

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЗАИМОСВЯЗИ ЖЕСТКОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК УПРУГИХ ОПОР ВАЛА РОТОРНОЙ МАШИНЫ

Рост рабочих скоростей роторных машин, повышение интенсивности динамических нагрузок выдвигают практически важные задачи, связанные с разработкой методов исследования колебаний в нелинейных системах, примером которых является обрабатывающая система роторных машин различного назначения.

Рассматривается задача определения эквивалентных жесткостных в горизонтальном и вертикальном направлениях опор с радиальными зазорами вала роторных машин, использование которых делает возможным проведение исследований колебаний обрабатывающей системы машин на основе линейных дифференциальных уравнений, качественно учитывающих нелинейные особенности указанной системы.

Дифференциальные уравнения свободных колебаний вала роторной машины в упругих опорах с зазорами имеют вид

$$\begin{cases} m\ddot{y} + C_y y + m\delta_p [\cos(\alpha + \alpha_{ст})\ddot{\alpha} - \sin(\alpha + \alpha_{ст})\dot{\alpha}^2] = 0; \\ m\ddot{z} + C_z z - m\delta_p [\sin(\alpha + \alpha_{ст})\ddot{\alpha} + \cos(\alpha + \alpha_{ст})\dot{\alpha}^2] = 0; \\ m\delta_p \ddot{\alpha} + m\ddot{y} \cos(\alpha + \alpha_{ст}) - m\ddot{z} \sin(\alpha + \alpha_{ст}) + \frac{mg \sin \alpha}{\cos \alpha_{ст} + f \sin \alpha_{ст}} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $m$ ;  $C_y$ ;  $C_z$ ;  $\delta_p$  – соответственно масса, жесткости опор в горизонтальном и вертикальном направлениях и радиальный зазор в опорах вала;  $y$ ,  $z$  – перемещения центра масс вала в указанных направлениях, обусловленные деформацией его опор;  $\alpha_{ст}$ ,  $\alpha$  – соответственно статический и динамический углы отклонений цапф вала (1);  $f$  – коэффициент, характеризующий соотношения между касательной и нормальной силами вследствие действия технологических нагрузок на вал;  $g$  – ускорение силы тяжести.

С учетом первых двух уравнений системы (1) третье уравнение можно представить в алгебраической форме относительно переменных  $y$ ,  $z$ ,  $\alpha$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \alpha_{ст}) = \frac{C_y y + mg \sin \alpha_{ст} / (\cos \alpha_{ст} + f \sin \alpha_{ст})}{C_z z + mg \cos \alpha_{ст} / (\cos \alpha_{ст} + f \sin \alpha_{ст})}. \quad (2)$$

Таким образом, положение центра масс вала в опорах с зазорами определяется двумя координатами, так как, согласно равенству (2), угол  $\alpha$  может быть найден с помощью координат  $y$  и  $z$ .

Вместо координат  $y$ ,  $z$ ,  $\alpha$  вводятся абсолютные координаты центра масс вала  $y_a$ ,  $z_a$ :

$$y_a = y + \delta_p \sin(\alpha + \alpha_{ст}) - \delta_p \sin \alpha_{ст};$$

$$z_a = z + \delta_p \cos(\alpha + \alpha_{ст}) - \delta_p \cos \alpha_{ст}.$$

Дифференциальные уравнения (1) и равенство (2) записывались относительно переменных  $y_a$ ,  $z_a$ .

Тригонометрические функции  $\sin(\alpha + \alpha_{ст})$ ,  $\cos(\alpha + \alpha_{ст})$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha + \alpha_{ст})$  раскладывались в ряды в окрестности угла  $\alpha_{ст}$ . В результате была получена система нелинейных дифференциальных уравнений относительно абсолютных координат  $y_a$ ,  $z_a$ , изменения которых принималось в виде

$$y_a = A \sin \omega t; \quad z_a = B \cos \omega t,$$

где  $A$ ,  $B$  – амплитуды абсолютных колебаний вала соответственно в горизонтальной и вертикальной плоскостях;  $\omega$  – частота колебаний. Тем самым делалось предположение, что в абсолютном движении

траекторией центра масс вала является эллипс, что подтверждается практикой эксплуатации валов и теоретическими исследованиями их динамики (2), (3).

Эквивалентные жесткости опорных узлов вала определялись по формулам

$$C_{\text{np}}^y = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} R_y(y_a, z_a) \sin z_1 dz_1;$$

$$C_{\text{np}}^z = \frac{1}{\pi B} \int_0^{2\pi} R_z(y_a, z_a) \cos z_1 dz_1, \quad (3)$$

где  $R_y(y_a, z_a)$ ;  $R_z(y_a, z_a)$  – функции абсолютных координат  $y_a, z_a$  (упругие характеристики), получаемые из системы дифференциальных уравнений относительно этих координат;  $z_1 = \omega t$ .

В результате были получены следующие расчетные зависимости для жесткостей  $C_{\text{np}}^y, C_{\text{np}}^z$ :

$$C_{\text{np}}^y = \frac{C_y (mg + C_z \delta_p \gamma \sin^2 \alpha_{\text{ct}})}{\Delta} + \frac{\gamma^3 \delta_p C_y^2 \cos^2 \alpha_{\text{ct}} (C_y^2 \cos^2 \alpha_{\text{ct}} A^2 + C_z^2 \sin^2 \alpha_{\text{ct}} B^2)}{8\Delta^3};$$

$$C_{\text{np}}^z = \frac{C_z (mg + C_y \delta_p \gamma \cos^2 \alpha_{\text{ct}})}{\Delta} + \frac{\gamma^3 \delta_p C_z^2 \sin^2 \alpha_{\text{ct}} (C_y^2 \cos^2 \alpha_{\text{ct}} A^2 + C_z^2 \sin^2 \alpha_{\text{ct}} B^2)}{8\Delta^3}, \quad (4)$$

где  $\gamma = \cos \alpha_{\text{ct}} + f \sin \alpha_{\text{ct}}$ ;  $\Delta = mg + \gamma \delta_p (C_y \cos^2 \alpha_{\text{ct}} + C_z \sin^2 \alpha_{\text{ct}})$ .

Как видно из соотношений (4) эквивалентные жесткости взаимосвязаны не только посредством жесткостей  $C_y, C_z$  упругих опор вала, но и через амплитуды  $A$  и  $B$  абсолютных колебаний его цапфы.

В качестве примера, иллюстрирующего использование эквивалентных жесткостей  $C_{\text{np}}^y, C_{\text{np}}^z$ , рассматривалась задача вынужденных колебаний вала в опорах с зазорами, вызываемых его статической неуравновешенностью. С учетом вышеизложенного возможно считать опоры вала линейными и дифференциальные уравнения его колебаний можно записать в виде

$$\begin{cases} m\ddot{y}_a + C_{\text{np}}^y y_a = m\xi\omega^2 \sin \omega t, \\ m\ddot{z}_a + C_{\text{np}}^z z_a = m\xi\omega^2 \cos \omega t, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\xi$  – эксцентриситет вала.

Для амплитуд колебаний получаем

$$A = \frac{m\xi\omega^2}{(C_{\text{np}}^y - m\omega^2)}; \quad B = \frac{m\xi\omega^2}{(C_{\text{np}}^z - m\omega^2)}. \quad (6)$$

В соотношениях (6) эквивалентные жесткости  $C_{\text{np}}^y, C_{\text{np}}^z$  сами зависят от амплитуд  $A$  и  $B$ , поэтому их следует рассматривать как систему алгебраических уравнений относительно амплитуд. В исследуемой системе возможно существование нескольких периодических режимов колебаний. Некоторые из этих режимов могут быть неустойчивы, т.е. не осуществляться практически, что характерно для нелинейных колебательных систем.

Результаты проведенных исследований и установленные выше зависимости указывают на взаимообусловленность вибрационных режимов рабочих органов роторных машин, на которые значительно влияет рабочий процесс машин.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галаев, В.И. Эквивалентная жесткость системы «нелинейная упругая опора с зазором – вал роторной машины» / В.И. Галаев // Вестник Тамбовского государственного технического университета. – Тамбов. – 2002. – Т. 8, № 4. – С. 644 – 648.
2. Григорьев, Н.В. Нелинейные колебания элементов машин и сооружений / Н.В. Григорьев. – М. : Машгиз, 1961. – 256 с.
3. Кельзон, А.С. Динамика роторов в упругих опорах / А.С. Кельзон, Ю.П. Циманский, В.И. Яковлев. – М. : Наука, 1982. – 280 с.

*Кафедра «Теоретическая механика»*