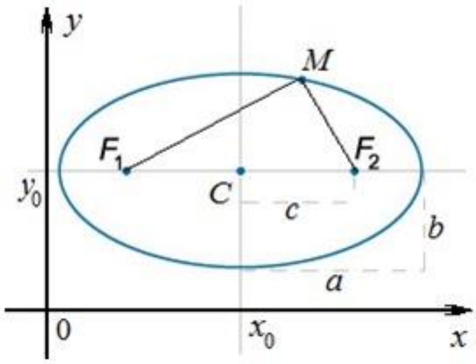
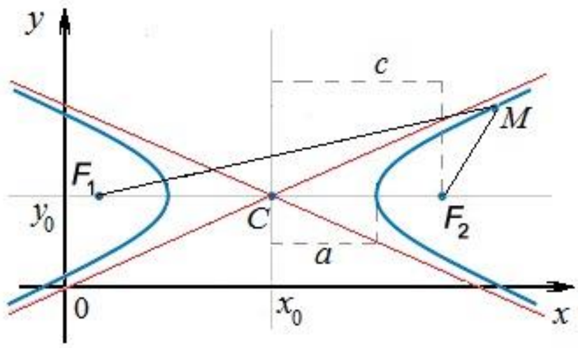
Т. В. ЖУКОВСКАЯ, Т. Ю. ЗАБАВНИКОВА, Д. Н. ПРОТАСОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЗАОЧНИКОВ

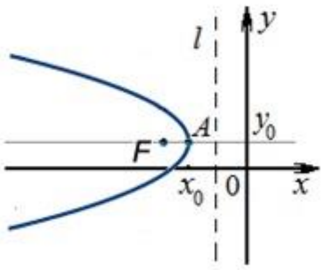
В ДВУХ ЧАСТЯХ

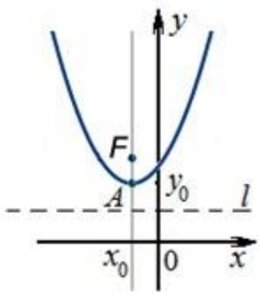
ЧАСТЬ 2

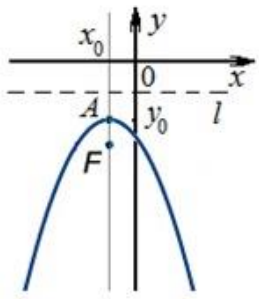




$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$







$$(y-y_0)^2=-2\rho(x-x_0) \qquad (x-x_0)^2=2\rho(y-y_0) \qquad (x-x_0)^2=-2\rho(y-y_0)$$

Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2026

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

**Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»**

Т. В. ЖУКОВСКАЯ, Т. Ю. ЗАБАВНИКОВА, Д. Н. ПРОТАСОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЗАОЧНИКОВ

В ДВУХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 2

Утверждено Ученым советом
ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный технический университет»
в качестве учебного пособия для студентов 1 курса заочного отделения
инженерных и экономических направлений высшего образования

Учебное электронное издание

Тамбов
Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
2026

УДК 51(075.8)
ББК 221я73
Ж86

Рецензенты:

Кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой функционального анализа
ФГБОУ ВО «ТГУ им. Г. Р. Державина»
Е. А. Панасенко

Доктор технических наук, профессор, профессор кафедры
«Механика и инженерная графика» ФГБОУ ВО «ТГТУ»
О. А. Абоносимов

Жуковская, Т. В.

Ж86 Высшая математика для заочников [Электронный ресурс] : учебное пособие : в 2 ч. / Т. В. Жуковская и др. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ».

ISBN 978-5-8265-2894-5

Ч. 1. – 2025. – Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, Д. Н. Протасов. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium IV ; RAM 512 Mb ; необходимое место на HDD 2,6 Mb ; Windows 7/8/10/11 ; дисковод CD-ROM ; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-8265-2895-2

Ч. 2. – 2026. – Т. В. Жуковская, Т. Ю. Забавникова, Д. Н. Протасов. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium IV ; RAM 512 Mb ; необходимое место на HDD 2,4 Mb ; Windows 7/8/10/11 ; дисковод CD-ROM ; мышь. – Загл. с экрана.

ISBN 978-5-8265-3017-7

Содержит теоретический материал, набор заданий и задания с решениями по дифференциальному исчислению функций одной и нескольких переменных, интегральному исчислению и обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Предназначено для студентов 1 курса заочного отделения инженерных и экономических направлений высшего образования.

УДК 51(075.8)
ББК 221я73

Все права на размножение и распространение в любой форме остаются за разработчиком.
Нелегальное копирование и использование данного продукта запрещено.

ISBN 978-5-8265-2894-5 (общ.)
ISBN 978-5-8265-3017-7 (ч. 2)

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВО «ТГТУ»), 2026

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие «Высшая математика для заочников. Часть 2» разработано для студентов первого курса заочного отделения инженерных и экономических направлений высших технических учебных заведений. Оно служит основным материалом для изучения дисциплины «Высшая математика» и написания итоговой контрольной работы за 2 семестр.

Изложенный в рукописи материал представляет собой краткий теоретический курс и подробное практическое руководство по дифференциальному исчислению функций одной и нескольких переменных, интегральному исчислению функций одной переменной, методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основное внимание в пособии уделено решению задач, подробному разбору и анализу решения, приведен образец оформления отчетных работ студентов заочной формы обучения.

Номер варианта выбирается по первой букве фамилии студента. Распределение букв русского алфавита по номерам вариантов представлено в следующей таблице

1 А	**2** Б	**3** В	**4** Г	**4** Д	**6** Е	**7** Е, Ы	**8** Ж	**9** З	**10** И, Й
11 К	**12** Л	**13** М	**14** Н	**15** О	**16** П	**17** Р	**18** С	**19** Т	**20** У
21 Ф	**22** Х	**23** Ц	**24** Ч	**25** Ш	**26** Щ	**27** Э	**28** Ю	**29** Я	**30**

В условиях заданий для большей персонализации введены параметры a и b. Значения параметров следует выбирать из этой же таблицы. Значение параметра a равно номеру первой буквы имени студента, значение параметра b – номеру второй буквы фамилии студента.

1. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Производные являются мощным средством исследования функций. Например, по знаку производной первого порядка можно установить возрастание или убывание функции, а по знаку производной второго порядка – направление выпуклости графика функции.

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ФОРМУЛЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

1.1.1. Исследование функции одной переменной с помощью производной первого порядка

В дальнейшем будем предполагать, что функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b). С помощью производной первого порядка можно выделить участки монотонности (возрастание и убывание) функции и найти точки экстремума.

Если производная $f'(x)$ положительная в каждой точке интервала (a,b), то функция возрастает на этом интервале; а если отрицательная, то функция убывает на этом интервале. На рисунке 1.1 изображен график некоторой функции $y = f(x)$. На интервалах (a,x_1) и (x_2,b) производная положительная, функция на этих участках является возрастающей. На интервале (x_1,x_2) производная отрицательная – функция на этом участке убывает.

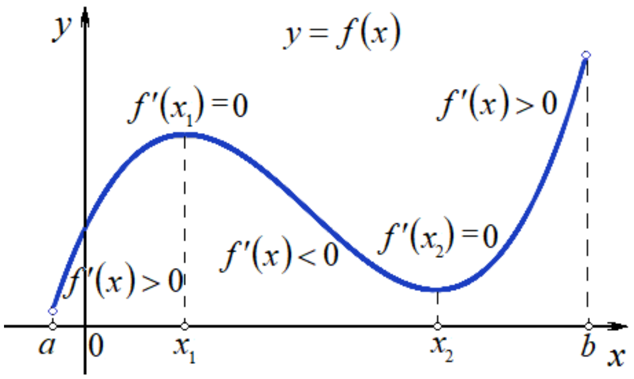


Рис. 1.1

На этом же рисунке видны две замечательные точки на оси Ox: x_1 – точка максимума (на участке слева от нее функция является возрастающей, а справа – убывающей) и x_2 – точка минимума (на участке слева от нее функция является убывающей, а справа – возрастающей). Эти точки называются также точками экстремума.

Необходимое условие экстремума: если $\bar{x}$ – точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(\bar{x})=0$. На рисунке 1.1 имеем $f'(x_1)=0$ и $f'(x_2)=0$. Но обратное, вообще говоря, неверно, т.е. из того, что $f'(\bar{x})=0$, еще не следует, что $\bar{x}$ – точка экстремума. Для того чтобы убедиться в том, что в точке $\bar{x}$ функция имеет экстремум, надо проверить *достаточное условие экстремума*: если производная $f'(x)$ при переходе через точку $\bar{x}$ меняет знак с «+» на «–», то $\bar{x}$ – точка максимума функции $f(x)$, а если с «–» на «+», то $\bar{x}$ – точка минимума. Иллюстрация этого факта приведена также на рис. 1.1.

1.1.2. Исследование функции одной переменной с помощью производной второго порядка

Производной второго порядка функции $f(x)$ называется производная производной первого порядка:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'.$$

Например, найдем производную второго порядка функции $y=x^6$:

$$y'=6x^5, \quad y''=\left(6x^5\right)'=5\cdot 6x^4=30x^4.$$

По знаку производной второго порядка можно определить такую характеристику формы графика функции, как направление выпуклости. График функции называется выпуклым вверх (или выпуклым) на интервале (a,b), если все точки графика лежат ниже любой его касательной на этом интервале. А если все точки графика лежат выше любой касательной на интервале (a,b), то график называ-

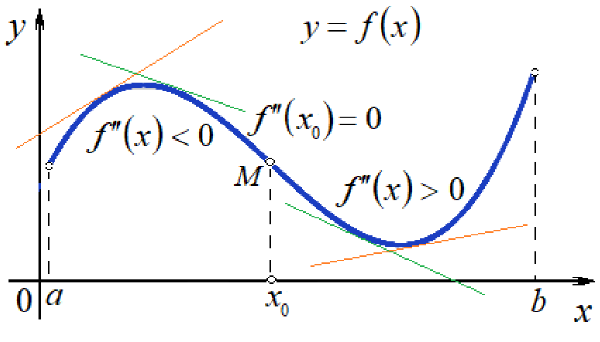


Рис. 1.2

ется выпуклым вниз (или вогнутым) на этом интервале. На рисунке 1.2 изображен график функции $y = f(x)$, который является выпуклым вверх на интервале (a, x_0) и выпуклым вниз – на интервале (x_0, b).

Установить направление выпуклости графика функции можно с помощью производной второго порядка $f''(x)$: если $f''(x)$ положительна во всех точках интервала (a,b), то график функции $y = f(x)$ является выпуклым вниз на этом интервале, а если $f''(x)$ отрицательная, то график функции выпуклый вверх на этом интервале. На рисунке 1.2. показана связь между формой графика функции $y = f(x)$ и знаком производной второго порядка $f''(x)$.

На рисунке 1.2 отмечена точка $M(x_0, f(x_0))$ на графике функции, слева и справа от которой график функции имеет разный характер выпуклости (в данном случае слева график выпуклый вверх, а справа – вниз). Такая точка называется точкой перегиба. *Необходимое условие перегиба*: Если функция $y = f(x)$ имеет производную второго порядка в точке x_0, и точка графика $M(x_0, f(x_0))$ функции является точкой перегиба, то $f''(x_0) = 0$ (см. рис. 1.2). Это условие не является достаточным для существования в точке x_0 перегиба, поэтому следует проверять еще *достаточное условие перегиба*: если функция $f(x)$ имеет производную второго порядка в некотором интервале, содержащем точку x_0, и $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0, то график функции $y = f(x)$ имеет перегиб в точке $(x_0, f(x_0))$.

1.1.3. Схема исследования функции и построения графика

Учитывая, что все функции заданий, приведенных ниже, являются многочленами, будем производить исследование функций по упрощенной схеме. Итак, все многочлены определены, непрерывны и сколь угодно раздифференцируемы на всей числовой оси, поэтому проводить исследование на эти качественные характеристики не имеет смысла. Кроме того, графики функций-многочленов не имеют асимптот и не являются периодическими (кроме константы). Остаются следующие этапы исследования.

1. Проверить функцию на *четность и нечетность*. Для многочлена это сделать просто: если все степени слагаемых четные, то функция-многочлен является четной, а если нечетные – нечетной. Если есть слагаемые как четных, так и нечетных степеней, тогда имеем функцию общего вида. В случае четной или нечетной функций достаточно исследовать поведение функции на полуоси $[0;+\infty)$, а затем результаты отразить зеркально относительно оси *Oy* для четной функции (абсциссы всех точек графика меняют знак на противоположный, а соответствующие ординаты сохраняются) и повернуть все точки на 180° относительно начала координат для нечетной функции (абсциссы и ординаты всех точек меняют знак на противоположный).

2. Найти *точки пересечения* графика функции *с осями координат*. Если кривая пересекает ось *Oy*, то абсцисса точки пересечения равна нулю: $x=0$, поэтому точка пересечения с осью ординат имеет координаты $(0, f(0))$. Координатную ось *Ox* график функции может пересекать в нескольких точках, в точках оси абсцисс координата y равна нулю, поэтому необходимо решить уравнение $f(x)=0$. Получаем алгебраическое уравнение третьей степени или выше, корни которого можно найти, например, разложив многочлен на множители. Если сделать это не удается, то можно найти для предложенных в заданиях многочленов один целый корень x_1 подбором по делителям свободного члена, а затем с помощью деления уголком многочлена на двучлен $x-x_1$ выделить второй множитель ([1], с. 30). Любой многочлен третьей степени имеет по крайней мере один действительный корень x_1, и его можно разложить на множители:

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x^2+px+q).$$

Аналогичные разложения в случае наличия действительного корня можно записать и для многочленов больших степеней.

3. Определить *интервалы знакопостоянства* функции. Отмечаем корни многочлена на действительной оси (оси *Ox*), тем самым разбиваем ось на промежутки, на каждом из которых функция сохраняет свой знак. Для

определения знака функции можно взять любую точку из промежутка и определить знак значения функции в этой точке.

4. Найти *интервалы монотонности* и *точки экстремума* функции. Находим производную функции, а затем точки, в которых производная равна нулю (стационарные точки). Стационарными точками разбиваем ось Ox на интервалы и на каждом интервале определяем знак производной. По знаку производной и достаточному условию монотонности делаем вывод о характере монотонности функции на данном интервале. На основании достаточного условия экстремума делаем вывод, является ли стационарная точка точкой экстремума, и какой экстремум имеет функция в этой точке. Находим значения функции в точках экстремума, тем самым получаем важные для построения точки графика на координатной плоскости.

5. Найти *участки выпуклости, вогнутости и точки перегиба* графика функции. Находим производную второго порядка функции, а затем точки, в которых производная второго порядка равна нулю (стационарные точки производной второго порядка). Ось Ox разбиваем этими стационарными точками на интервалы и на каждом интервале определяем знак производной второго порядка. На основании достаточного условия выпуклости делаем вывод о направлении выпуклости графика функции на каждом интервале. А на основании достаточного условия перегиба делаем вывод, имеет ли график функции в стационарной точке перегиб, и фиксируем координаты точки перегиба как еще одной замечательной точки.

6. Найти *дополнительные точки*, уточняющие поведение функции. Можно взять в качестве дополнительных точек такие, абсциссы которых не попали в промежуток, содержащий точки экстремума, точки пересечения с осями координат и абсциссы точек перегиба.

7. Построить *график функции*. Сначала на координатной плоскости отмечаем все замечательные точки: точки пересечения с осями координат, точки графика, в которых функция имеет экстремум, точки перегиба, дополнительные точки. Затем плавными линиями соединяем эти точки в соответствии с исследованием.

1.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1.1. Проведите исследование функции методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, постройте график функции. В первой и третьей колонках таблицы заданий 1.1 размещен номер варианта.

Таблица 1.1

1	$y=(x+3)^3(x-4)$	**2**	$y=(x-5)^5(x+2)$
3	$y=(x+1)^5(x+2)$	**4**	$y=(2x-3)^3(x-1)$
5	$y=(x+5)^4(x-1)$	**6**	$y=(x+2)^4(x-3)$
7	$y=(2x+3)^3(x-3)$	**8**	$y=(x+1)^3(x-5)$
9	$y=(2x-5)^3(x+5)$	**10**	$y=(2x+1)^4(x-1)$
11	$y=2x^3-9x^2+12x-5$	**12**	$y=x^3+x^2-x-1$
13	$y=2x^3+5x^2-4x-3$	**14**	$y=2x^3+11x^2+12x+3$
15	$y=x^3-4x^2-3x+6$	**16**	$y=x^3-5x^2-8x-2$
17	$y=x^3-6x^2+5$	**18**	$y=x^3+3x^2-4$
19	$y=3x^4-x^3-3x^2+1$	**20**	$y=x^4-2x^3+2x-1$
21	$y=x^4-4x^3+8x-5$	**22**	$y=2x^4-x^3-6x^2$
23	$y=3x^4-8x^3+6x^2$	**24**	$y=x^3+3x^2-9x+5$
25	$y=2x^3-7x^2+4x+4$	**26**	$y=3x^3+10x^2+4x-8$
27	$y=x^4-4x^3+4x^2$	**28**	$y=x^4-5x^3+6x^2+4x-8$
29	$y=4x^4-8x^2-5$	**30**	$y=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$

1.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ ВАРИАНТА № 30

Задание 1.1. Проведите исследование функции методами дифференциального исчисления и, используя результаты исследования, постройте график функции $y=x^4-2x^3-3x^2+4x+4$.

Решение.

1. Имеем функцию общего вида, так как в уравнении присутствуют как четные, так и нечетные степени переменной.

2. Точки пересечения с осями координат. Первая координата точки пересечения графика с осью Oy равна нулю: $x=0$. Вторая координата

$$y(0)=0-2\cdot 0-3\cdot 0+4\cdot 0+4=4.$$

Итак, первая замечательная точка: $A(0;4)$. Вторая координата точек пересечения графика с осью Ox равна нулю: $y=0$. Для того чтобы найти первые координаты точек пересечения, решим уравнение

$$x^4-2x^3-3x^2+4x+4=0. \qquad (1.1)$$

Один из корней уравнения найдем подбором по делителям свободного члена, равного четырем: 1, -1, 2, -2, 4, -4. Проверим число $x=1$:

$$y(1)=1-2-3+4+4=4\neq 0.$$

Следовательно, $x=1$ не является корнем. Проверим число $x=-1$:

$$y(-1)=1+2-3-4+4=0.$$

Итак, $x=-1$ – корень уравнения. Вторая замечательная точка: $B(-1;0)$. Для того чтобы найти остальные корни многочлена четвертой степени, разделим многочлен на двучлен $x+1$:

$$\begin{array}{r|l}
x^4-2x^3-3x^2+4x+4 & x+1 \\
\underline{-\;x^4+x^3\qquad\qquad\qquad} & \overline{x^3-3x^2+4} \\
-3x^3-3x^2\qquad\quad & \\
\underline{-\;-3x^3-3x^2\qquad\quad} & \\
4x+4 & \\
\underline{-\;4x+4} & \\
\end{array}$$

По результатам деления запишем разложение многочлена на множители:

$$x^4-2x^3-3x^2+4x+4=(x+1)\cdot\left(x^3-3x^2+4\right).$$

Корни второго сомножителя правой части равенства можно также найти подбором, а можно, преобразовав его, разложить на множители:

$$x^3-3x^2+4=x^3+x^2-4x^2+4=x^2(x+1)-4\left(x^2-1\right)=$$
$$=x^2(x+1)-4(x+1)\cdot(x-1)=(x+1)\cdot\left(x^2-4x+4\right)=(x+1)\cdot(x-2)^2.$$

Получили разложение на линейные множители кубического многочлена, которое позволяет найти его корни: $x=-1$ и $x=2$ (каждый множитель приравняли к нулю). Следовательно, уравнение (1.1) имеет два корня, а график функции пересекает осью Ox в точках $B(-1;0)$ и $C(2;0)$.

3. Интервалы знакопостоянства. На числовой оси Ox отмечаем точки $x=-1$ и $x=2$ (рис. 1.3), абсциссы точек пересечения графика с осью Ox, и выясняем знаки функции на каждом из трех полученных промежутков.

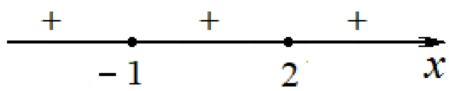


Рис. 1.3

$$y(-2)=16+16-12-8+4=16>0,\quad y(0)=4>0,\quad y(3)=16>0.$$

Если записать разложение функции на множители, полученное при поиске корней многочлена

$$x^4-2x^3-3x^2+4x+4=(x+1)^2(x-2)^2, \tag{1.2}$$

то также можно увидеть два неотрицательных множителя, что подтверждает неотрицательные значения функции во всех точках числовой оси.

4. Интервалы монотонности и точки экстремума. Сначала находим производную функции:

$$y'=4x^3-6x^2-6x+4.$$

После чего следует найти стационарные точки – нули производной. Для этого составляется уравнение

$$4x^3-6x^2-6x+4=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x^3-3x^2-3x+2=0,$$

корнями которого и являются стационарные точки. Можно так же, как в п. 2, найти один корень подбором (легко видеть, что подходит также $x=-1$), а затем выполнить деление уголком и найти остальные корни – корни квадратного трехчлена, который является частным при делении уголком.

Пойдем другим путем. Будем дифференцировать не исходное выражение, а разложение функции на множители (1.2):

$$y=(x+1)^2(x-2)^2.$$

Получим

$$y'=2(x+1)\cdot(x-2)^2+(x+1)^2\cdot 2(x-2)=2(x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-1).$$

В результате получено разложение на множители производной, благодаря которому нули производной, стационарные точки, можно легко найти: $x=-1$, $x=2$, $x=0{,}5$. На числовой оси Ox отмечаем эти точки, выясняем знаки производной на каждом из четырех промежутков и по достаточному условию монотонности делаем вывод о поведении функции (рис. 1.4).

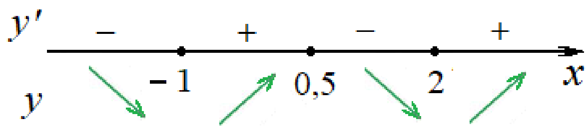


Рис. 1.4

$$y'(-2)=2\cdot(-1)\cdot(-4)\cdot(-5)<0,\quad y'(0)=4>0,\quad y'(1)<0,\quad y'(3)>0.$$

Итак, на интервалах $(-\infty;-1)$, $(0{,}5;2)$ функция убывает, а на интервалах $(-1;0{,}5)$ и $(2;+\infty)$ – возрастает. На основании достаточного условия экстремума делаем вывод: $x=-1$ – точка минимума, $x=0{,}5$ – точка максимума, $x=2$ – точка минимума. Найдем значения функции в точках экстремума:

$$y(-1)=0,\quad y(0{,}5)=1{,}5^4=5{,}0625\approx 5,\quad y(2)=0.$$

К замечательным точкам $B(-1;0)$ и $C(2;0)$ добавляется точка $D(0{,}5;5)$.

5. Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба. Алгоритм исследования графика функции на выпуклость похож на алгоритм исследования на монотонность, но здесь используется производная второго порядка. Найдем производную второго порядка:

$$y''=\left(4x^3-6x^2-6x+4\right)'=12x^2-12x-6.$$

Приравняем производную к нулю:

$$12x^2-12x-6=0\quad\Leftrightarrow\quad 2x^2-2x-1=0,$$

решим полученное квадратное уравнение:

$$D = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} = 0{,}5\left(1 \pm \sqrt{3}\right).$$

Стационарные точки производной второго порядка: $x_1 = 0{,}5\left(1 - \sqrt{3}\right)$ и $x_2 = 0{,}5\left(1 + \sqrt{3}\right)$. Полученные числа являются иррациональными, поэтому удобнее для изображения на координатной прямой и на координатной плоскости найти их приближенные значения:

$$x_1 = 0{,}5\left(1 - \sqrt{3}\right) \approx -0{,}4, \quad x_2 = 0{,}5\left(1 + \sqrt{3}\right) \approx 1{,}4.$$

Отмечаем эти точки на числовой оси (рис. 1.5) и по знаку производной второго порядка делаем вывод о характере выпуклости графика функции на каждом участке. Заметим, что знак производной второго порядка определить легко: графиком производной является парабола, ветви которой направлены вверх, поэтому знак функции между корнями – минус, а за корнями – плюс.

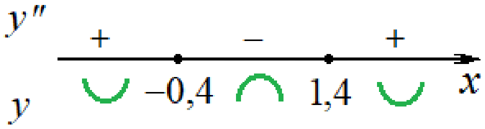


Рис. 1.5

График функции на промежутках $(-\infty; -0{,}4)$ и $(1{,}4; +\infty)$ является выпуклым вниз, а на промежутке $(-0{,}4; 1{,}4)$ – выпуклым вверх. На основании достаточного условия перегиба при $x = 0{,}5\left(1 - \sqrt{3}\right)$ и $x = 0{,}5\left(1 + \sqrt{3}\right)$ функция имеет перегиб. Найдем ординаты точек перегиба:

$$y\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-3-\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{9-3}{4}\right)^2 = 2{,}25 \approx 2{,}3,$$

$$y\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{9-3}{4}\right)^2 = 2{,}25 \approx 2{,}3.$$

Точками перегиба с приближенно найденными координатами являются $M(-0{,}4; 2{,}3)$, $N(1{,}4; 2{,}3)$ – еще две замечательные точки.

6. Дополнительные точки. Абсциссы замечательных точек расположены на отрезке $[-1; 2]$. В пункте 3 найдены значения функции за пределами этого отрезка:

$$y(-2)=16,\quad y(3)=16.$$

Получили дополнительные точки $P(-2;16)$ и $K(3;16)$.

7. График функции. На координатной плоскости отмечаем замечательные и дополнительные точки (рис. 1.6). Затем по возрастанию аргумента x с учетом проведенного исследования соединяем их плавной кривой. На участке PB функция убывает и график функции выпуклый вниз, на участке BM график функции остается выпуклым вниз, а функция возрастает. В точке перегиба M меняется характер выпуклости: на участке MAD график функции выпуклый вверх, функция продолжает возрастать. На участке DN функция убывает, график функции выпуклый вверх. После точки перегиба N график функции становится выпуклым вниз, а функция на участке NC продолжает убывать. От точки C к точке K функция возрастает, график функции остается выпуклым вниз (рис. 1.7). Эскиз графика функции выполнен, при $x<-1$ и $x>2$ ветви графика функции неограниченно уходят вверх.

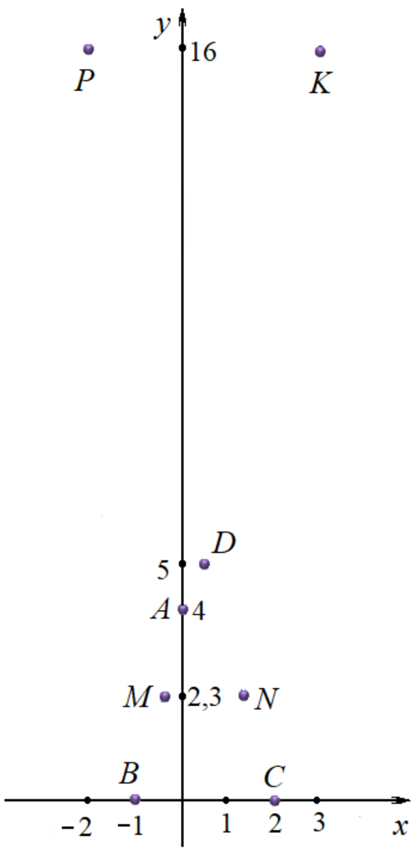


Рис. 1.6

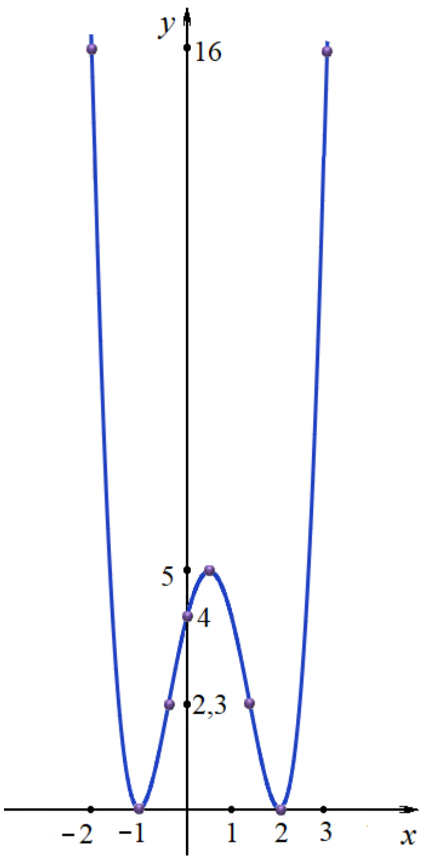


Рис. 1.7

2. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Расширяя понятие функциональной зависимости, рассмотрим понятие и свойства функций нескольких переменных на примере функции двух переменных $z = f(x, y)$, так как все важнейшие факты теории функций нескольких переменных наблюдаются на функции двух переменных. Свойства функции двух переменных не являются простым обобщением свойств функции одной переменной, тем не менее техника дифференцирования и методы дифференциального исчисления опираются на соответствующие методы функции одной переменной.

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ФОРМУЛЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Областью определения функции $z = f(x, y)$ является множество $D(f)$ на координатной плоскости *Oxy*, каждая точка $M_0(x_0, y_0)$ которого имеет две координаты. Если функция задана формулой, то переменные x и y должны принимать такие значения, при которых формула имеет смысл. Значение функции в точке будем обозначать $z(M_0) = f(x_0, y_0)$, значением функции в точке является число. Например, область определения функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ удовлетворяет условию $D(f)$: $x^2 + y^2 \geq 4$. Точка $M_0(1;-2)$ принадлежит области определения, значение функции $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ в этой точке равно $z(M_0) = \sqrt{1^2 + (-2)^2 - 4} = 1$.

2.1.1. Частные производные, производная по направлению, градиент

Для функции двух переменных нет понятия производной, но есть понятие *производной по некоторому направлению*, в частности, понятия *частных производных*: производной по переменной x (по направлению оси *Ox*) и производной по переменной y (по направлению оси *Oy*). Если ищем про-

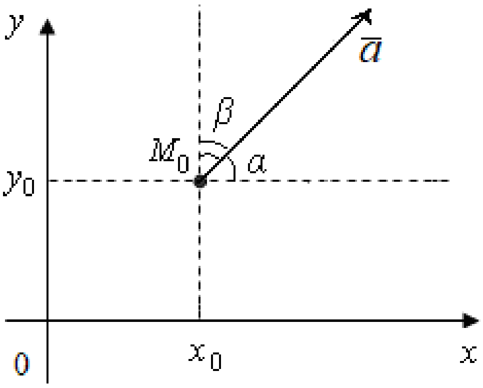


Рис. 2.1

изводную по направлению оси Ox, то координата y на горизонтальном направлении не меняется, $y = y_0 = \text{const}$ (рис. 2.1), поэтому функция $z = f(x, y)$ становится функцией одной переменой x, и производная оказывается обычной производной функции одной переменной x. Частная производная по переменной x обозначается $z'_x = f'_x(x, y)$ или $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$. Аналогично при нахождении частной производной по переменной y полагаем переменную x константой и находим обычную производную функции одной переменной y. Обозначение: $z'_y = f'_y(x, y)$ или $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

Пример 2.1. Найдем частные производные функции $z = x^3 + \operatorname{arctg}\left(x y^2\right)$. Для того чтобы найти частную производную по переменной x, полагаем $y = \text{const}$ и дифференцируем функцию одной переменной x. Имеем сумму двух выражений, зависящих от x, второе слагаемое – сложная функция, в которой множитель y^2 является коэффициентом. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + \frac{1}{1 + \left(xy^2\right)^2} \cdot y^2 = 3x^2 + \frac{y^2}{1 + x^2 y^4}.$$

Далее полагаем $x = \text{const}$ и находим производную по переменной y, т.е. частную производную по y. Первое слагаемое функции является константой, поэтому его производная равна нулю. Второе слагаемое зависит от y и является сложной функцией, а переменная x – коэффициент перед y^2. Поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(x y^2\right)^2} \cdot x \cdot 2\,y = \frac{2xy}{1 + x^2 y^4}. \ ▼$$

Для того чтобы найти значения частных производных функции двух переменных в точке, сначала находят частные производные функции, а затем подставляют вместо переменных x и y соответствующие координаты точки.

Например, значения частных производных функции примера 2.1 в точке $M_0(3;-1)$ равны:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 3 \cdot 3^2 + \frac{(-1)^2}{1+3^2(-1)^4} = 27{,}1; \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = \frac{2 \cdot 3 \cdot (-1)}{1+3^2(-1)^4} = -0{,}6 .$$

В общем случае можно найти производную функции $z = f(x, y)$ по любому направлению на координатной плоскости *Оху*, которое задается, например, в виде вектора $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} = \{a_x ; a_y\}$ (см. рис. 2.1). Такая производная называется *производной по направлению* и вычисляется в некоторой точке M_0 области определения функции по формуле

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \bar{a}} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} \cos\beta . \quad (2.1)$$

Здесь косинусы $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ являются направляющими косинусами вектора $\bar{a}$, т.е. косинусами углов, которые образует вектор $\bar{a}$ с координатными осями (см. рис. 2.1) соответственно *Ох* и *Оу*, их можно найти по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} . \quad (2.2)$$

Физический смысл производной по направлению – скорость, с которой функция изменяется в данном направлении. Передвигаясь по координатной плоскости *Оху* от точки к точке значения функции, вообще говоря, меняются. Если, находясь в точке M_0, планируем двигаться дальше в направлении вектора $\bar{a}$, то производная функции $z = f(x, y)$ в точке M_0 по направлению вектора $\bar{a}$ будет равна скорости изменения функции в данном направлении. При этом, если скорость положительная, то функция в данном направлении возрастает, а если отрицательная – убывает.

Направление, в котором функция $z = f(x, y)$ возрастает быстрее всего, указывает вектор, называемый *градиентом* функции. Координатами градиента функции в точке $M_0(x_0 , y_0)$ являются частные производные функции в этой точке, т.е.

$$\overline{\operatorname{grad}}\, z(M_0) = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} \cdot \bar{i} + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} \cdot \bar{j} = \{f'_x(x_0, y_0);\ f'_y(x_0, y_0)\}. \quad (2.3)$$

Модуль градиента равен скорости изменения функции в данном направлении, следовательно, наибольшей скорости изменения функции. Интересно, что скорость изменения функции в других направлениях, т.е. производная функции по направлению, равна проекции градиента на это направление. Проекция градиента на направление градиента совпадает с его длиной, этим объясняется, почему скорость изменения функции является наибольшей в направлении градиента.

2.1.2. Экстремумы функции двух переменных

Частные производные $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ называются частными производными первого порядка функции $z = f(x,y)$. Они также являются функциями двух переменных (пример 2.1), которые в свою очередь могут иметь частные производные. Такие производные называются частными производными второго порядка, определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y).$$

Итак, производных второго порядка у функции двух переменных четыре. Частные производная, взятые по различным переменным, f''_{yx}, f''_{xy}, называется *смешанными частными производными*.

Пример 2.2. Найдем все частные производные второго порядка для функции $z = 2xy^2 + x^2 - 4y^3$. Сначала находим две частные производные первого порядка: частную производную по переменной x и частную производную по переменной y:

$$z'_x = 2y^2 + 2x, \quad z'_y = 4xy - 12y^2.$$

Имеем две функции двух переменных, для каждой из них найдем по две частные производные. Получим производные от производных первого порядка, т.е. производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(2y^2 + 2x\right)'_x = 2, \quad z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(2y^2 + 2x\right)'_y = 4y,$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(4xy - 12y^2\right)'_x = 4y, \quad z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(4xy - 12y^2\right)'_y = 4x - 24y.$$

Оказалось, что $z''_{yx} = z''_{xy}$. Этот результат не случаен. ▼

***Теорема* 2.1.** Если частные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$ являются непрерывными, тогда смешанные производные равны между собой: $z''_{yx} = z''_{xy}$.

С помощью производных первого и второго порядка можно исследовать функцию двух переменных $z = f(x, y)$ на экстремум. Как выглядит график функции в точках экстремума, и какие точки на координатной плоскости Oxy являются точками экстремума? Графиком функции двух переменных является поверхность. Например, графиком функции $z = x^2 + y^2$ является параболоид вращения, изображенный на рис. 2.2. Параболоид вращения является также графиком другой функции $z = 4x + 6y - x^2 - y^2 - 6$ (рис. 2.3). У параболоида, изображенного на рис. 2.2, точка $O(0,0)$ координатной плоскости Oxy является *точкой минимума*, у графика функции в этой точке «дно ямки», значение функции в точке минимума

$$z(O) = 0^2 + 0^2 = 0$$

называется *минимальным значением функции*. Для параболоида $z = 4x + 6y - x^2 - y^2 - 6$ точка $A(2,3)$ является точкой максимума, у графика функции в этой точке «вершина горы», значение функции в точке максимума называется *максимальным значением* и в данном случае равно

$$z(A) = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 - 2^2 - 3^2 - 6 = 7.$$

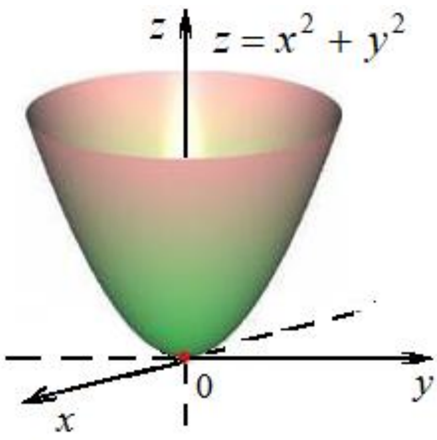


Рис. 2.2

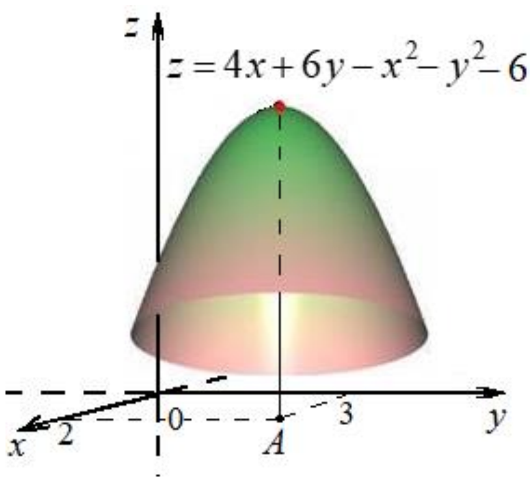


Рис. 2.3

Точки максимума и точки минимума называются *точками экстремума*, а значения функции в точках экстремума – экстремальными значениями. Функция может иметь несколько точек экстремума. Если у функции есть точки экстремума, то говорят, что она имеет экстремум, под которым подразумевают как точку экстремума, так и экстремальное значение функции.

Для того чтобы найти точки экстремума, не обязательно строить график функции – задача построения графика очень сложная. Если функция задана аналитически, т.е. формулой (уравнением), найти точки экстремума можно с помощью частных производных первого и второго порядков.

Теорема (***необходимое условие экстремума***) **2.2.** Если в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум и имеет частные производные, то частные производные в этой точке равны нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \; f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Точка $M_0(x_0, y_0)$, в которой обращаются в нуль обе частные производные функции $z = f(x, y)$, называется *стационарной точкой*. Как следует из теоремы, если функция, у которой существуют частные производные, имеет экстремум, то он может быть только в стационарной точке. Но в стационарных точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Поэтому каждую стационарную точку функции подвергнуть дополнительному исследованию. Для этого используют определитель, составленный из производных второго порядка, называемый гессианом:

$$\Delta(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{yx}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}, \tag{2.4}$$

который вычисляется в стационарной точке $M_0(x_0\,, y_0)$. Тогда:

1) если $\Delta(x_0, y_0) > 0$, то функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0\,, y_0)$ имеет экстремум: максимум, если $f''_{xx}(x_0\,, y_0) < 0$; минимум, если $f''_{xx}(x_0\,, y_0) < 0$;

2) если $\Delta(x_0, y_0) < 0$, то функция $f(x, y)$ в точке $M_0(x_0\,, y_0)$ не имеет экстремума;

3) если $\Delta(x_0, y_0) = 0$, то требуются дополнительные исследования, так как возможна любая ситуация.

Замечание. Поскольку смешанные производные второго порядка функции $z = f(x, y)$ одинаковые, то для составления определителя $\Delta(x_0, y_0)$ достаточно найти одну из них, т.е. три производные второго порядка.

Схема исследования функции на экстремум

Исследование функции двух переменных $z = f(x, y)$ на экстремум включает следующие этапы.

1. Область определения функции. В заданиях контрольной работы, приведенных в табл. 2.5, присутствуют квадратные корни, поэтому нужно потребовать, чтобы подкоренные выражения были неотрицательные.

2. Находим частные производные функции $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ и составляем систему уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) = 0, \end{cases}$$

согласно необходимому условию экстремума.

3. Решаем систему. Ее решениями являются точки с двумя координатами – стационарные точки. Выбираем те, которые входят в область определения функции.

4. Для того чтобы исследовать поведение функции в стационарных точках, находим производные второго порядка и для каждой стационарной точки составляем определитель и вычисляем его. В соответствии со знаком

определителя делаем вывод, является ли стационарная точка точкой экстремума. Если данная точка $M_0(x_0\,,y_0)$ является точкой экстремума, то по знаку производной второго порядка $f''_{xx}(x_0\,,y_0)$ делаем вывод о характере точки экстремума – точка максимума или точка минимума.

5. Вычисляем значения функции в точках экстремума – экстремальные значения функции.

2.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

В первой и третьей колонках таблиц размещен номер варианта.

Задание 2.1. Найдите частные производные первого порядка функции.

Таблица 2.1

1	$z=x^3y+\cos y$	**2**	$z=\sin(xy)-\ln(xy)$
3	$z=\left(x^4+y^4\right)\cdot \operatorname{arctg}5x$	**4**	$z=e^{x^2}-3xy$
5	$z=\ln\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)+5x$	**6**	$z=\dfrac{e^{xy}-3xy}{x+y}$
7	$z=\ln\left(x^3+y^2\right)$	**8**	$z=\sqrt{y}-y^2-x+3y$
9	$z=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$	**10**	$z=x\cos\left(x+y^2\right)$
11	$z=(x+3y)\cdot e^x$	**12**	$z=x^2+6y-\sqrt{xy}$
13	$z=\arcsin\left(xy^2\right)$	**14**	$z=\ln\sin(xy)$
15	$z=e^{x^2y}$	**16**	$z=\dfrac{x-\cos y}{xy}$
17	$z=xy\left(x^2-3y-5\right)$	**18**	$z=x\sqrt{y+2x}-4x-6y$
19	$z=y^4+\dfrac{x}{y}$	**20**	$z=\ln\dfrac{x+1}{y}$
21	$z=xy^2+x^4-y^5$	**22**	$z=(x-4)^2-xy$
23	$z=x^2+8x^4y-\ln\left(y^2+1\right)$	**24**	$z=\sqrt{y}-xy^3+x^4$
25	$z=x\left(y^2+x-4\right)$	**26**	$z=x\operatorname{arctg}\left(y^2\right)+6xy$
27	$z=\left(x^4+y^4\right)\cdot\ln x$	**28**	$z=\ln\left(x^2+xy^2\right)$
29	$z=\dfrac{e^y}{x^2+y}$	**30**	$z=\dfrac{xy}{x+y}$

Задание 2.2. Найдите $\overline{\operatorname{grad}}\, z(M_0)$ – градиент функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$.

Таблица 2.2

1	$z = (x+y)e^{xy}$, $M_0(1;0)$	**2**	$z = x^y + 8x^3 - y$, $M_0(1;2)$
3	$z = xy^2 + 4xy^4$, $M_0(2;0)$	**4**	$z = y\sqrt{x+3y}$, $M_0(3;2)$
5	$z = \ln\left(\sqrt{x+y} + xy\right)$, $M_0(3;1)$	**6**	$z = \arcsin(xy) \cdot e^x - y^2$, $M_0(1;1)$
7	$z = \sqrt{\sin 2x - \cos y}$, $M_0\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$	**8**	$z = \sqrt{\sin x + \cos y}$, $M_0\left(\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
9	$z = x^3y^2 - 2\cos x$, $M_0(0;0)$	**10**	$z = 8x + 9xy^4$, $M_0(-11;1)$
11	$z = 5xy^3 - x^y$, $M_0(1;-1)$	**12**	$z = \sqrt{x+y^2} - 7xy^3$, $M_0(3;-1)$
13	$z = y^2 + 3y^3x$, $M_0(1;-3)$	**14**	$z = x\ln\left(x+y^2\right)$, $M_0(1;1)$
15	$z = 3x^2 + \cos\left(x^2y\right)$, $M_0\left(-1; \frac{\pi}{2}\right)$	**16**	$z = x^2y + \cos(xy)$, $M_0\left(\frac{1}{2}; \pi\right)$
17	$z = xy^2 + 4x^3y^4$, $M_0(2;0)$	**18**	$z = \ln\left(xy^2 + 9y^4\right)$, $M_0(-3;1)$
19	$z = 5xy + \sqrt{\cos(2x+y)}$, $M_0(1;-2)$	**20**	$z = \cos y^3 + y^2x$, $M_0(2;0)$
21	$z = xy^2 + 4x^3y^4$, $M_0(2;1)$	**22**	$z = \operatorname{arctg}\left(xy^2\right)$, $M_0(1;-1)$
23	$z = x^4 + 3x^2y$, $M_0(1;-1)$	**24**	$z = x^2 + 6xy - \sqrt{2x+y}$, $M_0(1;-1)$
25	$z = \sqrt{x^2 - y}$, $M_0(2;-1)$	**26**	$z = x^2y^3 - 2xy + x$, $M_0(3;-1)$

27	$z = x^2 y + \mathrm{arctg}(2x - y)$, $M_0(1;1)$	**28**	$z = x^3 + 3y - \sqrt{2x + 3y}$, $M_0(-1;6)$
29	$z = (x^3 + y) \cdot e^x$, $M_0(0;2)$	**30**	$z = \ln\left(x^2 + \sqrt{x - y^2}\right)$, $M_0(5;-1)$

Задание 2.3. Найдите $\dfrac{\partial z(M_0)}{\partial \bar{a}}$ – производную функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$ по направлению вектора $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j}$.

Таблица 2.3

1	$z = xy(1 - x - y)$, $M_0(1;3)$, $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$	**2**	$z = 3x^2 - 2xy - 2y^2$, $M_0(-2;3)$, $\bar{a} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$
3	$z = x^4 - 7x^2 y - y^5$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = \bar{j}$	**4**	$z = x^2 - 4xy + y^2$, $M_0(-2;1)$, $\bar{a} = 6\bar{i} + 8\bar{j}$
5	$z = x^2 - 2y^2$, $M_0(-1;5)$, $\bar{a} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$	**6**	$z = 8x^2 - 3xy^3$, $M_0(-3;0)$, $\bar{a} = 15\bar{i} + 8\bar{j}$
7	$z = (x^2 - y)y$, $M_0(6;1)$, $\bar{a} = -2\bar{j}$	**8**	$z = x^y + x^2 y^2$, $M_0(e;2)$, $\bar{a} = 3\bar{i}$
9	$z = 6 - y^3 - 2xy^2$, $M_0(4;5)$, $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}$	**10**	$z = \ln(xy - y^2)$, $M_0(3;1)$, $\bar{a} = 12\bar{i} + 5\bar{j}$
11	$z = x^4 - 4xy^3$, $M_0(-1;-2)$, $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$	**12**	$z = \cos(xy) + 2y^2$, $M_0(\pi/2;-1)$, $\bar{a} = -8\bar{i} + 6\bar{j}$
13	$z = \ln(x^2 - 2xy) - y^2$, $M_0(-1;2)$, $\bar{a} = 2\bar{i} - 2\sqrt{3}\bar{j}$	**14**	$z = \sqrt{x^3 - y}$, $M_0(2;-1)$, $\bar{a} = 8\bar{i} - 15\bar{j}$
15	$z = e^{x+2y}$, $M_0(2;-1)$, $\bar{a} = 7\bar{i} + 24\bar{j}$	**16**	$z = 4x^3 - xy + y^3$, $M_0(-1;4)$, $\bar{a} = 5\bar{j}$
17	$z = 2x^2 - 2xy^2$, $M_0(7;-5)$, $\bar{a} = 5\bar{i} + 12\bar{j}$	**18**	$z = \ln(2x^2 + y^2)$, $M_0(-1;0)$, $\bar{a} = \bar{i} + \sqrt{3}\bar{j}$
19	$z = \sqrt{xy + 6}$, $M_0(10;3)$, $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$	**20**	$z = (x^3 + y) \cdot e^{x-1}$, $M_0(1;-3)$, $\bar{a} = 24\bar{i} - 7\bar{j}$
21	$z = x^2 + 7xy + 3y^4$, $M_0(-1;2)$, $\bar{a} = 3\bar{i} + 4\bar{j}$	**22**	$z = \mathrm{arctg}(xy) - y^3$, $M_0(1;1)$, $\bar{a} = \bar{i} + 7\bar{j}$

23	$z = x^3 + 6y - \sqrt{3x - y}$, $M_0(2;2)$, $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$	**24**	$z = 3x^2 - 2xy - 2y^2$, $M_0(-2;3)$, $\bar{a} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$
25	$z = x^4 - 9xy - y^2$, $M_0(-3;11)$, $\bar{a} = 2\sqrt{2}\bar{i} + \bar{j}$	**26**	$z = 4x^3 + x^2 y - 6y^3$, $M_0(2;-1)$, $\bar{a} = 13\bar{j}$
27	$z = \left(x^2 - xy\right)^2$, $M_0(1;0)$, $\bar{a} = 8\bar{i} + 15\bar{j}$	**28**	$z = 3x^2 - 2xy - 2y^2$, $M_0(-2;3)$, $\bar{a} = 20\bar{i} + 15\bar{j}$
29	$z = \ln\left(15y - 2xy^2\right)$, $M_0(2;2)$, $\bar{a} = 9\bar{i} - 12\bar{j}$	**30**	$z = 6x^2 - xy + 3y^3$, $M_0(-2;0)$, $\bar{a} = 24\bar{i} - 10\bar{j}$

Задание 2.4. Найдите частные производные второго порядка функции.

Таблица 2.4

1	$z = e^{xy}$	**2**	$z = \ln\left(x - y^2\right)$
3	$z = \sin y - \sin^2 x$	**4**	$z = x^6 - 7xy^3 + 4y^5$
5	$z = \sqrt{x^2 - y}$	**6**	$z = 9x^2 y^2 + \cos y^2$
7	$z = x^5 - 4x^3 y^2 + y^4$	**8**	$z = xy - \sqrt{x + 5y}$
9	$z = \ln\left(x^2 - 6xy\right)$	**10**	$z = x\sin(x + y)$
11	$z = \sin y - xy^3$	**12**	$z = x^3 - 6x^2 y^2 + \sin y$
13	$z = \operatorname{arctg}(3xy) - 3xy$	**14**	$z = \ln\left(x^2 - y\right)$
15	$z = e^{\frac{x}{y}}$	**16**	$z = e^{\frac{1}{y}} - e^x$
17	$z = \ln\dfrac{1}{x + 3y}$	**18**	$z = \ln\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right)$
19	$z = x^3 - 3xy^2 + y^3$	**20**	$z = \arcsin(2xy)$
21	$z = xy\left(x^2 - 2 + y^2\right)$	**22**	$z = x^3 y^2 - e^{xy}$
23	$z = x\ln(2x + 3y)$	**24**	$z = \sqrt{x^2 + y^2}$
25	$z = \sin(x + y) - 7y$	**26**	$z = x^y - x^4 y^5 + 6xy$
27	$z = x\left(x^3 - 2xy + y\right)$	**28**	$z = \sin^2 x + \sin y^2$
29	$z = x\sqrt{x + y^2}$	**30**	$z = x^3 - 4x^2 + xy^3$

Задание 2.5. Найдите экстремумы функции.

Таблица 2.5

1	$z = x\sqrt{y} - y^2 + 6y$	**2**	$z = x\sqrt{y-1} - y^2 + 5x - 3y$
3	$z = x^3 + y^3 - 3xy$	**4**	$z = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$
5	$z = xy(1 + x^2 + y^2)$	**6**	$z = x^2 - y^2 - xy + 9x + 6y$
7	$z = e^{x-y}(x^2 + 2y^2)$	**8**	$z = x^2y^2(1 - x - y)$
9	$z = y^3 - 4x^3 - 8xy$	**10**	$z = 9x^3 + 9y^3 - xy$
11	$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$	**12**	$z = x^2 + y^2 - 4x + 3y$
13	$z = (x-1)^2 - 2y^2$	**14**	$z = 4x^2 - x\sqrt{y} - 7y - x + 1$
15	$z = x^3y^2(6 - x - y)$	**16**	$z = 3x^2 - 3y^2 - 2x + 2y$
17	$z = x^2 - y^2 - x + 6y$	**18**	$z = x^3 + y^3 - 5xy - 20$
19	$z = x^3 - y^2 - x + y$	**20**	$z = 4x^2 + 5y^2 - xy + 2y + 7x$
21	$z = x^2 - y^3 - x + 8y$	**22**	$z = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x + 8$
23	$z = x^2 - y^2 - 2xy - x - y$	**24**	$z = 8x^2 - 8y^2 - 4x + 3y$
25	$z = x^3 - 6y^3 + 2xy$	**26**	$z = x^2 + 6x\sqrt{y} - 4y - 3x + 3$
27	$z = 8x^3 - y^3 - 12xy$	**28**	$z = x^2 - 3y^2 - 4xy - 2x + y$
29	$z = (x-1)^2 + 2y^2 + y$	**30**	$z = xy(1 - x - y)$

2.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ВАРИАНТА № 30

Задание 2.1. Найдите частные производные первого порядка функции

$$z = \frac{xy}{x+y}.$$

Решение. Найдем производную функции по переменной x, тогда переменная y воспринимается как число, и имеем функцию одной переменной x, которая является дробью: переменная x есть и в числителе, и в знаменателе. Поэтому дифференцируем по формуле производной частного, предварительно вынеся в числителе число y как коэффициент:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot \left(\frac{x}{x+y}\right)'_x = y\frac{x'(x+y) - x\cdot(x+y)'_x}{(x+y)^2} = y\frac{x+y-x}{(x+y)^2} = \frac{y^2}{(x+y)^2}.$$

Аналогично находим производную по переменной y, полагая переменную x числом. Но можно также заметить, что переменные x и y входят формулу, задающую функцию z, симметрично (если переставить местами x и y, то формула не изменится), и просто выписать частную производную по переменной y, переставив местами x и y в частной производной по переменной x:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{(x+y)^2}.$$

Задание 2.2. Найдите градиент функции $z = \ln\left(x^2 + \sqrt{x - y^2}\right)$ в точке $M_0(5;-1)$.

Решение. Градиент функции – это вектор, координатами которого являются частные производные функции в данной точке – формула (2.3). Найдем частную производную по переменной x (y – число) как производную сложной функции: внешняя функция – логарифм, внутренняя – сумма квадрата переменной и корня квадратного:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x - y^2}} \cdot \left(x^2 + \sqrt{x - y^2}\right)'_x = \frac{2x + 1/2\sqrt{x - y^2}}{x^2 + \sqrt{x - y^2}} = \frac{4x\sqrt{x - y^2} + 1}{2\left(x^2\sqrt{x - y^2} + x - y^2\right)}.$$

Аналогично найдем частную производную по переменной y (x – число):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + \sqrt{x - y^2}} \cdot \left(x^2 + \sqrt{x - y^2}\right)'_y = \frac{-2y/2\sqrt{x - y^2}}{x^2 + \sqrt{x - y^2}} = \frac{-y}{x^2\sqrt{x - y^2} + x - y^2}.$$

Затем вычислим значения частных производных в точке $M_0(5;-1)$, подставляя вместо x и y соответствующие значения аргументов:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = \frac{4 \cdot 5 \cdot \sqrt{5 - (-1)^2} + 1}{2\left(5^2 \cdot \sqrt{5 - (-1)^2} + 5 - (-1)^2\right)} = \frac{40 + 1}{2 \cdot (50 + 4)} = \frac{41}{108},$$

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = \frac{1}{5^2 \cdot \sqrt{5 - (-1)^2} + 5 - (-1)^2} = \frac{1}{54}.$$

Составим вектор-градиент:

$$\overline{\mathrm{grad}}\, z(M_0) = \left\{\frac{41}{108}; \frac{1}{54}\right\}.$$

Задание 2.3. Найдите производную функции $z = 6x^2 - xy + 3y^3$ в точке $M_0(-2;0)$ по направлению вектора $\bar{a} = 24\bar{i} - 10\bar{j}$.

Решение. Производная по направлению в точке – это число, которое вычисляется по формуле (2.1). В формуле присутствуют частные производные функции в точке и направляющие косинусы вектора, создающего направление. Функция $z = 6x^2 - xy + 3y^3$ является многочленом, его частные производные найти легко:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 9y.$$

Затем находим значения производных в точке $M_0(-2;0)$:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial x} = 12 \cdot (-2) - 0 = -24, \quad \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} = -(-2) + 9 \cdot 0 = 2.$$

Направляющие косинусы вектора $\bar{a} = 24\bar{i} - 10\bar{j}$ найдем по формуле (2.2), здесь $a_x = 24$, $a_y = -10$:

$$\cos\alpha = \frac{24}{\sqrt{24^2 + (-10)^2}} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}, \quad \cos\beta = \frac{-10}{26} = -\frac{5}{13}.$$

Подставляем все найденные значения в формулу (2.1), получаем:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \bar{a}} = -24 \cdot \frac{12}{13} + 2 \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{2}{13}(144 + 5) = -\frac{298}{13}.$$

Производная функции $z = 6x^2 - xy + 3y^3$ в точке $M_0(-2;0)$ по направлению вектора $\bar{a} = 24\bar{i} - 10\bar{j}$ является отрицательной, следовательно, функция в этом направлении при движении от точки M_0 убывает.

Задание 2.4. Найдите частные производные второго порядка функции $z = x^3 - 4x^2 + xy^3$.

Решение. Прежде чем искать частные производные второго порядка, надо найти частные производные первого порядка. Дифференцируем многочлен по каждой переменной:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 8x + y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3xy^2.$$

Получили две функции двух переменных, находим частные производные каждой из них – это и будут частные производные второго порядка исходной функции. Дифференцируем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2-8x+y^3\right)=6x-8,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2-8x+y^3\right)=3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(3xy^2\right)=6xy,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(3xy^2\right)=3y^2.$$

Как и ожидалось, смешанные производные равны:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3y^2.$$

Задание 2.5. Найдите экстремумы функции $z=xy\left(1-x-y\right)$.

Решение. Решим задачу поэтапно, как описано в теоретической части главы 2 – в параграфе 2.1.

1. Областью определения функции $z=xy\left(1-x-y\right)$ является вся координатная плоскость *Oxy*.

2. Для того чтобы определить все точки возможного экстремума, стационарные точки функции, найдем частные производные. Поскольку производную суммы находить проще, чем производную произведения, предварительно преобразуем уравнение, задающее функцию, раскрыв скобки:

$$z=xy\left(1-x-y\right)=xy-x^2y-xy^2.$$

Находим частные производные:

$$z'_x=y-2xy-y^2,\quad z'_y=x-x^2-2xy.$$

Приравнивая обе частные производные к нулю, получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y-2xy-y^2=0, \\ x-x^2-2xy=0. \end{cases}$$

3. Решаем систему. Вынесем в уравнениях общие множители за скобки:

$$\begin{cases} y\left(1-2x-y\right)=0, \\ x\left(1-x-2y\right)=0. \end{cases}$$

Произведение равно нулю, если хотя бы один сомножитель равен нулю. Поэтому система эквивалентна совокупности четырех систем, которую можно записать в виде

$$\begin{cases} y=0, \\ x=0 \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} y=0, \\ 1-x-2y=0, \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} 1-2x-y=0, \\ x=0, \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} 1-2x-y=0, \\ 1-x-2y=0. \end{cases}$$

Решения всех четырех систем легко найти. Решение первой системы: $x=0$, $y=0$; второй системы: $x=1$, $y=0$; третьей системы: $x=0$, $y=1$; четвертой системы: $x=1/3$, $y=1/3$. Таким образом, получили координаты четырех стационарных точек:

$$M_1(0;0),\ M_2(1;0),\ M_3(0;1),\ M_4\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right).$$

Все эти точки принадлежат области определения функции.

4. Исследуем каждую стационарную точку $M_0(x_0;y_0)$ на экстремум с помощью определителя второго порядка $\Delta(M_0)$ – гессиана, который составляется из частных производных второго порядка. Найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx}=-2y, \quad z''_{xy}=z''_{yx}=1-2x-2y, \quad z''_{yy}=-2x.$$

Сформируем гессиан:

$$\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2y & 1-2x-2y \\ 1-2x-2 & -2x \end{vmatrix}.$$

Найдем значение и знак определителя в каждой стационарной точке, подставляя соответствующие координаты точки. Если стационарная точка является точкой экстремума, то по знаку z''_{xx} делаем вывод о характере экстремума. Для точки $M_1(0;0)$ имеем:

$$\Delta(M_1)=\begin{vmatrix} -2\cdot 0 & 1-2\cdot 0-2\cdot 0 \\ 1-2\cdot 0-2\cdot 0 & -2\cdot 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-1<0,$$

следовательно, точка $M_1(0;0)$ не является точкой экстремума. Для точки $M_2(1;0)$ имеем:

$$\Delta(M_2)=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-1<0.$$

Точка $M_2(1;0)$ тоже не является точкой экстремума. Проверим значение гессиана в точке $M_3(0;1)$:

$$\Delta(M_3)=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-1<0,$$

точка $M_3(0;1)$ не является точкой экстремума. В точке $M_4\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ имеем:

$$\Delta(M_4)=\begin{vmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{vmatrix}=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}>0.$$

Точка M_4 является точкой экстремума. А поскольку $z''_{xx}(M_4)=-2/3<0$, то точка M_4 – точка максимума. Функция $z=xy(1-x-y)$ имеет только одну точку экстремума:

$$M_4\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) \text{ – точка максимума.}$$

5. Вычислим максимальное значение функции $z=xy(1-x-y)$ – значение функции в точке M_4:

$$z_{\max}=z(M_4)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}.$$

Ответы: **2.1.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x^2}{(x+y)^2}$; **2.2.** $\overline{\text{grad}}\, z(M_0)=\left\{\frac{41}{108};\frac{1}{54}\right\}$;

2.3. $\frac{\partial z(M_0)}{\partial \bar{a}}=-\frac{298}{13}$; **2.4.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-8$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6xy$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3y^2$;

2.5. $M_4\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ – точка максимума, $z_{\max}=\frac{1}{27}$.

3. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Если в дифференциальном исчислении решается задача нахождения производной данной функции, то в интегральном исчислении решается обратная задача – восстановление функции по заданной производной. Интегралы, в первую очередь определенные, являются одним из ключевых инструментов, используемых для решения большого количества профессиональных и научных задач. В этой главе изучается неопределенный интеграл и делается упор на технику интегрирования – выполнение преобразований с подынтегральной функцией и со всем подынтегральным выражением, позволяющих находить первообразную подынтегральной функции.

В современном мире при использовании онлайн-калькуляторов, предоставляющих возможность без знаний техники интегрирования и без умственных напряжений находить первообразную, появляется мысль, что не нужно изучать технику интегрирования, так как это легко может сделать машина. Но невозможно понять суть процесса, не разбираясь в том, как он происходит, поэтому будет сложно этой машине корректно поставить задачу при решении профессиональных задач и проверить результаты работы. Методы и приемы интегрирования помогают также понять технику аналитических преобразований и в других областях математики, физики и различных технических дисциплин, т.е. выходят за пределы использования интегралов. Изучение методов интегрирования развивает способность анализировать подходы к решению проблем, выбирать оптимальный подход. Кроме того, выполнение пусть даже рутинных, но сложных преобразований – это хорошая умственная тренировка.

3.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ФОРМУЛЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x)=f(x)$. Так, первообразными функции $f(x)=3x^2$ на всей числовой оси являются функции, $F_1(x)=x^4$, $F_2(x)=x^4+11$, $F_3(x)=x^4-2$ и так далее. Таких первообразных одной функции бесконечно много, все они отличаются друг от друга на константу. Множество всех первообразных функции $f(x)$ называют *неопределенным интегралом* и обозначают

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, а C – произвольная постоянная. Операция нахождения неопределенного интеграла от функции $f(x)$ называется *интегрированием* функции $f(x)$. Если функция $f(x)$ непрерывна на на некотором промежутке, то она на нем интегрируема. Выражение dx под знаком интеграла является дифференциалом переменной x. Дифференциалом функции $u(x)$ называется

$$du = u'(x)dx. \tag{3.1}$$

Свойства неопределенного интеграла.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$.

3. $\int f'(x)dx = f(x)+C$.

4. $\int df(x) = f(x)+C$.

5. (*Линейность*) Пусть $a=\mathrm{const}, b=\mathrm{const}$, тогда

$$\int (af(x)+bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

6. (*Инвариантность формул интегрирования*) Пусть $u=\varphi(x)$ – любая функция, имеющая непрерывную производную, тогда

$$\int f(x)dx = F(x)+C \quad \Rightarrow \quad \int f(u)du = F(u)+C.$$

Наряду со свойствами интегралов при интегрировании функций пользуются табл. 3.1 основных интегралов, формулы которой получаются обращением соответствующих формул таблицы производных вследствие того, что интегрирование является действием, обратным дифференцированию. Таблица дополнена также несколькими формулами часто встречающихся интегралов.

3.1. Таблица основных интегралов

1	$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\ \ \alpha\neq-1$	**10**	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$
2	$\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$	**11**	$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left\lvert\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\rvert+C$
3	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	**12**	$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left\lvert\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert+C$
4	$\int e^x dx=e^x+C$	**13**	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
5	$\int\sin xdx=-\cos x+C$	**14**	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
6	$\int\cos xdx=\sin x+C$	**15**	$\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C$
7	$\int\operatorname{tg}xdx=-\ln\lvert\cos x\rvert+C$	**16**	$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C$
8	$\int\operatorname{ctg}xdx=\ln\lvert\sin x\rvert+C$	**17**	$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$
9	$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$	**18**	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a}\right\rvert+C$

В отличие от дифференцирования, которое сводится к применению правил дифференцирования (производные арифметических операций, сложной функции и другие), интегрирование представляет собой творческую задачу, для решения которой надо подобрать метод и суметь его реализовать, зачастую суметь выбрать более рациональный метод с меньшим количеством преобразований. Рассмотрим приемы и методы интегрирования функций.

3.1.1. Простейшие приемы интегрирования

Простейшие приемы интегрирования можно классифицировать следующим образом: непосредственное интегрирование, разложение подынтегральной функции, подведение под знак дифференциала.

Непосредственное интегрирование – нахождение неопределенных интегралов непосредственно по табл. 3.1 с использованием свойства линейности и следующего утверждения:

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad \Rightarrow \quad \int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C, \qquad (3.2)$$

где k и b – постоянные. Это утверждение легко проверяется дифференцированием обеих частей равенства в следствии.

Пример 3.1. Найдем интеграл

$$\int\left(4\cos 2x - 3x^2 + \frac{1}{4x-3}\right)dx.$$

Подынтегральная функция есть сумма трех функций с коэффициентами, поэтому можно применить свойство линейности:

$$\int\left(4\cos 2x - 3x^2 + \frac{1}{4x-3}\right)dx = 4\int\cos 2x dx - 3\int x^2 dx + \int\frac{dx}{4x-3}.$$

Первый интеграл в правой части равенства возьмем с использованием формулы № 6 табл. 3.1, с учетом утверждения (3.2):

$$\int\cos x dx = \sin x + C \quad \Rightarrow \quad \int\cos 2x dx = \frac{1}{2}\sin 2x + C,$$

здесь $k = 2,\ b = 0$. Второй интеграл берется непосредственно по формуле № 1 табл. 3.1 при $\alpha = 2$:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Для того чтобы взять третий интеграл, используем формулу № 2 табл. 3.1 и утверждение (3.2):

$$\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dx}{4x-3} = \frac{1}{4}\ln|4x-3| + C.$$

Складывая три интеграла с соответствующими коэффициентами, получаем

$$\int\left(4\cos 2x - 3x^2 + \frac{1}{4x-3}\right)dx = 4\int\cos 2x dx - 3\int x^2 dx + \int\frac{dx}{4x-3} =$$

$$= 4\cdot\frac{1}{2}\sin 2x - 3\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}\ln|4x-3| + C = 2\sin 2x - x^3 + \frac{1}{4}\ln|4x-3| + C. \ \blacktriangledown$$

При интегрировании многих функций, прежде чем использовать утверждение (3.2), требуются дополнительные преобразования для получения интеграла вида

$$\int f(kx+b)dx,$$

приводящего к табличному. В таких случаях используются формулы сокращенного умножения или тригонометрические формулы. Например, формула квадрата суммы (разности)

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

позволяет свернуть правую часть равенства, называемую полным квадратом, в квадрат суммы (разности). Но для этого предварительно необходимо выделить полный квадрат в заданном квадратном трехчлене.

Пример 3.2. Найдем интеграл

$$\int \frac{3dx}{2x^2+6x+7}.$$

Преобразуем знаменатель: вынесем коэффициент перед x^2 за скобку и в скобках выделим полный квадрат:

$$2x^2+6x+7 = 2\left(x^2+3x+3{,}5\right) = 2\left(x^2+2\cdot 1{,}5x+(1{,}5)^2+1{,}25\right).$$

Второе слагаемое $3x$ в скобках представили как удвоенное произведение x $(a = x)$ на $1{,}5$: $3x = 2\cdot 1{,}5x$ $(2ab)$, тем самым выясняли, что $b = 1{,}5$. Теперь до полного квадрата не хватило третьего члена – $b^2 = (1{,}5)^2 = 2{,}25$, который затем выделили из третьего слагаемого выражения в скобках: $3{,}5 = 2{,}25 + 1{,}25$. По формуле квадрата суммы имеем

$$x^2+2\cdot 1{,}5x+(1{,}5)^2 = (x+1{,}5)^2.$$

Таким образом, знаменатель принимает вид

$$2x^2+6x+7 = 2\left((x+1{,}5)^2+1{,}25\right).$$

Подставим результат преобразований в исходный интеграл и вынесем постоянный множитель за знак интеграла:

$$\int \frac{3dx}{2x^2+6x+7} = \int \frac{3dx}{2\left((x+1{,}5)^2+1{,}25\right)} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{(x+1{,}5)^2+1{,}25}.$$

Далее используем табличный интеграл № 16 и утверждение (3.2), предварительно преобразовав десятичную запись числа 1,25 в неправильную обыкновенную дробь (в таком виде легче извлекать квадратный корень), $1{,}25 = 5/4$:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5/4} = \int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{5}/2\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{5}/2} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{5}/2} + C \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{(x+1{,}5)^2 + 1{,}25} = \frac{1}{\sqrt{5}/2} \operatorname{arctg} \frac{x+1{,}5}{\sqrt{5}/2} + C = \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2(x+(3/2))}{\sqrt{5}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{5}} + C.$$

Тогда исходный интеграл равен

$$\int \frac{3dx}{2x^2 + 6x + 7} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{5}} + C = \frac{3}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x+3}{\sqrt{5}} + C. \ \blacktriangledown$$

Разложение подынтегральной функции – прием интегрирования, при котором подынтегральная функция путем тождественных алгебраических или тригонометрических преобразований представляется в виде суммы функций, которые интегрируются непосредственно.

Рассмотрим примеры с тригонометрическими и алгебраическими преобразованиями.

Пример 3.3. Найдем интеграл $\int \operatorname{tg}^2 x dx$. Имеем интеграл от тригонометрической функции. Распишем тангенс как отношение синуса к косинусу и воспользуемся основным тригонометрическим тождеством:

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx.$$

Разделим почленно числитель на знаменатель – получим разность двух табличных функций:

$$\int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

Использованы табличные интегралы № 9 и 1, во втором случае $\alpha = 0$. ▼

Пример 3.4. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$. В знаменателе дроби квадратный трехчлен. Этот интеграл можно взять, выделив полный квадрат в знаменателе, и проинтегрировать функцию непосредственно (прием непосредственного интегрирования). Второй подход к интегрированию – использовать разложение подынтегральной функции на сумму табличных функций (прием разложения подынтегральной функции). Воспользуемся вторым подходом. Из алгебры известно, что квадратный трехчлен с неотрицательным дискриминантом разлагается на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена. Составим уравнение, приравняв к нулю знаменатель подынтегральной функции, и решим его:

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

$$D = 16 - 12 = 4, \quad x_1 = \frac{4-2}{2} = 1, \quad x_1 = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Разложим знаменатель на множители:

$$x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3).$$

Рассмотри функцию

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)}.$$

Преобразуем дробь так, чтобы разность множителей знаменателя была равна числителю. Разность множителей знаменателя (из большего вычитаем меньшее) равна

$$(x-1) - (x-3) = x - 1 - x + 3 = 2,$$

а в числителе стоит число 1. Поэтому умножаем числитель и знаменатель дроби на 2:

$$\frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{(x-1)(x-3)}.$$

Далее заменяем число 2 разностью множителей знаменателя и почленно делим числитель на знаменатель:

$$\frac{1}{x^2-4x+3}=\frac{1}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)-(x-3)}{(x-1)(x-3)}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-1}{(x-1)(x-3)}-\frac{x-3}{(x-1)(x-3)}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right).$$

Разложили дробь на сумму (разность) табличных дробей (формула № 2). Возьмем интеграл, используя свойство линейности и утверждение (3.2):

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+3}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C==\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C.$$

Утверждение (3.2) применили для интегрирования обеих дробей. Например,

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dx}{x-3}=\ln|x-3|+C. \ ▼$$

Подведение под знак дифференциала. По определению дифференциала (3.1) функцию $u(x)$ можно выносить из-под знака дифференциала: $du(x)=u'(x)dx$ – функция $u(x)$ дифференцируется. Но можно также и подводить функцию под знак дифференциала, если она является производной некоторой функции: $g'(x)dx=dg(x)$, при этом функция $g'(x)$ интегрируется. Например,

$$\sin xdx=d(-\cos x)=-d\cos x, \quad 6x^2dx=d\left(2x^3\right).$$

В первом примере знак минус вынесен за знак дифференциала по свойствам производных. В результате подведения под знак дифференциала функция $g(x)$ становится переменной интегрирования, и на основании свойства 6 неопределенного интеграла, инвариантности формул интегрирования, интеграл берется непосредственно.

Пример 3.5. Найдем интеграл $\int\sin x\cos^5 x\,dx$. Для этого подведем $\sin x$ под знак дифференциала так, как показано выше:

$$\int\sin x\cos^5 x\,dx=\int\cos^5 x\,d(-\cos x)=-\int\cos^5 x\,d\cos x.$$

Функция $\cos x$ стала новой переменной интегрирования. Тогда на основании свойства инвариантности формул интегрирования (формула № 1 табл. 3.1)

$$\int x^5dx=\frac{x^6}{6}+C \quad\Rightarrow\quad \int(\mathbf{cosx})^5d(\mathbf{cosx})=\frac{(\mathbf{cosx})^6}{6}+C=\frac{\cos^6 x}{6}+C. \ ▼$$

Пример 3.6. Найдем интеграл $\int \frac{x-5}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx$. Имеем рациональную дробь. Идея интегрирования такой дроби основана на формуле, которая получена подведением функции под знак дифференциала:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)}}d(\varphi(x)) = \int (\varphi(x))^{-\frac{1}{2}}d(\varphi(x)) = 2\sqrt{\varphi(x)} + C. \qquad (3.3)$$

Для того чтобы эту формулу можно было использовать, в числителе дроби должна быть производная знаменателя. Производная знаменателя равна

$$\left(x^2+2x+10\right)' = 2x+2.$$

Преобразуем числитель так, чтобы переменная x вошла в эту производную, а оставшееся слагаемое было константой:

$$x-5 = \frac{1}{2}(2x-10) = \frac{1}{2}(2x+2-12) = \frac{1}{2}(2x+2)-6.$$

Подставим преобразованный числитель в подынтегральную функцию и разобьем дробь на сумму дробей, числитель одной из которых равен производной знаменателя:

$$\int \frac{x-5}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx = \int \frac{0,5(2x+2)-6}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx = \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+10}} - \frac{6}{\sqrt{x^2+2x+10}}\right)dx.$$

По свойству линейности имеем разность интегралов, первый из которых возьмем по формуле (3.3):

$$\int \frac{x-5}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx - 6\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2+2x+10\right)}{\sqrt{x^2+2x+10}} - 6\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}} = 2\sqrt{x^2+2x+10} - 6\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}.$$

В подкоренном выражении второго интеграла выделим полный квадрат и возьмем интеграл по формуле № 18 табл. 3.1, применив утверждение (3.2):

$$x^2+2x+10 = x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2+9 = (x+1)^2+9;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right| + C \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+9}} = \ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+9}\right| + C.$$

Окончательно получаем

$$\int \frac{x-5}{\sqrt{x^2+2x+10}}dx = 2\sqrt{x^2+2x+10} - 6\ln\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2+9}\right| + C. \blacktriangledown$$

3.1.2. Основные методы интегрирования

Два основных метода: метод замены переменной и интегрирование по частям – являются соответственно аналогами правил дифференцирования сложной функции и дифференцирования произведения.

Метод замены переменной. Этот метод является обобщением приема интегрирования подведением под знак дифференциала. В общем случае интеграл $\int f(x)dx$ удается упростить, если вместо x ввести новую переменную интегрирования t, сделав подстановку $x = \varphi(t)$. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (3.4)$$

Формула (3.4) называется *формулой замены переменной* в неопределенном интеграле. В результате интегрирования по формуле (3.4) получаем функцию переменной t. Для возвращения к переменной x необходимо t выразить через x из соотношения $x = \varphi(t)$. Функцию $\varphi(t)$ надо подбирать так, чтобы подынтегральная функция в правой части формулы (3.4) была как можно проще. Это творческий процесс, разумный выбор подстановки для каждого интеграла свой, и достигается он тренировкой. Однако для некоторых типов функций существуют рекомендации по выбору подстановок. Кроме того, при замене переменной в неопределенном интеграле иногда более удобно задавать не x как функцию от t, а, наоборот: t как функцию от x.

Пример 3.7. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt[4]{2x+3}}$. Подынтегральная функция является иррациональной. Надо выбрать такую подстановку, которая позволит избавиться от иррациональности. Если положить $2x+3=t^4$, тогда $\sqrt{2x+3}=t^2$, $\sqrt[4]{2x+3}=t$, и вместо дробных степеней появятся целые степени переменной. Остается изменить дифференциал. Для этого найдем дифференциал левой и правой частей равенства $2x+3=t^4$ и выразим dx:

$$2x+3=t^4 \quad \Rightarrow \quad d(2x+3)=d\left(t^4\right) \quad \Rightarrow \quad 2dx=4t^3dt \quad \Rightarrow \quad dx=2t^3dt\,.$$

Оформим решение в виде цепочки преобразований с указанием замены:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt[4]{2x+3}}=\left|\begin{matrix} 2x+3=t^4 \\ dx=2t^3dt \end{matrix}\right|=\int\frac{2t^3dt}{t^2+t}=2\int\frac{t^3dt}{t(t+1)}=2\int\frac{t^2dt}{t+1}\,.$$

Получили интеграл от рациональной функции, иррациональность пропала. Этот интеграл возьмем приемом разложения подынтегральной функции на сумму табличных функций. Выделим в неправильной рациональной дроби целую часть. Для этого в числителе вычтем и прибавим 1, распишем разность квадратов и разделим почленно числитель на знаменатель:

$$2\int\frac{t^2dt}{t+1}=2\int\frac{t^2-1+1}{t+1}dt=2\int\frac{(t-1)(t+1)+1}{t+1}dt=2\int\left(\frac{(t-1)(t+1)}{t+1}+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=2\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=t^2-2t+2\ln|\,t+1|+C\,.$$

Осталось вернуться к переменной x: подставим вместо t и t^2 соответствующие выражения $\sqrt[4]{2x+3}=t$, $\sqrt{2x+3}=t^2$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}+\sqrt[4]{2x+3}}=\sqrt{2x+3}-2\sqrt[4]{2x+3}+2\ln\left(\sqrt[4]{2x+3}+1\right)+C\,. \blacktriangledown$$

Метод интегрирования по частям. Пусть $u=u(x)$, $v=v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные, и подынтегральную функцию можно рассматривать как произведение двух функций $u(x)\cdot v'(x)$, тогда можно применить формулу интегрирования по частям

$$\int u\,dv=u\,v-\int v\,du\,. \tag{3.5}$$

Здесь $dv=v'(x)dx$. Эта формула дает возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный. При интегрировании по частям важно знать, какой множитель в подынтегральной функции следует принять за функцию $u(x)$, при неудачном выборе функции $u(x)$ применение формулы (3.5) может привести к более сложному интегралу. Рассмотрим два типа функций, интегрируемых по частям.

1. Функции вида $P_n(x)\cdot\sin(ax+b), P_n(x)\cdot\cos(ax+b)$, где $P_n(x)$ – многочлен, a и b – числа. За функцию $u(x)$ принимается многочлен $u=P_n(x)$.

Пример 3.8. Найдем интеграл $\int x\sin x\,dx$. Здесь многочлен имеет вид $P_n(x)=x$. Полагаем $u=x$, тогда $dv=\sin xdx$, $du=dx$. Функция v – это одна из первообразных функции $\sin x$, т.е. можно записать

$$dv=\sin xdx \quad\Rightarrow\quad v=\int\sin xdx=-\cos x+C.$$

Поскольку нужна одна из первообразных, полагаем $v=-\cos x$. Применяем формулу интегрирования по частям:

$$\int x\sin x\,dx=\left|\begin{matrix} u=x,\ dv=\sin x\,dx, \\ du=dx,\ \ v=-\cos x\end{matrix}\right|=x\cdot(-\cos x)-\int(-\cos x)dx=$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C.\ \blacktriangledown$$

В примере 3.8 применение формулы (3.5) привело к замене сложного интеграла $\int x\sin x\,dx$ простым табличным $\int\cos x\,dx$.

2. Функции вида $P_n(x)\ln(ax+b)$. Здесь следует положить $u=\ln(ax+b)$.

Пример 3.9. Найдем интеграл $\int(2x+5)\ln(x+1)dx$. В подынтегральной функции многочлен имеет вид $P_n(x)=2x+5$. Полагаем $u=\ln(x+1)$, тогда $dv=(2x+5)dx$. Найдем дифференциал du и все возможные функции v:

$$du=\frac{dx}{x+1},\quad dv=(2x+5)dx \quad\Rightarrow\quad v=\int(2x+5)dx=x^2+5x+C.$$

Полагаем $v=x^2+5x$ и применяем формулу (3.5):

$$\int(2x+5)\ln(x+1)dx=\left|\begin{matrix} u=\ln(x+1),\ dv=(2x+5)dx \\ du=\dfrac{dx}{x+1},\ v=x^2+5x\end{matrix}\right|=\left(x^2+5x\right)\ln(x+1)-$$

$$-\int\left(x^2+5x\right)\frac{dx}{x+1}=\left(x^2+5x\right)\ln(x+1)-\int\frac{x^2+5x}{x+1}dx.$$

В результате применения формулы интегрирования по частям получили интеграл от рациональной дроби. Трансцендентная функция $\ln(x+1)$ пропала из-под знака интеграла, так как ее продифференцировали, а производная этой функции – рациональная функция $1/(x+1)$.

Рациональная дробь под знаком интеграла является неправильной. Сначала в этой дроби выделим целую часть, например делением «уголком», а затем представим дробь в виде суммы целой части и правильной дроби:

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^2+5x \\ x^2+x \end{array} & \begin{array}{l} x+1 \\ \hline x+4 \end{array} \\
\cline{1-1}
-\begin{array}{r} 4x \\ \underline{4x+4} \\ -4 \end{array} &
\end{array}
\quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+5x}{x+1}=x+4-\frac{4}{x+1}.
$$

Разделили многочлен x^2+5x на двучлен $x+1$, получили частное $x+4$ и остаток -4. Число -4 является остатком, так как это многочлен нулевой степени, а делитель $x+1$ – многочлен первой степени, и степень остатка должна быть меньше степени делителя. Полученная сумма функций интегрируется непосредственно:

$$\int\frac{x^2+5x}{x+1}dx=\int\left(x+4-\frac{4}{x+1}\right)dx=\frac{x^2}{2}+4x-4\ln|x+1|+C.$$

Суммируя все преобразования, окончательно получаем

$$\int(2x+5)\ln(x+1)dx=\left(x^2+5x\right)\ln(x+1)-\int\frac{x^2+5x}{x+1}dx=\left(x^2+5x\right)\ln(x+1)-$$

$$-\int\left(x+4-\frac{4}{x+1}\right)dx=\left(x^2+5x\right)\ln(x+1)-\frac{x^2}{2}-4x+4\ln|x+1|+C. \ ▼$$

Интегрирование функций требует индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции. Однако есть классы функций, интегралы от которых находятся с помощью определенной последовательности действий. К таким классам относятся, например, рациональные функции (рациональные дроби), тригонометрические функции, иррациональные функции.

3.1.3. Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией называется функция вида

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно. Многочленом называется сумма целых неотрицательных степеней переменной x с коэффициентами, степень многочлена – наибольшая степень переменной x. Так, многочлен $Q_n(x)$ имеет вид

$$Q_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – числа.

Если $m < n$, то рациональная дробь называется *правильной*, в противном случае, т.е. при $m \geq n$, рациональная дробь является *неправильной*. Если дробь неправильная, то числитель $P_m(x)$ делят «уголком» на знаменатель $Q_n(x)$ и получают сумму многочлена и правильной рациональной дроби. В примере 3.9 рациональная функция $(x^2 + 5x)/(x+1)$ является неправильной рациональной дробью, так как степень числителя, равная 2, больше степени знаменателя, равной 1. После деления уголком дробь представлена в виде

$\dfrac{x^2 + 5x}{x+1} = x + 4 - \dfrac{4}{x+1}$ – многочлен плюс правильная рациональная дробь.

Интегрирование многочленов выполняется непосредственно. Правильные рациональные дроби интегрируются приемом разложения на простейшие дроби. Рассмотрим некоторые типы простейших дробей и методику разложения правильной рациональной дроби на простейшие рациональные дроби.

Выделяют четыре типа простейших рациональных дробей.

(I) $\dfrac{A}{x-a}$,

(II) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ – соответственно дроби первого и второго типа. Здесь $k \geq 2$ – натуральное число, a и A – действительные числа. У дроби третьего типа в знаменателе многочлен второй степени, который не имеет действительных корней. Общий вид простейшей дроби третьего типа

(III) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, где M, N, p и q – действительные числа, $p^2-4q<0$ (дискриминант квадратного трехчлена в знаменателе меньше нуля). Общий вид дроби четвертого типа

(IV) $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$, где $k\geq 2$ – натуральное число, M, N, p и q – действительные числа и $p^2-4q<0$.

Найдем интегралы от простейших дробей первых двух типов:

(I) $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a|+C$;

(II) $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int(x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k}+C$.

Интеграл от простейшей рациональной дроби третьего типа рассмотрим на примере.

Пример 3.10. Найдем интеграл

$$\int\frac{3x-7}{5x^2+4x+11}dx.$$

Подынтегральная функция – простейшая рациональная дробь третьего типа. Для ее интегрирования используем прием подведения под знак дифференциала в виде формулы

$$\int\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx=\int\frac{1}{\varphi(x)}d(\varphi(x))=\ln|\varphi(x)|+C. \qquad (3.6)$$

Для того чтобы применить эту формулу, необходимо в числителе выделить производную знаменателя:

$$\left(5x^2+4x+11\right)'=10x+4.$$

Выполним преобразования с подынтегральной функцией такие же, как в примере 3.6: вынесем коэффициент 3 из числителя за знак дроби, умножим и разделим дробь на 10, прибавим и отнимем в числителе 4. Затем почленно разделим числитель на знаменатель, представив дробь в виде суммы двух простейших дробей, в числителе первой из которых расположим производную знаменателя:

$$\frac{3x-7}{5x^2+4x+11}=3\cdot\frac{x-(7/3)}{5x^2+4x+11}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10x-(70/3)}{5x^2+4x+11}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10x+4-4-(70/3)}{5x^2+4x+11}=$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{(10x+4)-(82/3)}{5x^2+4x+11}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10x+4}{5x^2+4x+11}-\frac{8{,}2}{5x^2+4x+11}.$$

В результате получили сумму двух простейших дробей третьего типа, которые легко интегрируются. Интеграл от первой дроби возьмем по формуле (3.6), от второй – выделением в знаменателе полного квадрата и применением непосредственного интегрирования с использованием формулы № 16 табл. 3.1. Итак, по свойству линейности

$$\int\frac{3x-7}{5x^2+4x+11}dx=\frac{3}{10}\int\frac{10x+4}{5x^2+4x+11}dx-8{,}2\int\frac{dx}{5x^2+4x+11}. \qquad (3.7)$$

Применим формулу (3.6) для первого слагаемого:

$$\int\frac{10x+4}{5x^2+4x+11}dx=\int\frac{d\left(5x^2+4x+11\right)}{5x^2+4x+11}=\ln\left|5x^2+4x+11\right|+C.$$

Преобразуем знаменатель второго слагаемого:

$$5x^2+4x+11=5\cdot\left(x^2+\frac{4}{5}x+\frac{11}{5}\right)=5\cdot\left(x^2+2\cdot\frac{2}{5}x+\frac{4}{25}-\frac{4}{25}+\frac{11}{5}\right)=$$

$$=5\cdot\left(\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{51}{25}\right).$$

Возьмем второй интеграл равенства (3.7):

$$\int\frac{dx}{5x^2+4x+11}=\frac{1}{5}\cdot\int\frac{dx}{\left(x+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{51}{25}}=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{51}}{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{2}{5}}{\frac{\sqrt{51}}{5}}+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{51}}\operatorname{arctg}\frac{5x+2}{\sqrt{51}}+C.$$

Здесь по правилу (3.2) из табличной формулы № 16 выполнены преобразования такие же, как в примере 3.2. Подставим найденные интегралы в равенство (3.7), получим

$$\int \frac{3x-7}{5x^2+4x+11}dx = \frac{3}{10}\int \frac{10x+4}{5x^2+4x+11}dx - 8{,}2\int \frac{dx}{5x^2+4x+11} =$$

$$= \frac{3}{10}\cdot \ln\left|5x^2+4x+11\right| - \frac{8{,}2}{\sqrt{51}}\operatorname{arctg}\frac{5x+2}{\sqrt{51}} + C.$$

В ответе записывается одна постоянная C, которая является суммой всех констант, полученных при интегрировании слагаемых подынтегральной функции. ▼

Интеграла от простейшей дроби четвертого типа в вариантах контрольной работы нет.

Итак, простейшие дроби интегрировать умеем. Если правильная дробь не является простейшей, то ее интегрирование основывается на следующей важной теореме.

***Теорема* 3.1.** Каждая правильная рациональная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m < n$, может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей.

Это разложение правильной дроби связано с разложением знаменателя рациональной дроби $Q_n(x)$ на множители. Каждый многочлен с действительными коэффициентами единственным образом разлагается на линейные множители вида $(x-a)^k$ и квадратичные множители вида $\left(x^2+px+q\right)^l$, не имеющие действительных корней, т.е.

$$Q_n(x) = (x-a)^k \cdot \ldots \cdot \left(x^2+px+q\right)^l.$$

Здесь показатели k и l есть натуральные числа и, не нарушая общности, предположили, что коэффициент при старшей степени x^n равен 1.

Каждому множителю $(x-a)^k$ в разложении знаменателя правильной дроби $P_m(x)/Q_n(x)$ отвечает сумма из k простых дробей:

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k},$$

а каждому множителю $\left(x^2+px+q\right)^l$ – сумма из l простых дробей:

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2}+\ldots+\frac{M_lx+N_l}{\left(x^2+px+q\right)^l},$$

причем здесь в числителях $A,\ M,\ N$ – числовые коэффициенты, которые при построении разложения в сумму простейших дробей являются неизвестными величинами. Для того чтобы их найти, обычно прибегают к *методу неопределенных коэффициентов*. Суть метода такова:

– сумму всех простейших дробей с неопределенными коэффициентами приводят к общему знаменателю $Q_n(x)$, в результате получают тождество

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{S(x)}{Q_n(x)},$$

где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами;

– так как знаменатели равных дробей равны, то равны и их числители: $P_m(x)=S(x)$;

– приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему линейных уравнений, из которой определяем неизвестные коэффициенты $A,\ M,\ N$;

– на последнем шаге возможен другой способ вычисления коэффициентов: в равенство $P_m(x)=S(x)$ подставляем различные значения x такие, чтобы система линейных уравнений была как можно проще.

Пример 3.11. Найдем интеграл $\int\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}dx$. По множителям знаменателя составим разложение на сумму простейших дробей. Множителю $(x+1)$ соответствует простейшая дробь первого типа $A/(x+1)$, множителю $(x-2)^2$ соответствует сумма двух дробей (первого и второго типов) $B/(x-2)$ и $C/(x-2)^2$. Таким образом, подынтегральная функция представима в виде суммы простейших дробей с неопределенными коэффициентами:

$$\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}.$$

Для того чтобы найти коэффициенты *A*, *B*, *C*, приведем дроби в правой части равенства к общему знаменателю согласно описанному выше алгоритму:

$$\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)}{(x+1)(x-2)^2}.$$

Далее приравниваем числители дробей с равными знаменателями:

$$x-5=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1) \qquad (3.8)$$

или

$$x-5=x^2(A+B)+x(C-4A-B)+4A-2B+C. \qquad (3.9)$$

Составим три уравнения для вычисления коэффициентов *A*, *B*, *C*. Равенство (3.8) выполняется для любых значений *x*, поэтому подставим вместо *x* числа, которые, например, обращают в ноль некоторые слагаемые в правой части равенства. Если положить $x=-1$, то в правой части получится $9A$. Если положить $x=2$, то в правой части получится $3C$. Таким образом, составим два уравнения, третье уравнение получим, приравняв, например, коэффициенты левой и правой частей равенства при x^2:

$$\begin{array}{r|l} x=-1 & -6=9A \Rightarrow A=-2/3, \\ x=2 & -3=3C \Rightarrow C=-1, \\ x^2 & 0=A+B \Rightarrow B=2/3. \end{array}$$

Следовательно, подынтегральная функция разлагается в сумму простейших дробей:

$$\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{-2/3}{x+1}+\frac{2/3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}.$$

Тогда исходный интеграл по свойству линейности можно представить в виде суммы трех интегралов, которые можно найти непосредственно:

$$\int\frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx=-\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{2}{3}\int\frac{dx}{x-2}-\int(x-2)^{-2}dx=$$

$$=-\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+C=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C. \blacktriangledown$$

3.1.4. Интегрирование тригонометрических функций

При интегрировании тригонометрических функций часто приходится пользоваться тригонометрическими формулами, которые позволяют упростить подынтегральную функцию или представить ее в виде суммы табличных функций (пример 3.3). Приведем общие рекомендации для некоторых видов подынтегральных функций.

Если подынтегральная функция имеет вид $f(x)=\sin^m x\cdot\cos^n x$, где m и n – целые числа, то выбор приема или метода интегрирования зависит от показателей степени m и n.

Если m и n – числа неотрицательные и четные, то применяются тригонометрические формулы понижения степени

$$2\sin^2 x=1-\cos 2x,\quad 2\cos^2 x=1+\cos 2x.$$

Пример 3.12. Найдем интеграл $\int\sin^4 x\,dx$. Здесь показатели соответствующих степеней четные: $m=4$, $n=0$. Поэтому применим формулу понижения степени синуса:

$$\int\sin^4 x\,dx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}(x-\sin 2x)+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x dx.$$

Первые два слагаемых проинтегрированы, третье слагаемое – это косинус в четной степени. Применим формулу понижения степени для косинуса:

$$\int\cos^2 2xdx=\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 4x}{4}\right)+C.$$

Суммируем полученные результаты:

$$\int\sin^4 x\,dx=\frac{1}{4}(x-\sin 2x)+\frac{1}{4}\int\cos^2 2xdx=\frac{1}{4}(x-\sin 2x)+\frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 4x}{4}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}(x-\sin 2x)+\frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 4x}{4}\right)+C=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.\ ▼$$

Если, по крайней мере, одно из чисел m и n нечетное, то применяется подстановка $t=\cos x$ или $t=\sin x$. В качестве новой переменной t выбирается та функция, которая имеет четную степень, а если таковой нет, то любая. Либо функция, имеющая нечетную степень, подводится под знак дифференциала, в результате ее степень на 1 уменьшается и становится четной, что дает возможность по основному тригонометрическому тождеству заменить ее на вторую функцию. В примере 3.5 соответствующий интеграл берется подведением функции $\sin x$ под знак дифференциала.

Если подынтегральная функция является дробью, в которой присутствуют суммы синусов и косинусов с коэффициентами, а также их произведений, в целых неотрицательных степенях, то можно применить *универсальную тригонометрическую подстановку* $t=\mathrm{tg}(x/2),\ -\pi<x<\pi$. Тогда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad x=2\,\mathrm{arctg}\,t,\ \ dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Пример 3.13. Найдем интеграл $\int\frac{dx}{2+3\sin x}$. Подынтегральная функция имеет описанный выше вид. Для ее интегрирования применяется универсальная тригонометрическая подстановка. Сделаем подстановку $t=\mathrm{tg}(x/2)$, тогда

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2},$$

и интеграл примет вид

$$\int\frac{dx}{2+3\sin x}=\int\frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{2+3\frac{2t}{1+t^2}}=\int\frac{dt}{t^2+3t+1}.$$

В знаменателе полученной подынтегральной функции имеем квадратный трехчлен, из которого выделим полный квадрат:

$$t^2+3t+1=\left(t^2+2\cdot\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+1=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}.$$

После чего возьмем интеграл по формуле № 17 табл. 3.1:

$$\int\frac{dt}{t^2+3t+1}=\int\frac{dt}{(t+3/2)^2-5/4}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{5}/2}\ln\left|\frac{t+3/2-\sqrt{5}/2}{t+3/2+\sqrt{5}/2}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2t+3-\sqrt{5}}{2t+3+\sqrt{5}}\right|+C.$$

Остается вернуться к переменной x, подставив $t = \operatorname{tg}(x/2)$:

$$\int \frac{dx}{2+3\sin x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \left| \frac{2\operatorname{tg}(x/2)+3-\sqrt{5}}{2\operatorname{tg}(x/2)+3+\sqrt{5}} \right| + C. \ ▼$$

Универсальная тригонометрическая подстановка на практике часто приводит к сложным рациональным функциям, поэтому бывает полезно также знать другую подстановку – *тригонометрическую подстановку* $t = \operatorname{tg} x$. Такая подстановка применяется, если в условиях применения универсальной тригонометрической подстановки все степени синусов, косинусов и их произведений четные. Тогда квадраты тригонометрических функций и дифференциал заменяются с помощью переменной t следующим образом:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, \ \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \ \sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2}, \ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 3.14. Найдем интеграл $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$. Степень синуса четная. Применяем тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \left| \begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x, \ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}, \\ \sin^2 x = \dfrac{t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{2 - \dfrac{t^2}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) + C. \ ▼$$

3.1.5. Интегрирование иррациональных функций

В заданиях контрольной работы присутствуют интегралы от иррациональных функций вида $\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ и функций, содержащих иррациональность $\sqrt{ax+b}$. Интеграл от первой функции разобран в примере 3.6. В числителе проводятся преобразования с выделением производной подкоренного выражения знаменателя, и интеграл разбивается на сумму двух:

первый из которых берется подведением под знак дифференциала. Если в подынтегральной функции содержится иррациональность только в виде $\sqrt{ax+b}$, то применяется подстановка $ax+b=t^2$. Более общий случай интегрирования иррациональной функции разобран в примере 3.7.

3.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

В первой и третьей колонках таблиц размещены номера вариантов. Порядок выбора параметров a и b описан во введении к учебному пособию.

Задание 3.1. Найдите неопределенные интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен.

Таблица 3.2

1 – 15	$\int \frac{3x-2b}{ax^2+4x+b}dx$	**16 – 30**	$\int \frac{ax+b}{\sqrt{x^2-6x+b}}dx$

Задание 3.2. Найдите неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

Таблица 3.3

1 – 10	$\int (ax+b)\cdot \sin(2ax-b)dx$	**11 – 20**	$\int (ax+b)\cdot \cos(bx-a)dx$
21 – 30	$\int (2ax+b)\cdot \ln(ax+b)dx$		

Задание 3.3. Найдите неопределенные интегралы от рациональных функций.

Таблица 3.4

1	$\int \frac{1-5x}{(x+1)^3}dx$	**2**	$\int \frac{3x+1}{(x-1)^2(x-4)}dx$
3	$\int \frac{2x+1}{(x-2)^3}dx$	**4**	$\int \frac{x^2+2}{x^2(x^2-1)}dx$
5	$\int \frac{1-2x}{(x+4)^3}dx$	**6**	$\int \frac{x^2+3}{x^4-16}dx$

7	$\int \frac{2x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}\ dx$	**8**	$\int \frac{xdx}{(x^2+2)(x+5)}$
9	$\int \frac{(3x-2)dx}{(x^2+5)(x-2)}$	**10**	$\int \frac{(x-3)dx}{x^2(x+2)}$
11	$\int \frac{4-3x}{(x^2-1)(x+3)}\ dx$	**12**	$\int \frac{(x^2-5)dx}{x(x+1)^2}$
13	$\int \frac{3x+1}{(x-2)^2(x+1)} dx$	**14**	$\int \frac{x^2+7}{(x^2+4)(x-3)} dx$
15	$\int \frac{(x+4)dx}{x\cdot(x^2+3)}$	**16**	$\int \frac{x^2+1}{x\cdot(x^2+5)} dx$
17	$\int \frac{dx}{x^3+8}$	**18**	$\int \frac{dx}{x^3-27}$
19	$\int \frac{x}{x^3-1}\ dx$	**20**	$\int \frac{2x-3}{x^3+1}\ dx$
21	$\int \frac{1-2x}{x^4-2x^2+1} dx$	**22**	$\int \frac{dx}{x^3-8}$
23	$\int \frac{x^2+2}{(x+3)^3} dx$	**24**	$\int \frac{x^2+2}{x(x^2-1)}\ dx$
25	$\int \frac{dx}{(x-2)(x^2+3)}$	**26**	$\int \frac{3x-2}{(x+2)^3} dx$
27	$\int \frac{x^2+3}{x^4-1} dx$	**28**	$\int \frac{x^2-5}{(x^2-1)(x+2)}\ dx$
29	$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-3)}$	**30**	$\int \frac{(5x+2)dx}{(x^2+3)(x-1)}$

Задание 3.4. Найдите неопределенные интегралы от тригонометрических функций.

Таблица 3.5

1	$\int \cos^6 \frac{x}{2} dx$	**2**	$\int \cos^3 \frac{x}{2} dx$
3	$\int \cos^4 \frac{x}{2} dx$	**4**	$\int \sin^3 \frac{x}{5} dx$
5	$\int \cos^5 2x\ dx$	**6**	$\int \cos^7 x\ dx$

7	$\int \sin x \cdot \cos^4 x \ dx$	**8**	$\int \cos 2x \cdot \sin^3 2x \ dx$
9	$\int \frac{\cos x}{\sin^4 x} \ dx$	**10**	$\int \frac{dx}{\cos^6 x}$
11	$\int \cos x \cdot \sqrt{\sin x + 1} \ dx$	**12**	$\int (\cos x + \sin x)^2 \ dx$
13	$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} \ dx$	**14**	$\int \sin^4 \frac{x}{3} \ dx$
15	$\int (\cos 2x - \sin 2x)^2 \ dx$	**16**	$\int \sin^2 x \cdot \cos^3 x \, dx$
17	$\int \frac{\cos^2 2x - \cos^2 x}{\sin^4 x} \ dx$	**18**	$\int \frac{dx}{\cos^4 x}$
19	$\int \frac{dx}{\sin^4 x}$	**20**	$\int \frac{\operatorname{tg} x}{\sin 2x} \ dx$
21	$\int \sin^3 x \cdot \cos^4 x \, dx$	**22**	$\int \sin^2 x \cdot \cos^2 x \, dx$
23	$\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin 2x} \ dx$	**24**	$\int \frac{5\sin 2x - 5\operatorname{tg} x}{\sin x \cdot \cos x} \ dx$
25	$\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} \ dx$	**26**	$\int \frac{2\cos x - 3\sin^3 x}{\sin^2 x} \ dx$
27	$\int \sin 2x \cdot \cos^4 2x \ dx$	**28**	$\int \sin^7 x \ dx$
29	$\int \frac{\cos 2x - 5\cos^3 x}{\cos^2 x} \ dx$	**30**	$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^3 2x}} \ dx$

Задание 3.5. Найдите неопределенные интегралы в вариантах 1 – 15 с помощью универсальной тригонометрической подстановки, в вариантах 16 – 30 – с помощью тригонометрической подстановки.

Таблица 3.6

1 – 5	$\int \frac{b\,dx}{2 - a\sin x}$	**6 – 10**	$\int \frac{dx}{a\sin x - \cos x}$
11 – 15	$\int \frac{dx}{a + b\cos x}$	**16 – 20**	$\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin x \cos x}$
21 – 25	$\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x}$	**26 – 30**	$\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x \cos x}$

Задание 3.6. Найдите неопределенный интеграл от иррациональной функции $\int \frac{2x+b}{\sqrt{ax+b}+2}dx$.

3.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЯ ВАРИАНТА № 30

Первая буква имени «Т» – по таблице во введении $a=19$, вторая буква фамилии «У» – по таблице $b=20$.

Задание 3.1. Найдите неопределенный интеграл

$$\int \frac{19x+20}{\sqrt{x^2-6x+20}}dx.$$

Решение. Так же, как в примере 3.6, выделим в числителе производную подкоренного выражения знаменателя

$$\left(x^2-6x+20\right)'=2x-6.$$

Для этого проведем следующие преобразования:

$$19x+20=19\left(x+\frac{20}{19}\right)=\frac{19}{2}\left(2x+\frac{40}{19}\right)=\frac{19}{2}\left(2x-6+6+\frac{40}{19}\right)=$$

$$=\frac{19}{2}\left(2x-6+\frac{154}{19}\right)=\frac{19}{2}(2x-6)+77.$$

Подставим преобразованный числитель и воспользуемся свойством линейности неопределенного интеграла:

$$\int \frac{19x+20}{\sqrt{x^2-6x+20}}dx=\frac{19}{2}\int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+20}}dx+77\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+20}}. \qquad (3.10)$$

Первый из двух интегралов в правой части равенства возьмем приемом подведения под знак дифференциала по формуле (3.3):

$$\int \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-6x+20}}dx=\int \frac{d\left(x^2-6x+20\right)}{\sqrt{x^2-6x+20}}=2\sqrt{x^2-6x+20}+C.$$

Во втором интеграле выделим полный квадрат в подкоренном выражении знаменателя:

$$x^2-6x+20=x^2-2\cdot 3\cdot x+9+11=(x-3)^2+11,$$

и непосредственно проинтегрируем функцию с использованием формулы № 18 табл. 3.1:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+20}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+11}} = \ln\left|x+\sqrt{(x-3)^2+11}\right| + C.$$

Подставим результаты преобразований в равенство (3.10), получим

$$\int \frac{19x+20}{\sqrt{x^2-6x+20}}dx = 19\sqrt{x^2-6x+20} + 77\ln\left|x+\sqrt{(x-3)^2+11}\right| + C.$$

Задание 3.2. Найдите неопределенный интеграл

$$\int (38x+20)\cdot\ln(19x+20)dx$$

методом интегрирования по частям.

Решение. Данный интеграл возьмем по формуле (3.5):

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Подынтегральная функция относится ко второму типу функций согласно описанной в теоретической части методике. Поэтому обозначим

$$u = \ln(19x+20), \quad dv = (38x+20)dx.$$

Тогда

$$du = \left(\ln(19x+20)\right)' dx = \frac{19dx}{19x+20},$$

$$v = \int (38x+20)dx = 19x^2 + 20x + C.$$

Подставим v и du в формулу интегрирования по частям, после сокращения дроби получим простой табличный интеграл:

$$\int (38x+20)\cdot\ln(19x+20)dx = \left(19x^2+20x\right)\cdot\ln(19x+20) - 19\int\frac{19x^2+20x}{19x+20}dx =$$

$$= \left(19x^2+20x\right)\cdot\ln(19x+20) - 19\int\frac{x(19x+20)}{19x+20}dx = \left(19x^2+20x\right)\cdot\ln(19x+20) -$$

$$-19\int xdx = \left(19x^2+20x\right)\cdot\ln(19x+20) - 9{,}5x^2 + C.$$

Задание 3.3. Найдите неопределенный интеграл

$$\int \frac{(5x+2)dx}{(x^2+3)(x-1)}.$$

Решение. Подынтегральная функция – правильная рациональная дробь: степень числителя равна 1, степень знаменателя – 3, таким образом, степень числителя меньше степени знаменателя. Тогда эту дробь можно разложить на сумму простейших дробей. По множителям знаменателя составляем сумму простейших дробей:

$$\frac{5x+2}{(x^2+3)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+3},$$

где A, B и C – неизвестные коэффициенты. Записали исходную функцию в виде суммы простейших дробей I и III типа. Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты, приведем сумму дробей в правой части равенства к общему знаменателю и приравняем числители равных дробей с равными знаменателями:

$$\frac{5x+2}{(x^2+3)(x-1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+3}=\frac{A\left(x^2+3\right)+\left(Bx+C\right)(x-1)}{(x^2+3)(x-1)},$$

$$5x+2=A\left(x^2+3\right)+\left(Bx+C\right)(x-1)=\left(A+B\right)x^2+\left(C-B\right)x+3A-C.$$

Коэффициенты A и C найдем, подставив в первое и среднее выражения в равенствах значения $x=1$ и $x=0$. Для того чтобы найти B, приравняем коэффициенты при x^2 первого и третьего выражений последних равенств:

$$\begin{array}{r|l} x=1 & 7=4A \Rightarrow A=7/4, \\ x=0 & 2=3A-C \Rightarrow C=3A-2=\left(21/4\right)-2=13/4, \\ x^2 & 0=A+B \Rightarrow B=-A=-7/4. \end{array}$$

Итак, подынтегральная функция представима в виде суммы

$$\frac{5x+2}{(x^2+3)(x-1)}=\frac{7}{4\left(x-1\right)}+\frac{13-7x}{4\left(x^2+3\right)}.$$

Тогда по свойству линейности исходный интеграл распадается в сумму трех интегралов:

$$\int\frac{(5x+2)dx}{(x^2+3)(x-1)}=\frac{7}{4}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{13}{4}\int\frac{dx}{x^2+3}-\frac{7}{4}\int\frac{xdx}{x^2+3}. \qquad (3.11)$$

Первые два интеграла найдем непосредственно, третий – подведением под знак дифференциала:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C, \quad \int \frac{dx}{x^2+3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C,$$

$$\int \frac{xdx}{x^2+3} = \int \frac{d\left(x^2/2\right)}{x^2+3} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{x^2+3} = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+3\right) + C.$$

Подставим найденные множества функций в равенство (3.11), получим выражение для данного в условии задачи интеграла:

$$\int \frac{(5x+2)dx}{(x^2+3)(x-1)} = \frac{7}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{13}{4}\int \frac{dx}{x^2+3} - \frac{7}{4}\int \frac{xdx}{x^2+3} =$$

$$= \frac{7}{4}\ln|x-1| + \frac{13}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{7}{4}\ln\left(x^2+3\right) + C = \frac{7}{4}\ln\frac{|x-1|}{x^2+3} + \frac{13}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C.$$

Задание 3.4. Найдите неопределенный интеграл

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^3 2x}}\, dx.$$

Решение. Функция интегрируется подведением $\sin 2x$ (интегрированием) под знак дифференциала:

$$\sin 2xdx = -\frac{1}{2} d\left(\cos 2x\right).$$

Тогда интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^3 2x}}\, dx = -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\cos 2x\right)}{\sqrt{\cos^3 2x}} = -\frac{1}{2}\int \left(\cos 2x\right)^{-3/2} d\left(\cos 2x\right).$$

Получили интеграл от степенной функции, который возьмем по формуле № 1 табл. 3.1

$$\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^3 2x}}\, dx = -\frac{1}{2}\int \left(\cos 2x\right)^{-3/2} d\left(\cos 2x\right) = -\frac{1}{2}\cdot(-2)\left(\cos 2x\right)^{-1/2} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\cos 2x}} + C.$$

Задание 3.5. Найдите неопределенный интеграл

$$\int \frac{dx}{19\sin^2 x + 20\sin x \cos x}$$

с помощью тригонометрической подстановки.

Решение. Для интегрирования функции применяем тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg} x$, тогда

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2},\ \sin x \cdot \cos x = \frac{t}{1+t^2},\ dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Подставим эти выражения в исходный интеграл:

$$\int \frac{dx}{19\sin^2 x + 20\sin x \cos x} = \left| t = \operatorname{tg} x \right| = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{19\frac{t^2}{1+t^2} + 20\frac{t}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{19t^2 + 20t} = \frac{1}{19}\int \frac{dt}{t^2 + (20/19)t}.$$

Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью. Для нее существует два способа интегрирования: разложение на сумму простейших дробей первого типа и выделение в знаменателе полного квадрата. Выберем первый способ:

$$\frac{1}{t^2 + (20/19)t} = \frac{1}{t(t + (20/19))} = \frac{19}{20} \cdot \frac{20/19}{t(t + (20/19))} = \frac{19}{20} \cdot \frac{(t + 20/19) - t}{t(t + (20/19))} =$$

$$= \frac{19}{20} \cdot \left(\frac{(t + 20/19)}{t(t + (20/19))} - \frac{t}{t(t + (20/19))} \right) = \frac{19}{20} \cdot \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t + (20/19)} \right).$$

Преобразуем и возьмем интеграл:

$$\frac{1}{19}\int \frac{dt}{t^2 + (20/19)t} = \frac{1}{19} \cdot \frac{19}{20} \cdot \left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t + (20/19)} \right) = \frac{1}{20} \cdot \left(\ln|t| - \ln\left| t + \frac{20}{19} \right| \right) + C =$$

$$= \frac{1}{20} \cdot \ln\left| \frac{t}{t + (20/19)} \right| + C = \frac{1}{20} \cdot \ln\left| \frac{19t}{19t + 20} \right| + C.$$

Осталось вернуться к переменной *x*, для этого надо подставить $t = \operatorname{tg} x$. Сокращенная запись всех преобразований имеет вид

$$\int \frac{dx}{19\sin^2 x + 20\sin x \cos x} = \left| t = \operatorname{tg} x \right| = \int \frac{dt}{19t^2 + 20t} = \frac{1}{20} \cdot \left(\int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t + (20/19)} \right) =$$

$$= \frac{1}{20} \cdot \ln\left| \frac{19t}{19t + 20} \right| + C = \frac{1}{20} \cdot \ln\left| \frac{19\operatorname{tg} x}{19\operatorname{tg} x + 20} \right| + C.$$

Задание 3.6. Найдите неопределенный интеграл

$$\int \frac{2x+20}{\sqrt{19x+20}+2}dx.$$

Решение. Подынтегральная функция содержит иррациональное выражение $\sqrt{19x+20}$, поэтому применяем подстановку $t=\sqrt{19x+20}$, тогда

$$t^2=19x+20 \;\Rightarrow\; x=\frac{t^2-20}{19}, \quad 2tdt=19dx \;\Rightarrow\; dx=\frac{2}{19}tdt.$$

Выполним в интеграле замену переменной:

$$\int \frac{2x+20}{\sqrt{19x+20}+2}dx=\left|\,t=\sqrt{19x+20}\,\right|=\int \frac{\frac{2}{19}\left(t^2-20\right)+20}{t+2}\frac{2}{19}tdt=$$

$$=\frac{4}{361}\int \frac{t^3+170t}{t+2}dt.$$

В результате замены получили интеграл от неправильной рациональной дроби, так как степень числителя, равная 3, больше степени знаменателя, равной 1. Разделим «уголком» числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l}
-\;t^3+170t & t+2 \\
\underline{t^3+2t^2} & t^2-2t+174 \\
-\;-2t^2+170t & \\
\underline{-2t^2-4t} & \\
-\;174t & \\
\underline{174t+348} & \\
-348. &
\end{array}$$

Тогда неправильную дробь можно записать как сумму целой части (частного) и правильной дроби:

$$\frac{t^3+170t}{t+2}=t^2-2t+174-\frac{348}{t+2}.$$

Неопределенный интеграл от неправильной рациональной дроби преобразуется в сумму табличных интегралов:

$$\frac{4}{361}\int\frac{t^3+170t}{t+2}dt=\frac{4}{361}\left(\int t^2dt-\int 2tdt+174\int dt-348\int\frac{dt}{t+2}\right)=$$

$$=\frac{4}{361}\left(\frac{t^3}{3}-t^2+174t-348\ln|t+2|\right)+C.$$

Осталось подставить во множество первообразных $t=\sqrt{19x+20}$. В краткой форме записи процесс интегрирования выглядит так:

$$\int\frac{2x+20}{\sqrt{19x+20}+2}dx=\left|t=\sqrt{19x+20}\right|=\frac{4}{361}\int\frac{t^3+170t}{t+2}dt=$$

$$=\frac{4}{361}\left(\int t^2dt-\int 2tdt+174\int dt-348\int\frac{dt}{t+2}\right)=$$

$$=\frac{4}{361}\left(\frac{t^3}{3}-t^2+174t-348\ln|t+2|\right)+C=$$

$$=\frac{4}{361}\left(\frac{\sqrt{(19x+20)^3}}{3}-19x+174\sqrt{19x+20}-348\ln\left|\sqrt{19x+20}+2\right|\right)+C.$$

Все постоянные слагаемые вошли в число C.

Ответы:

3.1. $\int\frac{19x+20}{\sqrt{x^2-6x+20}}dx=19\sqrt{x^2-6x+20}+77\ln\left|x+\sqrt{(x-3)^2+11}\right|+C$;

3.2. $\int(38x+20)\cdot\ln(19x+20)dx=(19x^2+20x)\cdot\ln(19x+20)-9{,}5x^2+C$;

3.3. $\int\frac{(5x+2)dx}{(x^2+3)(x-1)}=\frac{7}{4}\ln\frac{|x-1|}{x^2+3}+\frac{13}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C$;

3.4. $\int\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^3 2x}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{\cos 2x}}+C$;

3.5. $\int\frac{dx}{19\sin^2 x+20\sin x\cos x}=\frac{1}{20}\cdot\ln\left|\frac{19\operatorname{tg}x}{19\operatorname{tg}x+20}\right|+C$; **3.6.** $\int\frac{2x+20}{\sqrt{19x+20}+2}dx=$

$$=\frac{4}{361}\left(\frac{\sqrt{(19x+20)^3}}{3}-19x+174\sqrt{19x+20}-348\ln\left|\sqrt{19x+20}+2\right|\right)+C.$$

4. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Если неопределенный интеграл – это множество функций (первообразных), то определенный интеграл – это число, которое можно посчитать по формуле Ньютона–Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная (любая) функции $f(x)$, а числа a и b – пределы интегрирования. Таким образом, определенный интеграл равен разности первообразных в верхнем и нижнем пределах интегрирования. Для нахождения первообразных используются приемы и методы, изложенные в главе 3. Определенный интеграл так же, как и неопределенный, обладает свойством линейности.

Определенный интеграл обладает многочисленными приложениями в различных областях знаний. Остановимся на некоторых геометрических приложениях.

4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ФОРМУЛЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Приложения определенного интеграла основаны на одном его важном свойстве – *аддитивности* по отрезку интегрирования $[a,b]$: для любого числа c выполняется:

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Предполагается, что все интегралы на указанных отрезках существуют. Если вычисление некоторой величины связано с отрезком $[a,b]$ и при разбиении отрезка на части величину можно представить в виде суммы величин, связанных с соответствующими частями отрезка, то данная величина может быть найдена с помощью определенного интеграла. Именно таким свойством обладают геометрические объекты: площадь плоской фигуры, длина дуги плоской кривой, площадь поверхности вращения, объем тела вращения.

Площадь плоской фигуры. Если фигура, расположенная на координатной плоскости *Oxy*, ограничена графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, причем $f(x) \geq g(x)$ для всех значений $x \in [a,b]$ (рис. 4.1), прямыми $x = a$ и $x = b$, тогда ее площадь *S* можно найти по формуле

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx. \tag{4.1}$$

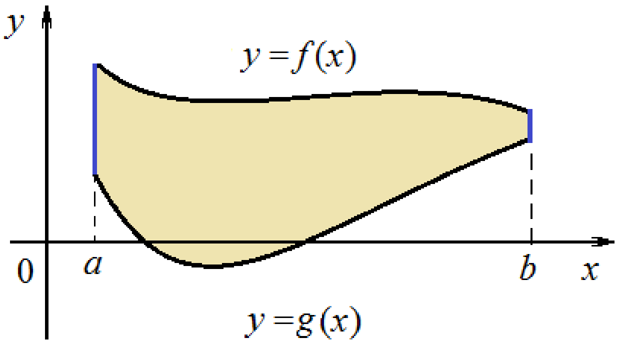


Рис. 4.1

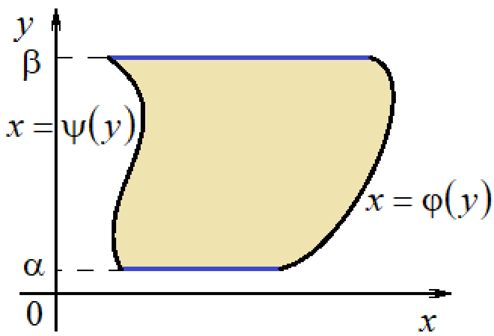


Рис. 4.2

Если фигура ограничена графиками функций $x = \varphi(y)$ и $x = \psi(y)$, причем $\varphi(y) \geq \psi(y)$ для всех $y \in [\alpha, \beta]$ (рис. 4.2), прямыми $y = \alpha$ и $y = \beta$, тогда для вычисления площади применяют формулу

$$S = \int_\alpha^\beta (\varphi(y) - \psi(y))dy. \tag{4.2}$$

Выбор формулы (4.1) или (4.2) зависит от расположения фигуры. Поэтому прежде всего надо изобразить фигуру на чертеже, затем выбрать формулу для вычисления площади и найти пределы интегрирования, например, определив координаты точек пересечения линий – границ фигуры.

Пример 4.1. Найдем площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 2x - 3$ и прямой $y = 3x - 7$. Прежде чем изобразить фигуру на чертеже, найдем точки пересечения линий. Поскольку точка пересечения принадлежит обеим линиям, приравняем ординаты или, что то же самое, правые части уравнений:

$$x^2 - 2x - 3 = 3x - 7 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0.$$

Найдем абсциссы точек пересечения линий, т.е. решим квадратное уравнение, получим $x = 1$ и $x = 4$. Подставив абсциссы точек пересечения в уравнение любой из двух линий, найдем ординаты точек пересечения. Например, в уравнение $y = 3x - 7$:

$$y(1) = 3 - 7 = -4, \quad y(4) = 12 - 7 = 5.$$

Итак, точками пересечения линий являются точки $M_1(1;-4)$ и $M_2(4;5)$.

Ветви параболы $y = x^2 - 2x - 3$ направлены вверх, парабола проходит через точки M_1 и M_2. Уточним расположение параболы, определив точки ее пересечения с осью Ox:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1,\ x_2 = 3.$$

Абсцисса вершины расположена посередине между этими точками, поэтому $x_в = 1$, т.е. вершина параболы в точке M_2. Изобразим параболу на чертеже (рис. 4.3). Прямая $y = 3x - 7$ однозначно определяется двумя точками, поэтому проводим прямую через точки M_1 и M_2. На рисунке 4.3 область, ограниченная параболой и прямой, закрашена желтым цветом.

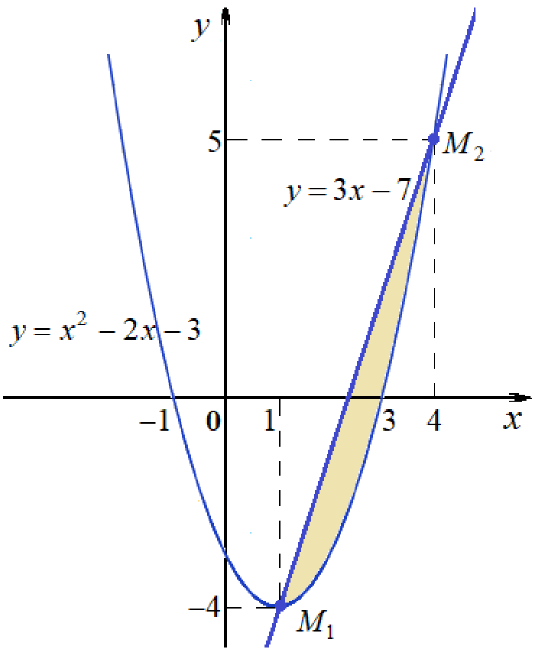


Рис. 4.3

Для вычисления площади применяем формулу (4.1). Пределы интегрирования – абсциссы точек M_1 и M_2, т.е. $a = 1$, $b = 4$. Сверху фигура ограничена прямой $y = 3x - 7$, снизу – параболой $y = x^2 - 2x - 3$, поэтому на отрезке $[1;4]$ выполняется неравенство

$$3x - 7 \geq x^2 - 2x - 3.$$

Тогда по формуле (4.1) имеем

$$S=\int_1^4\left(3x-7-(x^2-2x-3)\right)dx=\int_1^4\left(-x^2+5x-4\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2-4x\right)\Bigg|_1^4=4{,}5.$$

Площадь искомой фигуры равна $S=4{,}5$. ▼

Длина дуги плоской кривой. Пусть плоская кривая *AB* является графиком функции $y=f(x)$, $x\in[a,b]$, тогда длина L кривой рассчитывается по формуле

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (4.3)$$

Если известны координаты концов кривой: $A(a,f(a))$ и $B(b,f(b))$, причем $a<b$, то рисовать кривую не обязательно, так как все необходимые параметры для применения формулы (4.3) есть.

Плоская фигура, расположенная на координатной плоскости *Oxy*, называется *криволинейной трапецией*, если она ограничена сверху графиком функции $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$ при $x\in[a,b]$), снизу – отрезком $[a,b]$ оси абсцисс, сбоку – прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 4.4). Если трапецию вращать вокруг оси *Ox*, то получится пространственная фигура, называемая *телом вращения* (рис. 4.5). Верхняя кривая трапеции, график функции $y=f(x)$, опишет поверхность, называемую *поверхностью вращения*.

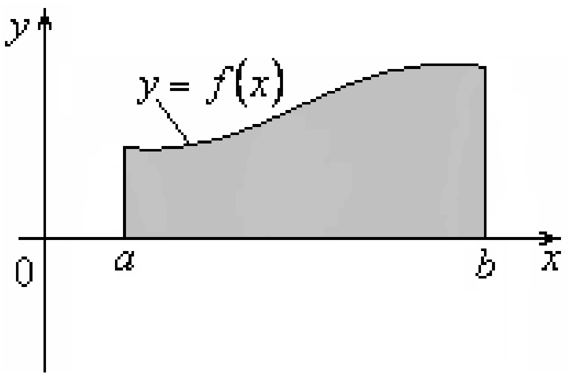


Рис. 4.4

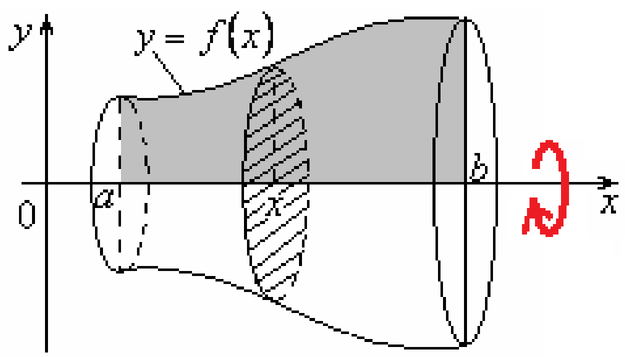


Рис. 4.5

Объем тела вращения. Если верхняя граница криволинейной трапеции является графиком функции $y = f(x)$, то объем тела вращения, полученного при вращении трапеции вокруг оси *Ox*, можно найти по формуле

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (4.4)$$

Тело вращения также можно получить при вращении плоской фигуры вокруг оси *Oy*. Если плоская фигура является криволинейной трапецией с основанием на оси ординат, т.е. ограничена справа графиком функции $x = \varphi(y)$, слева – отрезком $y \in [\alpha, \beta]$ оси *Oy*, сверху и снизу соответственно прямыми $y = \alpha$ и $y = \beta$, то объем тела, полученного вращением такой трапеции вокруг оси *Oy*, рассчитывается по формуле

$$V = \pi\int_\alpha^\beta \varphi^2(y)dy. \qquad (4.5)$$

Для того чтобы найти пределы интегрирования в формулах (4.4) и (4.5), желательно изобразить на чертеже плоскую фигуру, при вращении которой в дальнейшем получается тело вращения.

Площадь поверхности вращения. Площадь поверхности вращения, полученная при вращении графика функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, вокруг оси *Ox*, можно найти по формуле

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx. \qquad (4.6)$$

При вращении графика функции $x = \varphi(y)$, $y \in [\alpha, \beta]$, вокруг оси *Oy* площадь полученной поверхности вращения рассчитывается по формуле

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta \varphi(y)\sqrt{1 + (\varphi'(y))^2}dy. \qquad (4.7)$$

4.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 4.1. Найдите площадь фигуры, ограниченной данными линиями. Изобразите фигуру на чертеже.

Таблица 4.1

1	$y=2\ln x$, $y=\ln(x+2)$, $x=4$	**2**	$y=\operatorname{arctg} x$, прямая OM, $O(0;0)$, $M(1;\pi/4)$
3	$x=4$, $y=\ln x$, $y=x-1$ – касательная к $y=\ln x$	**4**	$y=-4$, $y=\ln x$, $y=x-1$ – касательная к $y=\ln x$
5	$y=e^{-x}$, $y=e^{-2x}-2$, $x=0$	**6**	$y=\arcsin x$, $x=1$, $y=-x$
7	$y=\sqrt{x}$, $y=x^3$	**8**	$y^2=9x$; $y=3x$
9	$y=\operatorname{arctg} x$, $y=\dfrac{\pi}{4}$, $y=-x$	**10**	$y=\ln(-x)$, $y=\ln(x+4)$, $y=\ln 6$
11	$4y^2=x$, $y^2=x-3$	**12**	$y=\ln(x+1)$, $y=2\ln(x-1)$, $y=0$
13	$y=1-\sqrt{x}$, $x+3y-3=0$	**14**	$y=e^x-1$, $y=e^{2x}-3$, $x=0$
15	$y=3-x^2$, $y=2x$	**16**	$y=\arcsin x$, $2y=\pi x$
17	$y=\dfrac{1}{1+x^2}$, $y=\dfrac{x^2}{2}$	**18**	$y=e^x-e$, $x=0$, $y=e(x-1)$ – касательная к $y=e^x-e$
19	$y=e^x-1$, $y=2e^{-x}$, $x=\ln 4$	**20**	$y^2=x+2$, $y^2=4\cdot(3-x)$
21	$x=4$, $y=\ln x$, $y=x-1$ – касательная к $y=\ln x$	**22**	$y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arctg}(2x-4)$, $y=0$
23	$y=e^{-x}$, $y=e^{-2x}-2$, $x=0$	**24**	$y^2=4x$, $x^2=4y$
25	$y^2=x^3$, $x=2$	**26**	$y^2=x^3$, $x=0$, $y=4$
27	$y^2=x+1$, $y^2=9-x$	**28**	$y=x^2$, $y=2-x^2$
29	$y=(x-4)^2$, $y=16-x^2$	**30**	$y=\ln(1-x)$, $y=\ln(x+3)$, $y=2$

Задание 4.2. Найдите объем тела, образованного вращением плоской фигуры, заключенной между данными линиями, вокруг оси координат l. Изобразите плоскую фигуру на чертеже.

Таблица 4.2

1	$y=\sqrt{x+2}$, $y=-x-2$, $x=0$, $l=Oy$	**2**	$x=2-\sqrt{y}$, $y=x$, $y=0$, $l=Ox$
3	$y^2=4-x$, $x=0$, $l=Oy$	**4**	$y=\sqrt[3]{x}$, $x=8$, $y=0$, $l=Oy$

5	$(y-2)^2=4-x$, $x=0$, $l=Ox$	**6**	$y=\ln x$, $y=2-\ln x$, $y=0$, $l=Oy$
7	$y=\ln(x+1)$, $x=5$, $y=0$, $l=Oy$	**8**	$x=\sqrt{6-y}$, $x=4-\sqrt{2y}$, $y=0$, $x=0$, $l=Oy$
9	$y=(x-2)^2$, $y=4-x^2$, $l=Ox$	**10**	$2y=4-x^2$, $2y=8-5x^2$, $l=Ox$
11	$y=e^x-1$, $y=2$, $x=0$, $l=Ox$	**12**	$y=2-\sqrt{x}$, $4y=x^2-16$, $x=0$, $l=Oy$
13	$y=\operatorname{arctg} x$, $x=1$, $y=0$, $l=Oy$	**14**	$y=\sqrt{2x}$, $y=4-x$, $x=0$, $l=Oy$
15	$y=\sqrt[3]{x}$, $y=x^3$, $l=Oy$	**16**	$y=4x^2-4$, $y=x^2-1$, $l=Ox$
17	$y=2\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$, $l=Ox$	**18**	$y=2\sqrt{x}$, $y=6-\sqrt{x}$, $l=Oy$
19	$y=5-\sqrt{x}$, $y=-1+\sqrt{x}$, $x=0$, $l=Oy$	**20**	$y=e^x$, $x=0$, $y=0$, $x=1$, $l=Ox$
21	$y=x^3$, $x=0$, $y=8$, $l=Oy$	**22**	$y^3=x^2$, $y=1$, $l=Ox$
23	$y=x^3$, $8x-y^2=0$, $l=Oy$	**24**	$y^2=x$, $x^3=y$, $l=Ox$
25	$y=\sin x$ $(0\le x\le\pi)$, $y=0$, $l=Ox$	**26**	$xy=4$, $y=0$, $x=1$, $x=4$, $l=Ox$
27	$y=e^x$, $x=0$, $y=\ln 2$, $l=Ox$	**28**	$2y=2-x^2$, $x+y=1$, $l=Oy$
29	$y^2=4x$, $x^2=4y$, $l=Ox$	**30**	$y=2^x$, $4y=5+3x$, $l=Ox$

Задание 4.3. В вариантах 1 – 20 найдите длину плоской дуги *s*, в вариантах 21 – 30 – площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой *s* вокруг оси координат *l*. При необходимости изобразите кривую на чертеже.

Таблица 4.3

1	$s: y=0{,}25\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)$, $x\in[-3;3]$	**2**	$s: y=2+\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $x\in[0;2]$
3	$s: y=\dfrac{1}{2}\cdot\ln\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$, $x\in[0{,}25\ln 2; 0{,}5\ln 5]$	**4**	$s: y=\dfrac{\sqrt{e^{2x}+1}}{2}$, $x\in[0{,}5\ln 3; 0{,}5\ln 24]$

5	$s: y=\sqrt{2}\ln\left(2-(x-3)^2\right)$, $y\geq 0$	**6**	$s: y=\dfrac{1}{\cos(2x)}$, $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{8}\right]$
7	$s: y=1-\ln\cos x$, $x\in[0;\pi/6]$	**8**	$s: y=\ln\sin x$, $x\in[\pi/3;\pi/2]$
9	$s: 3y=\arcsin\left(e^{3x}\right)$, $x\in\left[\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{8}{9}\right]$	**10**	$s: 2y=\arcsin\left(e^{2x}\right)$, $x\in\left[\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{3}{4};0\right]$
11	$s: 3y=(3-x)\sqrt{x}$, $x\in[0;3]$	**12**	$s: y^3=x^2$, $y\leq 4$
13	$s: y^2=(x-1)^3$, $x\in[1;5]$	**14**	$s: y=\sqrt{1-x^2}$, $x\in[0;1]$
15	$s: y=\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}\ln x$, $x\in[1;2]$	**16**	$s: y=\dfrac{6}{\sin(x/3)}$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$
17	$s: y=\ln\left(1-x^2\right)$, $x\in[0;0{,}5]$	**18**	$s: y=\sqrt{2x-x^2}$, $x\in[0{,}25;1]$
19	$s: 9(y-1)^2=4(x+2)^3$, $x\in[-1;1]$	**20**	$s: y=\sqrt{x-x^2}+\arcsin\sqrt{x}$, $x\in[0;1]$
21	$s: 2y=x\sqrt{x}$, $x\in[0;4]$; $l=Ox$	**22**	$x^2+(y-4)^2=1$; $l=Ox$
23	$s: y=\cos\dfrac{\pi x}{2}$, $x\in[-1;1]$; $l=Ox$	**24**	$s: y=\dfrac{e^{2x}+e^{-2x}}{4}$, $x\in[-3;3]$; $l=Ox$
25	$s: y=2\sin\pi x$, $x\in[0;1]$; $l=Ox$	**26**	$s: (x-2)^2+y^2=1$; $l=Oy$
27	$s: y=\dfrac{1}{\sin(2x)}$, $x\in\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]$, $l=Ox$	**28**	$s: y=\sqrt[3]{x}-2$, $y\in[-2;0]$, $l=Oy$
29	$s: y=\sqrt{4-x}$, $x\geq 0$, $l=Ox$	**30**	$s: (x-3)^2+y^2=4$; $l=Oy$

4.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ВАРИАНТА № 30

Задание 4.1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2$, $y=\ln(1-x)$, $y=\ln(x+3)$. Изобразите фигуру на чертеже.

Решение. Для того чтобы найти пределы интегрирования и изобразить границы фигуры на чертеже, определим координаты точек пересечения границ. Точка пересечения графиков логарифмов $y=\ln(1-x)$ и $y=\ln(x+3)$:

$$\ln(1-x)=\ln(x+3) \quad \Leftrightarrow \quad 1-x=x+3 \quad \Leftrightarrow \quad x=-1,$$

$$y=\ln(-1+3)=\ln 2 \quad \Rightarrow \quad M_1(-1;\ln 2).$$

Точки пересечения графиков логарифмов с прямой $y = 2$:

$$\ln(1-x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - e^2 \approx -6{,}39 \quad \Rightarrow \quad M_2\left(1 - e^2; 2\right),$$

$$\ln(x+3) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 = e^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^2 - 3 \approx 4{,}39 \quad \Rightarrow \quad M_3\left(e^2 - 3; 2\right).$$

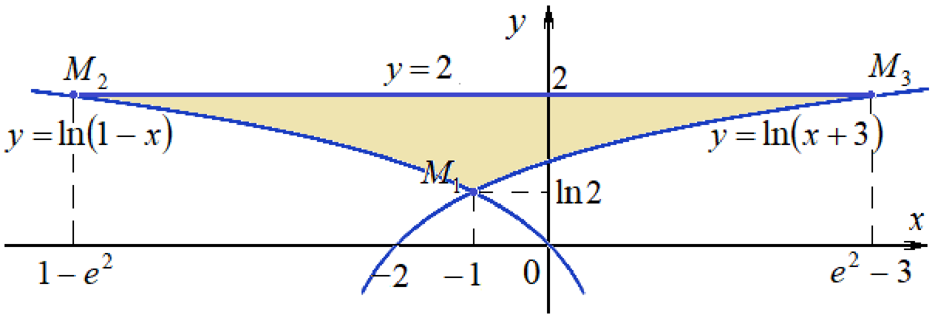


Рис. 4.6

Выполним примерные построения линий на чертеже, учитывая координаты точек M_1, M_2, M_3 и форму графиков функций. Фигура, ограниченная данными линиями, на рис. 4.6 закрашена желтым цветом.

Для вычисления площади, как видно из расположения фигуры, применим формулу (4.2). Отрезком интегрирования при таком выборе формулы будет $y \in [\ln 2; 2]$. Если использовать формулу (4.1), то площадь фигуры будет равна сумме двух интегралов с соответствующими отрезками интегрирования: $x \in \left[1 - e^2; -1\right]$ и $x \in \left[-1; e^2 - 3\right]$, а это увеличивает объем вычислений. Левой границей области (рис. 4.6) является график функции $y = \ln(1-x)$, правой – график функции $y = \ln(x+3)$. Выразим в этих уравнениях переменную x, чтобы найти уравнения функций $x = \psi(y)$ и $x = \varphi(y)$, в соответствии с формулой (4.2):

$$y = \ln(1-x) \;\Rightarrow\; 1 - x = e^y \;\Rightarrow\; x = 1 - e^y,$$

$$y = \ln(x+3) \;\Rightarrow\; x + 3 = e^y \;\Rightarrow\; x = e^y - 3.$$

На основании геометрических построений делаем вывод: на отрезке $[\ln 2; 2]$ выполняется неравенство $e^y - 3 \geq 1 - e^y$. Это неравенство можно проверить аналитически:

$$e^y - 3 \geq 1 - e^y \quad \Leftrightarrow \quad 2e^y - 4 \geq 0,$$

что имеем место, поскольку функция $x = 2e^y - 4$ монотонно возрастает и на левом конце отрезка $[\ln 2; 2]$ принимает значение $x(\ln 2) = 4 - 4 = 0$. Итак, имеем право применить формулу (4.2):

$$S = \int_{\ln 2}^{2} \left(e^y - 3 - (1 - e^y)\right) dy = \int_{\ln 2}^{2} \left(2e^y - 4\right) dy = \left(2e^y - 4y\right)\Big|_{\ln 2}^{2} = 2e^2 + 2\ln 2 - 12 \approx 4{,}16.$$

Искомая площадь плоской фигуры равна $S = 2e^2 + 2\ln 2 - 12 \approx 4{,}16$.

Задание 4.2. Найдите объем тела, образованного вращением плоской фигуры, заключенной между линиями $y = 2^x$, $4y = 5 + 3x$, вокруг оси Ox. Изобразите плоскую фигуру на чертеже.

Решение. Решение задачи начнем с геометрических построений. Но прежде необходимо найти точки пересечения графика функции $y = 2^x$ и прямой $4y = 5 + 3x$. Для этого составим уравнение

$$2^x = \frac{5 + 3x}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4 \cdot 2^x = 5 + 3x \quad \Leftrightarrow \quad 2^{x+2} = 5 + 3x.$$

Алгебраических методов решения такого уравнения нет, но, учитывая то, что график функции $y = 2^x$ является выпуклым, существует три случая взаимного расположения графика $y = 2^x$ и прямой: не имеют общих точек, есть одна общая точка, есть две общие точки. Подбором легко найти два решения уравнения: $x = -1$ и $x = 1$. Значения функций, например функции $y = 2^x$, в этих точках равны следующим числам:

$$y(-1) = 1/2, \quad y(1) = 2.$$

Таким образом, получили две точки пересечения графиков: $M_1(-1; 0{,}5)$ и $M_2(1; 2)$. Изобразим границы фигуры на чертеже (рис. 4.7) и закрасим фигуру. При вращении фигуры вокруг оси Ox получается тело вращения, объем которого можно вычислить, применяя формулу (4.4).

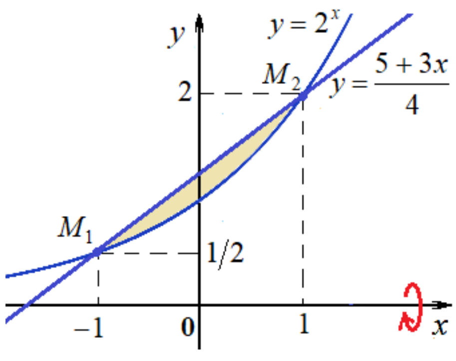


Рис. 4.7

Но эта формула работает, если вращается криволинейная трапеция, но фигура, изображенная на рис. 4.7, криволинейной трапецией не является. Тогда искомый объем можно рассматривать как разность объемов, полученных при вращении трапеций, ограниченных сверху графиками $y=(5+3x)/4$ (прямоугольная трапеция) и $y=2^x$ (криволинейная трапеция). Причем прямая $4y=5+3x$ на участке $x\in[-1;1]$ лежит выше графика $y=2^x$, поэтому из объема, полученного при вращении прямоугольной трапеции, следует вычитать объем, полученный при вращении криволинейной трапеции. Абсциссы точек M_1 и M_2 являются пределами интегрирования: $a=-1$, $b=1$. Таким образом, по формуле (4.4) и по свойствам неопределенного интеграла имеем

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{5+3x}{4}\right)^2dx-\pi\int_{-1}^{1}\left(2^x\right)^2dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{(5+3x)^2}{16}-2^{2x}\right)dx.$$

Вычислим интеграл:

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{(5+3x)^2}{16}-2^{2x}\right)dx=\pi\int_{-1}^{1}\left(\frac{9x^2+30x+25}{16}-2^{2x}\right)dx=$$

$$=\pi\left(\frac{3}{16}x^3+\frac{15}{16}x^2+\frac{25}{16}x-\frac{1}{2\ln 2}2^{2x}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\pi\left(\frac{3}{16}+\frac{15}{16}+\frac{25}{16}-\frac{2}{\ln 2}\right)-$$

$$-\pi\left(-\frac{3}{16}+\frac{15}{16}-\frac{25}{16}-\frac{1}{8\ln 2}\right)=\pi\left(\frac{7}{2}-\frac{15}{8\ln 2}\right)\approx 2{,}51.$$

Искомый объем тела вращения равен $V=\pi(28\ln 2-15)/8\ln 2\approx 2{,}51$.

Задание 4.3. Найдите площадь поверхности, образованной вращением дуги плоской кривой $s:(x-3)^2+y^2=4$ вокруг оси Oy.

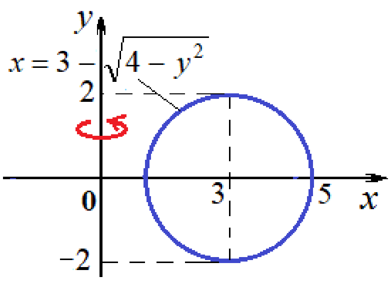


Рис. 4.8

Решение. Кривая s является окружностью с центром в точке $C(3;0)$ и радиусом $R=2$ (рис. 4.8). Если вращать окружность вокруг оси Oy, то получится поверхность, называемая тором. Для того чтобы воспользоваться формулой (4.7), выразим в уравнении окружности переменную x. Получим совокупность двух уравнений:

$$x = 3 - \sqrt{4 - y^2} \text{ или } x = 3 + \sqrt{4 - y^2}\ .$$

Первое уравнение определяет половину окружности, лежащую левее точки $x = 3$, второе уравнение – вторую половину окружности. Поскольку обе полуокружности при вращении описывают одинаковую по площади поверхность, достаточно найти площадь одной поверхности вращения и умножить ее на 2.

Найдем площадь $\tilde{S}$ поверхности, полученной в результате вращения полуокружности $x = 3 - \sqrt{4 - y^2}$, $y \in [-2; 2]$. Пределы интегрирования здесь выбираются в соответствии с чертежом (рис. 4.8) или по области определения функции $x(y)$. В соответствии с формулой (4.7) найдем производную функции $x = 3 - \sqrt{4 - y^2}$ и возведем ее в квадрат:

$$x'(y) = \frac{2y}{2\sqrt{4 - y^2}} = \frac{y}{\sqrt{4 - y^2}}, \quad (x'(y))^2 = \frac{y^2}{4 - y^2}.$$

Подставим найденное выражение в подынтегральную функцию формулы (4.7), получим

$$\tilde{S} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} x(y)\sqrt{1 + (x'(y))^2}\,dy = 2\pi \int_{-2}^{2} \left(3 - \sqrt{4 - y^2}\right)\sqrt{1 + \frac{y^2}{4 - y^2}}\,dy =$$

$$= 2\pi \int_{-2}^{2} \left(3 - \sqrt{4 - y^2}\right)\sqrt{\frac{4}{4 - y^2}}\,dy = 4\pi \int_{-2}^{2} \left(\frac{3}{\sqrt{4 - y^2}} - 1\right)dy.$$

Интеграл можно представить в виде разности табличных интегралов, а затем применить формулу Ньютона–Лейбница. Таким образом, искомая площадь вращения равна

$$S = 2\tilde{S} = 8\pi \int_{-2}^{2} \left(\frac{3}{\sqrt{4 - y^2}} - 1\right)dy = 8\pi\left(3\arcsin\frac{y}{2} - y\right)\Bigg|_{-2}^{2} = 8\pi(3\pi - 4) \approx 136{,}34.$$

Ответы: **4.1.** $S = 2e^2 + 2\ln 2 - 12 \approx 4{,}16$;

4.2. $V = \pi(28\ln 2 - 15)/8\ln 2 \approx 2{,}51$; **4.3.** $S = 8\pi(3\pi - 4) \approx 136{,}34$.

5. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Математической моделью многих процессов, изменяющихся во времени или в пространстве, являются дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения используются почти во всех областях знаний: это физика и механика, информационные технологии, инженерия, биология и медицина, химия, экономика, экология и другие.

Математические модели в виде дифференциальных уравнений составляются на основании знаний процессов и законов соответствующей прикладной науки. Например, составим математическую модель процесса охлаждения или нагрева тела в воздухе, если экспериментально физиками было установлено, что скорость охлаждения (нагрева) тела пропорциональна разности температур тела и воздуха. Введем обозначения: $T(t)$ – температура тела в момент времени t, $T_{\text{в}}$ – температура воздуха, k – коэффициент пропорциональности. Скорость охлаждения тела есть производная температуры по времени: $T'(t)$. Тогда процесс охлаждения тела можно записать в виде

$$T'(t) = k(T - T_{\text{в}}) \tag{5.1}$$

– обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. В этом уравнении $T(t)$ – неизвестная функция. Решить уравнение – значит найти все функции, при подстановке которых в уравнение (5.1) оно обращается в тождество. Оказывается, таких функций бесконечно много. Для данного уравнения все его решения можно собрать в одну функцию

$$T(t) = T_{\text{в}} + Ce^{kt}, \tag{5.2}$$

называемую общим решением уравнения. Здесь C – любое число, при каждом значении C получается конкретное решение дифференциального уравнения, называемое частным решением. Для того чтобы из множества решений выбрать одно, нужно дополнительное условие, называемое начальным условием, например

$$T(0)=T_0 \tag{5.3}$$

– значение температуры в начальный момент времени $t=0$. Подставив числа из начального условия (5.3) в общее решение (5.2), найдем константу C:

$$T_0 = T_{\text{в}} + Ce^{0t} \quad \Rightarrow \quad C = T_0 - T\,.$$

При данном значении C имеем решение дифференциального уравнения (5.1), удовлетворяющее начальным условия (5.3). И чтобы это решение получить, осталось подставить найденное значение C в общее решение (5.2):

$$T(t) = T_{\text{в}} + (T_0 - T_{в})e^{kt}.$$

Функция $T(t)$ есть температура тела в момент времени t при охлаждении, если в начальный момент времени тело было нагрето то температуры T_0.

5.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ФОРМУЛЫ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Обыкновенное дифференциальное уравнение – это уравнение, содержащее производные или дифференциалы неизвестной функции одной переменной. Обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F\left(x,\, y,\, y',\, y'',\, ...,\, y^{(n)}\right)=0\,.$$

Здесь $y(x)$ – неизвестная функция. Порядок уравнения определяется порядком старшей производной. В предлагаемом курсе будут рассматриваться обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядков. Слово «обыкновенные» в дальнейшем будем опускать.

Дифференциальные уравнения первого порядка в общем случае записываются в виде

$$F(x,\, y,\, y')=0\,.$$

Если уравнение удается разрешить относительно производной неизвестной функции, то оно принимает вид $y' = f(x, y)$.

Функция $y(x)$ является решением дифференциального уравнения, если при подстановке этой функции и ее производной в уравнение оно обращается в тождество. Дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений. *Общим решением* дифференциального уравнения первого порядка является такая функция

$$y = \varphi(x, C), \tag{5.4}$$

что при любом значении константы C эта функция становится решением данного дифференциального уравнения, и при любом начальном условии

$$y(x_0) = y_0, \tag{5.5}$$

в котором точка $(x_0; y_0)$ принадлежит области непрерывности функции $f(x, y)$, существует единственная константа $\tilde{C}$, такая что функция $y = \varphi(x, \tilde{C})$ удовлетворяет этим начальным условиям. Иногда множество решений дифференциального уравнения первого порядка не удается получить в виде (5.4), т.е. не удается выразить искомую функцию y через константу C и аргумент x, тогда это множество записывают так:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

и называют *общим интегралом* дифференциального уравнения.

Дифференциальные уравнения второго порядка в общем случае записываются в виде

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

В рассматриваемом курсе математики изучаются линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x). \tag{5.6}$$

Здесь $y(x)$ – неизвестная функция, a_1 и a_2 – числа (коэффициенты), функция $f(x)$ в правой части уравнения известна. Если функция $f(x)$ не равна тождественно нулю, то уравнение называется *неоднородным*, в противном случае – *однородным*. Таким образом, линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Общее решение уравнения (5.6) содержит все решения этого уравнения. Для того чтобы его найти, сначала находят общее решение соотвествующего однородного уравнения в виде

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, а функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ являются решениями однородного дифференциального уравнения, удовлетворяют условию $y_1(x)/y_2(x) \neq \text{const}$ и называются *фундаментальной системой решений*. Затем находят одно решение неоднородного уравнения (5.6) – частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ неоднородного уравнения. Общее решение неоднородного уравнения (5.6), обозначенное как $y_{\text{он}}$, равно сумме общего решения $y_{\text{оо}}(x)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y_{\text{чн}}(x)$ неоднородного уравнения, т.е.

$$y_{\text{он}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_{\text{чн}}(x). \qquad (5.7)$$

Начальные условия для дифференциального уравнения (5.6) включают два равенства:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1,$$

подстановка которых в общее решение (5.6) приводит к системе двух линейных уравнений с неизвестными C_1 и C_2, имеющей единственное решение.

Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего определенным начальным условиям, называется *задачей Коши*. Решение задачи Коши называется *частным решением*.

Процесс решения дифференциальных уравнений часто называют *интегрированием*. Если в задании требуется решить или интегрировать дифференциальное уравнение, это значит найти все его решения.

5.1.1. Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной

$$y' = f(x, y). \qquad (5.8)$$

Способ решения дифференциального уравнения зависит от вида правой части – функции $f(x,y)$.

Если правая часть уравнения (5.8) равна произведению двух функций, одна из которых зависит только от переменной x, а вторая – от переменной y, т.е.

$$f(x,y)=\varphi(x)\cdot g(y),$$

то уравнение (5.8) называют *уравнением с разделяющимися переменными*. Таким образом, уравнение с разделяющимися переменными имеет вид

$$y'=\varphi(x)\cdot g(y). \tag{5.9}$$

Для того чтобы решить уравнение (5.9), эквивалентными преобразованиями разделяют переменные x и y: выражение, содержащее переменную x вместе с ее дифференциалом dx, собирают в одной части равенства в виде произведения, а выражение, содержащее переменную y вместе с ее дифференциалом dy, – в другой части равенства. Для этого представляют производную y' в виде отношения дифференциалов:

$$y'=dy/dx,$$

умножают обе части равенства (5.9) на dx и делят на $g(y)$. В результате равенство (5.9) принимает вид

$$\frac{dy}{g(y)}=\varphi(x)dx.$$

Затем интегрируют обе части равенства и получают общее решение или общий интеграл.

В процессе преобразований может быть потеряно решение $g(y)=0$, так как при делении на $g(y)$ предполагается, что $g(y)\neq 0$. Поэтому требуется дополнительная проверка подстановкой соответствующей функции в исходное уравнение, и если решение действительно потеряно, то его добавляют к общему решению.

Если в уравнении (5.9) расписать производную, как отношение дифференциалов и преобразовать функции $\varphi(x)$ и $g(y)$, то уравнение может быть представлено в виде

$$\varphi_1(x)\cdot g_1(y)dx+\varphi_2(x)\cdot g_2(y)dy=0.$$

В такой записи исходного уравнения его решение начинают сразу с разделения переменных.

Если правая часть уравнения (5.8) преобразуется в функцию $\varphi(y/x)$, то дифференциальное уравнение называется *однородным относительно y и x* и приводится к виду

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{5.10}$$

С помощью подстановки

$$u=\frac{y}{x} \tag{5.11}$$

однородное относительно y и x уравнение (5.10) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными (5.9) с новой неизвестной функцией $u=u(x)$. Действительно, при такой замене имеем

$$y(x)=u(x)x \quad\Rightarrow\quad y'=u'x+u,$$

и уравнение (5.9) принимает вид

$$u'x+u=\varphi(u) \quad \text{или} \quad u'x=\varphi(u)-u.$$

Решив это уравнение, т.е. определив зависимость между u и x, с помощью подстановки (5.11) получим множество решений уравнения (5.10).

Если правая часть уравнения (5.8) имеет вид

$$f(x,y)=-p(x)y+q(x),$$

т.е. уравнение (5.8) можно записать так:

$$y'+p(x)y=q(x), \tag{5.12}$$

то оно называется *линейным дифференциальным уравнением*. Для того чтобы проинтегрировать линейное уравнение, применяется замена

$$y(x)=u(x)\cdot v(x). \tag{5.13}$$

Таким образом, неизвестная функция $y(x)$ заменяется произведением двух новых неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$. Функцию $v(x)$ подбираем так, чтобы уравнение (5.12) преобразовалось в легко интегрируемое дифференциальное уравнение для функции $u(x)$:

$$u'(x)=\varphi(x) \Rightarrow u(x)=\int\varphi(x)dx+C.$$

Весь алгоритм преобразований выглядит следующим образом. Подставим функцию (5.13) и ее производную $y'=u'\cdot v+u\cdot v'$ в уравнение (5.12):

$$u'\cdot v+u\cdot v'+p(x)u\cdot v=q(x),$$

сгруппируем слагаемые, содержащие функцию $u(x)$, вынеся u за скобку:

$$u'\cdot v+u\cdot(v'+p(x)v)=q(x). \tag{5.14}$$

Подберем функцию $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках обратилось в ноль, т.е. найдем одно из решений дифференциального уравнения

$$v'+p(x)v=0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Зная функцию $v(x)$, тождественно не равную нулю, подставим ее в уравнение (5.14) и получим простое уравнение для функции $u(x)$:

$$u'\cdot v(x)=q(x) \Rightarrow u'=\frac{q(x)}{v(x)}.$$

Интегрирование этого равенства позволяет найти множество функций $u(x)$. Подставив функции $u(x)$ и $v(x)$ в выражение (5.13), найдем общее решение линейного дифференциального уравнения (5.12).

Если требуется решить задачу Коши, т.е. исходные данные, кроме дифференциального уравнения (5.8), содержат еще начальное условие (5.5), то сначала находят общее решение (5.4) или общий интеграл исходного уравнения одним из описанных выше методов. Затем из множества найденных функций выбирают одну, подбирая константу *C*. Для этого надо подставить числа x_0 и y_0 из начального условия (5.5) вместо соответствующих переменных в общее решение (5.4) или общий интеграл. Далее из общего решения (5.5) или общего интеграла с найденным значением константы C составляется частное решение, т.е. решение задачи Коши. Рассмотрим решение такой задачи на примере.

Пример 5.1. Решим задачу Коши

$$xy' = y\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right), \quad y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Сначала найдем общее решение или общий интеграл данного дифференциального уравнения. Имеем дифференциальное уравнение первого порядка, однородное относительно y и x. Действительно, если разделить обе части уравнения на x, то уравнение примет вид

$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right),$$

в котором правая часть зависит только от отношения y/x. Поэтому согласно методике решения дифференциального уравнения, однородного относительно y и x, вводим новую переменную

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = u'x + u,$$

подставляем в уравнение, получаем

$$u'x + u = u(1 + \ln u) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u'x = u\ln u. \tag{5.15}$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Представим производную u' в виде отношения дифференциалов и разделим переменные:

$$\frac{du}{dx}x = u\ln u \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}.$$

При разделении переменных произошло деление на выражение $u\ln u$, которое обращается в ноль при $u = 0$ и $u = 1$. Но функция $u = 0$ не принадлежит области определения функции $\ln u$, а функция $u = 1$ является решением дифференциального уравнения (5.15). Действительно, подстановка $u = 1$ в уравнение (5.15) обращает его в тождество.

Интегрируем обе части уравнения с разделенными переменными. Тогда в левой части имеем неопределенный интеграл, который возьмем подведением под знак дифференциала:

$$\int \frac{du}{u\ln u} = \int \frac{d(\ln u)}{\ln u} = \ln|\ln u| + C_1 .$$

В правой части – табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_2 .$$

Приравняем множества первообразных и обозначим $C_3 = C_2 - C_1$, получим

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + C_3 .$$

Для того чтобы избавиться от логарифмов, введем обозначение $C_3 = \ln|C|$ и, учитывая свойство суммы логарифмов, преобразуем равенство:

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + \ln|C| \quad \Rightarrow \quad \ln|\ln u| = \ln|Cx| .$$

Приравниваем выражения под знаками логарифмов и раскрываем модуль:

$$|\ln u| = |Cx| \quad \Leftrightarrow \quad \ln u = \pm Cx .$$

Поскольку константу C можно выбирать любого знака, единственное ограничение: $C \neq 0$, то знак $\pm$ можно опустить. Выразим функцию u из последнего равенства:

$$u = e^{Cx} . \tag{5.16}$$

Учитывая, что функция $u = 1$ также является решением уравнения (5.15), единственное ограничение на константу C снимается, и она может принимать любые действительные значения: $C \in \mathbf{R}$. Итак, функция (5.16) является общим решением уравнения (5.15), $C \in \mathbf{R}$.

Функции $y(x)$ и $u(x)$ связаны равенством $y(x) = u(x)x$, поэтому

$$y = xe^{Cx}$$

– общее решение исходного уравнения, $C \in \mathbf{R}$.

Осталось из общего решения выделить частное решение – решение задачи Коши. Для этого обратимся к начальному условию, которое приведено в постановке задачи и согласно которому при $x=1$ функция $y(x)$ принимает значение $1/\sqrt{e}=e^{-0,5}$. Подставим эти значения переменных x и y в общее решение исходного уравнения и найдем значение константы C:

$$e^{-0,5}=1\cdot e^{C\cdot 1} \quad \Rightarrow \quad C=-0,5.$$

Итак, при $C=-0,5$ из общего решения выделяется частное:

$$y=xe^{-0,5x},$$

которое и является решением поставленной задачи Коши. ▼

Замечание. В примере 5.1 было введено несколько констант: C, C_1, C_2 и C_3. На практике обычно не вводят дополнительных обозначений и дополнительных констант и в силу произвольности постоянной ее всегда обозначают C.

5.1.2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка, рассмотренное в п. 5.1.1, имеет вид

$$y'+p(x)y=q(x).$$

Также выглядит и линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x). \tag{5.17}$$

Рассмотрим метод решения линейного уравнения в случае, когда коэффициенты $p(x)$ и $q(x)$ являются константами, т.е. уравнения вида

$$y''+py'+qy=f(x).$$

Общее решение этого уравнения $y_{\text{он}}(x)$ равно

$$y_{\text{он}}=y_{\text{оо}}(x)+y_{\text{чн}}(x),$$

где $y_{\text{оо}}(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а $y_{\text{чн}}(x)$ – частное решение неоднородного уравнения. Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' + py' + qy = 0$$

имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{5.18}$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – фундаментальная система решений. Для того чтобы найти фундаментальную систему решений однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, составляют *характеристическое уравнение*

$$k^2 + pk + q = 0. \tag{5.19}$$

При составлении характеристического уравнения порядок производной функции $y(x)$ в однородном уравнении заменяется степенью числа k.

Характеристическое уравнение является квадратным алгебраическим уравнением, по корням которого составляют функции фундаментальной системы решений. При решении квадратного уравнения возможны три случая.

1. Дискриминант квадратного уравнения положительный: $D > 0$. Тогда уравнение имеет два действительных различных корня: k_1, k_2. Решениями фундаментальной системы в этом случае являются функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$, а общее решение (5.18) принимает вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}.$$

2. Дискриминант характеристического уравнения равен нулю: $D = 0$. Уравнение имеет два действительных равных корня: $k_1 = k_2 = k$. Фундаментальная система решений в этом случае состоит из функций $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$, общее решение (5.18) однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}.$$

3. Дискриминант характеристического уравнения меньше нуля: $D < 0$. Действительных корней из отрицательного числа не существует, но суще-

ствуют мнимые корни, в основе которых лежит мнимая единица i, основное свойство которой $i^2 = -1$. Так,

$$\sqrt{-16} = \sqrt{(-1)\cdot 16} = 4i .$$

В этом случае корнями характеристического уравнения являются так называемые комплексные числа $\alpha + \beta i$ и $\alpha - \beta i$, где α и β – действительные. Тогда фундаментальная система решений состоит их функций $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{оо}} = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right).$$

Рассмотрим на примерах все случаи построения фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Пример 5.2. Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' - 3y = 0 .$$

Составим характеристическое уравнение (5.19), заменив в дифференциальном уравнении порядок неизвестной функции $y(x)$ степенью числа k:

$$k^2 - 2k - 3 = 0 .$$

Получили квадратное уравнение, дискриминант которого положительный. Найдем решения характеристического уравнения:

$$D = 4 + 12 = 16 > 0, \quad k_1 = \frac{2+4}{2} = 3, \quad k_2 = \frac{2-4}{2} = -1 .$$

Уравнение имеет два различных действительных корня, с помощью которых составим функции фундаментальной системы решений:

$$y_1 = e^{3x},\ y_2 = e^{-x} .$$

Общим решением уравнения является множество функций

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}\ \blacktriangledown .$$

Пример 5.3. Найдем общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 8y' + 16y = 0 .$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 8k + 16 = 0,$$

$$D = 64 - 64 = 0, \quad k_1 = k_2 = k = \frac{8}{2} = 4.$$

Характеристическое уравнение имеет два одинаковых корня или один корень кратности 2, поэтому фундаментальная система решений состоит из функций

$$y_1 = e^{4x}, \; y_2 = xe^{4x}.$$

А общим решением данного линейного однородного дифференциального уравнения является множество

$$y = C_1 e^{4x} + C_2 x e^{4x} = e^{4x}\left(C_1 + C_2 x\right) ▼.$$

Пример 5.4. Найдем общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 20y = 0.$$

Для того чтобы найти фундаментальную систему решений, составим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 4k + 20 = 0.$$

Решим квадратное уравнение:

$$D = 16 - 80 = -64 < 0, \quad \sqrt{D} = \sqrt{-64} = 8i,$$

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm 8i}{2} = 2 \pm 4i.$$

Корнями характеристического уравнения являются комплексные числа, $\alpha \pm \beta i$, здесь $\alpha = 2$, $\beta = 4$. По корням характеристического уравнения составим фундаментальную систему решений:

$$y_1 = e^{2x}\cos 4x, \quad y_2 = e^{2x}\sin 4x.$$

Тогда общим решением исходного уравнения будет множество функций

$$y = e^{2x}\left(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x\right). \; ▼$$

Частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ неоднородного уравнения (5.17) можно найти методом вариации произвольных постоянных, а в случае, когда правая часть $f(x)$ уравнения (5.17) имеет специальный вид, по виду правой части. Метод вариации произвольных постоянных или метод Лагранжа годится для правых частей $f(x)$, но у него есть недостаток – при построении частного решения приходится интегрировать две функции.

По *методу вариации произвольных постоянных* частное решение ищется в виде

$$y_{\text{чн}} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x), \tag{5.20}$$

т.е. оно имеет такой же вид, как и общее решение однородного уравнения, только произвольные постоянные уже не являются константами, они становятся функциями, варьируют. Подставив выражение для $y_{\text{чн}}(x)$ в уравнение (5.17), получим систему для нахождения $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$\begin{cases} C_1'y_1(x) + C_2'y_2(x) = 0, \\ C_1'y_1'(x) + C_2'y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{5.21}$$

Решением системы являются функции $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, первообразные которых (достаточно по одной первообразной) подставляются в равенство (5.20), и таким образом получается частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ неоднородного уравнения (5.17).

Если *правая часть* $f(x)$ неоднородного уравнения (5.17) *имеет специальный вид*, то частное решение этого уравнения можно найти подбором. В заданиях контрольной работы предлагаются линейные дифференциальные уравнения со специальными правыми частями двух типов.

Специальная правая часть первого типа имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(ax^2 + bx + c\right).$$

В частных случаях, если $\alpha = 0$, то остается только многочлен второй степени; если $a = 0$, то в скобках будет линейная функция; если $\alpha = b = 0$, то в скобках будет константа. Частное решение составляется по виду правой части с учетом контрольного числа α. Если число α не совпадает ни с одним корнем характеристического уравнения (5.19), то частное решение ищется в виде

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x}\left(Ax^2 + Bx + C\right),$$

причем степень многочлена $Ax^2 + Bx + C$ совпадает со степенью многочлена в правой части уравнения. Если число α совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)\cdot x,$$

учитывая степень многочлена в правой части уравнения. Если число α совпадает с двумя корнями характеристического уравнения (дискриминант равен нулю, тогда и корни равные), то частное решение ищется в виде

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x}\left(Ax^2 + Bx + C\right)\cdot x^2,$$

здесь степень многочлена $Ax^2 + Bx + C$ должна быть такой же, как и в правой части дифференциального уравнения. Во всех трех случаях коэффициенты *A*, *B* и *C* неизвестны. Для их нахождения частное решение в выбранном виде подставляют в дифференциальное уравнение (5.17), предварительно находят производные первого и второго порядков, а затем в полученном равенстве приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных.

Специальная правая часть второго типа будет представлена в виде

$$f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x.$$

Частное решение составляется по виду правой части с учетом контрольных чисел $\pm i\beta$. Если числа $\pm i\beta$ не совпадают с корнями характеристического уравнения, то частное решение ищется в виде

$$y_{\text{чн}} = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

с неизвестными коэффициентами *A* и *B*. Если же контрольные числа $\pm i\beta$ совпадают с корнями характеристического уравнения, то частное решение будет иметь вид

$$y_{\text{чн}} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)\cdot x,$$

в котором коэффициенты A и B неизвестны. Так же, как и для правой части первого типа, коэффициенты частного решения $y_{\text{чн}}(x)$ находят подстановкой его в исходное уравнение.

Пример 5.5. Найдем частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 5y' + 6y = -2xe^{2x}.$$

Поскольку форма частного решения зависит от корней характеристического уравнения, то сначала составим характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2 - 5k + 6 = 0,$$

$$D = 25 - 24 = 1, \quad k_1 = \frac{5-1}{2} = 2, \quad k_2 = \frac{5+1}{2} = 3.$$

Контрольное число – коэффициент при x в показателе экспоненты $\alpha = 2$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения. Правая часть уравнения $f(x) = -2xe^{2x}$ содержит многочлен первой степени $bx + c = -2x$, поэтому частное решение следует искать в виде

$$y_{\text{чн}} = e^{2x}(Bx + C) \cdot x = e^{2x}\left(Bx^2 + Cx\right),$$

при этом коэффициенты B и C пока неизвестны. Таким образом, составлена форма частного решения.

В целях поиска значений коэффициентов надо подставить $y_{\text{чн}}(x)$ в дифференциальное уравнение. Сначала найдем производные первого и второго порядков частного решения:

$$y'_{\text{чн}} = 2e^{2x}\left(Bx^2 + Cx\right) + e^{2x}(2Bx + C) = e^{2x}\left(2Bx^2 + 2Cx + 2Bx + C\right),$$

$$y''_{\text{чн}} = 2e^{2x}\left(2Bx^2 + 2Cx + 2Bx + C\right) + e^{2x}(4Bx + 2C + 2B) =$$

$$= e^{2x}\left(4Bx^2 + 4Cx + 8Bx + 2B + 4C\right).$$

Подставим $y_{\text{чн}}$, $y'_{\text{чн}}$ и $y''_{\text{чн}}$ в дифференциальное уравнение, получим

$$e^{2x}\left(4Bx^2 + 4Cx + 8Bx + 2B + 4C\right) - 5e^{2x}\left(2Bx^2 + 2Cx + 2Bx + C\right) +$$

$$+ 6e^{2x}\left(Bx^2 + Cx\right) = -2xe^{2x}.$$

Сократим обе части равенства на e^{2x} и приведем подобные:

$$-2Bx + 2B - C = -2x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной x, составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} -2B = -2, \\ 2B - C = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 1, \\ C = 2. \end{cases}$$

Полученные значения коэффициентов подставим в форму частного решения:

$$y_{\text{чн}} = e^{2x}\left(x^2 + 2x\right).$$

Это и есть искомое частное решение. ▼

5.2. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 5.1. Решите задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Таблица 5.1

1	$2xydx + \left(4 - x^2\right)dy = 0,\ y(0) = 4$	**2**	$2xydx + (4 + x^2)dy = 0,$ $y(0) = 2$
3	$y' - 2xy - y = 0,\ y(0) = \sqrt{3}$	**4**	$\sqrt{x}\,dy - y\,dx = dx,\ y(0) = 0$
5	$(1 + e^x)\,y\,y' = e^x,\ y(0) = 1$	**6**	$xy' + y = y^2,\ y(1) = 0{,}5$
7	$\sin^2 x \cos^2 y\,dx - \cos^2 x\,dy = 0,$ $y(0) = \pi/4$	**8**	$\left(1 + y^2\right)x\,dx + \left(1 + x^2\right)dy = 0,$ $y(0) = 1$
9	$y' = (2y + 1)\operatorname{ctg} x,\ y\left(\pi/4\right) = 0{,}5$	**10**	$y' \cdot 3^{x^2} + x \cdot 9^{-y} = 0,\ y(0) = 1$
11	$\left(1 + y^2\right)dx - xydy = 0,\ y(0) = 1$	**12**	$y' \operatorname{ctg} x + y = 2,\ y(0) = -1$
13	$x\,dy + ydx = 3dx,\ y(1) = 0$	**14**	$y' + y\cos x = \cos x,\ y(0) = 3$
15	$\ln\cos y dy + y \operatorname{tg} x dx = 0,$ $y(\pi/3) = \ln 2$	**16**	$3e^x \operatorname{tg} ydx = (1 + e^x)\sec^2 ydy,$ $y(0) = \pi/4$
17	$x^2 y' - 2xy = 3y,\ y(3) = 9$	**18**	$2xy' - y^2 = 1,\ y(1) = 0$
19	$e^{-5y}dx - \sqrt{x}dy = 0,\ y(1) = 0$	**20**	$xy' = y - xy,\ y(1) = 1/e$

21	$(x^2-x^2y)y'+y^2+xy^2=0$, $y(1)=1$	**22**	$y'-(2x+2)\sqrt{1-y^2}=0$, $y(0)=1$
23	$y'\operatorname{ctg}x+y=2$, $y(0)=-1$	**24**	$x\,y'+y=y^2$, $y(1)=0{,}5$
25	$(2x+5)\,dy+y\,dx=0$, $y(0)=1$	**26**	$y'\sqrt{1+x^2}-y=0$, $y(0)=4.$
27	$\dfrac{dx}{x(y-1)}+\dfrac{dy}{y(x+2)}=0$, $y(1)=1$	**28**	$4xdx-3ydy=4x^2ydy-2xy^2dx$, $y(0)=0$
29	$\sqrt{4+y^2}dx-ydy=x^2ydy$, $y(0)=0$	**30**	$x\sqrt{1+y^2}+yy'\sqrt{1+x^2}=0$, $y(0)=\sqrt{3}$

Задание 5.2. Решите дифференциальное уравнение первого порядка, однородное относительно y и x.

Таблица 5.2

1	$y'-\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{\sin(y/x)}=0$	**2**	$y'=4+\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2$
3	$x\cos\dfrac{y}{x}(ydx+xdy)=x^2\sin\dfrac{y}{x}dx$	**4**	$xy'-y=x\operatorname{tg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$
5	$x^2dy+y^2dx=3\left(x^2+y^2\right)dx$	**6**	$\left(x^2+y^2\right)dx-xydy=0$
7	$(x+y)dx+xdy=0$	**8**	$x^2y'=yx+y^2$
9	$y^2+xy=(2x^2+xy)y'$	**10**	$y^2dx=(xy-x^2)dy$
11	$y'-\dfrac{y}{x}=e^{\frac{y}{x}}$	**12**	$x\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)dy-ydx=0$
13	$2xydy+\left(x^2-2y^2\right)dx=0$	**14**	$xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$
15	$\left(xye^{\frac{x}{y}}+y^2\right)dx=x^2e^{\frac{x}{y}}dy$	**16**	$xy'\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)=x+y\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)$
17	$x^2y'+y^2=xyy'$	**18**	$x^2y'=y^2+4xy+2x^2$
19	$y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}$	**20**	$xy'=\dfrac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}$
21	$\left(y^2-2xy\right)dx+x^2dy=0$	**22**	$\left(2x^2-6xy\right)y'=x^2+2xy-5y^2$

23	$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$	**24**	$xy' - y = (x+y)\ln\left(\frac{y}{x}\right)$
25	$2xyy' = y^2 - 4x^2$	**26**	$2xy\,dx + \left(x^2 + 3y^2\right)dy = 0$
27	$x^2 y' = xy + y^2 e^{-\frac{x}{y}}$	**28**	$x\,y'\cos\frac{y}{x} = y\,\cos\frac{y}{x} - x$
29	$y' = \frac{y}{x} + \sin^2\frac{y}{x}$	**30**	$y' = \frac{x+2y}{2x-y}$

Задание 5.3. Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка.

Таблица 5.3

1	$y'\cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$	**2**	$xdy = (x^4 - 2y)dx$
3	$y' + \frac{3y}{x} - \frac{2}{x^3} = 0$	**4**	$y' - \frac{3}{x}y = x$
5	$xy' - y = x^2\cos x$	**6**	$x^3y' + x^2y + x + 1 = 0$
7	$y' + y = e^x\sin x$	**8**	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$
9	$y' + 2\frac{y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$	**10**	$y' + \frac{y}{x+1} + x^2 = 0$
11	$xy' + y = \sin x$	**12**	$y' + xy = x^3$
13	$y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1$	**14**	$y' + \frac{4xy}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}$
15	$x^2y' = 2xy + 3$	**16**	$dy = (x^2 + y)dx$
17	$y'(x^2-1) - xy = x^3 - x$	**18**	$(x+3)y' - y = (x+3)^2(x-3)$
19	$y' - y\operatorname{tg} x = \frac{2x}{\cos x}$	**20**	$y' = 1 + x^2 + \frac{2xy}{1+x^2}$
21	$y' + y\cos x = 2xe^{-\sin x}$	**22**	$\left(1-x^2\right)y' + xy + x^2 = 1$
23	$x\,y' + y = \ln x + 1$	**24**	$xy' = x^3 + y$
25	$y' - y\cdot\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$	**26**	$x\,y' - y = x\ln x$
27	$\left(1+x^2\right)y' = x\,y - y\sqrt{1+x^2}$	**28**	$y' = e^{2x} - e^x y$
29	$y' - \frac{y}{1-x^2} = 1 + x$	**30**	$x\cdot y' - \frac{y}{x+1} = x$

Задание 5.4. Решите задачу Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Таблица 5.4

1	$y''-5y'+6y=x$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=1$	**2**	$4y''-8y'+5y=5\cos x$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=-1/13$
3	$y''+6y'+13y=26x-1$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=1$	**4**	$2y''-y'=1+x$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=1$
5	$y''-4y=2-x$, $y(0)=11/2,\ \ y'(0)=1/4$	**6**	$y''-y=\cos 2x$, $y(0)=-1/5,\ \ y'(0)=1$
7	$y''-2y'+5y=5x^2-4x+2$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=2$	**8**	$y''+3y'-10y=xe^{-2x}$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=0$
9	$y''-2y'=e^x(x^2+x-3)$, $y(0)=2,\ \ y'(0)=2$	**10**	$y''-4y'+4y=\sin x$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=0$
11	$y''-3y'+2y=-e^{-2x}$, $y(0)=1,\ \ y'(0)=0$	**12**	$y''+y=\cos 3x$, $y(\pi/2)=4,\ \ y'(\pi/2)=1$
13	$y''-y=e^{2x}$, $y(0)=1,\ \ y'(0)=2$	**14**	$y''-4y'=3xe^{-x}$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=0$
15	$y''+4y=\sin x$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=0$	**16**	$y''-2y'+2y=2x$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=0$
17	$2y''+y'-y=2e^x$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=1$	**18**	$y''-4y'+3y=e^{5x}$, $y(0)=3,\ \ y'(0)=9$
19	$y''-3y'+2y=(3-4x)\cdot e^{2x}$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=0$	**20**	$y''+6y'+8y=3x^2+2x+1$, $y(0)=17/64,\ \ y'(0)=0$
21	$y''+y=xe^x$, $y(0)=0.5,\ \ y'(0)=1$	**22**	$y''-y=2(1-x)$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=1$
23	$y''-y=9xe^{2x}$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=-5$	**24**	$y''-6y'+9y=e^{3x}$, $y(0)=1,\ \ y'(0)=0$
25	$y''+4y=e^{-2x}$, $y(0)=0,\ \ y'(0)=0$	**26**	$y''-4y'+5y=xe^{2x}$, $y(0)=-1,\ \ y'(0)=0$

27	$y'' - 3y' - 4y = 17\sin x$, $y(0) = 4,\ \ y'(0) = 0$	**28**	$y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3 - 4x)$, $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$
29	$y'' + y = \sin 2x$, $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$	**30**	$y'' + 9y = 10x\sin x$, $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$

Задание 5.5. Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (метод вариации произвольных постоянных).

Таблица 5.5

1	$y'' + 4y' + 4y = \dfrac{e^{-2x}}{x^3}$	**2**	$y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x} + 1$
3	$y'' + 4y = \dfrac{1}{\sin 2x}$	**4**	$y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2x}}$
5	$y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$	**6**	$y'' - y = 0{,}5\left(e^x - e^{-x}\right)$
7	$y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$	**8**	$y'' + 2y' + y = 3e^{-x}\sqrt{x+1}$
9	$y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$	**10**	$y'' - 6y' + 9y = \dfrac{9x^2 + 6x + 2}{x^3(3x-2)} e^{3x}$
11	$y'' - y' = \operatorname{tg} x$	**12**	$y'' - 6y' + 9y = 36\sqrt{x} e^{3x}$
13	$y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$	**14**	$y'' - y = \dfrac{e^{2x}}{e^x - 1}$
15	$y'' - y' = \dfrac{1}{1 + e^x}$	**16**	$y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$
17	$y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{\sqrt{4 - x^2}}$	**18**	$y'' + y = \dfrac{2 + \cos^3 x}{\cos^2 x}$
19	$y'' + y = \operatorname{tg}^2 x$	**20**	$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}\ln x$
21	$y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$	**22**	$y'' - 6y' + 9y = \dfrac{e^{3x}}{x^2 + 1}$
23	$y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$	**24**	$y'' - y = \dfrac{x^2 - 2}{x^3}$
25	$y'' + 9y = \dfrac{1}{\sin^3 3x}$	**26**	$y'' + 3y' = \dfrac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}}$

27	$y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}$	**28**	$y'' + 5y' + 6y = \dfrac{1}{1 + e^{2x}}$
29	$y'' - y = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$	**30**	$y'' - 2y' + y = \dfrac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}} e^{x}$

5.3. РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ВАРИАНТА № 30

Задание 5.1. Решите задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными:

$$x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0,\ y(0) = \sqrt{3}.$$

Решение. Сначала найдем общий интеграл или общее решение дифференциального уравнения. Для этого распишем производную y' как отношение дифференциалов dy/dx и разделим переменные:

$$x\sqrt{1+y^2} + y\frac{dy}{dx}\sqrt{1+x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\sqrt{1+y^2}\,dx = -y\sqrt{1+x^2}\,dy \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = -\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}dy.$$

Переменные x и y разделены. Для этого обе части равенства (уравнения) разделили на $\sqrt{1+x^2}$ и $\sqrt{1+y^2}$. Ни один из этих делителей ни при каких значениях переменных в ноль не обращается, поэтому ни одно из решений не потеряно в результате преобразований.

В уравнении с разделенными переменными интегрируем обе части равенства. При интегрировании левой части получим

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{d\left(x^2/2\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x^2\right)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{2}\int \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(1+x^2\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+x^2} + C.$$

Использован прием подведения под знак дифференциала. Интеграл с переменной y в правой части уравнения такой же. Поэтому

$$\sqrt{1+y^2} = \sqrt{1+x^2} + C. \tag{5.22}$$

Полученное выражение является общим интегралом. Функция $y(x)$ задана этим уравнением неявно.

Решим задачу Коши. Из множества решений (5.22) выберем частное решение. Для этого подставим в это множество функций числа $x=0$ и $y=\sqrt{3}$ из начального условия и найдем значение константы C:

$$\sqrt{1+3}=\sqrt{1+0}+C \quad \Rightarrow \quad C=1.$$

Тогда решением задачи Коши является функция $y(x)$, заданная неявно уравнением

$$\sqrt{1+y^2}=\sqrt{1+x^2}+1.$$

Переменную y можно выразить из уравнения

$$1+y^2=\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2=1+x^2+2\sqrt{1+x^2},$$

и, учитывая знак $y(x)$ по информации в начальном условии,

$$y=\sqrt{1+x^2+2\sqrt{1+x^2}}.$$

Задание 5.2. Решите дифференциальное уравнение первого порядка, однородное относительно y и x:

$$y'=\frac{x+2y}{2x-y}.$$

Решение. Дифференциальное уравнение первого порядка является однородным относительно y и x, если оно может быть приведено к виду (5.10), в котором правая часть уравнения зависит только от отношения y/x. Исходное уравнение записано не форме (5.10), но приводится к ней, потому что числитель и знаменатель дроби в правой части равенства содержат только переменные в одинаковых степенях. Проведем преобразования, разделив числитель и знаменатель дроби на x:

$$y'=\frac{1+2(y/x)}{2-(y/x)}.$$

Уравнение приведено к виду (5.10). Согласно предложенной в теории методике, выполним замену $u=y/x$, тогда

$$y'=u'x+u \quad \text{и} \quad u'x+u=\frac{1+2u}{2-u}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными с новой неизвестной функцией $u(x)$.

Проведем преобразования в уравнении с разделяющимися переменными: оставим в левой части равенства слагаемое, содержащее производную u', второе слагаемое перенесем в правую часть и полученную разность приведем к общему знаменателю:

$$u'x = \frac{1+2u}{2-u} - u \quad \Leftrightarrow \quad u'x = \frac{1+2u-2u+u^2}{2-u} \quad \Leftrightarrow \quad u'x = \frac{1+u^2}{2-u}.$$

В целях разделения переменных представим производную u' в виде отношения дифференциалов du/dx и умножим обе части равенства на dx:

$$\frac{du}{dx}x = \frac{1+u^2}{2-u} \quad \Leftrightarrow \quad xdu = \frac{1+u^2}{2-u}dx.$$

В левой части равенства расположен дифференциал du, поэтому в левую часть переносим с помощью деления или умножения все выражения с переменной u. В правой – дифференциал dx, туда переносим все, что содержит переменную x. В итоге делим обе части равенства на $x \cdot (1+u^2)$, умножаем на $(2-u)$ и получаем

$$\frac{2-u}{1+u^2}du = \frac{dx}{x}. \tag{5.23}$$

Переменные разделены. Выражение $(1+u^2)$ в ноль не обращается, поэтому в процессе преобразований решение не потеряли.

Далее интегрируем обе части равенства (5.23). В левой части имеем интеграл от правильной рациональной дроби, которую преобразуем почленным делением числителя на знаменатель в разность двух дробей:

$$\int \frac{2-u}{1+u^2}du = \int \left(\frac{2}{1+u^2} - \frac{u}{1+u^2} \right) du = 2\int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u}{1+u^2}du.$$

Первый интеграл в полученной разности – табличный, второй возьмем подведением под знак дифференциала переменной u:

$$\int \frac{u}{1+u^2}du = \int \frac{1}{1+u^2} d\left(\frac{u^2}{2}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{d(u^2+1)}{1+u^2} = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) + C.$$

Заметим, что $d\left(u^2+1\right)=d\left(u^2\right)$. Итак, при интегрировании левой части равенства (5.23) имеем

$$\int \frac{2-u}{1+u^2}du = 2\int \frac{du}{1+u^2} - \int \frac{u}{1+u^2}du = 2\operatorname{arctg} u - \frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right)+C.$$

Интегрируем правую часть равенства (5.22):

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

Приравниваем оба интеграла (с точностью до произвольной постоянной) и получаем общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$2\operatorname{arctg} u - \ln\sqrt{u^2+1} = \ln|x| + C. \qquad (5.24)$$

Переменную u в этом равенстве выразить нельзя, поэтому решение оставляем в таком виде.

Вернемся к неизвестной функции $y(x)$, подставив в общий интеграл (5.24) соотношение $u = y/x$:

$$2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \ln\sqrt{\frac{y^2+x^2}{x^2}} = \ln|x| + C.$$

Полученное множество функций является общим интегралом исходного уравнения.

Задание 5.3. Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка:

$$x \cdot y' - \frac{y}{x+1} = x.$$

Решение. Это уравнение является линейным, поскольку при делении обеих частей уравнения на x оно приводится к виду (5.12), при этом $p(x) = -1/\left(x(x+1)\right)$, $q(x)=1$. Для решения таких уравнений используется замена (5.13) неизвестной функции $y(x)$ произведением двух новых неизвестных функций $u(x)$ и $v(x)$, т.е.

$$y(x) = u(x)\cdot v(x). \qquad (5.25)$$

Перейдем в уравнении к новым неизвестным, которое, с учетом того что $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$, примет вид

$$x \cdot (u' \cdot v + u \cdot v') - \frac{u \cdot v}{x+1} = x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot u' \cdot v + u \cdot \left(x \cdot v' - \frac{v}{x+1} \right) = x. \qquad (5.26)$$

Подберем функцию $v(x)$ таким образом, чтобы выражение в скобках обратилось в ноль. Для этого решим дифференциальное уравнение

$$x \cdot v' - \frac{v}{x+1} = 0 \qquad (5.27)$$

и возьмем одно из его ненулевых решений. Уравнение (5.27) является уравнением с разделяющимися переменными. Разделим переменные:

$$x \cdot \frac{dv}{dx} - \frac{v}{x+1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot dv = \frac{v}{x+1} \cdot dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{(x+1)x}.$$

При разделении переменных могли потерять какие-то решения, но поскольку решение выбирается только одно, все решения не интересуют. Проинтегрируем обе части равенства:

$$\int \frac{dv}{v} = \ln|v| + C;$$

$$\int \frac{dx}{(x+1)x} = \int \frac{(x+1) - x}{(x+1)x} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln|x| - \ln|x+1| + C = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C.$$

Правильную рациональную дробь представили в виде разности двух простейших дробей, преобразовав числитель дроби и разделив его почленно на знаменатель. Приравняв результаты интегрирований, получим общее решение уравнения (5.27) и выберем такое решение, у которого $C = 0$. Для упрощения преобразований сразу положим $C = 0$, получим

$$\ln|v| = \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|, \quad v = \frac{x}{x+1}.$$

Функцию $v(x)$, упрощающую уравнение (5.25), подобрали.

Для того чтобы найти множество функций $u(x)$, участвующих в замене (5.25), подставим выбранную функцию $v(x)$ в уравнение (5.26):

$$x \cdot u' \cdot \frac{x}{x+1} = x \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{x+1}{x},$$

с учетом того, что выражение в скобках в равенстве (5.26) обращается в ноль. Получили простейшее дифференциальное уравнение для функции $u(x)$, которое легко интегрируется:

$$u = \int \frac{x+1}{x} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = x + \ln|x| + C.$$

Итак, множество функций $u(x)$ имеет вид

$$u = x + \ln|x| + C.$$

Подставляя $v(x)$ и $u(x)$ в равенство (5.25), получаем общее решение исходного линейного дифференциального уравнения:

$$y(x) = (x + \ln|x| + C) \cdot \frac{x}{x+1},$$

$$y = \frac{x + \ln|x|}{x+1} + \frac{Cx}{x+1}.$$

Задание 5.4. Решите задачу Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью:

$$y'' + 9y = 10x \sin x, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$$

Решение. Прежде чем решать задачу Коши, необходимо найти общее решение $y_{\text{он}}(x)$ данного в задаче линейного неоднородного дифференциального уравнения, которое, согласно приведенной выше теории, есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}(x)$ соответствующего линейного однородного уравнения и частного решения $y_{\text{чн}}(x)$ неоднородного уравнения:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Составим однородное уравнение, соответствующее исходному неоднородному дифференциальному уравнению:

$$y'' + 9y = 0.$$

Для того чтобы найти фундаментальную систему решений этого уравнения, запишем характеристическое уравнение и решим его:

$$k^2+9=0 \quad \Leftrightarrow \quad k^2=-9 \quad \Leftrightarrow \quad k=\pm 3i\,.$$

По корням характеристического уравнения составим фундаментальную систему решений. Здесь $\alpha=0$, $\beta=3$, поэтому

$$y_1=\cos 3x\,, \quad y_2=\sin 3x\,,$$

и общим решением соответствующего однородного уравнения будет множество функций

$$y_{\text{оо}}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x\,.$$

Затем найдем частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ данного в задаче линейного неоднородного уравнения

$$y''+9y=10x\sin x\,. \tag{5.28}$$

Форму частного решения составим по виду правой части $10x\sin x$ уравнения, так как она имеет специальный вид. Поскольку множитель в виде экспоненты в правой части отсутствует, то $\alpha=0$. Коэффициент при x у тригонометрической функции равен $\beta=1$. Контрольное число $\alpha\pm i\beta=\pm i$ не совпадает с корнями $k=\pm 3i$ характеристического уравнения, поэтому частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y_{\text{чн}}=(Ax+B)\cos x+(Mx+N)\sin x\,.$$

Заметим, что, несмотря на отсутствие в правой части функции $\cos x$, в частном решении функция $\cos x$ присутствует наряду с функцией $\sin x$ и множителем – многочленом первой степени. Остается найти четыре коэффициента: *A*, *B*, *M* и *N*. Применим метод неопределенных коэффициентов, описанный в примере 5.5. Найдем производные первого и второго порядков построенной функции $y_{\text{чн}}(x)$:

$$y'_{\text{чн}}=A\cos x-(Ax+B)\sin x+M\sin x+(Mx+N)\cos x=$$
$$=(Mx+N+A)\cos x+(M-Ax-B)\sin x;$$
$$y''_{\text{чн}}=M\cos x-(Mx+N+A)\sin x-A\sin x+(M-Ax-B)\cos x=$$
$$=(2M-Ax-B)\cos x-(Mx+N+2A)\sin x\,.$$

Подставим производную второго порядка $y''_{\text{чн}}(x)$ и функцию $y_{\text{чн}}(x)$ в неоднородное уравнение (5.28):

$$\begin{aligned}&(2M - Ax - B)\cos x - (Mx + N + 2A)\sin x + \\ &+ 9((Ax + B)\cos x + (Mx + N)\sin x) = 10x\sin x \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \quad (2M + 8Ax + 8B)\cos x + (8Mx + 8N - 2A)\sin x = 10x\sin x.\end{aligned}$$

Поскольку при подстановке частного решения уравнение должно обратиться в тождество, то многочлен при функции $\cos x$ должен быть тождественно равен нулю, а многочлен при функции $\sin x$ должен быть равен $10x$:

$$\begin{cases} 2M + 8Ax + 8B \equiv 0, \\ 8Mx + 8N - 2A \equiv 10x. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных, получаем систему для определения чисел A, B, M и N:

$$\begin{cases} 8A = 0, \\ 2M + 8B = 0, \\ 8M = 10, \\ 8N - 2A = 0, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = -5/16, \\ M = 5/4, \\ N = 0. \end{cases}$$

Таким образом, значения коэффициентов найдены. Запишем частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (5.28):

$$y_{\text{чн}} = -\frac{5}{16}\cos x + \frac{5}{4}x\sin x.$$

Суммируем общее решение $y_{\text{оо}}(x)$ однородного уравнения и частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ неоднородного уравнения и получаем общее решение исходного уравнения (5.28) в виде множества функций

$$y_{\text{он}} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \frac{5}{16}\cos x + \frac{5}{4}x\sin x.$$

Это множество содержит все решения уравнения (5.28).

Решить задачу Коши – значит, выбрать из множества решений уравнения такое, которое удовлетворяет начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Для этого, кроме общего решения $y_{\text{он}}(x)$, понадобится множество производных решений уравнения, т.е. $y'_{\text{он}}(x)$. Найдем эти производные:

$$y'_{\text{он}} = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x + \frac{5}{16}\sin x + \frac{5}{4}\sin x + \frac{5}{4}x\cos x.$$

Далее подставим начальные условия в общее решение и его производную, т.е. положим $x = 0$, $y = 0$, $y(0) = 0$, $y' = 1$. Получим систему двух линейных уравнений с неизвестными C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 - \dfrac{5}{16} = 0, \\ 3C_2 = 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} C_1 = \dfrac{5}{16}, \\ C_2 = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

При составлении системы учли, что $\sin 0 = 0$ и $\cos 0 = 1$. Подставим значения произвольных постоянных в общее решение и получим частное решение, удовлетворяющее начальным условиям, т.е. решение задачи Коши:

$$y = \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{5}{16}\cos x + \frac{5}{4}x\sin x.$$

Задание 5.5. Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (метод вариации произвольных постоянных):

$$y'' - 2y' + y = \frac{4x^2 + 1}{x\sqrt{x}}e^x.$$

Решение. Имеем линейное неоднородное дифференциальное уравнение, общее решение $y_{\text{он}}(x)$ которого есть сумма общего решения $y_{\text{оо}}(x)$ соответствующего однородного уравнения и частного решения $y_{\text{чн}}(x)$ неоднородного уравнения:

$$y_{\text{он}} = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x).$$

Запишем соответствующее однородное уравнение:

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

Его общее решение является линейной комбинацией решений фундаментальной системы. Для того чтобы найти фундаментальную систему, решим характеристическое уравнение:

$$k^2 - 2k + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad k_{1,2} = 1.$$

По корням характеристического уравнения составим фундаментальную систему решений:

$$y_1 = e^x, \ \ y_2 = xe^x .$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения является множество функций

$$y_{\text{оо}} = C_1 e^x + C_2 x e^x ,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Правая часть исходного линейного неоднородного уравнения не имеет специального вида, поэтому частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ неоднородного уравнения ищем методом вариации произвольных постоянных C_1 и C_2. Тогда частное решение можно найти в форме (вообще, частных решений у дифференциального уравнения бесконечно много)

$$y_{\text{чн}} = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x = e^x\left(C_1(x) + xC_2(x)\right),$$

в котором функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$ пока неизвестны. Для поиска производных этих функций, учитывая производные функций фундаментальной системы решений

$$y_1' = e^x, \ \ y_2' = e^x + xe^x ,$$

составим систему (5.21) линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1' \cdot e^x + C_2' \cdot xe^x = 0, \\ C_1' \cdot e^x + C_2' \cdot e^x + C_2' \cdot xe^x = \dfrac{4x^2+1}{x\sqrt{x}} e^x \end{cases}$$

с неизвестными C_1' и C_2'. Решим систему: вычитая из нижнего уравнения верхнее, найдем $C_2'(x)$, а затем из первого уравнения найдем $C_1'(x)$:

$$C_2' \cdot e^x = \frac{4x^2+1}{x\sqrt{x}} e^x \quad \Leftrightarrow \quad C_2' = \frac{4x^2+1}{x\sqrt{x}},$$

$$C_1' \cdot e^x = -C_2' \cdot xe^x \quad \Leftrightarrow \quad C_1' = -xC_2' \quad \Rightarrow \quad C_1' = -\frac{4x^2+1}{\sqrt{x}}.$$

Производные неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ получены. Для того чтобы найти сами функции, интегрируем эти производные:

$$C_1 = -\int \frac{4x^2+1}{\sqrt{x}}dx = -\int\left(4x^{3/2} + x^{-1/2}\right)dx = -\frac{8}{5}x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + \tilde{C},$$

$$C_2 = \int \frac{4x^2+1}{x\sqrt{x}}dx = \int\left(4x^{1/2} + x^{-3/2}\right)dx = \frac{8}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} + \overline{C}\ .$$

Из двух полученных множеств выбираем по одной первообразной:

$$C_1 = -\frac{8}{5}x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x}\,,\quad C_2 = \frac{8}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Подставляем их в форму частного решения:

$$y_{\text{чн}} = e^x\left(-\frac{8}{5}x^2\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + x\left(\frac{8}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right) = e^x\left(\frac{16}{15}x^2\sqrt{x} - \frac{5}{2}\sqrt{x}\right)$$

– частное решение неоднородного уравнения получено.

Суммируем общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения и получаем общее решение исходного линейного неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = y_{\text{он}} = C_1e^x + C_2xe^x + e^x\left(\frac{16}{15}x^2\sqrt{x} - \frac{5}{2}\sqrt{x}\right),$$

$$y = e^x\left(C_1 + xC_2 + \frac{16}{15}x^2\sqrt{x} - \frac{5}{2}\sqrt{x}\right).$$

Ответы: **5.1.** $y = \sqrt{1 + x^2 + 2\sqrt{1 + x^2}}$;

5.2. $2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \ln\sqrt{\frac{y^2 + x^2}{x^2}} = \ln|x| + C$; **5.3.** $y = \frac{x + \ln|x|}{x+1} + \frac{Cx}{x+1}$;

5.4. $y = \frac{5}{16}(\cos 3x - \cos x) + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{5}{4}x\sin x$;

5.5. $y = e^x\left(C_1 + xC_2 + \frac{16}{15}x^2\sqrt{x} - \frac{5}{2}\sqrt{x}\right)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие «Высшая математика для заочников. Ч. 2» предназначено для студентов заочного отделения технических вузов, изучающих математику самостоятельно. Понятная структура, логичное изложение, подробный разбор решений задач и практическая направленность делают пособие удобным в использовании, особенно для тех, кто сталкивается с высшей математикой впервые после школы.

Теоретическая часть представлена в кратком объеме, но достаточном для решения задач и выполнения контрольных заданий. Отличительной особенностью издания как учебного пособия по математике является отсутствие строгих формулировок математических фактов, тем не менее подробное объяснение существа изучаемого предмета и иллюстрирующие примеры позволяют понять идею применения математического аппарата для решения задач. В каждой главе в помощь студенту приведен подробный разбор типового варианта контрольных заданий.

Требования к выполнению контрольной работы студентами заочной формы обучения и образец оформления решений контрольных заданий приведены в учебном пособии [3]. Решения всех заданий должны быть верные, полные и обоснованные, все необходимые преобразования и вычисления должны присутствовать.

Учебное пособие может быть полезным и студентам очного отделения, желающим в кратком и доступном виде познакомиться с основными разделами курса высшей математики технического вуза. Авторы надеются, что данное пособие станет для студентов помощником на пути к освоению сложной, но важной науки, опорой в учебе и первым шагом к формированию аналитического мышления, столь необходимого в любой профессиональной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жуковская, Т. В. Высшая математика с элементами творческого обучения (web-формат) [Электронный ресурс, мультимедиа] : учебное пособие / Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, А. И. Урусов. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2019.
2. Жуковская, Т. В. Высшая математика в примерах и задачах [Электронный ресурс] : учебное пособие : в 2 ч. / Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, А. И. Урусов. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2017. – Ч. 1.
3. Жуковская, Т. В. Высшая математика для заочников [Электронный ресурс] : учебное пособие : в 2 ч. / Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, Д. Н. Протасов. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2025. – Ч. 1.
4. Мышкис, А. Д. Лекции по высшей математике : учебное пособие / А. Д. Мышкис. – СПб. : Лань, 2021. – 688 с.
5. Применение математических знаний в профессиональной деятельности : пособие для саморазвития бакалавра : в 4 ч. Ч. 3. Математический анализ : учебное пособие / Н. П. Пучков, Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова и др. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 80 с.
6. Задачник по высшей математике для вузов : учебное пособие / В. Н. Земсков, С. Г. Кальней, В. В. Лесин, А. С. Поспелов. – СПб. : Лань, 2021. – 512 с.
7. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебник для вузов / В. С. Шипачев. – М. : Высшая школа. 1996. – 479 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное электронное издание

ЖУКОВСКАЯ Татьяна Владимировна
ЗАБАВНИКОВА Татьяна Юрьевна
ПРОТАСОВ Дмитрий Николаевич

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЗАОЧНИКОВ

Учебное пособие

В ДВУХ ЧАСТЯХ

ЧАСТЬ 2

Редактор Л. В. Комбарова
Графический и мультимедийный дизайнер Т. Ю. Зотова
Обложка, упаковка, тиражирование Л. В. Комбаровой

ISBN 978-5-8265-3017-7

9 785826 530177

Подписано к использованию 07.04.2026.
Тираж 50 шт. Заказ № 50

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106/5
, помещение 2, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08.
E-mail: izdatelstvo@tstu.ru