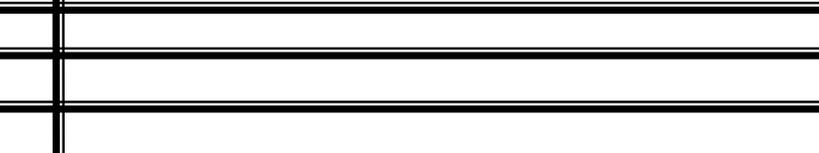




А.Д. НАХМАН

***ЭЛЕМЕНТЫ  
ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ  
КОМПЛЕКСНОГО  
ПЕРЕМЕННОГО***



◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆

УДК 004(075)  
ББК В161.12я73-5  
Н349

Р е ц е н з е н т ы:

Заведующий кафедрой  
Тамбовского государственного университета им. Г.Р. Державина  
доктор физико-математических наук, профессор  
*В.А. Федоров*

Проректор по научно-методической работе Тамбовского областного института повышения квалификации работников образования  
кандидат педагогических наук, доцент  
*Е.И. Азаркова*

Декан факультета информационных технологий  
Тамбовского государственного технического университета, профессор  
*Ю.Ф. Мартемьянов*

**Нахман, А.Д.**

Н349 Элементы теории функций комплексного переменного :  
учебное пособие / А.Д. Нахман. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос.  
техн. ун-та, 2007. – 188 с. – 400 экз. – ISBN 978-5-8265-0611-0.

Изложены основные понятия и факты теории функций комплексного переменного. Материал содержит значительное количество типовых примеров с решениями и упражнений для самостоятельного решения.

Предназначено для студентов, обучающихся по специальности 090105 "Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем".

УДК 004(075)  
ББК В161.12я73-5

ISBN 978-5-8265-0611-0 © ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет" (ТГТУ), 2007

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ГОУ ВПО "Тамбовский государственный технический университет"

**А.Д. Нахман**

# **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

*Допущено Министерством образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности "Комплексное обеспечение информационной безопасности автоматизированных систем"*



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2007

Учебное издание

НАХМАН Александр Давидович

## **ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова  
Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

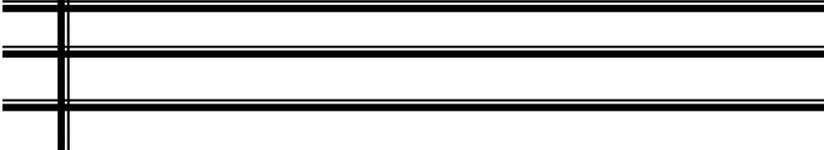
Подписано в печать 02.07.2007.  
Формат 60 × 84/16. 10,93 усл.-печ. л. Тираж 400 экз. Заказ № 445

Издательско-полиграфический центр  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14



**А.Д. НАХМАН**

***ЭЛЕМЕНТЫ  
ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ  
КОМПЛЕКСНОГО  
ПЕРЕМЕННОГО***



**◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆**

# ВВЕДЕНИЕ

В настоящем пособии излагаются основные понятия и факты теории функций комплексного переменного. Изложение ведется в рамках федерального компонента образовательного стандарта в области общих математических и естественнонаучных дисциплин для студентов, обучающихся по специальностям, связанным с компьютерными технологиями и обеспечением информационной безопасности. Высокая востребованность соответствующих специалистов и определенная популярность в молодежной среде всего, что связано с компьютерами, обусловили приток в вузы учащихся с весьма неоднородной математической подготовкой. В связи с этим возникла необходимость в создании разноуровневых учебных пособий, в том числе и направленных на первичное ознакомление с предметом.

Настоящее пособие соответствует указанной цели. Его чтение требует знания, в основном, главных положений дифференциально-интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных. Изложение сопровождается большим количеством примеров, как подробно решенных, так и предлагаемых для самостоятельного решения. Автор стремился к изложению доступному и достаточно краткому, в связи с чем некоторые объемные и сложные доказательства опущены или указаны лишь их идеи. Обращается внимание читателя на те специфические свойства функций, производных, интегралов, которые они приобретают с выходом в комплексную плоскость. Вместе с тем ряд тонких вопросов комплексного анализа опущен вообще или изложен лишь на уровне понятий и перечисления фактов. Такими являются, например, конформные отображения, вычеты относительно бесконечно удаленной точки, аналитическое продолжение и др.

Автор стремился к тому, чтобы материал согласовывался с другими разделами курса математики, мог быть использован в приложениях и соответствовал требованиям, предъявляемым к математической подготовке современных специалистов.

## Глава 1

### КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

#### 1.1. ЗАДАЧА О РАСШИРЕНИИ МНОЖЕСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1<sup>0</sup>. Процесс освоения понятия числа состоит из нескольких этапов.

а) Рассмотрение натуральных чисел, т.е. чисел, употребляемых при счете. Их множество обозначается буквой  $\mathbf{N}$ :  $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ .

б) *Расширение  $\mathbf{N}$*  до множества  $\mathbf{Z}$  всех целых чисел; необходимость такого расширения возникает, так как во множестве  $\mathbf{N}$  не всегда выполнима операция вычитания; например  $(2-5) \notin \mathbf{N}$ . Итак, вводится множество  $\mathbf{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ , при этом  $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$ .

в) *Расширение  $\mathbf{Z}$*  до множества  $\mathbf{Q}$  всех рациональных чисел, т.е. множества всех дробей вида  $\frac{m}{n}$ , где  $m, n \in \mathbf{Z}$ ,  $n \neq 0$ . В классе чисел  $\mathbf{Q}$  (в отличие от  $\mathbf{Z}$ ) всегда выполнимо деление на любое целое  $n$ ,  $n \neq 0$ . Поскольку каждое целое число  $m$  есть дробь со знаменателем, равным единице, то  $\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ . Заметим, что всякое рациональное число есть либо конечная, либо бесконечная периодическая десятичная дробь.

г) Извлечение корня  $n$ -й степени (действие, обратное возведению в натуральную степень) не всегда выполнимо в  $\mathbf{Q}$ .

Дополним множество  $\mathbf{Q}$  всевозможными десятичными непериодическими дробями (иррациональными числами). В полученном множестве  $\mathbf{R}$  всех действительных чисел уже всегда возможно извлечение корня нечетной степени; корень четной степени может быть извлечен из любого *неотрицательного* действительного числа. Ясно, что  $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ . Остается невыполнимым извлечение корня четной степени из отрицательного числа; например  $\sqrt{-1}$  не существует в  $\mathbf{R}$ . Следовательно, требуется дальнейшее *расширение  $\mathbf{R}$*  до такого множества  $\mathbf{C}$ , в котором оказалось бы выполнимым и указанное действие (например, были бы разрешимы квадратные уравнения с отрицательными дискриминантами).

Построением  $\mathbf{C}$  (так чтобы  $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ ) мы и будем заниматься в главе I.

#### 1.2. МНИМАЯ ЕДИНИЦА. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1<sup>0</sup>. В выбранной прямоугольной системе координат точка  $(1, 0)$  соответствует числу 1 на числовой оси абсцисс (оси действительных чисел), а точка  $(0, 1)$  – числу 1 на оси ординат. Чтобы отличать по написанию эти две единицы, последнюю обозначим буквой  $i$  и назовем мнимой единицей. Итак, точка  $(0, 1)$  отождествляется с мнимой единицей; всякое же другое

число оси ординат, отвечающее точке  $(0, y)$ , теперь естественно записать в виде  $yi$  и назвать чисто мнимым числом; сама ось  $OY$  будет далее называться мнимой осью (тогда как  $OX$  – действительная ось).

2<sup>0</sup>. Произвольную упорядоченную пару  $x, y$  действительных чисел ("комплекс" из двух действительных чисел), соответствующую точке  $(x, y)$  координатной плоскости, назовем комплексным числом.

Перейдем к так называемой алгебраической записи (форме) комплексного числа.

3<sup>0</sup>. Произвольная точка  $(x, y)$ , расположенная в прямоугольной системе координат  $XOY$ , есть конец радиус-вектора

$$\vec{z} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \quad (1.2.1)$$

где  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$  – единичные направляющие вектора координатных осей  $OX$  (конец вектора расположен в точке  $1$  этой оси) и  $OY$  (конец вектора  $\vec{e}_2$  расположен в точке  $i$ ). Соответственно, по аналогии с векторной записью (1.2.1) для точки  $z$  с координатами  $(x, y)$  будем употреблять запись

$$z = x + yi \quad (1.2.2)$$

и говорить теперь, что  $z$  – это комплексное число вида (1.2.2).

Итак, между точками  $(x, y)$  и комплексными числами вида (1.2.2) установлено взаимно однозначное соответствие. Сама же плоскость (со введенной в ней прямоугольной системой координат) называется комплексной плоскостью. В частности, для действительного числа  $x$  естественна запись  $x = x + 0 \cdot i$ , что соответствует точке  $(x, 0)$ ; и теперь мы не делаем различия между действительными числами  $x$  и комплексными числами вида  $x + 0 \cdot i$ . Для чисто мнимого  $y \cdot i$ , соответствующего точке

$(0, y)$ , употребима запись  $yi = 0 + yi$ , т.е. любое  $yi \in \mathbf{C}$ .

Итак, множество  $\mathbf{C}$  всех комплексных чисел содержит своим подмножеством  $\mathbf{R}$ .

4<sup>0</sup>. Числа вида  $z = x + yi$  и  $\bar{z} = x - yi$  называются комплексно-сопряженными. Они изображаются точками, симметричными относительно оси  $OX$ , см. рис. 1.2.1.

Модулем комплексного числа называется длина (модуль) радиус-вектора точки  $(x, y)$ , т.е.

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.2.3)$$

В частности, модуль действительного числа  $x = x + 0 \cdot i$  есть  $\sqrt{x^2}$ , т.е. он равен абсолютной величине числа  $x$ ; аналогично

$$|yi| = \sqrt{y^2} = |y|.$$

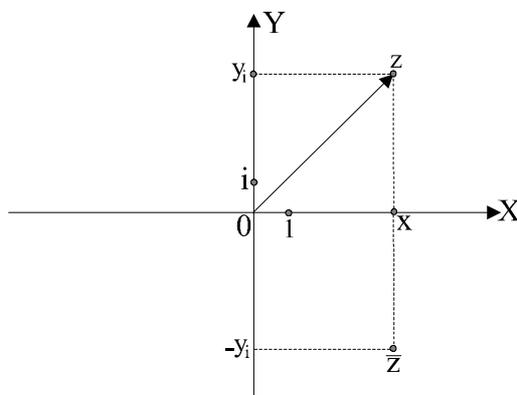


Рис. 1.2.1

5<sup>0</sup>. Действительной частью числа  $z = x + yi$  называется  $x$ , а мнимой частью – число  $y$ ; применяем обозначения  $x = \operatorname{Re} z$ ,  $y = \operatorname{Im} z$ .

Комплексные числа  $z_1 = x_1 + y_1i$  и  $z_2 = x_2 + y_2i$  называются равными, если совпадают их действительные и мнимые части. Другими словами,

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2; \\ y_1 = y_2. \end{cases} \quad (1.2.4)$$

Геометрически соотношение  $z_1 = z_2$  означает совпадение соответствующих точек комплексной плоскости.

Комплексные числа не сравниваются, т.е. во множестве  $\mathbf{C}$  не вводятся отношения "больше" и "меньше".

### 1.3. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

1<sup>0</sup>. В параграфе 1.2 мы отождествили любое комплексное число  $z = x + yi$  с радиус-вектором точки  $(x, y)$ . В связи с этим операция сложения комплексных чисел  $z_1 = x_1 + y_1i$  и  $z_2 = x_2 + y_2i$  вводится по аналогии с такой же операцией над векторами, которая, в свою очередь, выполняется *покоординатно*. Итак, полагаем по определению

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i.$$

Другими словами, сложение комплексных чисел выполняется по такому же правилу, как над многочленами.

Сумма большого количества комплексных чисел находится аналогичным образом: если  $z_k = x_k + y_ki$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), то

$$z = \sum_{k=1}^n z_k \text{ определяется в виде } z = \sum_{k=1}^n x_k + \left( \sum_{k=1}^n y_k \right) i.$$

Поскольку привычные свойства коммутативности и ассоциативности операции сложения справедливы для действительных чисел, они (эти свойства) на основании введенных определений будут сохраняться и для комплексных чисел:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1; \\ (z_1 + z_2) + z_3 &= z_1 + (z_2 + z_3). \end{aligned}$$

2<sup>0</sup>. *Вычитание* комплексных чисел определяется как действие, обратное сложению:

$$z = z_2 - z_1, \text{ если } z_2 = z + z_1.$$

Установим существование, единственность разности и способ ее нахождения. Пусть  $z = x + yi$ , тогда по определению равенства комплексных чисел соотношение

$$x_2 + y_2i = (x + yi) + (x_1 + y_1i)$$

будет означать, что

$$\begin{cases} x_2 = x + x_1; \\ y_2 = y + y_1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x = x_2 - x_1; \\ y = y_2 - y_1. \end{cases}$$

Итак, действительная и мнимая части разности  $z = z_2 - z_1$  определены однозначным образом, при этом получена формула

$$z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i.$$

Имеем аналогию с разностью векторов, вычитание которых выполнялось *покоординатно*. Можно также сказать, что вычитание производится по такому же правилу, как для многочленов.

*Алгебраическая сумма*  $n$  комплексных чисел ( $n > 2$ ) определяется путем выполнения действий в том порядке, в каком они записаны. Например,

$$z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = ((z_1 - z_2) - z_3) + z_4.$$

Однако, и в этом случае действует ассоциативный закон (возможность группировки), так как этот закон справедлив для действительных и для мнимых частей соответствующих комплексных чисел. Так, в приведенном примере возможен и такой порядок действий:

$$z_1 - z_2 - z_3 + z_4 = (z_1 - z_2) + (z_4 - z_3).$$

**Пример:** Вычислить  $|z_1 + z_2 - z_3|$ , если

$$z_1 = -2i, \quad z_2 = 7 + 5i, \quad z_3 = 1 - 5i.$$

*Решение.* Имеем

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 - z_3 &= (z_1 + z_2) - z_3 = ((0 + 7) + (-2 + 5)i) - (1 - 5i) = \\ &= (7 + 3i) - (1 - 5i) = (7 - 1) + (3 + 5)i = 6 + 8i; \\ |z_1 + z_2 - z_3| &= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10. \end{aligned}$$

3<sup>0</sup>. Произведение двух комплексных чисел  $z_1 = x_1 + y_1i$  и  $z_2 = x_2 + y_2i$  определим в виде

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i. \quad (1.3.1)$$

Имеем, в частности, квадрат комплексного числа  $z^2$  (т.е. произведение  $zz$ ) в виде  $z^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ ; следовательно,  $i^2 = 0 - 1 + 0i$ ,  $i^2 = -1$ .

В связи с таким свойством числа  $i$  употребляют запись  $i = \sqrt{-1}$ ; ясно, что  $i \notin \mathbf{R}$ ; теперь становится понятно, почему число  $i$  названо мнимой единицей. Заметим, что умножение (1.3.1) комплексных чисел выполняется по правилу умножения многочленов с заменой  $i^2$  на  $-1$ .

Легко проверить справедливость коммутативного и ассоциативного законов:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= z_2 z_1; \\ (z_1 z_2) z_3 &= z_1 (z_2 z_3), \end{aligned}$$

а также дистрибутивного закона умножения относительно сложения:

$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3.$$

Полезен следующий факт:

$$z \cdot \bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 + (xy - yx)i = x^2 + y^2 = |z|^2. \quad (1.3.2)$$

4<sup>0</sup>. Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Именно,

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \text{ если } z_1 = z z_2, \text{ где } z_2 \neq 0. \quad (1.3.3)$$

Получим формулу, по которой можно найти частное двух комплексных чисел,  $z_1 = x_1 + y_1 i$  и  $z_2 = x_2 + y_2 i$ .

Если  $z = x + yi$ , то на основании определения (1.3.3) мы должны получить

$$x_1 + y_1 i = (x + yi)(x_2 + y_2 i),$$

т.е.

$$x_1 + y_1 i = (xx_2 - yy_2) + i(x_2 y_1 + xy_2)$$

и, по определению равенства комплексных чисел, имеем

$$\begin{cases} x_2 x - y_2 y = x_1; \\ y_2 x + x_2 y = y_1. \end{cases}$$

Осталось найти решение  $(x, y)$  этой системы уравнений; умножив первое уравнение на  $y_2$ , второе на  $(-x_2)$  и сложив их, получим:

$$-(y_2^2 + x_2^2)y = x_1 y_2 - x_2 y_1, \text{ или } y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Аналогично находим:

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

т.е.

$$z = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i. \quad (1.3.4)$$

Формулой (1.3.4) устанавливается не только существование и единственность частного, но также указывается и способ его нахождения. Решая конкретные примеры, можно пользоваться способом одновременного умножения числителя и знаменателя дроби на число, сопряженное знаменателю. Согласно (1.3.2), имеем

$$z = \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2 y_1 - x_1 y_2) i}{x_2^2 + y_2^2},$$

и мы снова получили формулу (1.3.4).

5<sup>0</sup>. Выполняя сложение (вычитание), умножение и деление комплексных чисел, придерживаемся привычных свойств и порядка действий. Например:

$$\begin{aligned} (i-5) \left( 2i + \frac{3}{2+i} \right) &= (i-5) \frac{2i(2+i)+3}{2+i} = (i-5) \frac{4i+2i^2+3}{2+i} = \\ &= \frac{(i-5)(4i+1)}{2+i} = \frac{-9-19i}{2+i} = \frac{-(9+19i)(2-i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-(37+29i)}{4+1} = \frac{-37}{5} - \frac{29}{5} i. \end{aligned}$$

#### 1.4. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

1<sup>0</sup>. Совместим стандартным образом прямоугольную и полярную системы координат: полярную ось направим по оси  $OX$ , полюс системы совмещаем с точкой  $O(0, 0)$ ; выбираем в обеих системах одинаковые единицы масштаба; ось  $OY$  направляем по лучу  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ . В этом случае прямоугольные координаты  $(x, y)$  и полярные координаты  $(\rho, \varphi)$  одной и той же точки  $z$  связаны соотношениями (см. рис. 1.4.1):

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi; \\ y = \rho \sin\varphi. \end{cases}$$

2°. Связь полярных и прямоугольных координат точки  $M$  может быть также представлена в виде

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}; \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно,  $\rho = |z|$  есть модуль числа  $z$ ; число  $\varphi$  назовем аргументом  $z$ . Обозначим через  $\operatorname{arg} z$  одно из возможных значений  $\varphi$ :  $-\pi < \operatorname{arg} z \leq \pi$ ; это значение назовем главным значением аргумента; иногда главное значение рассматриваем в интервале; совокупность всех значений  $\varphi$  имеет вид

$$\text{Очевидно, что } \operatorname{arg}(\pm iy) = \pm \frac{\pi}{2} \text{ (случай } x = 0, y \neq 0),$$

Для точки  $z = 0$  значение аргумента не определено; очевидно, что  $|0| = 0$ .

3°. Умножение, возведение в натуральную степень (т.е. умножение числа  $z$  на себя  $n$  раз) и деление комплексных чисел удобно выполнять, записав эти числа в тригонометрической форме.

Установим формулы:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad (1.4.2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad \rho_2 \neq 0; \quad (1.4.3)$$

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.4.4)$$

Иначе говоря: при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются; при делении – модули делятся, а аргументы вычитаются; при возведении в степень  $n \in \mathbf{N}$  – модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на  $n$ .

Доказательство (1.4.2). По правилу умножения комплексных чисел имеем

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1 \sin\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cos\varphi_2)].$$

В круглых скобках записаны соответственно формулы для косинуса суммы и синуса суммы. Следовательно,

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

что и требовалось.

Доказательство (1.4.3). Пусть  $z = \frac{z_1}{z_2}$ . По определению деления тогда  $z_1 = z z_2$ , а по формуле (1.4.2)

$$\rho_1 (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) = \rho \rho_2 (\cos(\varphi + \varphi_2) + i \sin(\varphi + \varphi_2)),$$

отсюда

$$\begin{cases} \rho_1 = \rho \rho_2; \\ \varphi_1 = \varphi + \varphi_2 + 2\pi k, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2}; \\ \varphi = \varphi_1 - \varphi_2 - 2\pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Итак, частное  $z$  имеет модулем число  $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ , а аргументом (с точностью до  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ ) разность  $\varphi_1 - \varphi_2$ . Это и есть утверждение (1.4.3).

Наконец, последовательно выполняя умножение  $z$  (на себя)  $n$  раз, получаем по формуле (1.4.2):

$$z^n = z \dots z = \rho \cdot \rho \dots (\cos(\varphi + \varphi + \dots) + i \sin(\varphi + \varphi + \dots)) = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

и формула (1.4.4) доказана.

4°. Пример 1. Выполнить в тригонометрической форме следующие действия:

а)  $\frac{z_1}{z_2}$ ; б)  $z_1^4$ , где  $z_1 = -3 + 3i$ ;  $z_2 = -6\sqrt{2}i$ .

*Решение.* а) Найдем модуль и аргумент каждого из чисел  $z_1$  и  $z_2$ . Имеем  $|z_1| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ ,  $\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{3}{-3} = -1$ .

Поскольку точка  $z_1$  расположена во 2-й четверти, то  $\varphi_1 = \arg z_1 = \pi + \operatorname{arctg}(-1) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ . Аналогично,

$|z_2| = \sqrt{0 + (-6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}$ ;  $\operatorname{tg}\varphi_2$  не существует, но по расположению точки  $z_2$  на оси  $OY$  (в нижней полуплоскости) видим, что  $\varphi_2 = \arg z_2 = -\frac{\pi}{2}$ . Следовательно, в тригонометрической форме (см. рис. 1.4.2)

$$z_1 = 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right), \quad z_2 = 6\sqrt{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right).$$

Теперь, согласно формуле (1.4.3),

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \left( \cos \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left( \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) \right).$$

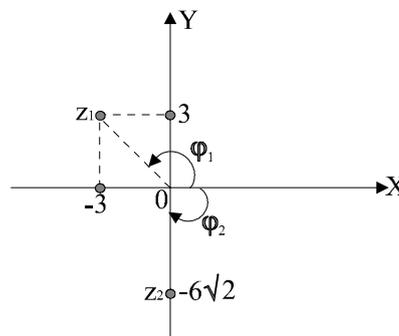


Рис. 1.4.2

Исключая период  $2\pi$  под знаком косинуса и синуса, имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = 0,5 \left( \cos \left( -\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right).$$

б) По формуле (1.4.4) получаем:

$$z_1^4 = (3\sqrt{2})^4 \left( \cos 4 \cdot \frac{3\pi}{4} + i \sin 4 \cdot \frac{3\pi}{4} \right); \quad z_1^4 = 324 (\cos \pi + i \sin \pi).$$

В алгебраической форме  $z_1^4 = -324$ .

**Пример 2.** Выяснить геометрический смысл соотношений:

а)  $|z - z_0| = \rho$ ; б)  $|z - z_0| < \rho$ ; в)  $|z - z_0| > \rho$ ,

где  $\rho > 0$  и  $z_0$  – фиксированное комплексное число; г)  $\arg z = \frac{\pi}{3}$ .

*Решение.* а) Записав  $z = x + yi$ ,  $z_0 = x_0 + y_0i$  и выполняя вычитание, имеем  $|z - z_0| = |(x - x_0) + (y - y_0)i| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ . Следовательно, равенство  $|z - z_0| = \rho$  означает, что  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ . Получили уравнение окружности радиуса  $\rho$  с центром в точке  $(x_0, y_0)$ .

Итак, геометрический образ уравнения  $|z - z_0| = \rho$  – это все точки окружности с центром  $z_0$  радиуса  $\rho$ .

Аналогично  $|z - z_0| < \rho$  означает, что  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \rho^2$ , т.е. геометрическим образом этого неравенства служит множество всех внутренних точек круга;  $|z - z_0| > \rho$  – множество всех точек, расположенных вне круга; центр круга и радиус – те же:  $z_0$  и  $\rho$  соответственно (рис. 1.4.3).

б) Так как  $\varphi = \operatorname{arg} z$  есть угол поворота оси  $OX$  до совмещения с точкой  $z$  ( $-\pi < \varphi \leq \pi$ ), то все точки  $z$ , обладающие свойством  $\operatorname{arg} z = \frac{\pi}{3}$ , лежат на луче  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  (на этом луче исключена точка  $z = 0$ , аргумент которой не определен); см. рис. 1.4.3.

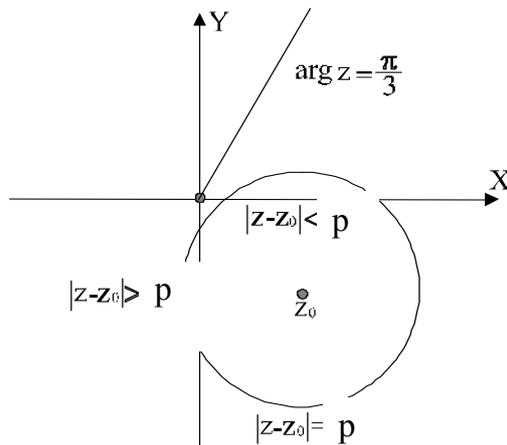


Рис. 1.4.3

### 1.5. ИЗВЛЕЧЕНИЕ КОРНЯ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1<sup>0</sup>. Пусть  $n \in \{2, 3, \dots\}$ . Корнем  $n$ -й степени из числа  $z$  назовем число  $w = \sqrt[n]{z}$ , обладающее свойством  $w^n = z$ . Установим, что при всяком  $z \neq 0$  существует ровно  $n$  различных значений корня, которые имеют вид

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad (1.5.1)$$

здесь  $\rho$  и  $\varphi$  – соответственно, модуль и аргумент числа  $z$ , т.е.  $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ; значение  $\sqrt[n]{\rho}$  понимается как *арифметический* корень из положительного числа  $\rho$ , так что  $\sqrt[n]{\rho} > 0$ .

2<sup>0</sup>. Итак, мы доказываем формулу (1.5.1).

Если  $w = |w|(\cos\Phi + i\sin\Phi)$  – тригонометрическая форма числа  $w$ , то, по определению,  $w^n = z$ , т.е. в силу (1.4.4),

$$|w|^n (\cos n\Phi + i \sin n\Phi) = \rho (\cos\varphi + i \sin\varphi).$$

Значит,  $|w|^n = \rho$ , откуда  $|w| = \sqrt[n]{\rho}$  (имеется в виду принятое во множестве действительных чисел извлечение арифметического корня). Аргументы  $n\Phi$  и  $\varphi$  равных комплексных чисел могут (находясь под знаком косинуса и синуса) отличаться лишь на величину периода  $T = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ , так что

$$n\Phi = \varphi + 2\pi k, \text{ откуда } \Phi = \Phi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}; \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Покажем, что достаточно рассмотреть  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Для этого, прежде всего, выясним, как расположены точки (1.5.1) на комплексной плоскости. Во-первых, все они имеют один и тот же модуль, равный  $\sqrt[n]{\rho}$ , а значит, находятся на окружности с центром в начале координат радиуса  $\sqrt[n]{\rho}$ . Во-вторых, при  $k=0$  точка  $w_0$  имеет полярный угол  $\Phi_0 = \frac{\varphi}{n}$ , а полярный угол следующей точки  $w_1$  отличается на величину  $\frac{2\pi}{n} \cdot 1$ , т.е.  $\Phi_1 = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}$ .

Далее,

$$\Phi_2 = \frac{\varphi + 2\pi \cdot 2}{n} = \left( \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \right) + \frac{2\pi}{n} = \Phi_1 + \frac{2\pi}{n}, \dots, \Phi_{n-1} = \Phi_{n-2} + \frac{2\pi}{n}; \quad \Phi_n = \frac{\varphi}{n} + 2\pi, \dots$$

Таким образом, каждая следующая точка  $w_k$  получается из предыдущей  $w_{k-1}$  поворотом против часовой стрелки на величину  $\frac{2\pi}{n}$ , а точка  $w_n$  совпала с  $w_0$  (совершен поворот на  $2\pi$ ). С дальнейшим ростом  $k$

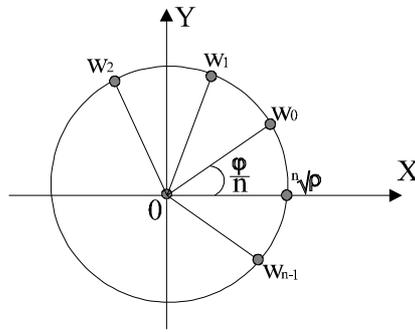


Рис. 1.5.1

опять получаем точки  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$ . При отрицательных  $k$ , т.е.  $k = -1, -2, \dots$  имеем обход тех же точек по часовой стрелке, т.е. в обратном порядке:  $w_{n-1}, w_{n-2}, \dots, w_0$ . Итак, только  $n$  различных точек получаемых, например при  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , соответствуют операции извлечения корня  $n$ -ой степени; см. рис. 1.5.1. Формула (1.5.1) установлена. Заметим, что  $\sqrt[n]{0} = 0$  можно понимать как  $n$  совпадающих значений, равных нулю.

3<sup>0</sup>. Непосредственно из определения корня  $n$ -й степени вытекают привычные свойства соответствующей операции, например,

$$\sqrt[n]{z\eta} = \sqrt[n]{z}\sqrt[n]{\eta}; \quad \sqrt[n]{\frac{z}{t}} = \frac{\sqrt[n]{z}}{\sqrt[n]{t}}, \quad t \neq 0.$$

Эти равенства следует понимать как *совпадение множеств* значений выражений в левых и правых частях.

3<sup>0</sup>. П р и м е р 1. Вычислить  $\sqrt{a^2}$ , где  $a > 0$  – действительное число.

Р е ш е н и е. Запишем число  $a^2$  в тригонометрической форме:

$$a^2 = a^2(\cos 0 + i \sin 0).$$

По формуле (1.5.1)

$$\sqrt{a^2} = a \left( \cos \frac{0+2\pi k}{2} + i \sin \frac{0+2\pi k}{2} \right), \quad k = 0; 1.$$

Получаем  $\sqrt{a^2} = a$  при  $k = 0$ ;  $\sqrt{a^2} = a(\cos \pi + i \sin \pi) = -a$  при  $k = 1$ . Заметим, что во множестве действительных чисел рассматривалось лишь одно положительное значение (арифметическое значение) корня, а именно,  $\sqrt{a^2} = a$ .

П р и м е р 2.  $\sqrt{-a^2} = \pm ai$ ,  $a > 0$ . Действительно,  $(ai)^2 = a^2i^2 = -a$  и  $(-ai)^2 = a^2i^2 = -a$ . Значит (по определению квадратного корня) оба значения  $\pm ai$  служат результатом извлечения корня. В силу п. 1<sup>0</sup> мы должны получить ровно два различных результата. Следовательно, других значений  $\sqrt{-a^2}$  нет.

П р и м е р 3. Вычислить и изобразить на комплексной плоскости значения  $w = \sqrt[3]{8-8\sqrt{3}i}$ .

Р е ш е н и е. Для  $z = 8-8\sqrt{3}i$  имеем  $|z| = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$ ;  $\operatorname{tg} \varphi = -\frac{8\sqrt{3}}{8} = -\sqrt{3}$ , поэтому  $\varphi = \operatorname{arg} z = -\frac{\pi}{3}$ . По формуле (1.5.1) имеем

$$w_k = \sqrt[3]{16} \left( \cos \left( \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} \right) + i \sin \left( \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Следовательно (см. рис. 1.5.2),

$$w_0 = 2\sqrt[3]{2} \left( \cos \left( -\frac{\pi}{9} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{9} \right) \right); \quad w_1 = 2\sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{9} + i \sin \frac{5\pi}{9} \right);$$

$$w_2 = 2\sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{9} + i \sin \frac{11\pi}{9} \right).$$

Поскольку мы условились считать (для любого  $w$ )  $-\pi < \operatorname{arg} w \leq \pi$ , то в случае  $w_2$  исключим под знаком тригонометрических функций период  $2\pi$ . Тогда

$$w_2 = 2\sqrt[3]{2} \left( \cos \left( -\frac{7\pi}{9} \right) + i \sin \left( -\frac{7\pi}{9} \right) \right).$$

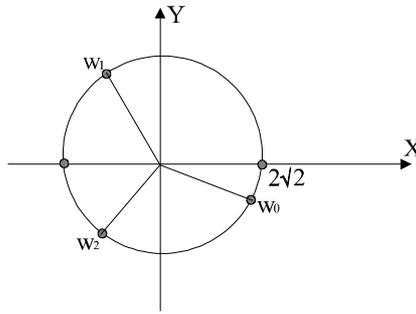


Рис. 1.5.2

4<sup>0</sup>. Рассмотрим алгебраическое уравнение

$$w^2 + d^2 = 0, \text{ где } d \in \mathbf{R}, d > 0.$$

Оно равносильно равенству  $w = \sqrt{-d^2}$  или, в свою очередь,  $w_{1,2} = \pm di$ , если воспользоваться результатом решения примера 2 в п. 3<sup>0</sup>.

5<sup>0</sup>. Теперь мы можем получить формулу для решений квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.5.2)$$

с произвольными коэффициентами ( $a \neq 0$ ). Выделяя полный квадрат, имеем

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0.$$

Рассмотрим только случай  $4ac - b^2 > 0$ , или, что то же самое,  $D = b^2 - 4ac < 0$ , так как при  $D \geq 0$  формула корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad (1.5.3)$$

нам известна. При  $\alpha^2 = \frac{-D}{4a^2}$  в силу результата п. 4<sup>0</sup> получаем

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{-Di}}{2a}, \text{ или } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-Di}}{2a}. \quad (1.5.4)$$

Теперь мы можем решать (по формуле (1.5.4)) квадратные уравнения с отрицательным дискриминантом, или, что то же самое, пользоваться формулой (1.5.3) при любых значениях  $D$ .

Заметим, что запись  $\sqrt{D}$  (или  $\sqrt{-D}$  в (1.5.4)) понимается как арифметическое значение корня, так как двужначность операции извлечения корня уже учтена знаком  $\pm$ .

6<sup>0</sup>. П р и м е р 1. Решить уравнение  $x^4 + 10x^2 + 9 = 0$ .

Р е ш е н и е. Имеем квадратное уравнение относительно величины  $x^2$ :

$$(x^2)^2 + 10x^2 + 9 = 0.$$

Согласно (1.5.3)

$$(x^2)_1 = -9, \quad (x^2)_2 = -1.$$

В свою очередь, каждое из этих уравнений имеет по два корня:

$$x_{1,2} = \pm 3i, \quad x_{3,4} = \pm i.$$

П р и м е р 2. Решить уравнение  $x^3 + 64 = 0$ .

Р е ш е н и е. Записав условие в виде  $x^3 + 4^3 = 0$ , получим по формуле суммы кубов

$$(x+4)(x^2 + 4x + 16) = 0.$$

Имеем  $x_1 = -4$ , и остается найти решения квадратного уравнения  $x^2 + 4x + 16 = 0$ , для которого дискриминант  $D = -48 < 0$ . По формуле (1.5.4) получаем

$$x_{3,4} = \frac{-4 \pm \sqrt{48}i}{2} \text{ или } x_{3,4} = -2 \pm 2\sqrt{3}i.$$

7<sup>0</sup>. Итак, любое квадратное уравнение, согласно (1.5.3), имеет ровно два корня (при  $D = 0$  корни совпадают; в этом случае говорят, что корень  $x_1$  имеет кратность, равную двум). В силу примеров п. 6<sup>0</sup> можно предположить, что каждое ку-

бическое уравнение имеет ровно три корня, уравнение четвертой степени – ровно четыре корня и т.д. Кроме того, среди корней уравнения с действительными коэффициентами комплексные числа присутствуют сопряженными парами: вместе с числом вида  $z_1 = a + bi$  корнем служит и  $z_2 = a - bi$ .

Такая гипотеза оказывается верной. А именно, в курсе алгебры доказывается что:

а) каждое алгебраическое уравнение

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_n \neq 0$$

имеет в  $\mathbb{C}$  ровно  $n$  корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность;

б) если коэффициенты уравнения  $a_k (k = 0, 1, \dots, n)$  – действительные числа, то комплексные числа присутствуют во множестве корней сопряженными парами.

Эти тезисы становятся более ясными после рассмотрения следующего примера.

**Пример.** Решить уравнение  $x^6 + 4x^4 + 4x^2 = 0$ .

**Решение.** Мы должны получить ровно шесть корней. Перепишем уравнение в виде

$$x^2(x^4 + 4x^2 + 4) = 0 \quad \text{или} \quad x^2(x^2 + 2)^2 = 0.$$

Уравнение  $x^2 = 0$  имеет два корня:  $x_1 = x_2 = 0$ . Аналогично, уравнение  $z^2 = 0$ , где  $z = x^2 + 2$  имеет корни  $z_1 = z_2 = 0$ ; в случае  $z_1 = 0$  или

$x^2 + 2 = 0$ , имеет  $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}i$ ; но точно такие же корни  $x_{5,6} = \pm\sqrt{2}i$  получаем в случае  $z_2 = 0$ . Таким образом, каждое из чисел  $0, \sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$  оказалось *корнем кратности два*.

## 1.6. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 1

1<sup>0</sup>. Даны числа  $z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-i}$ ,  $z_2 = -4i$ ,  $z_3 = 5i - 1$ .

Выполнить действия:

а)  $2z_1 - 4z_3 + i^3$ ; б)  $z_1 z_2$ ; в)  $\frac{z_2}{z_3 - i}$ ; г)  $2z_1 + \frac{2z_3}{z_2}$ ;

д)  $z_2^4 - z_2^2 - 4\bar{z}_1$ ; е)  $\frac{\bar{z}_3}{|z_3 + 6|} + 2iz_2$ .

Результаты изобразить на комплексной плоскости.

2<sup>0</sup>. Изобразить множества точек  $z$ , для которых:

а)  $|z + 3i| \leq 3$ ; б)  $|z + i - 1| > 1$ ; в)  $\operatorname{Re} \frac{2z}{i} < 0$ ;

г)  $\operatorname{Im} z^2 < 2$ ; д)  $|z| \leq |2\sqrt{3}i - 2|$ .

3<sup>0</sup>. Доказать равенства

а)  $\frac{2+i}{3-i} = \frac{13+4i}{17-9i}$ ; б)  $|\bar{z} + z|^2 + |\bar{z} - z|^2 = 4|z|^2$ .

4<sup>0</sup>. Найти действительные числа  $x$  и  $y$  из уравнений:

а)  $(5x + 2y)i - x + y = 1$ ; б)  $2x + 7y - (5 - 2x)i + 12 = 3yi$ .

5<sup>0</sup>. Записать в тригонометрической форме числа

$$z_1 = -9i, \quad z_2 = -2, \quad z_3 = -(1+i), \quad z_4 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

и выполнить затем указанные действия:

а)  $z_2^4$ ; б)  $z_1 z_2$ ; в)  $\frac{z_2 z_3}{z_1}$ ; г)  $\frac{z_4^2}{z_3}$ .

6<sup>0</sup>. Найти все значения:

а)  $\sqrt{\frac{\sqrt{3}-i}{25}}$ ; б)  $\sqrt[3]{-8}$ ; в)  $\sqrt[4]{1}$ ; г)  $\sqrt[4]{i^3}$ .

7<sup>0</sup>. Решить уравнения и изобразить на комплексной плоскости множества решений:

а)  $z^2 + 4z + 53 = 0$ ; б)  $2z^2 - z - 1 = 0$ ; в)  $z^4 + i = 0$ ; г)  $z^4 + z^2 = 2$ ;

д)  $z^4 + 26z^2 + 25 = 0$ ; е)  $z^3 + 8i = 0$ ; ж)  $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$ ; з)  $iz^4 + 1 = 0$ .

2.1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1<sup>0</sup>. *Окрестностью*  $U_0$  точки  $z_0 = x_0 + y_0i$  называется множество всех точек некоторого круга на комплексной плоскости с центром  $z_0$ . Если  $\varepsilon > 0$  – радиус этого круга, то употребляем также термин "ε – окрестность" и обозначение  $U(z_0; \varepsilon)$ . Иными словами,

$$U_0 = U(z_0; \varepsilon) = \{z: |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Множество  $G$  точек комплексной плоскости называется *открытым*, если каждая его точка является *внутренней*, т.е. содержится в  $G$  вместе с некоторой окрестностью.

Например, кольцо, т.е. множество вида

$$U(a; \iota, R) = \{z: \iota < |z - a| < R\}, \tag{2.1.1}$$

где  $a$  – фиксировано,  $\iota, R > 0$ , является, очевидно открытым множеством.

Для сравнения заметим, что если в (2.1.1) неравенство записать в виде  $\iota \leq |z - a| < R$ , то свойство "открытости" нарушается, так как точки окружности  $|z - a| = \iota$  содержатся во множестве лишь с "частью" окрестности (см. рис. 2.1.1).

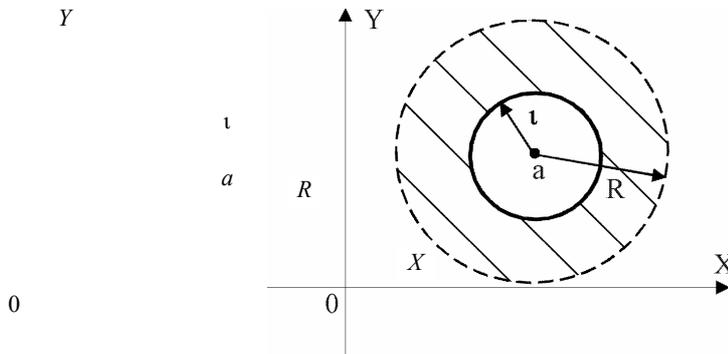


Рис. 2.1.1

Точки, обладающие подобными свойствами, называются *граничными*. Более точно, точка  $z_0$ , не принадлежащая  $G$ , такая, что любая ее окрестность содержит бесконечное множество точек из  $G$ , называется *граничной* для открытого множества  $G$ .

2<sup>0</sup>. Множество  $G$  называется *связным*, если две его любые точки можно соединить некоторой ломаной, целиком лежащей в  $G$ . Открытое связное множество  $G$  называется *областью*.

Множество, состоящее из области  $G$  и ее границы, называется *замкнутой областью*.

Как правило, мы будем рассматривать ограниченные области (замкнутые или нет), т.е. области, содержащиеся в некотором круге  $U(a; R)$ .

3<sup>0</sup>. **О п р е д е л е н и е.** Пусть  $G$  – некоторое множество комплексных чисел. Говорят, что на множестве  $G$  (области определения  $G$ ) задана *функция* вида  $w = f(z)$ , если каждому  $z \in G$  поставлено в соответствие одно или несколько комплексных чисел  $w$ . В последнем случае мы говорим, что функция  $f$  *многозначна*.

Если, в частности, все значения  $w$  – действительные числа, то говорим о *действительнозначной функции комплексного переменного*. Если  $G$  – множество на "действительной оси" (оси абсцисс), т.е.  $z = x \in \mathbf{R}$ , то  $w = f(x)$  – *комплекснозначная функция действительного переменного*.

Так, функция вида  $w = \text{Arg } z, z \neq 0$  (т.е.  $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ ) является многозначной (действительнозначной) функцией, так как  $w = w_n = \text{arg } z + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$ , и при каждом  $n$  мы получаем новое значение  $w_n$ , отличное от любого  $w_m, m \neq n$ .

Другая знакомая нам функция – это  $w = z^n, z \in \mathbf{C} (n = 1, 2, \dots)$ . Так как результат умножения определяется однозначным образом (в данном случае – умножения  $z$  на себя  $n$  раз), то указанная функция однозначна.

Многозначной (именно,  $n$ -значной) является и функция вида

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left( \cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad \varphi = \text{arg } z, \\ k = 0, 1, \dots, n-1; \quad z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

В дальнейшем будем рассматривать, в основном, функции однозначные, если не оговорено противное.

4°. Поскольку  $w = f(z) = f(x + yi)$  определяется парами значений  $(x, y)$ , то можно говорить об  $f$  как функции двух действительных переменных, заданной на некотором множестве  $G$ . В то же время  $w = u + vi$ , тогда  $u = \operatorname{Re} f(x + yi) = u(x, y)$ ,  $v = \operatorname{Im} f(x + yi) = v(x, y)$  – две действительнзначные функции действительных переменных  $x$  и  $y$ . Таким образом,

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (2.1.2)$$

т.е. задание  $f(z)$  есть задание пары функций  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$ , и этим облегчаются многие формулировки и доказательства в теории функций комплексного переменного.

Например,  $w = z^2$  может быть представлено в виде (2.1.2) следующим образом:

$$z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi.$$

5°. Комплекснзначная функция вида  $w = f(n)$ ,  $n \in N$  называется *последовательностью комплексных чисел*. Множество ее значений имеет вид  $\{w_1, w_2, \dots, w_n, \dots\}$ . Согласно (2.1.2)

$$w = f(n) = w_n = x_n + iy_n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

т.е. одновременно с  $f(n)$  задаются две последовательности действительных чисел  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$ .

6°. Непрерывное отображение  $\gamma$  некоторого отрезка  $[\alpha, \beta]$  действительной оси во множество комплексных чисел называется *путем* (кривой)  $\gamma$ . Иначе говоря, путь – это комплекснзначная функция  $z = \gamma(t)$  действительного переменного, причем  $x(t) = \operatorname{Re} \gamma(t)$  и  $y(t) = \operatorname{Im} \gamma(t)$  – непрерывные на  $[\alpha, \beta]$ , действительнзначные функции. Точки  $a = \gamma(\alpha)$  и  $b = \gamma(\beta)$  называются, соответственно, началом и концом пути; если  $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$ , то путь называется *замкнутым*.

Путь  $\gamma$  называется *гладким*, если в представлении  $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$  функции  $x(t)$  и  $y(t)$  обладают на  $[\alpha, \beta]$  непрерывными производными, причем  $\gamma'(t) \neq 0$  при всех  $t \in [\alpha, \beta]$ ; здесь  $\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ .

Путь  $\gamma$  называется *кусочно-гладким*, если  $\gamma(t)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$  (в указанном выше смысле) и  $[\alpha, \beta]$  можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых  $\gamma(t)$  определяет гладкий путь.

7°. Область  $D$  на плоскости называется *односвязной*, если ее граница есть один (непрерывный) путь без самопересечений (возможно, замкнутый). Область, не являющаяся односвязной, называется *многосвязной*. Область называется *n-связной*, если ее граница состоит из  $n$  ( $n > 1$ ) непересекающихся (непрерывных) путей; некоторые из них могут вырождаться в точку.

## 2.2. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ

1°. Определение предела функции  $f(z)$  в точке  $z_0$  (внутренней во множестве  $G$ , где определена  $w = f(z)$ ) вводится совершенно аналогично соответствующему понятию для функции действительного переменного. Именно, число  $w_0 = u_0 + iv_0$  есть *предел*  $w = f(z)$  в точке  $z_0$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое что

$$|w - w_0| < \varepsilon \text{ как только } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Иными словами, для любой окрестности  $U(w_0; \varepsilon)$  найдется некоторая окрестность  $U(z_0; \delta)$ , такая что

$$w \in U(w_0; \varepsilon) \text{ как только } z \in U(z_0; \delta), \quad z \neq z_0.$$

Употребляется привычное обозначение:

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z). \quad (2.2.1)$$

2°. Соотношение (2.2.1) эквивалентно, очевидно, следующему:

$$\lim_{|z - z_0| \rightarrow 0} |f(z) - w_0| = 0. \quad (2.2.2)$$

Поскольку для любых действительных переменных  $u, v$  значения  $\sqrt{u^2 + v^2}$  стремятся к нулю тогда и только тогда, когда одновременно  $u \rightarrow 0, v \rightarrow 0$ , то согласно определению модуля и соотношению (2.1.2) предельный переход вида (2.2.2) равносильен тому, что одновременно

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u_0; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v_0.$$

Другими словами, предельный переход совершается по отдельности в действительной и мнимой части функции  $w = f(z)$ . Отсюда вытекает, что простейшие свойства пределов (вынесение постоянного множителя за знак предела, предельный переход в сумме, произведении и т.п.) переносятся и на случай функций комплексного переменного.

3°. По аналогии с (2.2.2) говорят, что

$$w_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z),$$

(понятие "предела на бесконечности"), если

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z) - w_0| = 0.$$

В частности, для последовательности комплексных чисел  $\{w_n\}$  число  $w_0$  называется ее *пределом*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n - w_0| = 0 \quad (2.2.3)$$

или, что то же самое, одновременно

$$u_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n; \quad v_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

4<sup>0</sup>. Говорят, что последовательность  $w_n$  имеет *бесконечный предел*, и записывают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \infty,$$

если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| = +\infty.$$

Изобразить соответствующее "значение" бесконечного предела невозможно, однако условно говоря, дополняют комплексную плоскость "бесконечно удаленной точкой", а ее "окрестностью" называют внешность круга  $|w| > R$  достаточно большого радиуса  $R > 0$ . Комплексная плоскость, дополненная бесконечно удаленной точкой, называется расширенной.

Аналогично, говорят, что

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty,$$

если

$$\lim_{|z - z_0| \rightarrow 0} |f(z)| = +\infty.$$

Запись

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$$

(бесконечный предел на бесконечности) означает, что

$$\lim_{|z| \rightarrow +\infty} |f(z)| = +\infty.$$

5<sup>0</sup>. Функция  $f(z)$  называется *непрерывной* в точке  $z_0$ , внутренней для области определения  $G$ , если

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (2.2.4)$$

Другими словами, непрерывность в точке  $z_0$  есть возможность предельного перехода под знаком функции при  $z \rightarrow z_0$ .

Согласно п. 2<sup>0</sup> для  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  непрерывность в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  означает, что

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0); \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0),$$

т.е. имеем непрерывность действительной части  $u$  и мнимой части  $v$  как функций от  $x$  и  $y$ .

6<sup>0</sup>. Как в случае функций действительного переменного, определению (2.2.4) можно придать иную форму. Если обозначить  $\Delta z = z - z_0$ ,  $\Delta w = f(z) - f(z_0)$ , то непрерывность функции  $f$  в точке  $z_0$  означает, что

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0,$$

т.е. бесконечно-малому приращению аргумента (в точке  $z_0$ ) соответствует бесконечно малое приращение функции  $f$ .

7<sup>0</sup>. Функция  $f(z)$  называется *непрерывной в области  $G$* , если она непрерывна в каждой точке  $z$  этой области.

Поскольку непрерывность  $f$  равносильна непрерывности ее действительной части  $u$  и мнимой  $v$ , то многие свойства непрерывных функций действительного переменного переносятся и на изучаемый случай. Так, вместе с  $f(z)$  и  $g(z)$  непрерывными будут (в их общей области непрерывности  $G$ )  $f(z) + g(z)$ ,  $f(z) \cdot g(z)$  и  $\frac{f(z)}{g(z)}$  (за исключением точек, в которых  $g(z) = 0$ ). Справедливо утверждение о непрерывности сложной функции и др.

8<sup>0</sup>. Понятия предела и непрерывности функции в точке  $z_0$  вводились в предположении, что  $z_0$  – внутренняя точка рассматриваемого множества  $G$ . Если же  $z_0$  – граничная точка, то в определении (2.2.2) потребуем:  $|z - z_0| \rightarrow 0$ ,  $z \in G$  (т.е. точка  $z$  приближается к  $z_0$  так, что при этом сохраняется условие  $z \in G$ ).

Функция  $w = f(z)$  называется *непрерывной в замкнутой области  $\bar{G}$* , если  $f(z)$  определена в  $\bar{G}$  и для каждой точки  $z_0 \in \bar{G}$  (включая граничные точки) выполнено равенство (2.2.4); подразумевается, что точка  $z$  может стремиться к  $z_0$  (см. (2.2.4)) любым образом, но не покидая замкнутой области  $\bar{G}$ .

### 2.3. РЯДЫ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

1<sup>0</sup>. Определение предела последовательности комплексных чисел, данное в п. 3<sup>0</sup> параграфа 2.2, позволяет построить теорию числовых рядов с комплексными членами  $w_n = u_n + iv_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Выражение вида

$$w_1 + w_2 + w_3 + \dots + w_n + \dots \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n \quad (2.3.1)$$

называется *числовым рядом*. Естественно его отождествить с пределом вида

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (w_1 + w_2 + \dots + w_n), \quad (2.3.2)$$

если последний существует. Более точно, если существует *число*  $S$ , определяемое как предел (2.3.2), то ряд (2.3.1) называется *сходящимся*, а  $S$  – его сумма. В противном случае ряд (2.3.1) называется *расходящимся*.

2<sup>0</sup>. Частичная сумма (сумма первых  $n$  членов) представима в виде

$$S_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + i(v_1 + v_2 + \dots + v_n), \quad (2.3.3)$$

и теперь вопросы сходимости ряда (2.3.1) сводятся к соответствующим исследованиям рядов с действительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (2.3.4)$$

Так,

а) одновременная сходимость (2.3.4) эквивалентна сходимости (2.3.1); при этом  $S = \tilde{S} + i\tilde{S}'$ , где  $\tilde{S}$  и  $\tilde{S}'$  соответствующие суммы рядов (2.3.4);

б) ряд (2.3.1) сходится (расходится) одновременно с любым своим остатком

$$\sum_{n=v}^{\infty} w_n, \quad v \in \mathbf{N} \text{ – фиксировано;}$$

в) если ряды с комплексными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} w'_n \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} w''_n$$

одновременно сходятся и обладают, соответственно, суммами  $S'$  и  $S''$ , то сходится и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (w'_n + w''_n), \quad \text{а его сумма есть } S' + S''.$$

Кроме того, для любого постоянного  $\lambda \in \mathbf{C}$  остается сходящимся и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda w'_n; \quad \text{его сумма есть } \lambda S'.$$

Перечисленные простейшие свойства рядов хорошо известны читателю в случае рядов с действительными членами, а поэтому доказательства утверждений вытекают из представления (2.3.3) и результатов п. 3<sup>0</sup> параграфа 2.2.

3<sup>0</sup>. **Т е о р е м а** (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд (2.3.1) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0. \quad (2.3.5)$$

Обратное утверждение неверно.

Доказательство этого утверждения проведем непосредственно (не переходя к действительным и мнимым частям). Так как, очевидно, соотношение  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  может быть записано и в виде  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1}$ , то, вычисляя для  $w_n = S_n - S_{n-1}$  предел разности, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

что и требовалось.

Ряд с общим членом  $w_n = \frac{1}{n} + i \cdot 0$  является известным нам расходящимся гармоническим рядом, и для таких  $w_n$  выполнено соотношение (2.3.5). Значит, утверждение, обратное сформулированному в теореме, неверно.

**С л е д с т в и е** (достаточный признак расходимости). Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |w_n| \neq 0 \quad (2.3.6)$$

(или если предел не существует), то ряд (2.3.1) расходится.

Действительно, в противном случае мы имели бы существование и равенство нулю предела вида (2.3.5), но тогда бы, согласно (2.2.3) последовательность  $|w_n| \rightarrow 0$ , что противоречит условию (2.3.6).

4<sup>0</sup>. **Т е о р е м а**. Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |w_n|, \quad (2.3.7)$$

то сходится и ряд (2.3.1). Обратное утверждение неверно.

**Доказательство.** Поскольку

$$|u_n| \leq \sqrt{u_n^2 + v_n^2} = |w_n|,$$

то сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  (по теореме сравнения рядов с положительными членами). Аналогично, сходится и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ .

Следовательно, оба ряда (2.3.4) сходятся абсолютно. Отсюда и вытекает сходимость ряда (2.3.1); см. п. 2<sup>0</sup> настоящего параграфа.

То, что обратное утверждение неверно, демонстрируется на известном читателю примере ряда с общим членом

$$w_n = \frac{(-1)^n}{n} = \frac{(-1)^n}{n} + i \cdot 0,$$

который сходится, но ряд из модулей (гармонический) расходится.

Как и ранее, *сходимость* ряда, *вытекающую из сходимости ряда модулей*, называется *абсолютной*. Если же сходится (2.3.1), но (2.3.7) расходится, то сходимость (2.3.1) называется *условной*.

5<sup>0</sup>. Достаточными признаками сходимости ряда из модулей (знакоположительного ряда) могут служить, например, признаки:

а) Даламбера: пусть существует предел вида

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|}.$$

Тогда при  $D < 1$  ряд (2.3.7) сходится, а при  $D > 1$  – расходится.

б) Коши: пусть существует предел вида

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|w_n|}.$$

Тогда при  $K < 1$  ряд (2.3.7) сходится, а при  $K > 1$  – расходится.

Напомним читателю, что в доказательстве утверждений а) и б) при  $D > 1$  или  $K > 1$  расходимость (2.3.7) вытекает из соотношения (2.3.6).

## 2.4. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

1<sup>0</sup>. Пусть в области  $G$  задана бесконечная последовательность однозначных функций  $\{u_n(z)\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) \quad (2.4.1)$$

называется *функциональным* рядом. При каждом  $z = z_0 \in G$  имеем *числовой* ряд из комплексных чисел  $u_n(z_0)$ . Если получаемый числовой ряд сходится, то  $z_0$  называется его *точкой сходимости*, а если расходится – то *точкой расходимости*. На множестве  $G_0 \subset G$  всех точек сходимости ряда (2.4.1) задана тогда функция  $S = S(z)$ , называемая суммой ряда (2.4.1), где  $S(z_0)$  есть обозначение суммы ряда (2.4.1) в точке  $z_0$ .

2<sup>0</sup>. Уже из теории функциональных рядов действительного переменного нам известно, что привычные свойства конечных сумм функций могут не сохраняться при переходе к рядам. Как и в упомянутой теории, положение может быть "исправлено" требованием равномерной сходимости ряда.

Пусть  $S(z)$  есть сумма ряда (2.4.1) на замкнутой ограниченной области  $G$  и при каждом  $n$  существует наибольшее значение модуля отклонения  $S_n(z)$  от  $S(z)$

$$\rho_n = \max_{z \in G} |S_n(z) - S(z)|, \quad n = 1, 2, \dots$$

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0$ , то ряд (2.4.1) называется *равномерно сходящимся* на  $G$  к сумме  $S(z)$ .

Сохраняется достаточный признак Вейерштрасса равномерной сходимости: если существует числовая последовательность  $\{\alpha_n\}$ , такая что для всех  $z \in G$ ,  $n = 1, 2, \dots$  имеют место оценки  $|u_n(z)| \leq \alpha_n$  и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$  – сходящийся, то ряд (2.4.1) равномерно сходится на  $G$ ; в этом случае он называется *мажорируемым* на  $G$ .

Из свойств равномерно сходящихся на  $G$  рядов отметим, что сумма  $S(z)$  непрерывна, если непрерывны все  $u_n(z)$ ,  $n = 1, 2, \dots$

3<sup>0</sup>. Пусть  $\{z^n\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , – последовательность степенных функций,  $\{\alpha_n\}$ ,  $n = 0, 1, \dots$  – последовательность комплексных чисел.

Ряд вида

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots \quad (2.4.2)$$

называется *степенным*; для (2.4.2) употребляем также обозначение

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Очевидно, что любой степенной ряд сходится в точке  $z_0 = 0$ , так как все его частичные суммы  $S_n(z_0) = a_0$ , и, следовательно, предел последовательности  $\{S_n(z_0)\}$  существует и равен  $a_0$ . Нахождение других точек сходимости будет опираться на следующую теорему.

**Т е о р е м а А б е л я.** Если степенной ряд (2.4.2) сходится в некоторой точке  $z_0 \neq 0$ , то он абсолютно сходится в круге  $U(0; |z_0|) = \{z: |z| < |z_0|\}$ . Если же  $z'_0$  – точка расходимости, то ряд (2.4.2) расходится при всех  $z$  таких, что  $|z| > |z'_0|$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**

1. Ряд из модулей для (2.4.2) имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot |z|^n. \quad (2.4.3)$$

Общий член ряда (2.4.3) можно представить следующим образом:

$$u_n(z) = |a_n| \cdot |z|^n = |a_n z_0^n| \cdot \left| \frac{z}{z_0} \right|^n, \quad (2.4.4)$$

где  $z_0 \neq 0$  – точка сходимости ряда (2.4.2). Поскольку в этой точке выполнен необходимый признак сходимости, т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n z_0^n| = 0,$$

то для всех  $n$  существует постоянная  $M > 0$  такая, что

$$|a_n z_0^n| \leq M.$$

При условии  $|z| < |z_0|$  имеем для  $q = \left| \frac{z}{z_0} \right|$ , что  $0 \leq q < 1$ . Следовательно, в силу (2.4.4),  $0 \leq u_n(z) \leq M q^n$ ,  $0 \leq q < 1$ , и ряд

$$M + Mq + Mq^2 + \dots + Mq^n + \dots$$

является сходящимся (сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии). По теореме сравнения знакоположительных рядов тогда сходится и ряд (2.4.3). Значит, в круге  $U(0; |z_0|)$  ряд (2.4.2) сходится абсолютно, что и утверждалось.

2. В случае  $|z| > |z'_0|$  ряд (2.4.2) не может сходиться в точке  $z$ . Действительно, имеем  $z'_0 \in U(0; |z|)$ , и, если (2.4.2) сходится в точке  $z$ , то по первой части теоремы Абеля, ряд сходится и в точке  $z'_0$ . Но это противоречит условию. Итак, во всех точках  $z$ , таких, что  $|z| > |z'_0|$ , ряд (2.4.2) расходится. Теорема полностью доказана.

4<sup>0</sup>. Из теоремы Абеля вытекает, что всякая точка сходимости  $z_0$  степенного ряда ближе к началу координат, чем любая точка расходимости (если такая имеется). Следовательно, должно существовать некоторое "пограничное" расстояние  $R$ , такое что при  $|z| < R$  (т.е. в каждом таком круге) имеет место абсолютная сходимость, а при  $|z| > R$  (вне круга) – расходимость ряда (2.4.2). Число  $R$  называется *радиусом сходимости* степенного ряда, область  $U(0, R)$  – его кругом сходимости, см. рис. 2.4.1.

При всяком  $0 < \rho < R$  ряд (2.4.2) будет сходиться и равномерно в круге  $|z| \leq \rho$ . Действительно, взяв точку  $\tilde{z}$ , такую, что  $|\tilde{z}| = \rho$ , имеем абсолютную сходимость в точке  $\tilde{z}$ , т.е. сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot \rho^n.$$

В то же время, для членов (2.4.2) имеем оценку

$$|a_n z^n| \leq |a_n| \cdot |z|^n \leq |a_n| \rho^n.$$

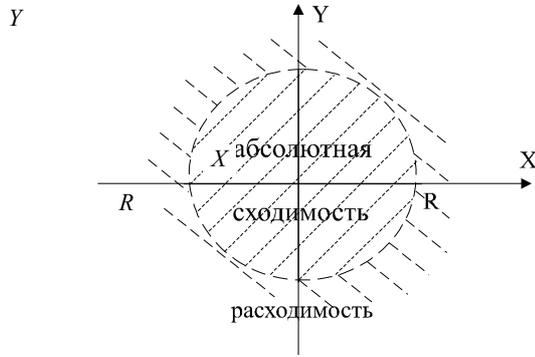


Рис. 2.4.1

Согласно признаку Вейерштрасса, получаем равномерную сходимость при  $|z| \leq \rho$ . В частности (так как непрерывны все степенные функции  $u_n(z) = z^n$ ), непрерывной в круге сходимости будет сумма ряда (2.4.2).

5<sup>0</sup>. Радиус сходимости  $R$  можно найти по одной из формул:

$$R = \frac{1}{D} \text{ или } R = \frac{1}{K}, \quad (2.4.5)$$

если существует соответствующее "число Даламбера"

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

или "число Коши"

$$K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Формулы (2.4.5) остаются справедливыми, если  $D = 0$  или  $z \in G$  – тогда  $R = \infty$ , т.е. областью сходимости ряда является вся комплексная плоскость. Если же  $D = +\infty$  ( $K = +\infty$ ), то  $R = 0$ , т.е. "областью" сходимости является единственная точка  $z_0 = 0$ . Примеры такого рода см. ниже.

Докажем, например, вторую из формул (2.4.5). Согласно признаку Коши, ряд (2.4.3) сходится, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z|^n} < 1, \text{ т.е. } |z| \cdot K < 1, \quad (2.4.6)$$

откуда получаем при  $|z| < \frac{1}{K}$  сходимость ряда (2.4.3), а значит и абсолютную сходимость ряда (2.4.2). В то же время при  $|z| > \frac{1}{K}$  согласно признаку Коши расходится не только ряд из модулей (2.4.3), но и сам ряд (2.4.2); об этом упоминалось в п. 5<sup>0</sup> параграфа 2.3. Итак, именно число  $R = \frac{1}{K}$  оказалось радиусом сходимости согласно определению  $R$  в п. 4<sup>0</sup>. Отметим также, что при  $K = 0$  условие (2.4.6) выполнено при всех  $z$  (т.е.  $R = \infty$ ), а при  $K = \infty$  условие (2.4.6) не выполнено при любом  $z \neq 0$ ; точка же  $z_0 = 0$ , как упоминалось, служит точкой сходимости любого степенного ряда ( $R = 0$ ). Утверждение п. 5<sup>0</sup> полностью доказано.

6<sup>0</sup>. Рассмотрим (для любого фиксированного  $\mathfrak{Z}_0$ ) ряд по степеням  $z - \mathfrak{Z}_0$ :

$$a_0 + a_1(z - \mathfrak{Z}_0) + a_2(z - \mathfrak{Z}_0)^2 + \dots + a_n(z - \mathfrak{Z}_0)^n + \dots, \quad (2.4.7)$$

или, коротко

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \mathfrak{Z}_0)^n.$$

Очевидно, что в точке  $\mathfrak{Z}_0$  ряд (2.4.7) сходится и его сумма  $S = a_0$ . Заменой переменных  $\mathfrak{Z} = z - \mathfrak{Z}_0$  получаем ряд вида (2.4.2) и, следовательно, теорема Абеля и все ее указанные выше следствия переносятся на случай (2.4.7) с соответствующим изменением в формулировках: речь теперь следует вести о круге сходимости с центром  $\mathfrak{Z}_0$ . Так, например, круг сходимости

$$|\mathfrak{Z}| < \frac{1}{K} \text{ есть } U\left(\mathfrak{Z}_0, \frac{1}{K}\right) = \left\{z: |z - \mathfrak{Z}_0| < \frac{1}{K}\right\} \text{ и т.д.}$$

7<sup>0</sup>. П р и м е р 1. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n (z+i)^n}{n^2+1}. \quad (2.4.8)$$

*Решение.* Имеем ряд по степеням  $z - (-i)$ , тогда его круг сходимости  $U(-i; R)$  будет найден, если найдем радиус сходимости  $R$ . Воспользуемся формулой  $R = \frac{1}{D}$ , где для  $a_n = \frac{i^n}{n^2+1}$

$$\begin{aligned} D &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|i^{n+1}|}{(n+1)^2+1} : \frac{|i^n|}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{i^{n+1}}{i^n} \right| \cdot \frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |i| \cdot \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2} \right)} = 1. \end{aligned}$$

Итак,  $R = 1$ , т.е. при  $|z+i| < 1$  ряд абсолютно сходится, а при  $|z+i| > 1$  расходится. На окружности  $|z+i| = 1$  проведем отдельное исследование. Для этого рассмотрим ряд из модулей для (2.4.8). Так как  $|i| = 1$ , то при  $|z+i| = 1$  получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

который оказывается сходящимся. Действительно, например, по интегральному признаку Коши для  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  непрерывной и убывающей на  $[1, +\infty)$  имеем

$$\tau = \int_1^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg \Big|_1^{\infty} = \arctg(\infty) - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4},$$

т.е. получили сходящимся несобственный интеграл  $\tau$ , а значит и числовой ряд. Таким образом, и на окружности  $|z+i| = 1$  ряд (2.4.8) сходится абсолютно. Окончательно, получаем областью абсолютной сходимости ряда замкнутый круг вида  $\{z: |z+i| \leq 1\}$ .

*Пример 2.* Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

абсолютно сходится во всей комплексной плоскости.

*Решение.* Действительно,

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

и, следовательно,  $R = \frac{1}{D} = \infty$ .

*Пример 3.* Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$$

обладает единственной точкой сходимости  $z = 0$ .

*Решение.* Действительно,  $K = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ , и, следовательно,  $R = 0$ .

8<sup>0</sup>. Более глубокие свойства степенных рядов и их обобщения будут рассмотрены ниже, но для этого нам потребуются основы дифференциально-интегрального исчисления функций комплексного переменного. Однако уже сейчас мы готовы ввести в рассмотрение некоторые из основных (еще не рассмотренных) элементарных функций.

## 2.5. ФУНКЦИИ $e^z$ , $\sin z$ , $\cos z$

1<sup>0</sup>. За основу определений возьмем известные разложения функций действительного переменного  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  в степенные ряды. Формально заменив в них  $x$  на  $z$ , положим по определению:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots; \quad (2.5.1)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots; \quad (2.5.2)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (2.5.3)$$

Каждый из указанных рядов абсолютно сходится во всей комплексной плоскости, так как "число Даламбера" всякий раз равно нулю, и, следовательно, радиус сходимости  $R = \infty$ . Убедимся в этом, например, в случае (2.5.3): здесь  $a_n = \frac{1}{(2n)!}$ , а поэтому

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2(n+1))!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} = 0,$$

что и утверждалось.

Итак, при всех  $z$  определены суммы рядов (2.5.1) – (2.5.3). В частности, для  $z = x + i \cdot 0$  (на действительной оси) имеем знакомые нам трансцендентные функции действительного переменного.

2<sup>0</sup>. Имеет место следующая формула Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (2.5.4)$$

устанавливающая неожиданную связь между показательной и тригонометрическими функциями. Для доказательства (2.5.4) достаточно установить, что совпадают члены соответствующих рядов. Подставим  $iz$  вместо  $z$  в общий член (2.5.1); имеем:

$$e^{iz} = 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \dots + \frac{i^n z^n}{n!} + \dots \quad (2.5.5)$$

Если теперь все члены ряда (2.5.2) умножить на  $i$  и сложить затем соответствующие члены рядов полученного и (2.5.3), то (см. п. 2<sup>0</sup> параграфа (2.3)) будем иметь ряд, сходящийся во всей комплексной плоскости:

$$\cos z + i \sin z = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \dots + \left( (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!} + (-1)^m i \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) + \dots \quad (2.5.6)$$

В силу очевидного равенства  $(i)^{2m} = (i^2)^m = (-1)^m$  имеем общий член ряда (2.5.6) в виде

$$\frac{(iz)^{2m}}{(2m)!} + \frac{(iz)^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

что и представляет собою сумму двух членов вида  $\frac{i^n z^n}{n!}$ , когда  $n$  пробегает последовательно четные ( $n = 2m$ ) и нечетные ( $n = 2m+1$ ) значения. Формула Эйлера доказана, так как члены, а значит и суммы рядов (2.5.5) и (2.5.6) совпали.

3<sup>0</sup>. Поскольку формула (2.5.4) справедлива при всех  $z$ , то подставив в нее  $(-z)$  вместо  $z$ , получим

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \quad (2.5.7)$$

при этом четность косинуса ( $\cos(-z) = \cos z$ ) и нечетность синуса ( $\sin(-z) = -\sin z$ ) вытекают из определений (2.5.2) и (2.5.3).

Складывая и вычитая равенства (2.5.4) и (2.5.7), мы получаем:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (2.5.8)$$

4<sup>0</sup>. Свойство

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \quad (2.5.9)$$

справедливое в случае действительных чисел  $z_1$  и  $z_2$ , сохраняется и в общем случае. Доказательство (2.5.9) основано на перемножении степенных рядов для  $e^{z_1}$  и  $e^{z_2}$  по некоторому естественному правилу, которое мы здесь не рассматриваем.

5<sup>0</sup>. Сохраняются также привычные формулы для тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2; \\ \sin(z_1 \pm z_2) &= \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2; \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

их доказательство основано на соотношениях (2.5.8) и (2.5.9) и может быть предоставлено читателю.

Справедливы формулы приведения:

$$\begin{aligned} \cos(z + \pi) &= -\cos z; \quad \sin(z + \pi) = -\sin z; \\ \cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin z; \quad \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \end{aligned}$$

и т.п. Например, в силу (2.5.10), где  $z_2 = \frac{\pi}{2}$ , и известных значений  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ , имеем:

$$\cos\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z \cos \frac{\pi}{2} - \sin z \sin \frac{\pi}{2} = -\sin z.$$

Обе функции  $\sin z$  и  $\cos z$  имеют период  $2\pi$ ; в силу (2.5.4) этим же периодом обладает и  $e^{iz}$ .  
Сохраняется основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

(для доказательства достаточно взять  $z_1 = z$ ,  $z_2 = -z$  в (2.5.10)) и все другие известные из тригонометрии формулы для синуса и косинуса. Однако, при переходе к комплексному аргументу может нарушаться привычная ограниченность единицей модулей значений  $\sin z$  и  $\cos z$ . Например, согласно (2.5.8)

$$\cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$$

– действительное число, большее единицы.

6<sup>0</sup>. По определению полагаем

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}; \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

во всех точках  $z$ , где знаменатель соответствующей дроби не обращается в ноль.

*Гиперболические* синус и косинус определяются в виде

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Нетрудно проверить соотношения:

$$\operatorname{ch} z = \cos iz; \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz; \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1.$$

## 2.6. ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ И ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИИ. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

1<sup>0</sup>. *Логарифмом* (натуральным логарифмом) числа  $z$  называется число  $w$ , обладающее свойством  $e^w = z$ , где  $z \neq 0$ . Установим существование и найдем формулу для вычисления логарифма.

Положим  $w = u + iv$ , тогда согласно (2.5.9) и (2.5.4)

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv} = e^u (\cos v + i \sin v).$$

Если  $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , то равенство  $e^w = z$  означает, что

$$e^u (\cos v + i \sin v) = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Модули равных комплексных чисел тоже равны:

$$e^u = |z|, \text{ откуда } u = \ln |z|$$

(имеется в виду "обычный" логарифм действительного числа); что же касается аргументов, то они могут отличаться на  $2\pi k$ :

$$v = \varphi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Следовательно,

$$w = \ln |z| + i(\varphi + 2\pi k), \text{ или, коротко, } w = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z,$$

где  $\varphi = \operatorname{arg} z$ . Обозначая логарифм символом  $\operatorname{Ln} z$  (употребление заглавной буквы означает многозначность результата), мы получили, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\operatorname{arg} z + 2\pi k), \quad k \in \{0, \pm 1, \dots\}.$$

Функция вида  $w = \operatorname{Ln} z$  называется логарифмической, она определена при всех  $z \neq 0$  и многозначна. При  $k = 0$  получаем так называемое главное значение логарифма:

$$\operatorname{ln} z = \ln |z| + i \operatorname{arg} z.$$

2<sup>0</sup>. Имеют место следующие обобщения известных нам свойств логарифмов на случай комплексной переменной:

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2.$$

Доказательства вытекают из уже установленных выше свойств модуля и аргумента произведения и частного. Например

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(z_1 z_2) &= \operatorname{Ln}(|z_1| \cdot |z_2| (\cos(\Phi_1 + \Phi_2) + i \sin(\Phi_1 + \Phi_2))) = \\ &= \ln|z_1| + \ln|z_2| + i(\Phi_1 + \Phi_2) = (\ln|z_1| + i\Phi_1) + (\ln|z_2| + i\Phi_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2; \end{aligned}$$

здесь обозначены  $\Phi_1 = \operatorname{Arg} z_1$ ,  $\Phi_2 = \operatorname{Arg} z_2$ .

3<sup>0</sup>. В основу определения показательной функции положим известное (для действительного переменного) свойство

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}, \quad a > 0.$$

Положим по определению для любых комплексных  $a \neq 0$  и  $z$

$$a^z = e^{z \operatorname{Ln} a}.$$

Эта функция также оказывается многозначной в силу многозначности логарифма.

4<sup>0</sup>. П р и м е р ы. Вычислить а)  $\operatorname{Ln}(-1)$ ; б)  $\operatorname{Ln}(2\sqrt{3}i - 2)$ ; в)  $i^{-i}$ .

Р е ш е н и е. а) Так как  $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$ , то

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = i\pi(1 + 2k), \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

б) Запишем  $z = 2\sqrt{3}i - 2$  в тригонометрической форме. Так как  $|z| = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$ ,  $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ ,  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , то  $\varphi$  –

угол второй четверти, именно  $\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ . Следовательно,

$$\operatorname{Ln}(2\sqrt{3}i - 2) = \ln 4 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) = 2\ln 2 + i\pi\left(\frac{2}{3} + 2k\right), \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

в)  $i^{-i} = e^{-i \operatorname{Ln} i}$  по определению показательной функции. При этом  $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ , значит

$$\operatorname{Ln} i = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)i.$$

Теперь  $-i \operatorname{Ln} i = \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)$ , а тогда

$$i^{-i} = e^{\pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right)}, \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

5<sup>0</sup>. Обратные тригонометрические функции определяются как функции, обратные по отношению к синусу, косинусу, тангенсу, котангенсу. Именно, если  $z = \sin w$ , то число  $w$  называется арксинусом числа  $z$ ; обозначение:

$$w = \operatorname{Arc} \sin z.$$

Если рассмотреть  $z$  как переменную величину, то речь уже идет о функции вида  $w = \operatorname{Arc} \sin z$ . Аналогично, если  $z = \cos w$ , то получаем арккосинус

$$w = \operatorname{Arccos} z;$$

если  $z = \operatorname{tg} w$ , то

$$w = \operatorname{Arctg} z;$$

для  $z = \operatorname{ctg} w$  имеем

$$w = \operatorname{Arcctg} z$$

(арктангенс и арккотангенс, соответственно).

6<sup>0</sup>. Получим формулы для вычисления значений этих функций и убедимся в их многозначности.

Так, если  $z = \sin w$ , то (см. (2.5.8))

$$z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}, \quad \text{откуда } e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0.$$

Положим  $e^{iw} = f$ , тогда получено квадратное уравнение

$$f^2 - 2izf - 1 = 0$$

с корнями

$$f = iz + \sqrt{1-z^2}$$

(символом  $\sqrt{1-z^2}$  уже предусмотрены два отличающиеся знаком значения квадратного корня). Итак,

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}, \text{ т.е. } iw = \text{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right).$$

Выражая отсюда  $w$ , и принимая во внимание, что  $\frac{1}{i} = -i$ , получаем

$$\text{Arcsin}z = -i \text{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right).$$

Если  $z$  – действительное число, то  $\zeta = \sqrt{1-z^2} + iz$  имеет модуль  $\sqrt{(1-z^2)+z^2} = 1$  и тогда

$$\text{Arcsin}z = -i(\text{ln}|\zeta| + i \text{Arg}\zeta) = \text{Arg}\zeta,$$

т.е. значения  $\text{Arcsin}z$  также – действительные числа.

Рассуждения, аналогичные вышеприведенным, позволяют утверждать, что:

$$\text{Arccos}z = -i \text{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right);$$

$$\text{Arctg}z = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{1+iz}{1-iz};$$

$$\text{Arcctg}z = \frac{i}{2} \text{Ln} \frac{z-i}{z+i}.$$

7<sup>0</sup>. П р и м е р. Вычислить: а)  $\text{Arcsin}2$ ; б)  $\text{Arctg}\sqrt{3}$ .

Р е ш е н и е:

$$\text{а) } \text{Arcsin}2 = -i \text{Ln}\left(2i + \sqrt{-3}\right) = -i \text{Ln}\left(2i \pm \sqrt{3}i\right) = -i \text{Ln}\left(2 \pm \sqrt{3}\right)i;$$

здесь  $\pm\sqrt{3}$  – значения уже арифметического корня из действительного числа. Поскольку  $(2 \pm \sqrt{3})i$  имеют аргументом  $\Phi = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ , то имеем две серии ответов:

$$-i \ln\left(2 + \sqrt{3}\right) + \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right) \text{ и } -i \ln\left(2 - \sqrt{3}\right) + \pi\left(\frac{1}{2} + 2k\right), k \in \mathbf{Z}.$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \text{Arctg}\sqrt{3} &= \frac{-i}{2} \text{Ln} \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = -\frac{i}{2} \text{Ln} \frac{(1+i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})}{1^2 + \sqrt{3}^2} = \\ &= -\frac{i}{2} \text{Ln}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right). \end{aligned}$$

Поскольку  $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  имеет  $|z| = 1$ ,  $\text{Arg}z = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ , то

$$\text{Arctg}\sqrt{3} = -\frac{i}{2} \left( \text{ln}|\zeta| + 2\pi\left(\frac{1}{3} + k\right)i \right) = \pi\left(\frac{1}{3} + k\right), k \in \mathbf{Z}.$$

Одно из возможных значений арктангенса числа  $\sqrt{3}$ , именно, значение  $\frac{\pi}{3}$ , нам было известно ранее.

## 2.7. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ

1<sup>0</sup>. Выше было определено действие возведение комплексных чисел в натуральную степень. Следовательно, для всех  $z \in \mathbf{C}$  определена *степенная* функция  $w = z^n$ ,  $n \in \mathbf{N}$ .

*Линейной функцией* комплексного переменного  $z$  называется функция вида

$$w = az + b, \text{ где } a, b \in \mathbf{C} \text{ – фиксированы.}$$

Обе эти функции являются частными случаями *многочлена*  $n$ -й степени

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \text{ где } a_n \neq 0, n = 1, 2, \dots;$$

коэффициенты  $a_j (j = 0, 1, \dots, n)$  – фиксированные комплексные числа.

2<sup>0</sup>. При всех  $z \neq 0$  определена функция вида  $w = \frac{1}{z}$ , которая является частным случаем *дробно-линейной* функции

$$w = \frac{az + b}{cz + d}; \quad z \neq -\frac{d}{c}; \quad c \neq 0.$$

Еще более общий случай – *рациональная функция*

$$R_{m,n}(z) = \frac{P_m(z)}{P_n(z)},$$

определенная во всех тех точках, где  $P_n(z) \neq 0$ .

3<sup>0</sup>. При всех  $z \in \mathbb{C}$  определена  $n$ -значная функция вида

$$w = \sqrt[n]{z},$$

а также (в параграфе 2.5) однозначные функции вида  $w = e^z$ ,  $w = \sin z$ ,  $w = \operatorname{sh} z$ ,  $w = \operatorname{ch} z$ . Рассматривались (на соответствующих областях определения)  $w = \operatorname{tg} z$ ,  $w = \operatorname{ctg} z$ . Мнозначными (бесконечнозначными) являются

$$w = \operatorname{Ln} z; \quad z \neq 0; \quad w = \operatorname{Arcsin} z; \quad w = \operatorname{Arccos} z; \quad w = \operatorname{Arctg} z; \quad w = \operatorname{Arcctg} z.$$

4<sup>0</sup>. Всякая функция, полученная из перечисленных *основных элементарных* путем выполнения над ними конечного количества арифметических действий, а также взятия конечного числа суперпозиций (функции от функции) называется *элементарной*.

Отметим без доказательства, что всякая элементарная функция непрерывна на своей области определения. В случае многозначных функций (многозначность обусловлена значениями целого параметра  $k$ ) речь идет о непрерывности "каждой ветви", т.е. однозначной функции, получаемой при фиксированном значении параметра  $k$  (см. соответствующие определения  $\sqrt[n]{z}$ ,  $\operatorname{Ln} z$ ,  $\operatorname{Arcsin} z$ , ...).

5<sup>0</sup>. Особого разговора заслуживает описание тех геометрических образов, которые возникают при отображениях, осуществляемых основными элементарными функциями. Мы остановимся на кратком описании нескольких простейших случаев.

а) *Линейная функция*  $w = az + b$ . В случае  $b = 0$  и действительного значения  $a = r > 0$  мы имеем в плоскости  $XOY$  *гомотетию*  $w = rz$  с *центром в начале координат и коэффициентом*  $r$  (перемещение точки  $z$  вдоль луча  $Oz$  на расстояние  $r|z|$ ). В случае комплексного  $a$ , имеющего показательную форму  $a = re^{i\varphi}$ , умножение  $e^{i\varphi}z$  есть изменение аргумента каждого  $z$  на величину  $\varphi$ , т.е. *преобразование поворота* (вокруг начала координат) на угол  $\varphi$  каждого луча  $Oz$ . Дальнейшее умножение на  $r > 0$  есть описанная выше гомотетия. Итак, действие отображения  $w = re^{i\varphi}z$  – это композиция преобразования поворота на угол  $\varphi$  комплексной плоскости и гомотетии с коэффициентом  $r$ .

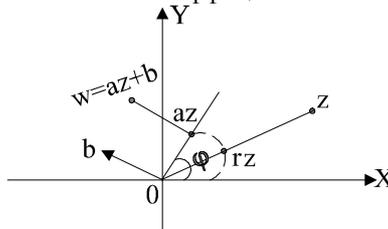


Рис. 2.7.1

Наконец, в общем случае  $w = az + b$  вслед за описанной композицией гомотетии и поворота выполняется, очевидно, сдвиг (параллельный перенос) комплексной плоскости на радиус-вектор точки  $b$ , см. рис. 2.7.1, на котором точке  $z$  поставлена в соответствие точка  $w = az + b$  путем выполнения, последовательно, преобразований:  $z \mapsto rz$  ( $0 < r < 1$ );  $rz \mapsto az$  ( $a = re^{i\varphi}$ );  $az \mapsto az + b$ .

б) *Степенная функция*  $w = z^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Если  $z = \rho e^{i\varphi}$ , то  $w = \rho^n e^{in\varphi}$ . Для каждого фиксированного  $z \neq 0$  имеем  $n\varphi = \varphi + (n-1)\varphi$ , т.е. имеем последовательное выполнение поворота луча  $Oz$  на угол  $(n-1)\varphi$  относительно точки  $O$  и преобразование в  $\rho^n$  раз (растяжение при  $\rho > 1$ , сжатие при  $0 < \rho < 1$ ) отрезка  $Oz'$ , где  $z' = e^{i\varphi}$ .

Для  $w = \sqrt[n]{z}$ , где  $z = \rho e^{i\varphi}$ ,  $z \neq 0$ , имеем  $w = w_k = \sqrt[n]{\rho} (\cos \psi_k + i \sin \psi_k)$ , т.е.  $w_k = \sqrt[n]{\rho} e^{i\psi_k}$ , где  $\psi_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

Для всякого  $z \neq 0$  и фиксированного  $k$  теперь отображение  $w_k$  есть последовательное выполнение поворота на угол  $\frac{1-n}{n}\varphi + \frac{2\pi k}{n}$  (так как  $\psi_k = \varphi + \frac{1-n}{n}\varphi + \frac{2\pi k}{n}$ ) луча  $Oz$  и преобразование отрезка  $Oz'$  (где  $z' = e^{i\psi_k}$ ) в  $\sqrt[n]{\rho}$  раз.

в) *Дробно-линейная функция.* Начнем с рассмотрения функции  $w = \frac{1}{z}$ . При каждом  $z \neq 0$ ,  $z = \rho e^{i\varphi}$ , имеем  $w = \frac{1}{\rho e^{i\varphi}}$ , т.е.  $w = \frac{1}{\rho} e^{i\psi}$ , где  $\psi = -\varphi$ . Таким образом, имеем последовательно преобразование луча  $Oz$  в симметричный относительно полярной оси луч  $Oz'$  ( $|z'| = 1$ ,  $\arg z' = -\varphi$ ) и перемещение точки  $z'$  вдоль этого луча на расстояние  $\frac{1}{\rho}$  от точки  $O$ .

Покажем, что каждая окружность  $|z| = r$ ,  $r > 0$ , преобразуется функцией  $w = \frac{1}{z}$  в окружность радиуса  $\frac{1}{r}$  с тем же центром. Действительно, для каждой точки  $z$  на этой окружности имеем  $z = r e^{i\varphi}$ , где  $\varphi$  пробегает значения от  $-\pi$  до  $\pi$ ; теперь  $w = \frac{1}{r} e^{i\psi}$ , где  $\psi = -\varphi$  принимает все значения в интервале  $[-\pi, \pi)$ . Итак, получена окружность с центром в начале координат радиуса  $\frac{1}{r}$ , что и утверждалось. Заметим, что в геометрии описанное преобразование называется инверсией.

Отметим (без доказательства), что любая другая окружность, не проходящая через начало координат, функцией  $w = \frac{1}{z}$ , преобразуется также в некоторую окружность, а проходящая через начало координат – в некоторую прямую.

Как оказывается, прямые, не проходящие через начало координат, также преобразуются в некоторые окружности, а проходящие через начало координат – в некоторые прямые.

Рассмотрим теперь общий случай

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad c \neq 0. \quad (2.7.1)$$

Преобразуем дробь к виду

$$\frac{a(cz + d) + bc - ad}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d}.$$

Следовательно, к отображению (2.7.1) можно прийти путем последовательного выполнения следующих изученных преобразований:

$$t = cz + d \quad (\text{линейная функция}), \quad T = \frac{1}{t} \quad (\text{инверсия}),$$

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} T \quad (\text{линейная функция}).$$

г) *Показательная функция*  $w = e^z$ . Если  $z = x + iy$ , то  $w = e^x e^{iy}$  или  $w = e^x (\cos y + i \sin y)$ . Последнее представление можно понимать как тригонометрическую форму записи  $w$ . Таким образом, каждая точка  $z$  преобразуется в точку (число)  $w$  с модулем  $\rho = e^x$ , и аргументом (одним из значений аргумента), равным  $y$ .

Геометрические образы стандартных линий (областей), получаемые посредством перечисленных и других отображений (функций) изучаются в более подробных курсах.

## 2.8. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 2

1. Найти область сходимости степенного ряда:

а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1} z^{2n}}{n!}$ ;    б)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 (z-i)^n$ ;    в)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i+1)^{n-1}}{n \sqrt{n+1}}$ ;

г)  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2n} z^{2n-1}$ ;    д)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+1)^n}{n \ln^4 n}$ .

2. Вычислить значения:

а)  $e^{i\pi}$ ;    б)  $e^{i-1}$ ;    в)  $\sin \frac{\pi i}{2}$ ;    г)  $\cos^2 \frac{2}{i}$ ;    д)  $\operatorname{ch}(-3i)$ ;    е)  $\operatorname{sh} i^3$ ;

ж)  $\operatorname{tg}(\sqrt{3} - i)$ .

3. Найти:

а)  $\operatorname{Ln} \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)$ ;    б)  $\operatorname{Ln} 5(4i-3)$ ;    в)  $-i \operatorname{Ln}(-e)$ ;    г)  $i^{1+i}$ ;    д)  $3^{-i}$ ;

е)  $2^{-1}$ .

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

### 3.1. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

1<sup>0</sup>. Определение производной формально не отличается от случая функций действительного переменного. Однако, на самом деле, условие дифференцируемости функций комплексного переменного является более ограничительным в сравнении с упомянутым случаем, что будет ясно из дальнейшего.

Пусть однозначная функция  $w = f(z)$  определена в точке  $z = x + iy$  и некоторой ее окрестности. Пусть  $x$  и  $y$  получают, соответственно, приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ . Тогда  $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$  – соответствующее приращение переменной  $z$ . При переходе от точки  $z$  к точке  $z + \Delta z$  (значения  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  предполагаем столь малыми, что точка  $z + \Delta z$  расположена в той же окрестности) значение  $w = f(z)$  получает некоторое приращение  $\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$ .

**О п р е д е л е н и е.** Пусть существует предел вида

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (3.1.1)$$

Он называется *производной* функции  $f(z)$  в точке  $z$  и обозначается  $f'(z)$  либо  $w'$ ,  $\frac{dw}{dz}$ ,  $\frac{df}{dz}$ . Функция же  $f(z)$  называется *дифференцируемой* в точке  $z$ .

Заметим, что в случае функции действительного переменного  $\varphi(x)$  существование производной есть существование предела  $\frac{\Delta \varphi}{\Delta x}$ , когда  $\Delta x$  приближается к нулю вдоль оси абсцисс. В случае же (3.1.1)  $\Delta z$  приближается к нулю в комплексной плоскости по *любому* пути. Это и является причиной появления некоторых новых дополнительных свойств дифференцируемых функций в сравнении со случаем функций действительного переменного.

2<sup>0</sup>. Из свойств пределов и определения (3.1.1) вытекает, что дифференцируемость  $f(z)$  в точке  $z$  эквивалентна равенству

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) = \alpha(z, \Delta z),$$

где  $\alpha(z, \Delta z) \rightarrow 0$  при  $\Delta z \rightarrow 0$ . Следовательно, существование производной равносильно соотношению

$$\Delta w = f'(z)\Delta z + \alpha(z, \Delta z)\Delta z. \quad (3.1.2)$$

Выражение  $d w = f'(z)\Delta z$  называется *дифференциалом*  $f(z)$  в точке  $z$ .

Если  $\Delta z \rightarrow 0$ , то из (3.1.2) вытекает, что  $\Delta w \rightarrow 0$ , а это означает: дифференцируемость в точке  $z$  влечет за собою *непрерывность*  $f(z)$  в той же точке.

3<sup>0</sup>. Выясним геометрический смысл аргумента и модуля производной  $f'(z_0) \neq 0$ , считая для определенности, что  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z_0$  и некоторой ее окрестности  $U_0$ . Если  $W_0$  – образ этой окрестности (при отображении функцией  $f$ ), то для любой кривой  $\gamma \subset U_0$  ее образ  $\Gamma \subset W_0$ ; обозначим  $w_0 = f(z_0)$ .

Пусть  $z \rightarrow z_0$  вдоль кривой  $\gamma$ , тогда (в силу непрерывности  $w = f(z)$ , см. п. 2<sup>0</sup>)  $w \rightarrow w_0$  вдоль  $\Gamma$ . Комплексные числа  $\Delta z$  и  $\Delta w$  изображаются векторами секущих к кривым  $\gamma$  и  $\Gamma$  соответственно; следовательно,  $\arg \Delta z$  и  $\arg \Delta w$  – углы наклона этих векторов к соответствующим осям абсцисс. Поскольку при делении аргументы комплексных чисел вычитаются, то согласно (3.1.1)

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \arg \left( \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta w) - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\arg \Delta z) = \Phi - \varphi,$$

где  $\Phi$  и  $\varphi$  – углы наклона (к осям абсцисс) уже соответствующих *касательных* (касательная – это предельное положение секущей). Итак,  $\alpha = \arg f'(z_0)$  – угол, на которой относительно точки 0 повернулась касательная (к произвольной кривой  $\gamma$  в точке  $z_0$ ) при отображении  $w = f(z)$ .

В определении (3.1.1)

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|, \quad \text{т.е. } |\Delta w| \sim \text{const} \cdot |\Delta z| \quad (f'(z_0) \neq 0),$$

где  $\text{const}$  и есть  $|f'(z_0)|$ . Следовательно, бесконечно малое расстояние между точками  $z_0$  и  $z = z_0 + \Delta z$  преобразуются в бесконечно малое расстояние между  $w_0$  и  $w = w_0 + \Delta w$ , так что отношение этих расстояний (при произвольности пути, по которому точка  $z$  приближается к  $z_0$ ) остается постоянным.

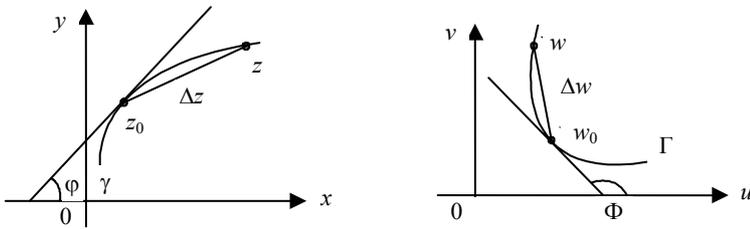


Рис. 3.1.1

Итак, в данной точке  $z_0$  отображение  $f$  обладает постоянством угла поворота касательных и постоянством коэффициента растяжения (сжатия); см. рис. 3.1.1.

Отображение с такими свойствами называется *конформным*.

### 3.2. ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

1<sup>0</sup>. Из определения (3.1.1) производной и привычных свойств пределов (сохраняющихся при переходе к случаю функций комплексного переменного) вытекают и привычные правила дифференцирования:

- а) если  $f(z) = C$ , где  $C = \text{const}$  (постоянное комплексное число), то  $f'(z) = 0$ ;
- б)  $(Cf(z))' = Cf'(z)$ ,  $C = \text{const}$ ;
- в)  $(f(z) + g(z))' = f'(z) + g'(z)$ ;
- г)  $(f(z)g(z))' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$ ;
- д)  $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$  в точках, где  $g(z) \neq 0$ .

2<sup>0</sup>. Справедливо правило дифференцирования сложной функции:

$$(\varphi(f(z)))' = \varphi'(f(z))f'(z).$$

Если  $w = f(z)$  осуществляет взаимно-однозначное соответствие области  $G$  (в комплексной плоскости точек  $z$ ) на  $\tilde{G}$  (в комплексной плоскости точек  $w$ ), то определено (однозначное) обратное соответствие  $z = \varphi(w)$ , называемое обратной функцией. Справедлива формула

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

3<sup>0</sup>. Сохраняется и таблица производных, приведем некоторые из формул:

- 1)  $z' = 1$ ;
- 2)  $(z^\alpha)' = \alpha z^{\alpha-1}$ ;
- 3)  $(\sin z)' = \cos z$ ;
- 4)  $(\cos z)' = -\sin z$ ;
- 5)  $(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}$ ;
- 6)  $(\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}$ ;
- 7)  $(e^z)' = e^z$ ;
- 8)  $(a^z)' = a^z \operatorname{Lna}$ ;
- 9)  $(\operatorname{Arcsin} z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ ;

$$10) (\operatorname{Arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}.$$

Здесь производные многозначных функций понимаются как производные, вычисленные при каждом фиксированном  $k$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

Эти формулы могут быть выведены в точности так же, как в случае функций действительного переменного. Однако могут быть использованы и определения  $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$  в виде степенных рядов, а также связи (между собою) функций комплексных переменных. Например, почленное дифференцирование степенного ряда для  $e^z$  приводит к результату:

$$\begin{aligned} (e^z)' &= \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \right)' = \\ &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + n \frac{z^{n-1}}{n!} + \dots = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = e^z. \end{aligned}$$

Или:  $(a^z)' = (e^{z \operatorname{Lna}})' = e^{z \operatorname{Lna}} (z \operatorname{Lna})' = a^z \operatorname{Lna}$  и т.д.

### 3.3. УСЛОВИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ

1<sup>0</sup>. Пусть  $z = x + iy$ , и  $w = f(z)$  определена в точке  $z$  и в некоторой ее окрестности. Запишем  $f(z)$  в виде

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Необходимое условие дифференцируемости  $f$  в точке  $z$  содержится в следующем утверждении.

**Т е о р е м а 1.** Пусть  $f(z)$  дифференцируема в точке  $z$ . Тогда существуют частные производные функций  $u$  и  $v$  по обоим переменным в точке  $(x, y)$ , причем в этой точке

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.3.1)$$

Соотношения (3.3.1) называются условиями Коши-Римана-Эйлера-Даламбера (чаще говорят: условия Коши-Римана).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть существует  $f'(z)$ , определяемая как предел вида (3.1.1). В параграфе 3.1. отмечалось (см. п. 1<sup>0</sup>), что характер стремления к нулю величины  $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$  может быть произвольным. Выберем, в частности, случаи

1)  $\Delta y = 0$ , т.е.  $\Delta z = \Delta x$ , тогда  $\Delta z \rightarrow 0$  означает, что  $\Delta x \rightarrow 0$ ;

2)  $\Delta x = 0$ , т.е.  $\Delta z = i \Delta y$ , тогда  $\Delta z \rightarrow 0$  одновременно с  $\Delta y \rightarrow 0$ .

В обоих случаях переход от точки  $z$  к точке  $z + \Delta z$  вызывает приращение  $\Delta w = \Delta u(x, y) + i \Delta v(x, y)$ . В первом случае каждое из приращений  $\Delta u$  и  $\Delta v$  есть приращение по переменной  $x$ , следовательно,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u + i \Delta_x v}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \frac{\Delta_x v}{\Delta x} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3.3.2)$$

При этом само существование  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y}$  вытекает из существования пределов действительной и мнимой части (при  $\Delta z \rightarrow 0$ ) функции ("разностного отношения")  $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ , тогда как сама эта функция имеет предел по условию теоремы.

Аналогично, во втором случае,  $\Delta u = \Delta_y u$ ,  $\Delta v = \Delta_y v$ , т.е.

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u + i \Delta_y v}{i \Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta_y v}{\Delta y} + \frac{i \Delta_y u}{i^2 \Delta y} \right) = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (3.3.3)$$

Правые части соотношений (3.3.2) и (3.3.3) совпадают, так как выражают собою одну и ту же  $f'(z)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

По определению равенства комплексных чисел имеем отсюда соотношения (3.3.1), что и требовалось доказать.

2<sup>0</sup>. З а м е ч а н и е 1. Как известно, дифференцируемость в точке  $(x, y)$  функций  $u$  и  $v$  (как функций от двух переменных), есть условие более жесткое, чем существование частных производных по обоим переменным. Она (дифференцируемость) означает, что полные приращения  $\Delta u$  и  $\Delta v$  могут быть представлены в виде

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y; \quad (3.3.4)$$

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y, \quad (3.3.5)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  – является бесконечно малыми (стремятся к нулю) при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$ .

В результате более детального рассмотрения можно было бы доказать, что для дифференцируемой в точке  $z$  функции  $f$  не только существуют указанные в (3.3.1) частные производные, но функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $(x, y)$ .

З а м е ч а н и е 2. Как установлено выше,  $f'(z)$  можно вычислить по любой из указанных в (3.3.2), (3.3.3) формул, например,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Так, для

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

имеем  $u(x, y) = e^x \cos y$ ,  $v(x, y) = e^x \sin y$ . Значит,

$$(e^z)' = (e^x \cos y)'_x + i (e^x \sin y)'_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z,$$

и мы получили еще одно доказательство формулы 7 таблицы производных.

3<sup>0</sup>. Достаточное условие дифференцируемости  $f(z)$  в точке  $z$  содержится в следующем утверждении.

Т е о р е м а 2. Если  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  дифференцируемы в точке  $(x, y)$  и выполнены условия Коши–Римана (3.3.1), то  $f'(z)$  существует в точке  $z = x + iy$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим разностное отношение

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i \Delta v}{\Delta x + i \Delta y}.$$

Следует установить, что существует его предел при  $\Delta z \rightarrow 0$ . Согласно условию теоремы  $\Delta u$  и  $\Delta v$  можно представить в виде (3.3.4) и (3.3.5), соответственно. Поэтому

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + (\alpha_1 + i \beta_1) \Delta x + (\alpha_2 + i \beta_2) \Delta y}{\Delta x + i \Delta y}. \quad (3.3.6)$$

Заметим, что

$$\left| \frac{(\alpha_1 + i \beta_1) \Delta x + (\alpha_2 + i \beta_2) \Delta y}{\Delta x + i \Delta y} \right| \leq |\alpha_1 + i \beta_1| \cdot \frac{|\Delta x|}{|\Delta x + i \Delta y|} + |\alpha_2 + i \beta_2| \cdot \frac{|\Delta y|}{|\Delta x + i \Delta y|}. \quad (3.3.7)$$

В правой части (3.3.7)

$$|\Delta x| \leq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}; \quad |\Delta y| \leq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

и

$$|\Delta x + i \Delta y| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Значит правая часть не превосходит бесконечно малой величины

$$|\alpha_1 + i \beta_1| + |\alpha_2 + i \beta_2|,$$

а тогда выражение под знаком модуля в левой части (3.3.7) есть "комплексная" бесконечно малая, которую обозначим через  $\gamma$ :  $\gamma \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Далее, заменим  $\frac{\partial v}{\partial y}$  на  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$  на  $\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$  в числителе дроби (3.3.6):

$$\begin{aligned}\frac{\Delta w}{\Delta z} &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial v}{\partial x} \Delta y + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta y \right)}{\Delta x + i \Delta y} + \gamma = \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i \Delta y)}{\Delta x + i \Delta y} + \gamma = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma.\end{aligned}$$

Значит при  $\Delta z \rightarrow 0$  (а тогда  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\Delta y \rightarrow 0$ , и, следовательно,  $\gamma \rightarrow 0$ )

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

т.е. существует предел вида (3.1.1); именно, он равен  $\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ . Существование  $f'(z)$  доказано.

4<sup>0</sup>. Согласно теоремам 1 и 2 замечанию 1 п. 2<sup>0</sup>, дифференцируемость  $u, v$  в точке  $(x, y)$  и выполнимость условий Коши–Римана (3.3.1) необходимы и достаточны для существования производной  $f'(z)$ .

5<sup>0</sup>. О п р е д е л е н и е. Функция  $w = f(z)$ , дифференцируемая в точке  $z_0$  и некоторой ее окрестности, называется *аналитической (или голоморфной) в точке  $z_0$* .

Функция, аналитическая во всех точках некоторой области  $G$ , называется *аналитической (голоморфной) в этой области*.

Точки  $z$  комплексной плоскости, в которых однозначная  $f(z)$  является аналитической, называются *правильными точками* этой функции, а все остальные точки (в частности, те, где  $f(z)$  не определена) – *особыми* для  $f(z)$ .

Согласно п. 4<sup>0</sup> критерием аналитичности  $f(z)$  в данной точке  $z$  (в данной области  $G$ ) является дифференцируемость  $u, v$  и выполнимость условий Коши–Римана (3.3.1) в этой точке и некоторой ее окрестности (в области  $G$ ).

П р и м е р 1. Докажем, что  $w = z^2$  аналитична во всей комплексной плоскости. Действительно,

$$w = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, \text{ т.е. } u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy.$$

Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Условия (3.3.1) выполнены, очевидно, при всех  $x$  и  $y$ , т.е. во всей плоскости. Следовательно,  $w = z^2$  аналитична во всей комплексной плоскости.

2. Рассмотрим  $w = \bar{z}^2$ . Имеем:

$$w = (x - yi)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi, \text{ т.е. } u = x^2 - y^2, \quad v = -2xy.$$

Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$$

Проверяем условия Коши–Римана (3.3.1):

$$\begin{cases} 2x = -2x; \\ -2y = 2y, \end{cases} \text{ отсюда получаем } x = y = 0.$$

Итак, в единственной точке  $z = 0$  условия Коши–Римана выполнены, и, следовательно, в этой точке  $w = \bar{z}^2$  имеет производную. Однако, функция ни в одной точке не аналитична (точка дифференцируемости – единственная, и не существует ее окрестности, где дифференцируемость сохраняется).

6<sup>0</sup>. Пользуясь условиями Коши–Римана, вычислим якобиан  $J$  конформного отображения, осуществляемого заданием аналитической функции  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ . Имеем  $J = u'_x v'_y - u'_y v'_x = (u'_x)^2 + (v'_x)^2 = |f'(z)|^2$ . Итак,  $J = |f'(z)|^2$ .

### 3.4. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПО ЕЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ИЛИ МНИМОЙ ЧАСТИ

1<sup>0</sup>. В различных вопросах математики и ее приложениях рассматривается так называемое уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = 0.$$

Всякая функция  $\sigma = \sigma(x, y)$ , удовлетворяющая этому уравнению, называется гармонической.

Пусть  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  – функция, аналитическая в некоторой области  $G$ . Докажем, что в этом случае  $u = u(x, y)$  и  $v = v(x, y)$  – гармонические функции. Следует отметить, что из дальнейшего рассмотрения будет следовать существование и непрерывность в  $G$  всех частных производных второго порядка функций  $u$  и  $v$  (будет доказано, что аналитическую функцию  $f$  в область  $G$  можно дифференцировать сколь угодно много раз). Поэтому тождества (условия Коши-Римана, выполненные в области  $G$ )

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.4.1)$$

можно продифференцировать – первое по  $x$ , а второе по  $y$ , при этом смешанные частные производные второго порядка оказываются равными. Имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Следовательно,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ , а тогда  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ .

Если теперь первое из тождеств (3.4.1) продифференцировать по  $y$ , а второе по  $x$  и сложить (почленно), то будем иметь

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

что и требовалось доказать.

2°. Пусть теперь известна действительная часть  $u = u(x, y)$  аналитической функции  $w = f(z)$ . Тогда, зная частные производные  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ , мы из условий Коши-Римана (3.4.1) сможем найти и  $\frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y}$ . Теперь функцию  $v(x, y)$  по ее полному дифференциалу можно восстановить в виде криволинейного интеграла по произвольной траектории интегрирования, расположенной в области  $G$  (этот факт был доказан в интегральном исчислении):

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + C, \quad (3.4.2)$$

где  $(x_0, y_0)$  – любая фиксированная точка в области  $G$ ;  $C$  – произвольная постоянная.

Аналогично, если известна мнимая часть  $v = v(x, y)$  аналитической функции  $f(z)$ , то из условий Коши-Римана мы определяем  $\frac{\partial u}{\partial x}$  и  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ; следовательно,

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + C.$$

3°. П р и м е р. Найти аналитическую функцию  $f(z)$ , действительная часть которой имеет вид

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + 2(x - y).$$

*Решение.* Поскольку  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , то достаточно определить  $v(x, y)$  по формуле (3.4.2). Согласно условиям Коши-Римана (3.4.1) найдем для этого частные производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial x} = (x^2 - y^2 + 2(x - y))'_x = 2x + 2; \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} = -(x^2 - y^2 + 2(x - y))'_y = 2y + 2. \end{aligned}$$

Так как найденные выражения определены (непрерывны как функции от  $x$  и  $y$ ) во всей комплексной плоскости, то в (3.4.2) можно выбрать, например,  $x_0 = 0$  и  $y_0 = 0$ . Значит

$$v(x, y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} (2Y + 2)dX + (2X + 2)dY + C. \quad (3.4.3)$$

Траекторию интегрирования ONM выберем, как показано на рис. 3.4.1; координаты точек:  $O(0,0)$ ;  $N(x,0)$ ;  $M(x,y)$ . Интеграл (3.4.3) запишем в виде суммы двух: по отрезку  $ON$  (на котором  $y = 0$ , и, следовательно,  $dY = 0$ ) и  $NM$  (на котором  $X = x$  постоянен, а значит  $dX = 0$ ):

$$v(x, y) = \int_0^x (0+2)dX + \int_0^y (2x+2)dY + C = 2x + (2x+2)Y \Big|_0^y + C =$$

$$= 2x + 2xy + 2y + C.$$

Следовательно,

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2(x-y) + (2x+2xy+2y)i + Ci =$$

$$= (x^2 - y^2 + 2ixy) + 2(x-y+i(x+y)) + Ci =$$

$$= (x+iy)^2 + 2(x+iy+i(x+iy)) + Ci = z^2 + 2(z+iz) + Ci.$$

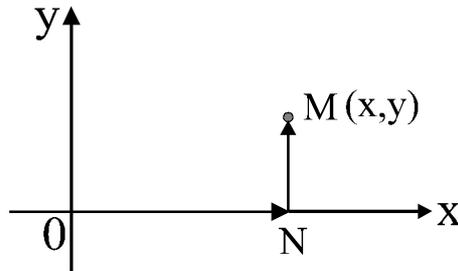


Рис. 3.4.1

### 3.5. ИНТЕГРАЛ ОТ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1°. Понятие интеграла функции  $w = f(z)$  по линии  $L$  вводится аналогично понятию криволинейного интеграла функции действительного переменного.

Пусть дуга  $\cup AB$  линии  $L$  задается параметрически:

$$\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta;$$

при этом точка  $M(x, y)$  совершает движение из положения  $A$  в положение  $B$  при изменении  $t$  от  $\alpha$  до  $\beta$ . Будем считать, что  $x'(t)$  и  $y'(t)$  существуют и непрерывны на отрезке  $[\alpha, \beta]$ . Иными словами, дуга  $\cup AB$  задается с помощью уравнения

$$z = z(t), \quad \text{где } z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta;$$

при этом  $z'(t)$  непрерывна на  $[\alpha, \beta]$ .

Пусть, далее,  $f(z)$  непрерывна в открытой области  $G$  и  $\cup AB \subset G$ . Разобьем произвольным образом эту дугу на части точками  $z_0, z_1, \dots, z_n$  в направлении от  $A$  к  $B$ , при этом  $z_0$  совпадает с точкой  $A$ ,  $z_n$  с точкой  $B$ . На каждой из частичных дуг  $\cup z_{k-1}z_k$  произвольным образом выберем по точке  $\eta_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) и составим сумму

$$\sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta z_k, \quad (3.5.1)$$

где  $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$  – вектор, идущий из точки  $z_{k-1}$  в точку  $z_k$  (см. рис. 3.5.1). Обозначим через  $s$  наибольшую из длин этих векторов (хорд):  $s = \max_k |\Delta z_k|$ .

Сумма (3.5.1) называется *интегральной*, а предел вида

$$\lim_{s \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\eta_k) \Delta z_k \quad (3.5.2)$$

– *интегралом* от функции  $f(z)$  по дуге  $\cup AB$ ; он обозначается символом  $\int_{\cup AB} f(z) dz$ .

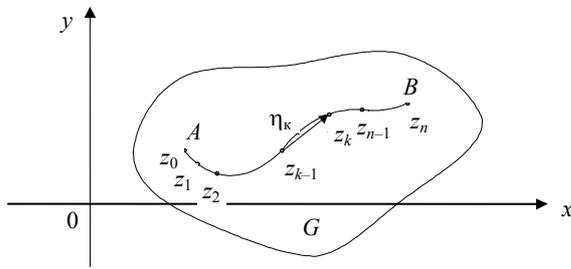


Рис. 3.5.1

Можно доказать, что при сформулированных выше условиях на функцию  $f(z)$  и дугу линии  $L$  предел (3.5.2) существует и не зависит от способа разбиения  $\cup AB$  на части точками  $z_k$  и от выбора "промежуточных" точек  $\eta_k$ .

2<sup>0</sup>. Из определения п. 1<sup>0</sup> вытекают привычные свойства интеграла:

$$1) \int_{\cup AB} (f_1(z) + f_2(z)) dz = \int_{\cup AB} f_1(z) dz + \int_{\cup AB} f_2(z) dz;$$

$$2) \int_{\cup AB} \lambda f(z) dz = \lambda \int_{\cup AB} f(z) dz, \text{ где } \lambda = \text{const};$$

$$3) \int_{\cup AB} f(z) dz = - \int_{\cup BA} f(z) dz,$$

где  $\cup BA$  – та же самая дуга, но с противоположным направлением обхода (от точки  $B$  к точке  $A$ );

4) если  $C$  – произвольная точка на  $\cup AB$ , то

$$\int_{\cup AB} f(z) dz = \int_{\cup AC} f(z) dz + \int_{\cup CB} f(z) dz;$$

$$5) \int_{\cup AB} dz = Z - z_0,$$

где  $z_0$  и  $Z$  – комплексные числа, изображаемые, соответственно, точками  $A$  и  $B$ ;

$$6) \left| \int_{\cup AB} f(z) dz \right| \leq M \ell,$$

где  $M$  – любая постоянная, определяемая условием  $|f(z)| \leq M, z \in \cup AB$ ;  $\ell$  – длина  $L$ .

Докажем, например, свойство 5). Имеем для  $f(z) = 1$  интегральную сумму (3.5.1) в виде

$$\sum_{k=1}^n \Delta z_k = z_1 - z_0 + z_2 - z_1 + \dots + z_{n-1} - z_{n-2} + z_n - z_{n-1} = z_n - z_0 = Z - z_0,$$

а тогда и предел (3.5.2) от постоянной  $Z - z_0$  равен  $Z - z_0$ . Свойство 5) установлено.

3<sup>0</sup>. Вычисление интеграла (3.5.2) сводится к вычислению определенного интеграла комплексной функции действительной переменной  $t$ :

$$\int_{\cup AB} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (3.5.3)$$

Действительно, произвольное слагаемое в интегральной сумме (3.5.1) имеет вид

$$f(\eta_k) \Delta z_k = f(\eta_k) (\Delta x_k + i \Delta y_k),$$

при этом приращения  $\Delta x_k$  и  $\Delta y_k$  функций  $x(t)$  и  $y(t)$  (при изменении  $z$  от  $z_{k-1}$  до  $z_k$ ) могут быть приближенно представлены в виде дифференциалов:

$$\Delta x_k \approx x'(t_k) \Delta t_k; \quad \Delta y_k \approx y'(t_k) \Delta t_k;$$

здесь  $t_k$  – аргумент функции  $z(t)$  такой что  $z_k = z(t_k)$  и  $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ .

Значение  $f(\eta_k)$ , ввиду непрерывности  $f$ , можно приближенно заменить на  $f(z_k) = f(z(t_k))$ , если  $|\Delta z_k|$  достаточно мало; в свою очередь, это достигается (по причине непрерывности  $z(t)$ ) выбором достаточно малых  $\Delta t_k$ . Итак,

$$f(\eta_k) \Delta z_k \approx f(z(t_k)) (x'(t_k) + iy'(t_k)) \Delta t_k = f(z(t_k)) z'(t_k) \Delta t_k.$$

Следовательно, при  $\max |\Delta t_k| \rightarrow 0$ , поведение интегральных сумм (3.5.1) и

$$\sum_{k=1}^n f(z(t_k))z'(t_k)\Delta t_k \quad (3.5.4)$$

совпадает; сумма же (3.5.4) является интегральной для определенного интеграла в правой части (3.5.3). Такова схема доказательства (3.5.3).

4<sup>0</sup>. Формальная подстановка

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{и} \quad dz = dx + i dy$$

и вычисление произведения

$$f(z)dz = u(x, y)dx - v(x, y)dy + i(v(x, y)dx + u(x, y)dy)$$

приводят нас также к формуле

$$\int_{\cup AB} f(z)dz = \int_{\cup AB} u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_{\cup AB} v(x, y)dx + u(x, y)dy, \quad (3.5.5)$$

доказательство которой (подобно п. 3<sup>0</sup>) производится сравнением интегральных сумм для криволинейных интегралов в правой части (3.5.5) с суммой (3.5.1).

5<sup>0</sup>. П р и м е р 1. Вычислить интегралы

$$\text{а) } J_1 = \int_L z \operatorname{Im} z dz$$

вдоль отрезка прямой от точки  $z_1 = 1 + i$  до  $z_2 = 2$  (рис. 3.5.2);

$$\text{б) } J_2 = \int_L |z| dz$$

вдоль дуги окружности  $|z| = 1$ , обходимой против часовой стрелки от точки  $z_1 = 1$  до  $z_2 = i$  (рис. 3.5.3).

*Решение.* а) Для точки  $z_1$  имеем  $x_1 = 1, y_1 = 1$ ; для  $z_2$  имеем  $x_2 = 2, y_2 = 0$ . Запишем уравнение прямой, соединяющей эти точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{-1}, \quad \text{откуда} \quad y = 2 - x.$$

Следовательно,  $z = x + iy$  можно записать в виде

$$z = x + i(2 - x), \quad 1 \leq x \leq 2; \quad \text{тогда} \quad \operatorname{Im} z = 2 - x; \quad dz = dx - i dx.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_1^2 (x + i(2 - x))(2 - x)(1 - i) dx = (1 - i) \int_1^2 (2x - x^2 + i(x - 2)^2) dx = \\ &= (1 - i) \left( x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{i}{3} (x - 2)^3 \right) \Big|_1^2 = (1 - i) \left( 4 - \frac{8}{3} + 0 - \left( 1 - \frac{1}{3} - \frac{i}{3} \right) \right) = \\ &= (1 - i) \frac{2 + i}{3} = \frac{3 - i}{3}. \end{aligned}$$

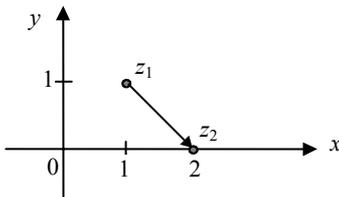


Рис. 3.5.2

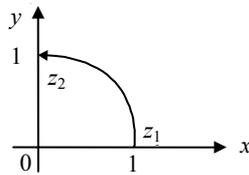


Рис. 3.5.3

б) Окружность  $|z| = 1$  имеет центр в начале координат и радиус  $r = 1$ , поэтому ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = \cos t; \\ y = \sin t, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad z = \cos t + i \sin t.$$

При этом  $dz = (-\sin t + i \cos t) dt$ . Подставляя  $|z| = 1$  и учитывая что  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$  на дуге  $\cup z_1 z_2$ , получаем

$$J_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot (-\sin t + i \cos t) dt = (\cos t + i \sin t) \Big|_0^{\pi/2} = (0 + i) - (1 + 0) = i - 1.$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл

$$J = \oint_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dz,$$

где  $n$  – любое целое число; вычисление ведется вдоль окружности  $|z-z_0|=R$  ( $z_0$  и  $R > 0$  – данные числа) в направлении обхода против часовой стрелки.

*Решение.* Имеем окружность с центром в точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  радиуса  $R$ , следовательно,

$$\begin{cases} x - x_0 = R \cos t; \\ y - y_0 = R \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Иначе говоря,  $z - z_0 = R(\cos t + i \sin t)$  или  $z = z_0 + Re^{it}$ ; тогда  $dz = iRe^{it} dt$ . При  $n \neq -1$  имеем

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} (Re^{it})^n \cdot iRe^{it} dt = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = iR^{n+1} \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \Big|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{R^{n+1}}{n+1} (e^{i(n+1)2\pi} - 1) = \frac{R^{n+1}}{n+1} (\cos 2(n+1)\pi + i \sin 2(n+1)\pi - 1) = 0. \end{aligned}$$

Если  $n = -1$ , то

$$J = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it} dt}{Re^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Итак,

$$\int_{|z-z_0|=R} (z-z_0)^n dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1, n - \text{целое}; \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

### 3.6. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА КОШИ

$1^0$ . Пусть  $L$  – замкнутый контур, целиком расположенный в области  $G$ . Будем считать, что  $L$  задан уравнением  $z = z(t)$  с непрерывной  $z'(t)$ , т.е. контур гладкий или хотя бы кусочно-гладкий.

**Теорема Коши.** Пусть  $f$  аналитична в  $G$ , и контур  $L$  ограничивает односвязную область  $D \subset G$ . Тогда

$$\oint_L f(z) dz = 0.$$

Эту теорему легко доказать при дополнительном предположении, что  $f'(z)$  – непрерывна. В силу формул (3.3.2) и (3.3.3) тогда будут непрерывными в  $G$  все частные производные первого порядка функций  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$  и  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$ . При этих предположениях к каждому из криволинейных интегралов в представлении (см. (3.5.5))

$$\oint_L f(z) dz = \oint_L u(x, y) dx + (-v(x, y)) dy + i \oint_L v(x, y) dx + u(x, y) dy \quad (3.6.1)$$

можно применить формулу Грина:

$$\oint_L u dx + (-v) dy = \iint_D \left( \frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.6.2)$$

$$\oint_L v dx + u dy = \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy; \quad (3.6.3)$$

обход контура  $L$  в криволинейных интегралах происходит против часовой стрелки.

Согласно условиям Коши–Римана (3.4.1) интеграл в правой части (3.6.3) равен нулю, и это же верно для двойного интеграла в (3.6.2), так как

$$\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Следовательно, равны нулю и оба криволинейных интеграла; они остаются нулевыми, если изменить направление обхода  $L$  на противоположное.

Теперь, в силу равенства (3.6.1), получаем утверждение теоремы.

2<sup>0</sup>. Заметим, что свойство непрерывности  $f'(z)$  вытекает из аналитичности  $f(z)$ , что будет доказано в дальнейшем. Однако, доказательство будет опираться на теорему Коши, а тогда сама она должна быть установлена иными (гораздо более объемными) рассуждениями. Их суть состоит в следующем.

а) Если  $\Delta$  – треугольник, лежащий в достаточно малой окрестности точки  $z_0$ , то в силу аналитичности  $f(z)$  для малого  $\varepsilon > 0$  имеем

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon, \quad z \in \Delta,$$

откуда

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \alpha(z, z_0)(z - z_0),$$

где  $|\alpha(z, z_0)| < \varepsilon$ . При интегрировании по  $z \in \Delta$  последнего равенства имеем

$$\left| \int_{\Delta} f(z) dz \right| = \left| \int_{\Delta} \alpha(z, z_0)(z - z_0) dz \right| \leq \text{const} \cdot \varepsilon,$$

так как интегралы остальных слагаемых обратятся в ноль (см. рассуждения п. 1<sup>0</sup>). Ввиду произвольности  $\varepsilon$  интеграл по контуру  $\Delta$  равен нулю.

б) Далее, устанавливается, что интеграл уже по всякому треугольнику равен нулю (иное предположение приводит к противоречию с п. а)).

в) Результат для треугольного контура переносится на случай произвольной замкнутой ломанной, а затем и на случай произвольной гладкой (кусочно-гладкой)  $L$ .

3<sup>0</sup>. Заметим также, что теорема Коши оказывается справедливой и в случае, когда  $f(z)$  остается аналитической в области  $D$ , а на ее границе  $L$  является лишь непрерывной.

4<sup>0</sup>. Теорема Коши в общем случае может быть сформулирована в терминах интегрирования по так называемым гомотопным путям. Суть утверждения в том, что для аналитической в области функции интеграл остается неизменным, если путь интегрирования непрерывно деформируется внутри области так, что его концы остаются неподвижными.

Для более точной формулировки рассмотрим в области  $D$  два пути: а)  $\gamma_0 = \gamma_0(t)$  и  $\gamma_1 = \gamma_1(t)$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  с общими концами  $\gamma_0(\alpha) = \gamma_1(\alpha) = a$ ; б)  $\gamma_0(\beta) = \gamma_1(\beta) = b$ .

Пусть существует непрерывная функция двух переменных  $\gamma = \gamma(s, t)$ ,  $s \in [0, 1]$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  с областью значений в  $D$ , такая что при всех  $s$  и  $t$

$$\gamma(0, t) \equiv \gamma_0(t); \quad \gamma(1, t) \equiv \gamma_1(t); \quad \gamma(s, \alpha) \equiv a; \quad \gamma(s, \beta) \equiv b.$$

Тогда пути  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  называются гомотопными в  $D$ . Заметим, что при изменении параметра  $s$  получаем семейство непрерывным образом деформирующихся путей, которые как бы связывают фиксированные пути  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$ .

В применении к замкнутым путям определение гомотопности имеет следующий вид. Два замкнутых пути  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  называются гомотопными в  $D$ , если указанная непрерывная функция  $\gamma = \gamma(s, t)$ ,  $s \in [0, 1]$ ,  $t \in [\alpha, \beta]$  обладает свойствами

$$\gamma(0, t) \equiv \gamma_0(t); \quad \gamma(1, t) \equiv \gamma_1(t); \quad \gamma(s, \alpha) \equiv \gamma(s, \beta).$$

Наконец, говорят, что замкнутый путь  $\gamma$  гомотопен нулю (точке) в области  $D$ , если в условиях последнего определения  $\gamma(1, t) \equiv \text{const}$ . Это означает, что замкнутый путь  $\gamma$  непрерывной деформацией внутри  $D$  может быть стянут в точку. Ясно, что в односвязной области каждый замкнутый путь гомотопен нулю и что два любые пути с общими концами гомотопны друг другу.

Теорема Коши в общей формулировке имеет следующий вид.

Пусть функция  $f = f(z)$  аналитична в  $D$  и пути  $\gamma_0$  и  $\gamma_1$  (кусочно-гладкие) гомотопны друг другу как пути с общими концами или как замкнутые пути. Тогда

$$\int_{\gamma_0} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz.$$

Поскольку в односвязной области каждый замкнутый путь  $\gamma_1$  гомотопен нулю, то получаем приведенное выше в п. 1 утверждение теоремы Коши о том, что интеграл аналитической в односвязной области  $D$  функции по всякому замкнутому пути  $\gamma_0$  равен нулю.

### 3.7. ТЕОРЕМА КОШИ ДЛЯ МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

1<sup>0</sup>. Пусть контуры  $L_1, L_2, \dots, L_n$  и  $L$  задаются также, как и в параграфе 3.6, являются замкнутыми и расположены в области  $G$ . Предположим далее, что все  $L_j$  находятся внутри  $L$ , ограничивают односвязные области и на каждом из  $L_j$  и  $L$  направление обхода выбрано против часовой стрелки.

**Т е о р е м а.** Если  $f(z)$  аналитична в области  $G$ , то

$$\oint_L f(z) dz = \oint_{L_1} f(z) dz + \oint_{L_2} f(z) dz + \dots + \oint_{L_n} f(z) dz. \quad (3.7.1)$$

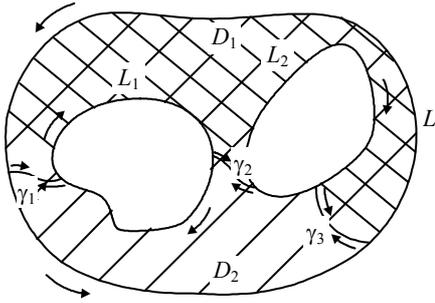


Рис. 3.7.1

**Доказательство.** Рассуждения проведем для случая  $n = 2$ , (см. рис. 3.7.1). Соединим контуры  $L, L_1, L_2$  гладкими кривыми  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ . При этом область  $D$ , ограниченная линией  $L$ , оказалась разбитой на две односвязные области  $D_1$  и  $D_2$  с границами  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$ , обходимыми в положительном направлении (т.е. в том направлении, при котором области  $D_1$  (при обходе  $\Gamma'$ ) и  $D_2$  (обход  $\Gamma''$ ) остаются слева). По теореме Коши для односвязной области

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz = 0; \quad \int_{\Gamma''} f(z) dz = 0,$$

следовательно,

$$\int_{\Gamma'} f(z) dz + \int_{\Gamma''} f(z) dz = 0, \quad \text{т.е.} \quad \int_{\Gamma' \cup \Gamma''} f(z) dz = 0.$$

Но объединение границ  $\Gamma'$  и  $\Gamma''$  состоит из  $L$  (обходимой против часовой стрелки),  $L_1$  и  $L_2$  (обход – по часовой стрелке) и  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ , обходимых дважды в противоположных направлениях, что показано на рисунке. Следовательно (свойство 4 п. 2<sup>0</sup> параграфа 3.5),

$$\begin{aligned} \oint_{-L_1} f(z) dz + \oint_{-L_2} f(z) dz + \int_{-\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz + \\ + \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \oint_L f(z) dz = 0, \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

где знак "–" перед обозначением контура указывает на обход по часовой стрелке. Согласно свойству 3) п. 2<sup>0</sup> параграфа 3.5 интегралы по  $-\gamma_1$  и  $\gamma_1$  отличаются только знаком и поэтому взаимно уничтожаются; то же самое верно для интегралов и по  $-\gamma_2$  и  $\gamma_2$ . Теперь, меняя направление обхода по  $-L_1$  и  $-L_2$  получаем (3.7.2) в виде

$$-\oint_{L_1} f(z) dz - \oint_{L_2} f(z) dz + \oint_L f(z) dz = 0,$$

а это и есть утверждение теоремы при  $n = 2$ . Общий случай  $n \geq 2$  доказывается точно также: записываем равенство типа (3.7.2), содержащее интегралы по всем  $-L_j, -\gamma_j, \gamma_j$  и  $L$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), откуда и вытекает (3.7.1).

2<sup>0</sup>. Если сохраняются предположения п. 1<sup>0</sup> для границ двусвязной области  $L$  (внешней) и  $\ell$  (внутренней), то важным следствием теоремы является (см. рис. 3.7.2) равенство

$$\int_L f(z) dz = \int_{\ell} f(z) dz.$$

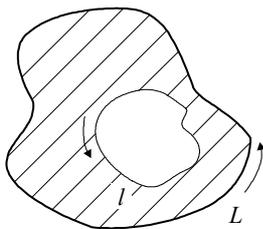


Рис. 3.7.2

### 3.8. ПЕРВООБРАЗНАЯ. ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА

1<sup>0</sup>. Докажем следующее утверждение. Пусть  $f(z)$  непрерывна в области  $G$ .

Интеграл по всякому замкнутому контуру  $L$ , расположенному в области  $G$ , равен нулю, тогда и только тогда, когда интеграл по любой дуге (расположенной в  $G$ ) зависит только от положения начальной и конечной точек дуги.

Действительно, пусть

$$\oint_L f(z) dz = 0 \text{ для любого } L \subset G.$$

Выберем произвольную дугу  $\gamma_1$ , соединяющую точки  $z_0$  и  $z$ . Всякая другая дуга  $\gamma_2$ , соединяющая эти же точки, образует вместе с  $\gamma_1$  замкнутый контур (см. рис. 3.8.1), поэтому

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz = 0,$$

где знак "-" перед  $\gamma_2$  означает путь от  $z$  к  $z_0$ .

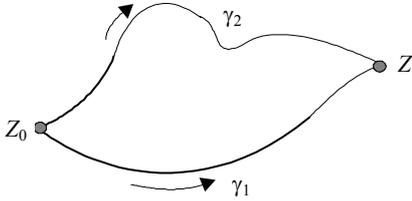


Рис. 3.8.1

Меняя направление на  $\gamma_2$ , имеем

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0 \text{ или } \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz,$$

т.е. независимо от пути интегрирования  $\int_{\cup_{z_0 z}} f(z) dz$  — один и тот же.

В указанном случае этот интеграл удобнее обозначить в виде

$$\int_{z_0}^z f(z) dz.$$

Обратно, если  $L$  — произвольный замкнутый контур в  $G$ , то в случае независимости интеграла от пути, соединяющего любые  $z_0$  и  $z$  имеем

$$\oint_L f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{-\gamma_2} f(z) dz = \int_{z_0}^z f(z) dz + \int_z^{z_0} f(z) dz.$$

Последние два интеграла можно вычислить (согласно предположению) вдоль отрезка прямой, соединяющего  $z_0$  и  $z$ , а тогда они отличаются лишь знаком. Значит  $\oint_L f(z) dz = 0$ .

2°. В частности, из теоремы Коши вытекает, что интеграл аналитической функции вдоль любой дуги, соединяющей  $z_0$  и  $z$ , зависит лишь от положения  $z_0$  и  $z$ ;  $z_0$  и  $z$  и упомянутые дуги предполагаются расположенными в области аналитичности функции  $f$ .

3°. Т е о р е м а. В предположениях п. 2° функция

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds$$

является аналитической в  $G$  и

$$\Phi'(z) = f(z). \quad (3.8.1)$$

Д о к а з а т е л ь т в о. Пусть  $z$  — произвольна,  $z \in G$ . В силу независимости интеграла от пути (см. п. 2°) для любого приращения  $\Delta z$  имеем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \Phi}{\Delta z} &= \frac{\Phi(z + \Delta z) - \Phi(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z} \left\{ \int_{z_0}^{z + \Delta z} f(s) ds - \int_{z_0}^z f(s) ds \right\} = \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z + \Delta z} f(s) ds. \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

В последнем интеграле траекторией интегрирования можно выбрать отрезок прямой, соединяющей  $z$  и  $z + \Delta z$ . В этом случае (свойство 5 пункта 2° параграфа 3.5)

$$\int_z^{z+\Delta z} ds = \Delta z.$$

Оценим, используя (3.8.2) и свойство б п. 2<sup>0</sup> параграфа 3.5, следующее выражение:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta z} - f(z) \right| &= \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds - f(z)\Delta z \right| = \\ &= \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} f(s) ds - f(z) \int_z^{z+\Delta z} ds \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} (f(s) - f(z)) ds \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|} \cdot (\max |f(s) - f(z)|) \cdot |\Delta z| \leq \max |f(s) - f(z)|; \end{aligned}$$

здесь наибольшее значение модуля разности значений функции берется по всем  $s \in [z, z + \Delta z]$ , а так как  $f$  аналитична (а значит и непрерывна), то указанное значение можно сделать меньшим любого  $\varepsilon > 0$  для достаточно малых  $|\Delta z|$ . По определению предела это означает, что

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta z} = f(z).$$

Последнее соотношение равносильно (3.8.1). Ввиду произвольности  $z \in G$  имеем, в частности, аналитичность  $\Phi(z)$  в  $G$ . Теорема доказана.

4<sup>0</sup>. Утверждение теоремы п. 3<sup>0</sup> означает, что "интеграл с переменным верхним пределом"

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds \quad (3.8.3)$$

есть первообразная для  $f(z)$ . Для другой первообразной  $F(z)$  имеем

$$(\Phi(z) - F(z))' = f(z) - f(z) = 0,$$

откуда действительная и мнимая части  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$  разности  $\Phi(z) - F(z)$  обладает свойством (см. (3.3.2))

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \text{ т.е. } \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \text{ и } \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Из условий Коши–Римана будет вытекать также, что

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Следовательно полные дифференциалы  $dU = 0$ ,  $dV = 0$ , откуда постоянными оказываются  $U(x, y)$  и  $V(x, y)$ . Вместе с ними постоянна и разность  $\Phi(z) - F(z)$ . Таким образом,

$$\Phi(z) = F(z) + C, \quad (3.8.4)$$

где  $C$  – некоторое постоянное комплексное число.

5<sup>0</sup>. Имеет место формула Ньютона–Лейбница:

$$\int_{z_0}^z f(s) ds = F(z) - F(z_0), \quad (3.8.5)$$

где  $F(z)$  – любая первообразная аналитической функции  $f$ .

Действительно, при  $z = z_0$  в (3.8.4) получаем

$$0 = F(z_0) + C, \text{ т.е. } C = -F(z_0).$$

Теперь, согласно (3.8.4), получаем

$$\Phi(z) = F(z) - F(z_0).$$

Вспоминая определение (3.8.3), приходит к формуле (3.8.5).

6<sup>0</sup>. Условия голоморфности функции  $f(z)$  можно сформулировать в терминах так называемых дифференциальных форм, т.е. выражений вида  $\omega = f \cdot dz$ .

Форма  $\omega$  называется замкнутой, если в рассматриваемой области  $D$  ее дифференциал  $d\omega$  равен нулю и точной, если существует такая функция  $F$ , что во всех точках  $F' = f$ .

Как оказывается, из голоморфности  $f(z)$  в данной области  $D$  вытекает ее замкнутость: достаточно записав  $\omega = f dz$  в виде  $(u + iv)(dx + idy) = u dx - v dy + i(v dx + u dy)$  вычислить, пользуясь условиями Коши-Римана,  $d\omega = \omega'_x dx + \omega'_y dy$ , чтобы убедиться в том, что  $d\omega = 0$  всюду в  $D$ . Верно и обратное, так что голоморфность в  $D$  функции  $f(z)$  равносильна замкнутости соответствующей дифференциальной формы.

Существование же первообразной голоморфной функции (которое имеет место во всякой односвязной области), означает для соответствующей дифференциальной формы, что она точна (точна «глобально»).

Таким образом, всякая замкнутая в односвязной области дифференциальная форма (указанного вида) глобально точна.

### 3.9. ФОРМУЛА КОШИ

1<sup>0</sup>. Пусть функция  $f(z)$  однозначна и аналитична в области  $G$ ,  $L$  – контур, ограничивающий односвязную область  $D$ , целиком лежащий в  $G$  и обходимый против часовой стрелки; характер линии  $L$  описан в п. 1<sup>0</sup> параграфа 3.6. Тогда для любой точки  $z_0$ , лежащей в  $D$  (т.е. расположенной внутри  $L$ ) имеет место следующая интегральная формула:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (3.9.1)$$

Доказательство (3.9.1). Для любого  $\varepsilon > 0$  выберем в  $D$  окружность  $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$  столь малого радиуса  $\rho$ , чтобы

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon; \quad (3.9.2)$$

это возможно, так как  $f(z)$ , будучи аналитической, является и непрерывной в  $D$ . Обозначим через  $\gamma$  указанную окружность, выберем на ней направление обхода против часовой стрелки и заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 1 \quad (3.9.3)$$

согласно примеру 2 п. 5<sup>0</sup> параграфа 3.5. Теперь по теореме Коши для двухсвязной области (п. 2<sup>0</sup> параграфа 3.7) имеем

$$\oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0}. \quad (3.9.4)$$

Указанная теорема применима, поскольку  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$  аналитична вместе с  $f(z)$  в области  $D$ , из которой исключена точка  $z_0$ , так что, в частности,  $\varphi(z)$  аналитична в области между контурами  $\gamma$  и  $L$  и на самих этих контурах.

Оценим разность между интегралом (3.9.1) и  $f(z_0)$ , воспользовавшись (3.9.3) и (3.9.4):

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} - f(z_0) \right| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) dz}{z - z_0} - f(z_0) \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz \right|. \end{aligned} \quad (3.9.5)$$

Оценивая модуль интеграла (свойство 6 п. 2<sup>0</sup> параграфа 3.5), имеем правую часть (3.9.5) не превосходящей

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon,$$

поскольку имеет место неравенство (3.9.2) и соотношение  $|z - z_0| = \rho$  на окружности  $\gamma$ . Теперь

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{z - z_0} - f(z_0) \right| < \varepsilon,$$

и, в силу произвольности  $\varepsilon$ , имеем левую часть полученного неравенства равной нулю. Следовательно, формула (3.9.1) доказана.

2<sup>0</sup>. В предположениях п. 1<sup>0</sup> в любой точке  $z_0$  производная  $f'(z)$  также оказывается аналитической функцией и имеет место формула

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^2}. \quad (3.9.6)$$

Действительно, "разностное отношение" в силу (3.9.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} &= \frac{1}{2\pi i h} \left( \oint_L \frac{f(z)dz}{(z-(z_0+h))} - \oint_L \frac{f(z)dz}{z-z_0} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i h} \oint_L \left( \frac{1}{(z-z_0-h)} - \frac{1}{(z-z_0-h)(z-z_0)} \right) f(z) dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)} dz, \end{aligned} \quad (3.9.7)$$

где через  $h$  обозначено произвольное приращение  $\Delta z$  с достаточно малым значением  $|h|$ .

Переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$  (предельный переход под знаком интеграла может быть аккуратно обоснован), получаем формулу (3.9.6). Поскольку  $z_0$  может быть заменена на любую точку  $\tilde{z}_0$  (из достаточно малой окрестности точки  $z_0$ ), то  $f(z)$  аналитична в точке  $z_0$ .

3°. Рассуждения п. 2° можно повторить для  $f''(z_0), f'''(z_0)$  и т.д. Следовательно, для любого  $n$  в каждой точке  $z_0 \in D$  существует производная  $f^{(n)}(z_0)$  и для нее справедливо соотношение

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz. \quad (3.9.8)$$

Формулу (3.9.8) можно получить формально дифференцированием по  $z_0$  соотношения (3.9.1)  $n$  раз под знаком интеграла.

4°. **Т е о р е м а М о р е р а.** Если функция  $f(z)$  непрерывна в односвязной области  $G$  и интеграл от  $f(z)$  по любому замкнутому контуру равен нулю, то  $f(z)$  аналитична в  $G$ .

Это утверждение является обратным по отношению к установленному ранее свойству, что интеграл по замкнутому контуру от аналитической функции – равен нулю. Выше мы установили, что функция

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(s) ds$$

является аналитической (при условиях теоремы этот интеграл не зависит от пути, соединяющего точки  $z_0$  и  $z$ ), причем доказательство сохранилось бы, если  $f(z)$  требовать лишь непрерывной в  $G$ ; далее, было установлено, что  $F'(z) = f(z)$ . Согласно результату п. 3° аналитической будет и  $F'(z)$ , совпадающая с  $f(z)$ , а это и есть доказываемый результат.

5°. Неожиданной, на первый взгляд, является следующая

**Т е о р е м а Л и у в и л л я.** Пусть функция  $f(z)$  аналитична во всей комплексной плоскости и существует постоянная  $M$  такая, что для всех  $z$  выполнено неравенство  $|f(z)| \leq M$ . Тогда  $f(z)$  тождественно равна постоянной.

Другими словами, аналитическая во всей плоскости функция, отличная от постоянной, не может быть ограничена по модулю; так, например, можно указать точки, в которых  $|\sin z|$  сколь угодно велик.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу аналитичности  $f'(z)$  (вместе с  $f(z)$ ) во всей плоскости имеем:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} \frac{f(s)}{(s-z)^2} ds, \quad (3.9.9)$$

где  $\gamma_R$  – окружность с центром в точке  $z$ , сколь угодно большого радиуса  $R$ , обходимая в направлении против часовой стрелки.

На этой окружности  $|s-z| = R$ , следовательно,

$$\left| \frac{f(s)}{(s-z)^2} \right| \leq \frac{M}{R^2};$$

тогда интеграл (3.9.9) имеет оценку

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} \cdot 2\pi R = \frac{M}{R},$$

где  $2\pi R$  – длина окружности  $\gamma_R$ . Но  $M = \text{const}$ ,  $R$  – сколь угодно велико, тогда  $|f'(z)| = 0$  при всех  $z$ . Отсюда легко следует (см. рассуждения п. 4° параграфа 3.8), что  $f(z)$  – постоянна, что и утверждалось.

6°. Важным приложением теоремы Лиувилля является так называемая *основная теорема алгебры*: всякое уравнение вида

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

имеет хотя бы один корень.

Действительно, предположим противное. Тогда знаменатель дроби

$$f(z) = \frac{1}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0} \quad (3.9.10)$$

всегда отличен от нуля, а значит (вычислением производной) убеждаемся, что  $f(z)$  аналитична во всей плоскости. Далее, очевидно, что (см. п. 3<sup>0</sup> параграфа 2.2)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}} = 0,$$

т.е.  $|f(z)| < 1$  для достаточно больших  $|z|$ , например, в области, где  $|z| > R$  с достаточно большим  $R$ . В круге  $|z| \leq R$  модуль  $f(z)$  также ограничен, так как  $f(z)$  непрерывна в круге. Получается, что аналитическая  $f(z)$  имеет ограниченный модуль, а тогда, по теореме Лиувилля,  $f(z) = \text{const}$ . Но это противоречит ее определению (3.9.10). Следовательно, теорема доказана.

7<sup>0</sup>. П р и м е р 1. Вычислить  $J = \oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z^2 + iz} dz$  вдоль окружности:

а)  $|z| = \frac{1}{2}$ ; б)  $|z-2| = 1$ ; в)  $|z+i| = \frac{1}{2}$ .

Направление обхода – против часовой стрелки.

Р е ш е н и е. а) Запишем интеграл в виде

$$J = \oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z(z+i)} dz = \oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z}(z+i)^{-1}}{z-0} dz.$$

Поскольку внутри окружности  $|z| = 1/2$  содержится точка  $z_0 = 0$  и не содержится  $z = -i$  (см. рис. 3.9.1), то для функции  $f(z) = e^{\pi z}(z+i)^{-1}$  применима интегральная формула Коши в виде

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

В нашем случае  $J = 2\pi i e^{\pi \cdot 0}(0+i)^{-1} = 2\pi$ .

б)  $f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z(z+i)}$  является аналитической в круге  $|z-2| \leq 1$ , так как нули знаменателя  $z_0 = 0$  и  $z_1 = -i$  лежат вне этого круга (рис. 3.9.1). По теореме Коши (для односвязной области) имеем тогда  $J = 0$ .

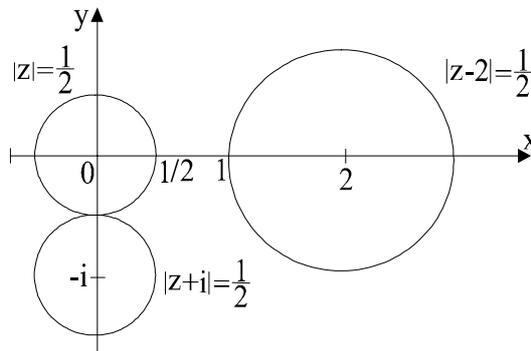


Рис. 3.9.1

в)  $f(z) = e^{\pi z} \cdot z^{-1}$  является аналитической в круге  $|z+i| = \frac{1}{2}$  с центром  $(-i)$  радиуса  $R = \frac{1}{2}$ . Тогда по формуле Коши

$$J = \oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z} \cdot z^{-1}}{z - (-i)} dz = 2\pi i e^{-\pi i} (-i)^{-1} = -2\pi (\cos \pi - i \sin \pi) = 2\pi.$$

П р и м е р 2. Вычислить

$$J = \oint_{\gamma} \left( \frac{z}{z-3i} \right)^3 dz$$

вдоль окружности  $|z - 3i| = 3$ , обходимой в направлении против часовой стрелки.

*Решение.* Запишем интеграл в таком виде, чтобы была применима формула п. 3<sup>0</sup>

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0). \quad (3.9.11)$$

В нашем случае

$$J = \oint_{\gamma} \frac{z^3}{(z - 3i)^{2+1}} dz = \frac{2\pi i}{2!} (z^3)'' \Big|_{z=3i},$$

так как  $f(z) = z^3$ ,  $n = 2$ ,  $z_0 = 3i$ . Вычисляя правую часть полученного равенства, имеем

$$J = \frac{2\pi i}{2} \cdot 6z \Big|_{z=3i} = \pi i \cdot 18i = -18\pi.$$

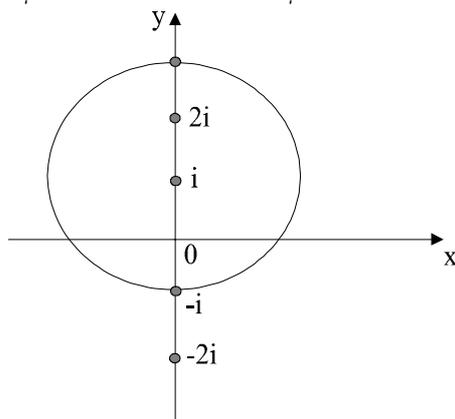
**Пример 3.** Вычислить

$$J = \oint_{\gamma} \frac{\sin iz}{(z^2 + 4)^2} dz,$$

$\gamma$  – окружность  $|z - i| = 2$ , обходимая против часовой стрелки.

*Решение.* Приведем интеграл  $J$  к виду (3.9.6). Для этого заметим, что  $z^2 + 4 = z^2 - (2i)^2 = (z - 2i)(z + 2i)$ , и в круге  $|z - i| \leq 2$  содержится лишь одна из двух точек (именно  $z = 2i$ ), в которой знаменатель обращается в ноль (см. рис. 3.9.2). Теперь

$$J = \oint_{\gamma} \frac{\sin iz}{(z - 2i)^2 (z + 2i)^2} dz = \oint_{\gamma} \frac{(z + 2i)^{-2} \sin iz}{(z - 2i)^2} dz.$$



**Рис. 3.9.2**

Применим формулу (3.9.11) с  $f(z) = (z + 2i)^{-2} \sin iz$ ,  $z_0 = 2i$ ,  $n = 1$ . Имеем:

$$\begin{aligned} J &= 2\pi i \left( (z + 2i)^{-2} \sin iz \right)' \Big|_{z=2i} = \\ &= 2\pi i \left( -2(z + 2i)^{-3} \sin iz + i(z + 2i)^{-2} \cos iz \right) \Big|_{z=2i} = \\ &= 2\pi i \left( -2(4i)^{-3} \sin(-2) + i(4i)^{-2} \cos(-2) \right) = 2\pi i \left( \frac{2\sin 2}{-64i} + \frac{i\cos 2}{-16} \right) = \\ &= 2\pi i \left( \frac{i\sin 2}{32} - \frac{i\cos 2}{16} \right) = \frac{\pi}{16} (2\cos 2 - \sin 2). \end{aligned}$$

8<sup>0</sup>. Рассмотрим произвольный гладкий (или кусочно-гладкий и необязательно замкнутый) путь  $L$ , функцию  $f(z)$ , непрерывную на  $L$  и произвольную точку  $z$ , не лежащую на  $L$ . Интеграл вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(s)}{s - z} ds \quad (3.9.12)$$

называется *интегралом типа Коши*. Очевидно, что интеграл, записанный в правой части равенства (3.9.1), является частным случаем (3.9.12).

Интеграл вида (3.9.12) определяет однозначную функцию  $\Phi(z)$  во всякой области  $D$ , не содержащей ни одной точки пути  $L$ . Можно доказать, что эта функция в области  $D$  обладает производными любого порядка, причем  $n$ -я производная может быть найдена путем формального  $n$ -кратного дифференцирования выражения под знаком интеграла:

$$\Phi^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds.$$

### 3.10. УПРАЖНЕНИЯ К ГЛАВЕ 3

1<sup>0</sup>. Найти точки, в которых данная  $w = f(z)$ :

- а) дифференцируема;  
б) аналитична:

1)  $w = e^{1-2z}$ ; 2)  $w = \frac{\cos z}{2}$ ; 3)  $w = \bar{z}^2 - z + 1$ ;

4)  $w = \frac{\bar{z}}{z}$ ; 5)  $w = z(|z| - 1)$ ; 6)  $w = \operatorname{Re} z^2$ .

2<sup>0</sup>. Найти аналитическую функцию  $w = f(z)$ , для которой

- а) действительная часть равна  $u(x, y) = 4x^2 - 4y^2$ ;  
б) мнимая часть равна  $v(x, y) = 3e^{2x} \sin 2y$ .

3<sup>0</sup>. Найти угол поворота  $\alpha$  и коэффициент растяжения  $k$  при отображении  $w = f(z)$  в точке  $z_0$ , если

1)  $w = z^2 - 1 + i$ ,  $z_0 = 1$ ; 2)  $w = i - e^z$ ,  $z_0 = -i\pi$ .

4<sup>0</sup>. Вычислить интеграл:

1)  $\int_L z \operatorname{Im}(z-i) dz$  вдоль линии  $z = x + ix^2$  от точки  $z_1 = 1 + i$  до точки  $z_2 = -1 + i$ ;

2)  $\int_L |z| dz$  вдоль дуги окружности  $z = 2e^{i\varphi}$  в направлении против часовой стрелки от точки  $z_1 = 2$  до точки  $z_2 = 2i$ ;

3)  $\int_L (1-z^2) dz$  вдоль отрезка прямой, соединяющей точки:

а)  $z_1 = i - 1$  и  $z_2 = 1 - i$ ; б)  $z_1 = -2$  и  $z_2 = 4i$ ;

4)  $\int_L (z - 2\operatorname{Re} z) dz$  вдоль ломанной, соединяющей точки  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 2 + 2i$ ,  $z_3 = 2i$ .

5<sup>0</sup>. Вычислить интеграл по замкнутому контуру  $L$  в направлении против часовой стрелки:

1)  $\oint_L \frac{\sin z}{z - \frac{\pi i}{2}} dz$ ;  $L$  — окружность  $|z| = 2$ ;

2)  $\oint_L \frac{ze^{-z}}{z^2 + 1} dz$ ;  $L$  — окружность: а)  $|z - i| = 1$ ; б)  $|z + 1| = 1$ ;  
в)  $|z - 3i| = 1$ ;

3)  $\oint_L \frac{\cos(z-i)}{(z-i)^3} dz$ ;  $L$  — окружность  $2|z| = 3$ ;

4)  $\oint_L \frac{z+i}{z(z-2)^2} dz$ ;  $L$  — окружность  $|z-2| = 1,9$ ;

5)  $\oint_L \frac{e^{i\pi z}}{(z^2 - 1)^2} dz$ ;  $L$  — окружность  $|z+2| = 2$ .

4.1. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ. ДАЛЬНЕЙШИЕ СВОЙСТВА

1<sup>0</sup>. Рассмотрим ряд по степеням разности  $(z - z_0)$ , где  $z_0$  – данное комплексное число:

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n = C_0 + C_1(z - z_0) + \dots + C_n(z - z_0)^n + \dots \quad (4.1.1)$$

Выше (в параграфе 2.4) установлено, что *областью сходимости* (4.1.1) является некоторый круг  $|z - z_0| < R$ ; исключим из рассмотрения тривиальный случай  $R = 0$  (случай единственной точки сходимости). Тогда при любом  $\rho$ ,  $0 < \rho < R$ , степенной ряд (4.1.1) равномерно сходится (и даже мажорируем) в замкнутом круге  $\bar{U}(z_0, \rho)$ , состоящем из точек  $z$ , таких, что  $|z - z_0| \leq \rho$  (см. пп. 4<sup>0</sup>, 6<sup>0</sup> параграфа 2.4).

Если функция  $\varphi(z)$  равномерно по модулю ограничена, т.е. если существует  $M = \text{const}$ , такая, что  $|\varphi(z)| \leq M$  при  $z \in \bar{U}(z_0, \rho)$ , то ряд

$$C_0 \varphi(z) + C_1 \varphi(z) (z - z_0) + \dots + C_n \varphi(z) (z - z_0)^n + \dots \quad (4.1.2)$$

остается мажорируемым в том же круге. Действительно, пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

является мажорантным (т.е. сходящимся и таким, что  $|C_n(z - z_0)|^n \leq a_n$ ; читателю рекомендуется уточнить вид последовательности  $a_n$ ) для (4.1.1), тогда мажорантным для (4.1.2) оказывается, очевидно, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} M a_n.$$

2<sup>0</sup>. Установим возможность *почленного интегрирования и дифференцирования степенных рядов* и (при дополнительных предположениях о  $\varphi(z)$ ) рядов вида (4.1.2) в круге сходимости. Эта возможность будет вытекать, как частный случай, из следующих утверждений.

3<sup>0</sup>. **Т е о р е м а 1.** Пусть члены равномерно сходящегося в круге  $\bar{U}(z_0, \rho)$  ряда

$$f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z) + \dots \quad (4.1.3)$$

непрерывны и  $L$  – некоторая дуга, расположенная в этом круге. Тогда, если  $f(z)$  – сумма ряда (4.1.3), то возможно почленное интегрирование по дуге  $L$ :

$$\int_L f(z) dz = \int_L f_0(z) dz + \int_L f_1(z) dz + \dots + \int_L f_n(z) dz + \dots \quad (4.1.4)$$

Заметим, что утверждение теоремы уже включает в себя сходимость ряда (4.1.4); дуга  $L$  (по которой производится интегрирование), как и выше (в главе 3) предполагается параметрически заданной ( $z = z(t)$ ) и гладкой (либо кусочно-гладкой).

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проводится также, как в случае соответствующего свойства для рядов из функций действительного переменного. Во-первых (как отмечалось в п. 2<sup>0</sup> параграфа 2.4),  $f(z)$  – непрерывна в указанном выше круге, т.е. интеграл от нее (вдоль  $L$ ) существует. Во-вторых, достаточно доказать (по определению сходимости ряда), что разность

$$\int_L f(z) dz - \left( \int_L f_0(z) dz + \int_L f_1(z) dz + \dots + \int_L f_n(z) dz \right)$$

является при  $n \rightarrow \infty$  бесконечно малой последовательностью. Действительно, модуль этой разности обладает оценкой

$$\begin{aligned} & \left| \int_L f(z) dz - \int_L (f_0(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z)) dz \right| = \\ & = \left| \int_L (f(z) - S_n(z)) dz \right| \leq \left( \max_{z \in L} |f(z) - S_n(z)| \right) \ell, \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

где  $S_n(z)$  – частная сумма ряда (4.1.3);  $\ell$  – длина дуги  $L$ .

Ввиду равномерной сходимости (см. п. 2<sup>0</sup> параграфа 2.4) ряда (4.1.3) правая часть (4.1.5) стремится к нулю (при  $n \rightarrow \infty$ ), чем и доказано соотношение (4.1.4).

В частности, если  $\varphi(z)$  непрерывна в круге  $\bar{U}(z_0; \rho)$  (а значит, и ограничена по модулю), то мажорируемый (и, следовательно, равномерно сходящийся к своей сумме) ряд (4.1.2) допускает почленное интегрирование.

4<sup>0</sup>. Т е о р е м а 2. Если члены ряда (4.1.3) аналитичны в круге  $\bar{U}(z_0; \rho)$  и ряд равномерно сходится к сумме  $f(z)$  в этом круге, то и  $f(z)$  аналитична для всех  $z \in \bar{U}(z_0; \rho)$ .

Схема доказательства теоремы для случая произвольной точки  $z \in U(z_0; \rho)$  состоит в следующем:

а) пусть  $\gamma$  – некоторая окружность с центром в точке  $z$ , целиком лежащая внутри  $\bar{U}(z_0; \rho)$ , тогда

$$\frac{f(s)}{s-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(s)}{s-z}, \quad s \in \gamma,$$

причем члены ряда аналитичны (как функции от  $s$ ) вместе с  $f_n(s)$ ;

б) согласно теореме 1 возможно почленное интегрирование ряда по окружности  $\gamma$  (обход – в направлении против часовой стрелки):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s) ds}{s-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_n(s) ds}{s-z} \right)$$

или, согласно интегральной формуле Коши,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s) ds}{s-z} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z),$$

а тогда сумма ряда (4.1.3)  $f(z)$  оказывается совпадающей с интегралом "типа Коши":

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s) ds}{s-z};$$

в) этот интеграл представляет собой аналитическую в  $\bar{U}(z_0; \rho)$  функцию (подобное утверждение обсуждалось выше), т.е.  $f(z)$ , ввиду произвольности  $z$ , аналитична в указанном круге.

В частности, сумма степенного ряда (4.1.1) аналитична в круге сходимости.

## 4.2. РЯД ТЕЙЛОРА

1<sup>0</sup>. Пусть  $w = f(z)$  однозначна и аналитична в круге  $G$  с центром в некоторой точке  $z_0$ . Поставим задачу: разложить  $f(z)$  в ряд по степеням разности  $(z - z_0)$ .

Подобная задача для функций действительной переменной при некоторых условиях на функцию (помимо дифференцируемости сколь угодно много раз) решалась в виде ряда Тейлора. В случае аналитической  $f(z)$  интегральная формула Коши позволяет "напрямую" получать аналог тейлоровского ряда.

2<sup>0</sup>. При условиях п. 1<sup>0</sup> для любой  $z \in G$  имеет место разложение

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!} (z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!} (z - z_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n + \dots, \quad (4.2.1)$$

что будет доказано ниже, в п. 4<sup>0</sup>.

3<sup>0</sup>. Другая форма (4.2.1) оказывается следующей:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - z_0)^n, \quad (4.2.2)$$

где

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s) ds}{(s - z_0)^{n+1}}; \quad (4.2.3)$$

$\gamma$  – любая окружность с центром в точке  $z_0$ , обходимая против часовой стрелки и целиком лежащая в области  $G$ .

Разложения (4.2.1) и (4.2.2) эквивалентны, так как коэффициенты при  $(z - z_0)^n$ , записываемые в виде  $\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ , совпадают с правой частью (4.2.3):

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(s) ds}{(s - z_0)^{n+1}}$$

ввиду формулы (3.9.8) для  $f^{(n)}(z_0)$ .

4<sup>0</sup>. Итак, достаточно доказать (4.2.2). Так как  $f(z)$  аналитична в  $G$ , то по формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{s-z_0}} ds, \quad (4.2.4)$$

где  $z$  – произвольная точка в области  $G$ , а окружность  $\gamma$  с центром в точке  $z_0$  проведена так, что  $z$  расположена внутри ее.

При таком выборе контура интегрирования (см. рис. 4.2.1)

$$|z - z_0| < |s - z_0|,$$

т.е.  $q = \frac{z-z_0}{s-z_0}$  обладает свойством  $|q| < 1$ .

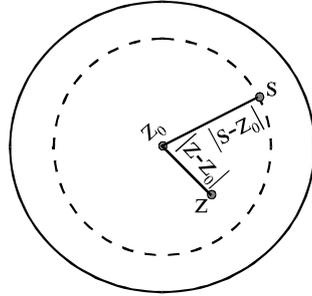


Рис. 4.2.1

Теперь

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots$$

является сходящимся рядом как сумма геометрической прогрессии (сходимость при  $|q| < 1$  доказывается в точности так же, как для случая прогрессии с действительными членами). Под знаком интеграла (4.2.4) получается ряд (по степеням  $\frac{z-z_0}{s-z_0}$ ), сходящийся при каждом  $z$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z_0} \left( 1 + \frac{z-z_0}{s-z_0} + \frac{(z-z_0)^2}{(s-z_0)^2} + \dots + \frac{(z-z_0)^n}{(s-z_0)^n} + \dots \right) ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{s-z_0} ds + \frac{1}{2\pi i} (z-z_0) \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^2} ds + \frac{1}{2\pi i} (z-z_0)^2 \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^3} ds + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i} (z-z_0)^n \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds + \dots \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Почленное интегрирование возможно в силу теоремы 1, условия которой выполнены, так как:

- $f(s)$  аналитична в  $G$ , следовательно, существует постоянная  $M$ , такая что  $|f(s)| \leq M$  на  $\gamma$ ;
- $|s - z_0| = r = \text{const}$ , где  $r$  – радиус выбранной окружности  $\gamma$ ;
- ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(s)}{s-z_0} \left( \frac{z-z_0}{s-z_0} \right)^n$$

имеет тогда в качестве мажорантного сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{r} |q|^n,$$

где  $q = \frac{z-z_0}{s-z_0}$ , так что  $|q| < 1$ .

Разложение (4.2.5) теперь совпадает с утверждением (4.2.2), если учесть определение (4.2.3) коэффициентов  $C_n$ .

Следовательно, соотношения (4.2.1) и (4.2.2) доказаны. Заметим, что контур интегрирования в доказательстве мы выбрали так, чтобы точка  $z$  была заключена внутри его, однако, по теореме Коши для многосвязной области (см. параграф 3.7), в качестве  $\gamma$  можно выбрать *любую* окружность с центром в  $z_0$ , лежащую в  $G$ .

<sup>50</sup>. При  $z_0 = 0$  (4.2.1) называется рядом Маклорена:

$$f(z) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n + \dots$$

В частности, равенства (2.5.1), (2.5.2), (2.5.3), выведенные ранее как *определения* соответствующих элементарных функций, могут теперь быть истолкованы как *разложения* в ряды Маклорена. Список подобных разложений можно дополнить. Например,

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots, \quad |z| < 1.$$

6°. Пусть теперь  $f(z)$  аналитична в произвольной точке  $z_0$ . Ее можно выбрать в качестве центра круга (достаточно малого радиуса), в котором  $f(z)$  остается аналитичной, а затем разложить  $f(z)$  в ряд Тейлора (4.2.1). Говорят, что (4.2.1) есть разложение  $f(z)$  в окрестности  $z_0$ .

Если  $f(z_0) = 0$ , то разложение в окрестности  $z_0$ , записанное в форме (4.2.2), имеет вид

$$f(z) = C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \dots + C_n(z-z_0)^n + \dots, \quad (4.2.6)$$

так как  $C_0 = f(z_0) = 0$ . Может случиться так, что  $C_0 = C_1 = \dots = C_{n-1} = 0$ , но  $C_n \neq 0$ , т.е.

$$f(z) = C_n(z-z_0)^n + C_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \dots \quad (4.2.7)$$

В этом случае точку  $z_0$  называют *нулем  $n$ -го порядка* функции  $f(z)$ , а при  $n=1$  (случай (4.2.6)) – *простым нулем*. Итак (см. (4.2.1)), если

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad \text{но } f^{(n)}(z_0) \neq 0,$$

то  $z = z_0$  является нулем  $n$ -го порядка для  $f(z)$ .

7°. **Т е о р е м а.** Пусть  $f(z)$  аналитична в точке  $z_0$ . Эта точка является нулем  $n$ -го порядка для  $f(z)$  тогда и только тогда, когда существует аналитическая (в точке  $z_0$ ) функция  $\varphi(z)$ , такая, что  $\varphi(z_0) \neq 0$  и

$$f(z) = (z-z_0)^n \varphi(z). \quad (4.2.8)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Если  $z_0$  – нуль  $n$ -го порядка, то согласно (4.2.7)

$$f(z) = (z-z_0)^n (C_n + C_{n+1}(z-z_0) + \dots), \quad (4.2.9)$$

причем степенной ряд

$$C_n + C_{n+1}(z-z_0) + \dots$$

служит остатком для (4.2.2), а значит имеет тот же круг сходимости. Следовательно, его сумма  $\varphi(z)$  аналитична в указанном круге, причем

$$\varphi(z_0) = C_n + 0 + 0 + \dots = C_n \neq 0.$$

Тогда равенство (4.2.9) принимает вид (4.2.8), где  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

Докажем обратное утверждение. Пусть  $f(z)$  представима в виде (4.2.8), где  $\varphi(z)$  аналитична в точке  $z_0$  и  $\varphi(z_0) \neq 0$ . Разложим  $\varphi(z)$  в ряд (4.2.2) в окрестности точки  $z_0$ :

$$\varphi(z) = \tilde{C}_0 + \tilde{C}_1(z-z_0) + \dots, \quad \text{где } \tilde{C}_0 \neq 0 \quad (\text{так как } \varphi(z_0) \neq 0).$$

В силу (4.2.8) в указанной окрестности

$$f(z) = \tilde{C}_0(z-z_0)^n + \tilde{C}_1(z-z_0)^{n+1} + \dots; \quad \tilde{C}_0 \neq 0.$$

Следовательно,  $f(z)$  имеет разложение вида (4.2.7). Переобозначив коэффициенты в виде  $C_n = \tilde{C}_0$ ,  $C_{n+1} = \tilde{C}_1$ , ..., получаем (4.2.7), где  $C_n \neq 0$ , т.е.  $z_0$  оказалась нулем  $n$ -го порядка для  $f(z)$ , что и есть обратное утверждение. Теорема полностью доказана.

8°. **П р и м е р.** Найти нули функции

$$f(z) = (z^2 + 1)^3 e^{-\pi z}.$$

**Р е ш е н и е.** Так как

$$z^2 + 1 = z^2 - (i)^2 = (z-i)(z+i),$$

то

$$f(z) = (z-i)^3 \left( (z+i)^3 e^{-\pi z} \right)$$

и в то же время

$$f(z) = (z+i)^3 \left( (z-i)^3 e^{-\pi z} \right).$$

В первом случае  $z_0 = i$  является нулем 3-го порядка для  $f(z)$ , поскольку при  $\varphi(z) = (z+i)^3 e^{-\pi z}$  имеем:

$$\varphi(i) = (2i)^3 e^{-\pi i} = -8i (\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)) = 8i \neq 0.$$

Во втором случае имеем  $z_0 = -i$  нулем 3-го порядка для  $f(z)$ . Здесь

$$\varphi(z) = (z-i)^3 e^{-\pi z}$$

и

$$\varphi(-i) = (-2i)^3 e^{\pi i} = -8i \neq 0.$$

Итак,  $f(z)$  имеет нулями 3-го порядка точки  $i$  и  $-i$ .

### 4.3. РЯД ЛОРАНА

1<sup>0</sup>. Рассмотрим ряд вида

$$\begin{aligned} \dots + \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{C_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{C_{-1}}{z-z_0} + C_0 + C_1(z-z_0) + C_2(z-z_0)^2 + \dots \\ + C_n(z-z_0)^n + \dots = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n, \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

содержащий как неотрицательные, так и отрицательные степени разности  $z-z_0$ ,  $z \neq z_0$ . Если (4.3.1) записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-z_0)^n, \quad (4.3.2)$$

то первый из рядов можно рассматривать как степенной:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{-n} w^n, \quad \text{где } w = \frac{1}{z-z_0}.$$

В своем круге сходимости  $|w| < R$ ,  $R \neq 0$ , его сумма есть некоторая однозначная аналитическая функция

$$\varphi(w) = \varphi\left(\frac{1}{z-z_0}\right).$$

Будучи суперпозицией аналитических функций,  $\varphi\left(\frac{1}{z-z_0}\right)$  как функция от  $z$  (где  $z \neq z_0$ ) также аналитична при

$|w| = \frac{1}{|z-z_0|} < R$ . Итак, для  $|z-z_0| > \frac{1}{R}$ , имеем:  $\varphi$  аналитична во "внешности" круга  $\bar{U}(z_0; R_1)$ ; не исключен и случай

$R_1 = 0$  (если  $R = \infty$ ). Точно так же, второй ряд в (4.3.2) сходится при  $|z-z_0| < R_2$  с некоторым  $R_2$ ; пусть  $R_2 > 0$ . Сумма этого ряда есть некоторая (аналитическая в этом круге) функция  $\psi(z)$ .

Если  $R_1 < R_2$ , то существует общая область, в которой сходятся оба ряда в (4.3.2), т.е. оказывается, что (4.3.1) имеет область сходимости некоторое кольцо с центром в точке  $z_0$ :  $R_1 < |z-z_0| < R_2$  (рис. 4.3.1); функция

$$f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z-z_0}\right) + \psi(z).$$

Теперь возникает обратная задача: пусть  $f(z)$  однозначна и аналитична в некотором кольце  $R_1 < |z-z_0| < R_2$ . Можно ли ее разложить в степенной ряд вида (4.3.1) и, если можно, то каковы коэффициенты этого ряда?