактор на верхнем уровне (+1), а второй на нижнем (-1).

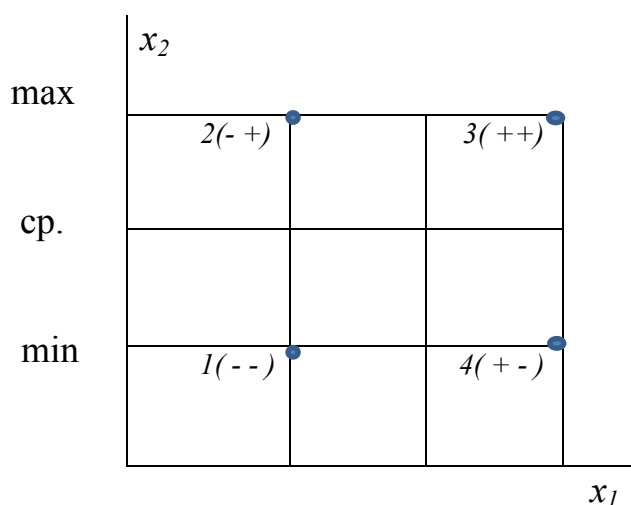


Рис. Графическая интерпретация условий 2 факторного эксперимента

Графическая интерпретация полного третьего факториального эксперимента будет служить куб.

В других случаях дать графическую интерпретацию эксперимента не предоставляется возможным.

В этой связи для повышения наглядности записей условий эксперимента, а также с целью облегчения процедуры обработки описанных данных условия эксперимента записывают в виде матрицы.

Матрица состоит из вектор -строк и вектор -столбцов.

Вектор строки представляют собой запись условий отдельных независимых опытов в эксперименте.

Вектор -столбец указывает уровни каждого из факторов, на g он варьируется.

Правила построения матрицы:

1. Чередование знаков в векторе – столбце по степеням двойки:

для 1 фактора ,через 2^0

для 2 фактора ,через 2^1

для 3 фактора ,через 2^2

для 4 фактора ,через 2^3 и.т.д.

2. Перемножение столбцов: при добавлении нового фактора исходная матрица повторяется дважды, при этом значение нового фактора получается путем почленного перемножения вектор столбцов исходного плана.

Первый раз новому фактору присваивается знак, полученный в результате перемножения ,а второй раз этот знак меняется на противоположный.

При добавлении нового фактора исходный план повторяется дважды.

Первый раз с новым фактором на верхнем уровне, а второй раз - на нижнем.

Матрица планирования для полного трехфакторного эксперимента.

№	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	y^1	y^2	y^3	\bar{y}_j
1	+	+	+	+	+	+	+	+	y_1^1	y_1^2	y_1^3	\bar{y}_1
2	+	-	+	+	-	-	+	-
3	+	+	-	+	-	+	-	-	y_3^1	y_3^2	y_3^3	\bar{y}_3
4	+	-	-	+	-	-	-	+
5	+	+	+	-	+	-	-	-				
6	+	-	+	-	-	+	-	+				
7	+	+	-	-	-	-	+	+				
8	+	-	-	-	-	+	+	-				

двухфакторный эксперимент

Свойства полного многофакторного эксперимента

Эти свойства наглядно иллюстрируются свойствами матрицы планирования.

1. Свойство симметрии – алгебраическая сумма членов каждого векторного столбца = 0

$$\sum_{i=1}^N x_{j,i} = 0$$

N – число факторов.

2. Свойство нормирования - сумма квадратов членов каждого вектор столбца матрицы равна числу вектор строк:

$$\sum_1^N (x_{ji})^2 = N$$

3. Свойство ортогональности – алгебраическая сумма почленного произведения любых вектор-столбцов матрицы равных 0.

$$\sum_1^N x_{j,i} * x_{j,i} = 0$$

4. Свойство рототабельности – точность предсказания целевой функции (направленные движение к оптимуму) одинаково на равном расстоянии от основного уровня.

Вектор-столбец вводится для определения коэффициентов при взаимодействии факторов. Он получается путем перемножения вектор-столбцов соответствующих факторов. После заполнения матрицы планирования приступают к выполнению эксперимента. Чтобы исключить влияние некоторых случайных факторов экспериментальные опыты рекомендуется проводить в случайной последовательности.

Для снижения случайной погрешности в каждом из опытов их проверяют на воспроизводительность (несколько раз повторяют).

Значение коэффициентов модели определяют в соответствии с формулой :

$$b_j = (\sum_1^N x_{j,i} * \bar{y}_i) / N$$

При определении коэффициента для взаимодействия факторов пользуются аналогичной формулой ,подставляя вместо $x_{j,i}$ значение соответственного взаимодействия:

$$b_{jl} = (\sum_1^N x_{ji} * x_{li} * \bar{y}_i) / N$$

Аппроксимационные задачи, например, $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2$ поленом второго порядка.

По полученному знаку определяем степень влияния фактора или взаимодействие факторов на целевую функцию. Для того, чтобы убедиться адекватности полученной модели экспериментальные результаты проверяют на статистическую однородность по каждому из опытов и по эксперименту в целом.

$$b_0 = \left(\sum_1^N \bar{y}_i \right) / N$$

$$r = (y_i^3 - \bar{y}_i) / \check{O} , r \leq t_{\text{табл.}}$$

Проверка статистической однородности всего эксперимента осуществляется путем сравнения дисперсий в опытах с критерием Фишера :

$$F = \frac{\hat{\sigma}_{i\max}^2}{\hat{\sigma}_{i\min}^2} \leq F_{\text{табл}}$$

Проверка адекватности полученной модели осуществляется путем сравнения дисперсии адекватности и воспроизведения

$$F = \frac{f_{\text{ад}}^2}{f_{\text{воспр}}^2} \leq F_{\text{табл}}$$

$$f_{\text{ад}}^2 = \frac{m \cdot (\sum_1^N y_i - \overline{y_i})^2}{f}$$

$f = N - k$ – число степеней свободы;

k – количество коэффициентов

Для линейной модели $k = k + 1$

$$f_{\text{воспр}}^2 = \frac{\sum_1^N (\sum_1^m y_i - \overline{y_i})^2}{N(m-1)}$$

m – число опытов

N – число независимых опытов

Зависимость коэффициентов модели оценивается с помощью доверительного интервала δ_{bi}

$$\delta_{bi} = \pm \delta_{bi} \cdot t$$

δ_{bi} – среднеквадратичное отклонение для коэффициентов модели

$$\delta_{bi} = \sqrt{\delta_{\text{воспр}}^2 / N}$$

Если алгебраическая величина коэффициентов модели меньше доверительного интервала, то соответствующим членом модели можно пренебречь = 0.

Заключение

С середины XX в. в самых различных областях человеческой деятельности стали широко применять математические методы и ЭВМ. Возникли новые дисциплины, изучающие математические модели соответствующих объектов и явлений, а также методы исследования этих моделей и т.д. Математическая модель – это приближенное описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. Основная цель моделирования – исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений. Моделирование – это еще и метод познания окружающего мира, дающий возможность управлять им.

Математическое моделирование и связанный с ним компьютерный эксперимент незаменимы в тех случаях, когда натурный эксперимент невозможен или затруднен по тем или иным причинам. Например, нельзя поставить натурный эксперимент в истории, чтобы проверить, «что было бы, если бы...» Невозможно проверить правильность той или иной космологической теории. Однако все это вполне можно сделать на компьютере, построив предварительно математические модели изучаемых явлений.

Данное учебное пособие знакомит с основными этапами математического моделирования:

1) Построение модели. На этом этапе задается некоторый «нематематический» объект – явление природы, конструкция, экономический план, производственный процесс и т. д. При этом, как правило, четкое описание ситуации затруднено. Сначала выявляются основные особенности явления и связи между ними на качественном уровне. Затем найденные качественные зависимости формулируются на языке математики, то есть строится математическая модель. Это самая трудная стадия моделирования.

2) Решение математической задачи, к которой приводит модель. На этом этапе большое внимание уделяется разработке алгоритмов и численных методов решения задачи на ЭВМ, при помощи которых результат может быть найден с необходимой точностью и за допустимое время.

3) Интерпретация полученных следствий из математической модели. Следствия, выведенные из модели на языке математики, интерпретируются на языке, принятом в данной области.

4) Проверка адекватности модели. На этом этапе выясняется, согласуются ли результаты эксперимента с теоретическими следствиями из модели в пределах определенной точности.

5) Модификация модели. На этом этапе происходит либо усложнение модели, чтобы она была более адекватной действительности, либо ее упрощение ради достижения практически приемлемого решения.

Список литературы

1. Баканов Г.Ф. Основы конструирования и технологии радиоэлектронных средств: учебное пособие для студ. высш. учеб. заведений/ Г.Ф. Баканов, С.С. Соколов, В.Ю. Суходольский; под ред. И.Г. Мироненко. – М.: Издательский центр «Академия», 2007.– 368 с.
2. Грошев В.Н. Технология и автоматизация радиоэлектронных систем: В.Н. Грошев, – Тамбов: Изд-во Тамб. Гос. Техн. ун-та, 1996.-156 с.
3. Дворецкий С.И. Компьютерное моделирование и оптимизация технологических процессов и оборудования: учебное пособие. / С.И. Дворецкий, А.Ф. Егоров, Д.С. Дворецкий. Тамбов: Изд-во Тамб гос. техн. ун-та, 2003. 224 с.
4. Килов А.С. Основы научных исследований/ А.С. Килов.– Оренбург.–2002. – http://window.edu.ru/window_catalog/files/2901/metod37.pdf
5. Лысенко К.В. Муромцев Ю.Л. Инженерный эксперимент и системный анализ при моделировании процессов химической технологии: учебное пособие. – М.: МИХМ, 1983.– 80 с.
6. Научно-исследовательская практика магистрантов: метод. рекомендации/ сост.: С.И. Дворецкий, Е.И. Муратова, А.А. Ермаков, С.В. Осина.– Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006.–48 с.
7. Нелинейная регрессия. Методы линеаризации.//<http://ekonometred.ru/otvety-na-ekzamenatsionnye-voprosy-po-kursu-ekonometrika/115-nelinejnaya-regressiya-metody-linearizacii.html>.
8. Нелинейная регрессия. <http://kurs.ido.tpu.ru/courses/econometrica/tema9.htm>.
9. Основы научных исследований/В.И. Крутов, И.М. Глушко, В.В. Попов. – М.: Высшая школа, 1989.–399 с.
10. Павловский В.В. Проектирование технологических процессов изготовления РЭА: пособие по курсовому проектированию/ В.В. Павловский В.И. Васильев, Т.Н. Гутман.– М.: Радио и связь, 1982. –160 с.
11. Самарский А. А., Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2001.320 с.
12. Селиванова З.М. Проектирование и технология электронных средств: учебное пособие/ З.М. Селиванова, Д.Ю. Муромцев, О.А. Белоусов. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012.–140с.
13. Селиванова З.М. Технология радиоэлектронных средств: учеб. Пособие/ З.М. Селиванова.– Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2010.–80с.
14. Технология и автоматизация производства радиоэлектронной аппаратуры: учебник для вузов/ И.П. Бушминский, О.Ш. Даутов, А.П. Достанко и др.: Под ред. А.П. Достанко. – М.: Радио и связь, 1989ю –624 с.
15. Технология ЭВА, оборудование и автоматизация: учебное пособие для студентов вузов – В.Г. Алексеев, В.Н. Гриднев, Ю.Н. Нестеров и др.–М.: Высш. школа, 1984.–392 с.
16. Худобин Л.В. Магистратура и магистерская диссертация по технологии машиностроения: учебное пособие/ Л.В. Худобин.– Ульяновск: УлГТУ, 2001.–89 с.