

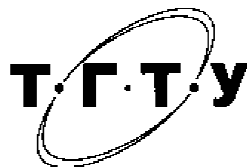
ТЕОРИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

ТАМБОВ
• ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ФГБОУ ВО «ТГТУ» •
2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический университет»

ТЕОРИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания для магистрантов 1 курсов направлений подготовки
11.04.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи»,
11.04.03 «Конструирование и технология электронных средств»,
13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника»
всех форм обучения



УДК 519.86(075.8)
ББК 22.183.5я73
ТЗЗ

Рекомендовано Методическим советом университета

Р е ц е н з е н т
Доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой «Биомедицинская техника»
ФГБОУ ВО «ТГТУ»
С. В. Фролов

ТЗЗ **Теория** измерительного эксперимента [Электронный ресурс] : методические указания / сост. : Т. И. Чернышова, М. А. Каменская. – Тамбов : Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ», 2023. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Системные требования : ПК не ниже класса Pentium II ; CD-ROM-дисковод ; 00,0 Mb ; RAM ; Windows 95/98/XP ; мышь. – Загл. с экрана.

Изложены элементы теории планирования эксперимента и рассмотрено применение дисперсионного, корреляционно-регрессионного анализа, а также планов первого порядка многофакторного эксперимента при решении различных инженерных задач.

Предназначены для магистрантов 1 курсов направлений подготовки 11.04.02 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 11.04.03 «Конструирование и технология электронных средств», 13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника» всех форм обучения.

УДК 519.86(075.8)
ББК 22.183.5я73

*Все права на размножение и распространение в любой форме остаются
за разработчиком.*

Нелегальное копирование и использование данного продукта запрещено.

© Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тамбовский государственный технический
университет» (ФГБОУ ВО «ТГТУ»), 2023

ВВЕДЕНИЕ

Экспериментальные исследования широко применяются на всех стадиях разработки, производства и эксплуатации различных технических объектов. При создании электронных и электротехнических устройств основные затраты приходятся на их настройку и испытания.

Теория планирования эксперимента формулирует приемы и способы оптимальной организации исследовательской работы. Овладение основами теории эксперимента и практическими приемами её использования повышает эффективность работы исследователя, позволяет с наименьшими затратами решать многие практически важные исследовательские задачи: построение по опытным данным математической модели объектов, оптимизацию процессов, проверку различных предположений.

В методических указаниях изложены элементы теории планирования эксперимента и рассмотрено применение дисперсионного, корреляционно-регрессионного анализа, а также планов первого порядка многофакторного эксперимента при решении различных инженерных задач.

1. ПОНЯТИЕ О ПЛАНЕ ЭКСПЕРИМЕНТА.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Экспериментом называют целенаправленное воздействие на объект исследования в целях получения о нем достоверной информации.

Планирование эксперимента – это средство построения математических моделей различных процессов в целях повышения эффективности экспериментальных исследований: сокращения времени и средств на проведение эксперимента, повышения достоверности результатов исследования.

Эксперименты классифицируют **по структуре** на:

- *натуральные* – средства экспериментального исследования взаимодействуют непосредственно с объектом исследования;
- *модельные* – экспериментируют не с самим объектом, а с его моделью;
- *модельно-кибернетические (машинные)* – разновидности модельного эксперимента, при котором соответствующие характеристики изучаемого объекта вычисляются с помощью алгоритма на ЭВМ.

По стадии научных исследований различают:

- *лабораторные эксперименты* для изучения общих закономерностей различных явлений и процессов при проверке научных гипотез и теорий;
- *стендовые эксперименты*, которые проводятся при необходимости изучить конкретный процесс, протекающий в исследуемом объекте, определить физические, химические и другие свойства;
- *промышленные эксперименты*, которые обязательны при внедрении нового изделия или процесса, при оптимизации действующего процесса, при проведении контрольно-выборочных испытаний качества выпускаемой продукции.

По характеру постановки задачи для определения модели объекта эксперименты бывают:

- *учитывающие наличие неоднородностей различного вида* (состав материала, изменение во времени и т.п.);
- *рассчитанные на выявление механизма явления* (исследования хорошо организованных объектов при достаточно высоком уровне исходной информации);
- *учитывающие локальную область пространства параметров объекта*, соответствующую экстремуму некоторого критерия оптимальности при наличии временного изменения параметров;

- *учитывающие локальную область пространства параметров объекта, соответствующую экстремуму некоторого критерия оптимальности при отсутствии временного изменения параметров;*
- *учитывающие степень влияния входных переменных на выходные переменные;*
- *позволяющие преобразовать набор переменных объекта исследования;*
- *рассчитанные на прогнозирование поведения объекта исследования.*

По способу проведения различают:

- *пассивный эксперимент*, который основан на регистрации входных и выходных параметров, характеризующих объект исследования, без вмешательства в эксперимент в процессе его проведения. Обработка экспериментальных данных осуществляется только после окончания эксперимента;
- *активный эксперимент*. При использовании методов активного эксперимента математическое описание строится в виде совокупности статических и динамических выходных характеристик объекта, которые регистрируются при подаче на его входы специальных возмущающих воздействий по заранее спланированной программе.

При формировании плана эксперимента важным является использование математических моделей исследуемых объектов.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОБЪЕКТА ИССЛЕДОВАНИЯ

Состояние объекта исследования (рис. 2.1) можно представить зависимостью

$$Y = f(X, U, Z), \quad (2.1)$$

где $X = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ – независимые управляющие (входные) переменные, которые в процессе эксперимента можно целенаправленно изменять (питающее напряжение, технологические режимы и т.п.); $U = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ – контролируемые возмущающие воздействия, которые не допускают целенаправленного изменения в ходе исследования (температура окружающей среды, освещение); $Z = (z_1, z_2, \dots, z_h)$ – неконтролируемые и неуправляемые возмущения, неизвестные исследователю, медленно изменяющиеся во времени случайным образом; $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ – контролируемые или вычисляемые параметры, характеризующие состояние объекта.

Одной из основных задач эксперимента является выявление взаимосвязей между входными и выходными параметрами объекта и представление их в количественной форме в виде математической модели.

Математическая модель представляет собой совокупность уравнений, условий и алгоритмических правил и позволяет получить информацию о процессах, протекающих в объекте, которая может быть использована для управления моделируемым объектом в целях поиска оптимальных условий, а также анализировать и проектировать системы.

Входные параметры, которые оказывают влияние на объект и могут быть измерены, называют факторами.

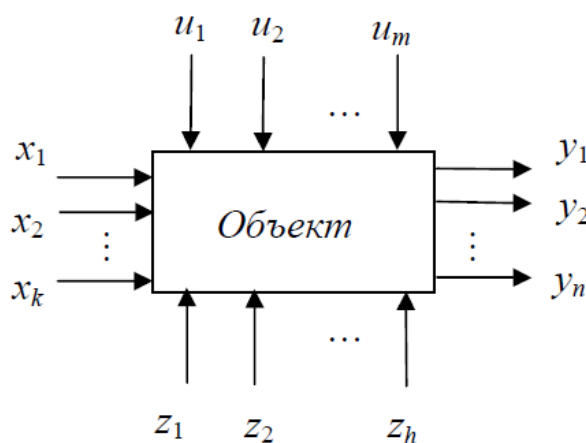


Рис. 2.1. Структурная схема объекта исследования

Фактором называют величину, воздействующую на исследуемый процесс и принимающую в некоторый момент определённое значение. Фактор считается заданным, если указывается область его определения. Под областью определения понимается совокупность всех значений, которые может принимать данный фактор.

Различают *качественные* и *количественные* факторы. Требования к факторам таковы:

- управляемость;
- однозначность.

При планировании эксперимента одновременно изменяются несколько факторов. Требования, предъявляемые к совокупности факторов:

- совместность;
- независимость;
- точность.

Проведение экстремального эксперимента требует определения области эксперимента.

При выборе области определения необходимо учитывать следующие ограничения:

- принципиальные ограничения для значений факторов, которые не могут быть нарушены ни при каких обстоятельствах (например, минимальное температурное значение – абсолютный ноль);
- технико-экономические ограничения (например, стоимость сырья);
- ограничения, определяемые конкретными условиями проведения процесса (например, возможности средств измерения).

Процедура выбора области эксперимента включает два этапа:

- выбор основного (нулевого) уровня;
- выбор интервала варьирования.

Выбранные для эксперимента количественные или качественные состояния фактора называются уровнями фактора.

В качестве нулевой точки выбирают такое состояние объекта исследований, которое принимается за исходное при поиске оптимума.

Оптимизация связана с улучшением состояния объекта по сравнению с его состоянием в нулевой точке. Если проведению эксперимента предшествовали другие исследования в этой же области, то за нулевую принимается точка, в которой параметр оптимизации имеет наилучшее значение, установленное в результате формализации априорной информации. В этом случае нулевыми уровнями факторов являются те значения, сочетания которых соответствуют координатам нулевой точки.

Интервалом варьирования факторов называется некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню даёт верхний, а вычитание – нижний уровни факторов. Другими словами, интервал варьирования – это расстояние на координатной оси между основным (нулевым) и верхним уровнями, между основным и нижним уровнями.

Нижний уровень – это значение фактора, откладываемое в отрицательном направлении оси координат. Верхний уровень – это значение фактора, откладываемое в положительном направлении оси координат. Верхний уровень принято обозначать «+», нижний уровень «-».

На выбор интервала варьирования накладываются ограничения:

- снизу он не может быть меньше ошибки фиксирования уровня фактора;
- сверху верхний или нижний уровень не должен выходить за область определения.

Кроме того, чрезмерное увеличение величины интервалов варьирования нежелательно, так как это может привести к снижению эффективности поиска оптимума. Очень малый интервал варьирования уменьшает область эксперимента, что замедляет поиск оптимума.

При выборе интервала варьирования целесообразно учитывать, если это возможно, число уровней варьирования факторов в области эксперимента. От числа уровней зависят объем эксперимента и эффективность оптимизации. Интервал варьирования факторов – это расстояние на координатной оси между основным (нулевым) и верхним уровнями, между основным и нижним уровнями.

Зависимость числа опытов от числа уровней факторов имеет вид

$$N = p^k, \quad (2.2)$$

где N – число опытов; p – число уровней факторов; k – число факторов.

Число уровней выбирают с учётом условий задачи и предполагаемых методов планирования эксперимента. Геометрической интерпретацией области определения факторов является поверхность отклика (рис. 2.2).

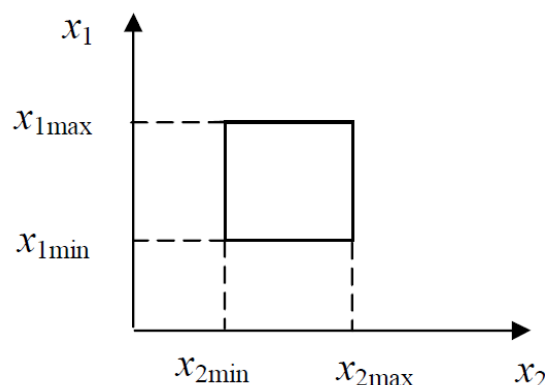


Рис. 2.2. Поверхность отклика для двух факторов

Пространство, в котором строится поверхность отклика, называется факторным пространством. Оно задаётся координатными осями, по которым откладываются значения факторов и параметров оптимизации

Фактор имеет область определения, которая должна быть установлена до проведения эксперимента. Она может быть непрерывной или дискретной.

Каждый из параметров может изменяться в некоторых пределах:

$$x_{iн} \leq x_i \leq x_{iв} \quad (i = 1, 2, \dots, k); \quad (2.3)$$

$$u_{jн} \leq u_j \leq u_{jв} \quad (j = 1, 2, \dots, m); \quad (2.4)$$

$$z_{gн} \leq z_g \leq z_{gв} \quad (g = 1, 2, \dots, h). \quad (2.5)$$

Задача исследователя: при фиксированных параметрах $z_g = \text{const}$ и $u_j = \text{const}$ выбрать такие значения $x_i = \text{var}$ (такую рабочую точку в области работоспособности), при которых выходной (или оптимизируемый) параметр объекта y достигает оптимальной величины, т.е. необходимо оптимизировать функцию $y = f(x_i = \text{var}; u_j = \text{const}; z_g = \text{const})$ в области определения x_i .

Область возможных комбинаций факторов, построенная в многомерном факторном пространстве, называют областью планов эксперимента.

При планировании эксперимента в целях нахождения оптимальных условий в качестве единственной выходной величины рассматривается критерий оптимальности (параметр оптимизации), зависящий от выходных параметров объекта.

Отклик объекта на указанную комбинацию факторов и называют функцией отклика. Геометрический образ в факторном пространстве соответствующей функции отклика называют поверхностью отклика.

В зависимости от источника информации, используемого при построении математической модели, различают физические (аналитические) и статистические (эмпирические) модели.

Физические модели представляют сложные системы уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных или дифференциально-интегральных), позволяющих очень точно описать процессы, протекающие в объекте, и допускающих экстраполяцию в точки факторного пространства, в которых невозможно непосредственное наблюдение этих процессов.

Статистические модели получают в результате статистической обработки экспериментальной информации, собранной об исследуемом объекте. Эти модели имеют относительно простую структуру и часто представляются в виде полиномов. Область их применения ограничивается ближайшей окрестностью рабочих точек, в которых проводятся эксперименты. Принято также различать стационарные и динамические модели.

При проведении эксперимента и анализа результатов могут быть использованы математические модели.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА И ПОГРЕШНОСТИ ЭКСПЕРИМЕНТА

Результат эксперимента представляет собой случайную величину следующей структуры:

$$Y(x) = kx + kF + H, \quad (3.1)$$

где kx – мультипликативная составляющая результата эксперимента (k – коэффициент чувствительности средства изменения (СИ); kF – аддитивная случайная составляющая результата эксперимента, обусловленная возмущением, действующим на измеряемую величину x на входе средства измерений; H – аддитивная составляющая, обусловленная возмущением, действующим на измеряемую величину x на выходе средства измерений [округление (квантование) результата измерения, личные погрешности оператора, выполняющего измерение].

Формирование результата эксперимента, представленного выражением (3.1), можно изобразить в виде структурной схемы (рис. 3.1).

Погрешность результата эксперимента, сформированного по выражению (3.1) равна

$$E(x) = Y(x) - x = kx + kF + H - x = (k - 1)x + kF + H, \quad (3.2)$$

где $(k - 1)x$ – мультипликативная составляющая погрешности; kF – аддитивная случайная составляющая, обусловленная случайным возмущением, действующим на входе средства измерения; H – аддитивная составляющая, обусловленная случайным возмущением, действующим на выходе средства измерений.

Главная особенность мультипликативной погрешности состоит в том, что она зависит от значения измеряемой величины. Причиной её появления состоит в том, что размер единицы величины, воспроизводимой средством измерений, не равна единице.

Особенности аддитивных составляющих погрешности состоят в том, что они не зависят от измеряемой величины. Причинами их появления является аддитивные возмущения, действующие на входе и выходе средства измерений. Они всецело определяются аддитивными составляющими результата измерения.

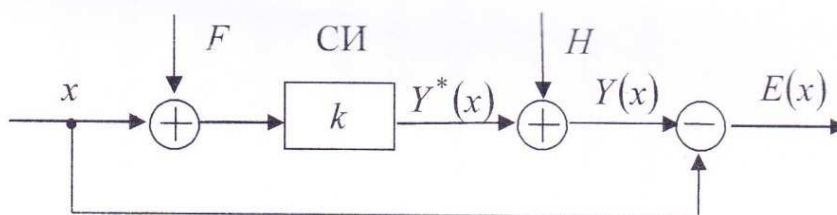


Рис. 3.1. Структурная схема формирования результата и погрешности измерения

4. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Планирование и организация эксперимента включают в себя следующие последовательно выполняемые этапы:

- постановка задачи (определение цели эксперимента, выявление исходной ситуации, оценка допустимых затрат времени и средств, установление типа задачи);
- сбор априорной информации об исследуемом объекте (изучение литературы, опрос специалистов и т.п.);
- выбор способа решения и стратегии его реализации (установление типа модели, выявление возможных влияющих факторов, выявление параметров, выбор целевых функций);
- проверка выбранного способа решения задачи (предварительные эксперименты в целях проверки экспериментальной установки и методики, а также предварительной оценки качества модели);
- реализация выбранного способа решения задачи (уточнение типа экспериментальной установки, определение значения целевой функции и факторов, объемов выборки, кратности повторения опытов и т.д.; завершается этап проведением экспериментов);
- анализ и интерпретация результатов, их представление (получение оценок интересующих экспериментатора величин и определение степени достоверности этих оценок, выражение результатов анализа в терминах и понятиях той области науки или техники, в интересах которой был проведен эксперимент).

5. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ЭКСПЕРИМЕНТА

Типичные задачи, решаемые экспериментатором:

- оценка определённых характеристик изучаемого объекта, проявляющих себя статистически. Такая задача относится к измерительным процессам;
- выявление воздействия на выходную величину тех или иных факторов. Соответствующая экспериментальная процедура называется дисперсионным анализом;
- установление функции отклика, т.е. статистически достоверной зависимости, связывающей отклик с факторами; построение математической модели изучаемого объекта. Это задача регрессионного анализа;
- определение степени взаимной статистической связи двух величин, например, затрат на изучение технической информации и количество изобретений и т.п. Определение степени подобной связи является предметом корреляционного анализа;
- нахождение оптимальных условий протекания процесса, т.е. определение значений факторов, при которых отклик является максимальным (или минимальным). Эта задача решается в ходе выполнения экстремального эксперимента.

Дисперсионный анализ является одним из методов изучения влияния одного или нескольких факторов на результат наблюдений (отклик). Если результаты наблюдения зависят от некоторых независимых факторов, то возможно разделить вклады этих факторов, анализируя соотношения между их дисперсиями. Таким образом, общая дисперсия отклика раскладывается на независимые случайные слагаемые, обусловленные действием независимых факторов, и остаточную дисперсию, связанную с ошибками эксперимента. Решение о существенности влияния некоторого фактора на исход эксперимента зависит от того, насколько значимой является составляющая дисперсии, обусловленная этим фактором, по сравнению с дисперсией, обусловленной ошибкой эксперимента. В зависимости от количества факторов выделяют однофакторный и многофакторный дисперсионный анализ.

Наиболее простым является случай, когда проверяется действие только одного фактора. Для подтверждения наличия связи между признаком, положенным в основу группировки, и результативным признаком необходимо проверить гипотезу о существенности расхождения нескольких средних величин.

Алгоритм проверки гипотезы такого рода изложен в [1].

Пусть все n наблюдений разбиты на k групп. Вариацию, обусловленную влиянием фактора, положенного в основу группировки, характеризует межгрупповая дисперсия δ^2 . Она является мерой вариации частных средних по группам $\bar{x}_j$ вокруг общего среднего $\bar{x}_0$.

Оценка межгрупповой дисперсии определяется по формуле

$$S_{\delta}^2 = \frac{\sum_{j=1}^k (\bar{x}_j - \bar{x}_0)^2 f_j}{k-1}, \quad (5.1)$$

где f_j – число единиц в j -й группе; $\bar{x}_j$ – частное среднее по j -й группе; $\bar{x}_0$ – общее среднее по совокупности единиц.

Вариацию, обусловленную влиянием прочих факторов, характеризует в каждой группе внутригрупповая дисперсия σ_j^2 , её оценка определяется по формуле

$$S_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^{f_j} (\bar{x}_{ij} - \bar{x}_j)^2}{f_j - 1}. \quad (5.2)$$

Оценка средней из внутригрупповых дисперсий определяется как $\bar{\sigma}_j^2$ – среднее СКО.

Между общей дисперсией σ_0^2 , средней из внутригрупповых дисперсий $\bar{\sigma}^2$ и межгрупповой дисперсией δ^2 существует соотношение

$$\sigma_0^2 = \bar{\sigma}_j^2 + \delta^2. \quad (5.3)$$

Если фактор, положенный в основу группировки, не оказывает влияния на вариацию изучаемого признака, то дисперсия групповых средних будет отражать влияние прочих факторов, которые определяют вариацию внутри групп, а поэтому отношение дисперсий будет близко к единице или отличаться от неё в силу присутствия случайных колебаний.

Дисперсионное отношение имеет вид

$$F = \frac{\delta^2}{\sigma^2}. \quad (5.4)$$

Если верна нулевая гипотеза (равенство средних в двух выборках), то можно ожидать сравнительно небольшое различие выборочных средних из-за чисто случайной изменчивости. Поэтому при нулевой гипотезе внутригрупповая дисперсия будет практически совпадать с общей дисперсией, подсчитанной без учёта групповой принадлежности.

Для проверки значимости результата (т.е. случайности или неслучайности отклонения двух дисперсий) учитывается число степеней свободы. Для расчёта межгрупповой дисперсии число степеней свободы равно $d.f1 = k - 1$, а для расчёта внутригрупповой дисперсии $d.f2 = n - k$. Предельный размер отклонений внутригрупповой дисперсии от общей устанавливают по таблицам F -распределения Фишера. Числа в таблице Фишера больше 1, поэтому критическая область всегда правосторонняя, и при вычислении экспериментального значения F бóльшую дисперсию делят на меньшую, чтобы получить значение больше 1.

Если $F > F_T$, то с заданной вероятностью можно утверждать, что между факторным и результативным признаком существует взаимосвязь.

Регрессионный анализ. Важную часть методологии научного исследования составляют методы выявления и измерения связей между физическими величинами. Различают два типа связей: функциональную и статистическую.

Если с изменением значения одной из переменных вторая изменяется строго определённым образом, т.е. значению одной переменной обязательно соответствует одно или несколько точно заданных значений другой переменной, связь между ними является функциональной.

Если с изменением значения одной из переменных вторая может в определённых пределах принимать любые значения с некоторыми вероятностями, но её среднее значение или иные статистические характеристики изменяются по определённому закону, связь является статистической.

Корреляционной связью называют частный случай статистической связи, состоящий в том, что разным значениям одной переменной соответствуют различные средние значения другой (рис. 5.1). С изменением значения признака x закономерным образом изменяется среднее значение признака y ; в то время как в каждом отдельном случае значение признака y (с различными вероятностями) может принимать множество значений.

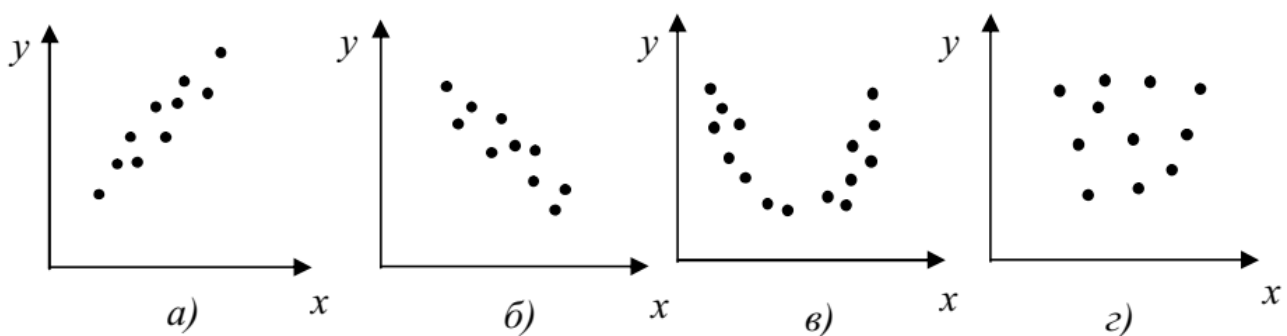


Рис. 5.1. Корреляционные зависимости

Корреляционная связь между признаками может возникать из-за:

- причин зависимости результативного признака (отклика) или его вариации от вариации факторного признака;
- связи между двумя следствиями общей причины.

По характеру корреляционные связи могут быть прямолинейными и криволинейными. Прямолинейной называется такая корреляционная связь, когда равным изменениям одной переменной соответствуют равные изменения другой переменной (рис. 5.1, *а, б*). В случае криволинейной корреляции, равным изменениям одной переменной могут соответствовать любые изменения другой переменной (рис. 5.1, *в*). На рисунке 5.1, *г* представлен случай, когда между переменными отсутствует связь (нет корреляции).

Рассмотрим условия применения и задачи корреляционно-регрессионного анализа. Поскольку корреляционная связь является статистической, первым условием возможности её изучения является общее условие всякого статистического исследования: наличие данных по достаточно большой совокупности явлений. Число наблюдений, достаточное для анализа корреляционной связи, зависит от цели анализа, требуемой точности и надёжности параметров связи, от числа факторов, корреляция с которыми изучается. Обычно считают, что число наблюдений должно быть не менее чем в 5–6, а лучше – не менее чем в 10 раз больше числа факторов.

Корреляционно-регрессионный анализ учитывает межфакторные связи, следовательно, даёт более полное измерение роли каждого фактора: прямое, непосредственное его влияние на результативный признак; косвенное влияние фактора через его влияние на другие факторы; влияние всех факторов на результативный признак.

В соответствии с сущностью корреляционной связи её изучение имеет две цели:

- определение тесноты связи двух (или большего числа) признаков между собой;
- определение параметров уравнения, выражающего связь средних значений зависимой переменной со значениями независимой переменной (зависимость средних величин результативного признака от значений одного или нескольких факторных признаков).

Основным методом нахождения параметров уравнения связи является метод наименьших квадратов (МНК). Он состоит в минимизации суммы квадратов отклонений фактически измеренных значений зависимой переменной y от её значений, вычисленных по уравнению связи с факторным признаком (многими признаками) x .

Корреляционно-регрессионный анализ позволяет разделить влияние комплекса факторных признаков, анализировать различные стороны взаимосвязей.

Простейшей системой корреляционной связи является линейная связь между двумя признаками – парная линейная корреляция. Практическое её значение состоит в том, что существуют системы, в которых среди всех факторов, влияющих на результативный признак, выделяется один важнейший фактор, который в основном определяет вариацию результативного признака. Измерение парных корреляций составляет необходимый этап в изучении сложных многофакторных связей. Рассмотрение линейных связей объясняется ограниченной вариацией переменных и тем, что в большинстве случаев нелинейные формы связей для выполнения расчётов преобразуются в линейную форму.

Уравнение парной линейной корреляционной связи называется уравнением парной регрессии и имеет вид

$$\tilde{y} = a + bx, \quad (5.5)$$

где $\tilde{y}$ – среднее значение результативного признака y при определённом значении факторного признака x ; a – свободный член уравнения; b – коэффициент регрессии, измеряющий среднее отношение отклонения результативного признака от его средней величины к отклонению факторного признака от его средней величины на одну единицу его измерения (вариация y , приходящаяся на единицу вариации x).

Показателем тесноты парной линейной корреляционной связи является коэффициент корреляции r_{xy} . Этот показатель представляет собой стандартизованный коэффициент регрессии, т.е. коэффициент, выраженный не в абсолютных единицах измерения признаков, а в долях СКО результативного признака:

$$r_{xy} = b \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \quad (5.6)$$

где σ_x – СКО по выборке факторного признака x ; σ_y – СКО по выборке результатов эксперимента y .

Интерпретация коэффициента корреляции такова: отклонение признака-фактора от его среднего значения на величину СКО в среднем по совокупности приводит к отклонению результативного признака от своего среднего значения на r_{xy} его СКО. В отличие от коэффициента регрессии b , коэффициент корреляции не зависит от принятых единиц измерения признаков и сравним для любых признаков.

Статистическое изучение корреляционной связи является важной частью корреляционного анализа.

Целью статистического исследования является получение модели зависимости результативного признака от признака-фактора для её практического использования. Решение этой задачи осуществляется в следующем порядке.

1. Осуществляется сбор первичной информации, проверка её на однородность. Устанавливаются результативный показатель y и влияющий на его изменение фактор x .

Для оценки однородности совокупности используется коэффициент вариации по факторному признаку

$$V = \frac{S_x}{\bar{x}} 100\%, \quad (5.7)$$

где $\bar{x}$, S_x – выборочное среднее и оценка СКО факторного признака соответственно, определяемые по формулам, изложенным в [1].

Совокупность считается однородной, если коэффициент вариации V не превышает 33%.

2. Исключаются из массива первичной информации промахи. Определяются и исключаются промахи в соответствии с методикой [1], суть методики состоит в расчёте t -критерия по результатам, представленным в массиве первичной информации и сопоставлении его с табличными значениями. Для последующего анализа формируется новый массив, в случае исключения отдельных элементов первоначальной выборки.

3. Устанавливается факт наличия и направления корреляционной зависимости между результативным и факторным признаками. Для установления наличия корреляционной связи используются методы: аналитической группировки и определения групповых средних, параллельного сопоставления рядов результативного и факторного признака, графического изображения фактических данных с помощью поля корреляции, построения корреляционной таблицы.

Основным методом выявления наличия корреляционной связи является метод аналитической группировки и определения групповых средних. Он заключается в том, что все единицы совокупности разбиваются на группы по величине признака-фактора. и для каждой группы определяется средняя величина результативного признака. На основе данных аналитической группировки строится график эмпирической линии связи (линия регрессии), вид которой не только позволяет судить о возможном наличии связи, но и даёт некоторое представление о форме корреляционной связи. Если эмпирическая линия связи по своему виду приближается к прямой линии, то можно предположить наличие прямолинейной корреляционной связи; если эмпирическая линия приближается к какой-либо кривой, то это связано с наличием криволинейной связи.

4. Проводится измерение степени тесноты связи, оценка её существенности. Для определения степени тесноты парной линейной зависимости служит линейный коэффициент корреляции r . Степень тесноты связи при любой форме зависимости (линейной, криволинейной) оценивают с помощью эмпирического корреляционного отношения по результатам эксперимента y и фактора x .

Расчёт линейного коэффициента корреляции по несгруппированным данным осуществляется по формуле

$$r = \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sqrt{\left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}\right) \left(\sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{n}\right)}}.$$

Линейный коэффициент корреляции может принимать значения в пределах от -1 до $+1$. Чем ближе он по абсолютной величине к 1 , тем теснее связь. Знак при коэффициенте указывает направление связи: знак « $+$ » соответствует прямой зависимости, знак « $-$ » – обратной. Если коэффициент корреляции равен нулю, то связи между признаками нет; если он равен единице, то между признаками существует функциональная связь. Оценка существенности линейного коэффициента корреляции проводится с использованием t -критерия Стьюдента по формуле

$$t = \frac{|r|}{S_r}, \quad (5.8)$$

где S_r – средняя квадратическая ошибка коэффициента корреляции.

При большом объёме выборки (свыше 50)

$$S_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n-1}}. \quad (5.9)$$

При недостаточно большом объёме выборки

$$S_r = \frac{\sqrt{1-r^2}}{\sqrt{n-2}}. \quad (5.10)$$

Критическое значение t_T определяется по таблице распределения Стьюдента для заданного уровня значимости и числа степеней свободы d.f. = $n - 1$ или d.f. = $n - 2$ (в зависимости от объема выборки). Если $t > t_T$, то следует говорить о существенности коэффициента корреляции.

Корреляционное отношение определяется по формуле

$$\eta = \sqrt{\frac{S_{\delta y}^2}{S_y^2}}, \quad (5.11)$$

где $S_{\delta y}^2$ – межгрупповая дисперсия результативного признака, вызванная влиянием признака-фактора; S_y^2 – общая дисперсия результативного признака;

$$S_{\delta y}^2 = \frac{\sum (\bar{y}_i - \bar{y}_0)^2 f_j}{\sum f_j}; \quad (5.12)$$

$$S_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y}_0)^2}{\sum n}, \quad (5.13)$$

здесь $\bar{y}_j$ – среднее значение результативного признака в соответствующих группах, выделенных по величине признака-фактора; $\bar{y}_0$ – общая средняя для всей совокупности; f_j – число единиц в соответствующих группах.

Вычисление корреляционного отношения требует достаточно большого объема информации, которая должна быть представлена в форме групповой таблицы или в форме корреляционной таблицы, т.е. обязательным условием является группировка данных по признаку фактору.

5. Заключительным этапом является построение модели связи. Тип модели выбирается на основе сочетания теоретического анализа и исследования эмпирических данных посредством построения эмпирической линии регрессии. Чаще всего используются следующие типы функций:

- линейная $\tilde{y} = a + bx$;
- гиперболическая $\tilde{y} = a + b \frac{1}{x}$;
- параболическая $\tilde{y}_x = a + bx + cx^2$;
- показательная $\tilde{y}_x = ab^x$.

Для проверки возможности использования линейной функции определяется модуль разности $|\eta^2 - r^2|$; если она менее 0,1, то считается возможным применение линейной функции.

Параметры a и b можно определить по формулам, суммируя x и y по числу экспериментов:

$$a = \tilde{y} - b\bar{x}; \quad b = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}. \quad (5.14)$$

6. ПРОВЕДЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА. ПАРАМЕТРЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Под параметром оптимизации понимают характеристику цели, заданную количественно. Параметр оптимизации является откликом на воздействие факторов. Параметр оптимизации должен:

- быть количественным;
- обладать однозначностью в статистическом смысле;
- быть универсальным и всесторонне отражать характеристики объекта, процесса, явления;
- быть эффективным;
- иметь ясный физический смысл.

Для выбора единого параметра оптимизации применяются математические преобразования, переход от нескольких параметров оптимизации к обобщенному.

Пусть исследуемый объект характеризуют n частных откликов y_u ($u = 1, 2, \dots, n$), каждый из этих откликов имеет свой физический смысл и, чаще всего, разную размерность и измеряется в N опытах. Тогда y_{ui} – это значение u -го отклика в i -м опыте ($i = 1, 2, \dots, N$).

Для объединения откликов необходимо ввести для каждого из них некоторую безразмерную шкалу, которая должна быть однотипной для всех объединяемых откликов. Если каждому y_{ui} присвоить только два значения: 0 – неудовлетворительный результат, 1 – удовлетворительный результат, то таким образом можно стандартизовать шкалу частных откликов. Обобщенный отклик в этом случае также должен принимать одно из этих двух возможных значений. Тогда для построения обобщенного отклика удобно воспользоваться формулой

$$Y_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^n y_{ui}}, \quad (6.1)$$

где Y_i – обобщенный отклик в i -м опыте; Π – произведение частных откликов $y_{1i}, y_{2i}, \dots, y_{ni}$.

Если для каждого из частных откликов известен «идеал» y_{u0} – наилучшее значение u -го отклика, тогда модуль разности $|y_{ui} - y_{u0}|$ можно рассматривать как некоторую меру близости к идеалу. При совпадении с идеалом всех частных откликов в некотором опыте Y_i равно нулю. На практике же различные показатели бывают далеко не равноправны. Устранить этот недостаток можно введением некоторого веса a_u :

$$Y_i = \sqrt{\sum_{u=1}^n a_u \left(\frac{y_{ui} - y_{u0}}{y_{u0}} \right)^2}, \text{ причём } \sum_{u=1}^n a_u = 1 \text{ и } > 0. \quad (6.2)$$

Можно получить более содержательную шкалу желательности. Её назначение – установление соответствия между физическими и психологическими параметрами. Под физическими параметрами понимаются всевозможные отклики, характеризующие функционирование исследуемого объекта, а под психологическими параметрами понимаются субъективные оценки экспериментатора. Стандартные отметки на шкале желательности приведены в табл. 6.1.

Обобщённая функция желательности (рис. 6.1):

$$D_i = \sqrt[n]{\prod_{u=1}^n d_{ui}}, \quad (6.3)$$

где D_i – обобщённая желательность; d_{ui} – частные желательности.

Обобщённая функция желательности может использоваться в качестве критерия оптимизации.

6.1. Стандартные отметки на шкале желательности.

Желательность	Отметки на шкале желательности
Очень хорошо	1,00-0,80
Хорошо	0,80-0,63
Удовлетворительно	0,63-0,37
Плохо	0,37-0,20
Очень плохо	0,20-0,00

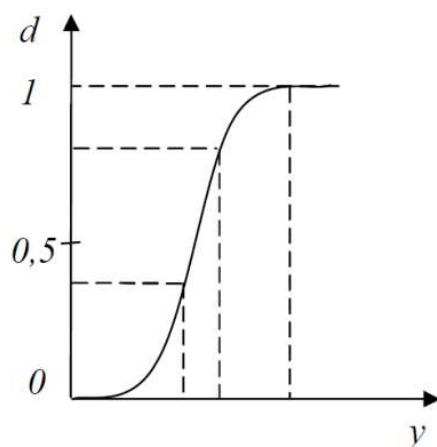


Рис. 6.1. Кривая желательности

7. МНОГОФАКТОРНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В практике научных исследований параметр оптимизации обычно зависит от нескольких факторов. Многофакторные эксперименты проводятся, как правило, для построения линейных полиномиальных моделей. Вид полинома задаётся заранее, а его параметры определяются по экспериментальным данным. Широкое распространение полиномиальных моделей объясняется тем, что исследуемую функцию многих переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ в ограниченной области эксперимента обычно можно разложить в ряд Тейлора.

Например, функция двух переменных $f(x_1, x_2)$, разложенная в ряд Тейлора в окрестности центра плана $x_1 = 0, x_2 = 0$ имеет вид

$$f(x_1, x_2) = f_0 + \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} x_2 \right) + \\ + 0,5 \left(\frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2} x_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} x_1 x_2 + \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^2} x_2^2 \right) + \delta, \quad (7.1)$$

где δ – слагаемые третьего и более высокого порядка.

Введя обозначения $f(x_1, x_2) = y$; $f_0 = \beta_0$:

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_u} = \beta_u, \quad 0,5 \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_u^2} = \beta_{uu} \quad (u = 1, 2); \\ \frac{\partial^2 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \beta_{12}, \quad (7.2)$$

получим

$$y = \beta_0 + \sum_{u=1}^2 \beta_u x_u + \sum_{u=1}^2 \beta_{uu} x_u^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \delta. \quad (7.3)$$

В практических задачах всегда можно ограничиться полиномами, включающими первые степени переменных x_u и их различные произведения или первые и вторые степени переменных и крайне редко – более высокие степени. Если переменная в модели имеет степень $p - 1$, то в эксперименте она должна принимать не менее p значений или уровней.

Полный факторный эксперимент (ПФЭ) – это эксперимент, в котором реализуются все возможные, неповторяющиеся комбинации уровней факторов, каждый из которых варьируется на двух уровнях.

Этапы планирования и реализации ПФЭ:

- выбор параметров оптимизации и уровней их варьирования;
- кодирование факторов;
- составление матрицы планирования эксперимента;
- рандомизация опытов;
- реализация плана эксперимента;
- проверка однородности дисперсий параллельных опытов, воспроизводимости результатов;
- расчёт коэффициентов уравнения регрессии, их ошибок и значимости;
- проверка адекватности модели.

Рассмотрим основные особенности указанных этапов.

Кодирование факторов. Кодирование – это перевод натуральных значений уровней факторов в кодовые безразмерные величины в целях построения стандартной матрицы эксперимента.

Для факторов с непрерывной областью определения кодирование осуществляют по формуле

$$X_u = \frac{x_u - x_{u0}}{\Delta X_u}, \quad (7.4)$$

где X_u – кодовое значение u -го фактора; x_u – натуральное текущее значение u -го фактора; x_{u0} – начальный (нулевой) уровень фактора; ΔX_u – интервал варьирования u -го фактора;

$$\Delta X_u = \frac{x_{u \max} - x_{u \min}}{2}. \quad (7.5)$$

После кодирования уровни факторов принимают значения: +1 – верхний уровень; –1 – нижний уровень; 0 – нулевой уровень. В качестве нулевого уровня принимают центр интервала, в котором предполагается проводить эксперимент. Например, результат кодирования двух факторов x_1 и x_2 можно представить табл. 7.1.

7.1. Кодирование факторов

факторы	x_1	X_1	x_2	X_2
Интервал варьирования	0,75	1	1	1
Верхний уровень	2,5	+1	3	+1
Нижний уровень	1	–1	1	–1
Основной уровень	1,75	0	2	0

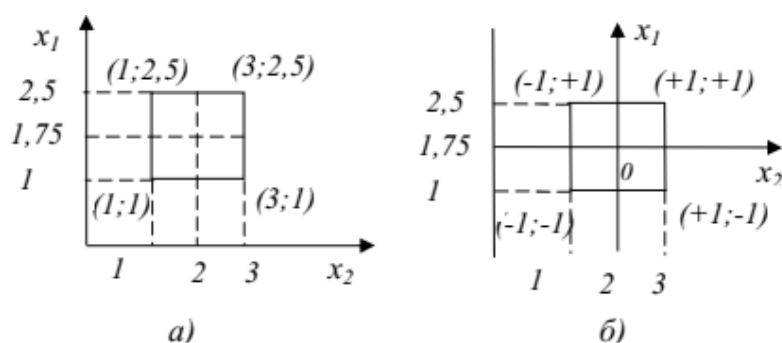


Рис. 7.1. Кодирование факторов уровни факторов до кодирования (а) и после кодирования (б)

Матрица планирования эксперимента. Условия эксперимента обычно записывают в виде матриц планирования эксперимента (табл. 7.2), где строки соответствуют различным независимым опытам, а столбцы – значениям (уровням) факторов. На рисунке 7.2 представлена геометрическая интерпретация ПФЭ.

В общем случае планы типа 2^n геометрически представляют собой совокупность точек, расположенных в вершинах гиперкуба, размещённого в многомерном пространстве. Пространство, заключённое внутри гиперкуба, является областью планирования эксперимента. Существует несколько способов построения матрицы планирования большой размерности. Один из них основан на чередовании знаков: в первом столбце знаки меняются поочерёдно, во втором – через два, в третьем – через четыре и т.д.

7.2. Матрица планирования эксперимента 2^2

Номер опыта	X_1	X_2	y
1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	y_2
3	-1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

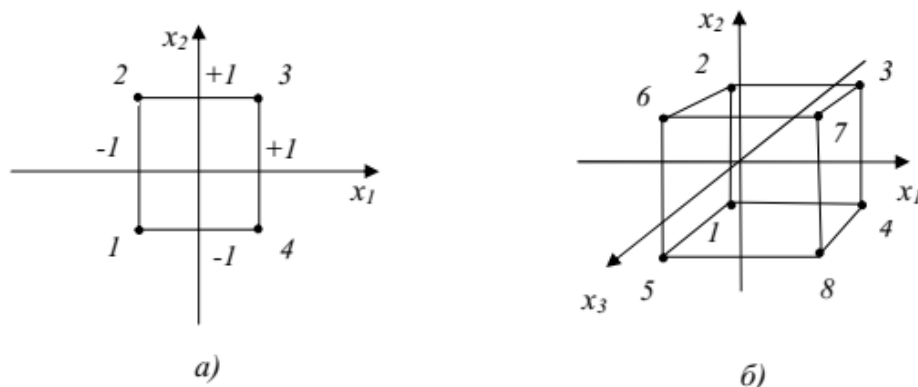


Рис. 7.2. Геометрическая интерпретация ПФЭ:

а – в двухмерном пространстве ($N = 2^2$); б – в трёхмерном пространстве ($N = 2^3$)

7.3. Матрица планирования ПФЭ

Номер опыта	X_1	X_2	X_3	X_4
1	–	–	–	–
2	+	–	–	–
3	–	+	–	–
4	+	+	–	–
5	–	–	+	–
6	+	–	+	–
7	–	+	+	–
8	+	+	+	–
9	–	–	–	+
10	+	–	–	+
11	–	+	–	+
12	+	+	–	+
13	–	–	+	+
14	+	–	+	+
15	–	+	+	+
16	+	+	+	+

В таблице 7.3 представлены матрицы ПФЭ (2^2 , 2^3 , 2^4), построенные по данному способу. Вместо единиц с соответствующими знаками указаны только знаки. Такое обозначение возможно для ПФЭ, построенного на двух уровнях факторов.

ПФЭ относится к числу планов, которые являются наиболее эффективными при построении линейных моделей.

Рандомизация опытов. Чтобы исключить влияние систематических погрешностей, вызванных внешними условиями, применяется метод рандомизации (*random* – случайный), который основан на принципе перевода систематических погрешностей в случайные. Уменьшение систематической погрешности достигается при изменении случайным образом методики и условий проведения опытов. Например, если в плане эксперимента 2^3 предполагается каждое значение параметра оптимизации y определить по двум параллельным опытам, то всего необходимо 16 опытов. Для определения порядка проведения опытов можно воспользоваться таблицей случайных чисел. Выбранную случайным образом последовательность опытов не рекомендуется нарушать.

Проведение эксперимента. При проведении эксперимента для каждого принятого сочетания факторов измеряют значения параметра оптимизации. Следует учитывать, что результаты каждого опыта являются случайными величинами из-за погрешности измерений значений факторов, самого параметра оптимизации, влияния неучтенных факторов. Поэтому если воспроизвести несколько раз опыт при одних и тех же значениях факторов, то каждый раз значение параметра оптимизации будет разным. Обычно стараются при каждом сочетании значений факторов (в каждой точке) провести несколько повторных опытов, которые называются параллельными (дублированными). Дублирование позволяет проверить воспроизводимость эксперимента.

Проверка однородности дисперсии параллельных опытов, воспроизводимости эксперимента. Проверка однородности дисперсии параллельных опытов проводится в целях подтверждения нормального закона распределения погрешности отдельных опытов. В противном случае нельзя приступить к регрессионному анализу – расчёту коэффициентов регрессии, проверке их значимости и проверке адекватности математической модели экспериментальных данных. Проверку однородности при одинаковом числе параллельных опытов проводят с помощью критерия Кохрена (G -критерий). Проверка состоит в следующем:

- определяют дисперсию параллельных опытов

$$S_i^2 = \frac{1}{r-1} \sum_{l=1}^r (y_{il} - \bar{y}_i)^2, \quad (7.6)$$

где $i = 1, 2, K, N$; r – число параллельных опытов, при однократных измерениях принимают $r = 2$;

- вычисляют отношение максимальной дисперсии к сумме всех дисперсий (критерий Кохрена):

$$G = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2}; \quad (7.7)$$

- определяют числа степеней свободы $d.f1 = r - 1$ и $d.f2 = N$;
- выбирают уровень значимости;
- находят по таблицам критическое отклонение $G_T [1]$;
- сравнивают величины G и G_T . Если $G \leq G_T$, то дисперсия однородна.

Если эта проверка дала отрицательный результат, то полученный эмпирический материал использовать для аппроксимации функции не рекомендуется. Следует повторить эксперимент, увеличив при этом число повторений для каждого опыта. В случае однородности дисперсий параллельных опытов рассчитывают дисперсию воспроизводимости и ошибку всего эксперимента. Дис-

персию всего эксперимента получают в результате усреднения дисперсий всех опытов. Эта же дисперсия характеризует и воспроизводимость эксперимента,

$$S^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{l=1}^r (y_{il} - \bar{y}_i)^2}{N(r-1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i^2 \quad (i = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, r). \quad (7.8)$$

Расчёт коэффициентов регрессии, проверка их значимости. Значения коэффициентов регрессии позволяют оценить степень влияния факторов и их взаимодействий на параметр оптимизации. Чем больше числовое значение коэффициента, тем большее влияние оказывает фактор. Если коэффициент имеет знак «+», то с увеличением значения фактора параметр оптимизации увеличивается, а если «-» – уменьшается. Величина коэффициента соответствует вкладу данного фактора в величину параметра оптимизации при переходе значения фактора с нулевого уровня на верхний или нижний. Иногда оценивают линейный (главный) эффект фактора при переходе его значения с нижнего на верхний уровень. Численно он равен удвоенному коэффициенту полиномиальной модели.

При проведении эксперимента получают значения y для каждого опыта и строят математическую модель – уравнение регрессии, которое связывает изучаемый параметр с значениями факторов, лежащих в интервале между верхними и нижними уровнями:

$$y = f(Z_1, Z_2, \dots, Z_n). \quad (7.9)$$

Рассмотрим самый распространённый вид математической модели – полиномиальный. Как было показано выше, для построения математической модели производится кодирование переменных.

Пусть Z_{iH} – нижний уровень i -го фактора; $i = 1, \dots, n$; Z_{iB} – верхний уровень i -го фактора, т.е. все значения $Z_i \in [Z_{iH}, Z_{iB}]$.

Новые кодированные переменные обозначим:

$$x_i = \frac{Z_i - Z_{i0}}{\lambda_i}, \quad (7.10)$$

где Z_{i0} – центр плана эксперимента;

$$Z_{i0} = \frac{Z_{iB} + Z_{iH}}{2}, \quad (7.11)$$

здесь λ_i – интервал варьирования фактора;

$$\lambda_i = \frac{Z_{iB} - Z_{iH}}{2}. \quad (7.12)$$

При таком кодировании все новые переменные будут принимать значения от -1 до $+1$, т.е. $x_i \in [-1, +1]$, $i = 1, \dots, n$.

Линейное уравнение регрессии относительно новых переменных имеет вид

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n. \quad (7.13)$$

Если требуется узнать влияние парных взаимодействий различных факторов на исследуемый параметр, то уравнение регрессии запишется в виде

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + \dots + b_{n-1,n}x_{n-1}x_n. \quad (7.14)$$

В случае учёта других взаимодействий число слагаемых увеличивают. Далее строится матрица планирования относительно новых переменных табл. 7.4.

7.4. Матрица планирования относительно новых переменных

№	Факторы			Взаимодействие факторов			Результаты опытов				Среднее
	X_1	X_2	X_3	X_{12}	X_{13}	X_{23}	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	$\bar{Y}_{x0}$
1	+	+	+	+	+	+	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	$\bar{Y}_1$
2	–	+	+	–	–	+	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	$\bar{Y}_2$
3	+	–	+	–	+	–	Y_{31}	Y_{32}	Y_{33}	Y_{34}	$\bar{Y}_3$
4	–	–	–	+	–	–	Y_{41}	Y_{42}	Y_{43}	Y_{44}	$\bar{Y}_4$
5	+	+	–	+	–	–	Y_{51}	Y_{52}	Y_{53}	Y_{54}	$\bar{Y}_5$
6	–	+	–	–	+	–	Y_{61}	Y_{62}	Y_{63}	Y_{64}	$\bar{Y}_6$
7	+	–	–	–	–	+	Y_{71}	Y_{72}	Y_{73}	Y_{74}	$\bar{Y}_7$
8	–	–	–	+	+	+	Y_{81}	Y_{82}	Y_{83}	Y_{84}	$\bar{Y}_8$

Коэффициенты уравнения регрессии определяются методом наименьших квадратов.

Окончательно как показано [1] для матрицы полного факторного эксперимента 2^n расчётные формулы имеют вид

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \bar{Y}_j; \quad (7.15)$$

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_{ji} \bar{Y}_j; \quad (7.16)$$

$$b_{x,h} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_{jp} X_{jh} \bar{Y}_j, \quad (7.17)$$

где $i = 1, \dots, n$; $x < h$, $x = 1, \dots, n$; $p = 1, \dots, n$.

Проверка значимости коэффициентов регрессии проводится в целях упрощения уравнения регрессии путем исключения статистически незначимых коэффициентов. Проверку можно осуществлять двумя способами: по t -критерию Стьюдента или путём построения доверительного интервала. Для ПФЭ ошибки всех коэффициентов уравнения регрессии одинаковы, $S_{b0} = S_{bn} = S_{bn-1, n}$ доверительные интервалы для всех коэффициентов равны.

Коэффициент регрессий считается значимым, если он по абсолютной величине больше величины доверительного интервала $|b_i| > 2\Delta b$. Величина доверительного интервала рассчитывается, как правило, при помощи критерия Стьюдента $\Delta b = \pm t_T S_b$.

Незначимость коэффициентов может быть обусловлена рядом причин:

- фактор, соответствующий незначимому коэффициенту, не влияет на функцию отклика;
- имеет место большая ошибка;
- выбран малый шаг варьирования независимой переменной;
- экстремум функции по переменной находится вблизи центра планирования.

Если какой-либо коэффициент незначим, он отбрасывается без пересчёта всех остальных коэффициентов. Прежде чем исключить коэффициент, необходимо проанализировать причины, вызвавшие незначимость коэффициента.

Проверка адекватности модели. Данная проверка проводится в целях доказательства пригодности полученного уравнения регрессии для описания экспериментальных данных с заданной точностью. Для этого оценивают отклонения вычисленных по уравнениям регрессии значений функции $\tilde{Y}$ от экспериментально установленных y . Для оценки отклонений используют F -критерий Фишера. Структура критерия и расчётные формулы представлены в [1].

Рассмотрим на примере решение задач по теме полного факторного эксперимента с использованием представленных выше теоретических материалов.

Задача. Проводится ПФЭ 2^3 для установления зависимости отклика от указанных факторов (табл. 7.5). Требуется получить линейное уравнение регрессии.

Таблица 7.5

X_1	60	40	60	40	60	40	60	40
X_2	20	20	80	80	20	20	80	80
X_3	0	0	0	0	10	10	10	10
y	2	3	4	5	4	5	8	7

Решение. Проведено N различных опытов. Имеем ПФЭ 2^3 в натуральных переменных без дублирования опытов. Определим центр плана и интервалы варьирования факторов:

$$X_1^{\max} = 60; X_1^{\min} = 40; X_1^0 = \frac{60+40}{2} = 50; \Delta X_1^0 = \frac{60-40}{2} = 10; \quad (7.18)$$

$$X_2^{\max} = 80; X_2^{\min} = 20; X_2^0 = \frac{80+20}{2} = 50; \Delta X_2^0 = \frac{80-20}{2} = 30; \quad (7.19)$$

$$X_3^{\max} = 10; X_3^{\min} = 0; X_3^0 = \frac{10+0}{2} = 5; \Delta X_3^0 = \frac{10-0}{2} = 5; \quad (7.20)$$

Переходим от натуральных переменных к кодированным:

$$x_1 = \frac{X_1 - 50}{10}; x_2 = \frac{X_2 - 50}{30}; x_3 = \frac{X_3 - 5}{5}. \quad (7.21)$$

Запишем результаты эксперимента в табл. 7.6.

7.6. Результаты эксперимента

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	y
1	+	+	—	—	2
2	+	—	—	—	3
3	+	+	+	—	4
4	+	—	+	—	5
5	+	+	—	+	4
6	+	—	—	+	5
7	+	+	+	+	8
8	+	—	+	+	7

Определим коэффициенты линейного уравнения регрессии в кодированных переменных

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3; \quad (7.22)$$

$$b_0 = \frac{1}{8}(2+3+4+5+4+5+8+7); \quad (7.23)$$

$$b_1 = \frac{1}{8}(2-3+4-5+4-5+8-7); \quad (7.24)$$

$$b_2 = \frac{1}{8}(-2-3-4-5+4+5+8+7); \quad (7.25)$$

$$b_3 = \frac{1}{8}(-2-3-4-5+4+5+8+7). \quad (7.26)$$

Итак, линейное уравнение регрессии в кодированных переменных принимает вид

$$\hat{y} = 4,75 - 0,25x_1 + 1,25x_2 + 1,25x_3. \quad (7.27)$$

В натуральных переменных

$$\hat{y} = 4,75 - 0,25 \frac{x_1 - 50}{10} + 1,25 \frac{x_2 - 50}{30} + 1,25 \frac{x_3 - 5}{5}. \quad (7.28)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Реброва, И. А. Планирование эксперимента : учебное пособие / И. А. Реброва. – Омск : СибАДИ, 2010. – 105 с.
2. Ерещенко, Т. В. Планирование эксперимента [Электронный ресурс] : учебно-практическое пособие / Т. В. Ерещенко, Н. А. Михайлова. – Волгоград : ВолгГАСУ, 2014.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Понятие о плане эксперимента. Классификация экспериментов	4
2. Математическая модель объекта исследования	6
3. Математическая модель формирования результата и погрешности эксперимента	10
4. Основные этапы проведения экспериментальных исследований	11
5. Классификация задач эксперимента	12
6. Проведение экстремального эксперимента. Параметры оптимизации ...	20
7. Многофакторные эксперименты. Полный факторный эксперимент	22
Список литературы	31

Учебное электронное издание

ТЕОРИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Методические указания

Составители:

ЧЕРНЫШОВА Татьяна Ивановна,
КАМЕНСКАЯ Мария Анатольевна

Редактор И. В. Калистратова

Компьютерное макетирование М. А. Евсейчевой

Обложка, упаковка, тиражирование И. В. Калистратовой

Подписано к использованию 20.01.2023.

Тираж 50 экз. Заказ № 4

Издательский центр ФГБОУ ВО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08
E-mail: izdatelstvo@tstu.ru