

**С. М. ВЕДИЩЕВ, А. А. ОСИПОВ,
С. В. ПЕРШИНА, В. Ф. ПЕРШИН**

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

**Тамбов
• Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ» •
2014**

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

**С. М. ВЕДИЩЕВ, А. А. ОСИПОВ,
С. В. ПЕРШИНА, В. Ф. ПЕРШИН**

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Утверждено Учёным советом университета
в качестве учебного пособия
для студентов, обучающихся по направлениям
190700 «Технология транспортных процессов» и
110800 «Агроинженерия» очной и заочной форм обучения



Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2014

УДК 531(075.8)
ББК ж121я73-4
В26

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор технических наук, профессор ГНУ ВИИТиН
заместитель директора по научной работе
С. А. Нагорнов

Доктор технических наук, профессор ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
В. П. Капустин

В26 **Соппротивление** материалов : учебное пособие для студентов, обучающихся по направлениям 190700 и 110800 / С. М. Ведищев, А. А. Осипов, С. В. Першина, В. Ф. Першин. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2014. – 112 с. – 100 экз.
ISBN 978-5-8265-1280-7.

Изложены методы расчёта на прочность элементов конструкций. Даны примеры тестовых заданий.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 190700 «Технология транспортных процессов» и 110800 «Агроинженерия» очной и заочной форм обучения, а также для всех инженерных направлений по дисциплинам: «Механика», «Прикладная механика» и «Техническая механика»

УДК 531(075.8)
ББК ж121я73-4

ISBN 978-5-8265-1280-7

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2014

ВВЕДЕНИЕ

Сопротивление материалов – это наука о том, как реагируют элементы конструкций (механизмов, машин, сооружений) на воздействие нагрузок и как обеспечить их соответствие своему назначению и работоспособность.

В сопротивлении материалов рассматриваются вопросы расчёта отдельных элементов конструкций и вопросы расчёта некоторых простейших конструкций на прочность, жёсткость и устойчивость.

В отличие от теоретической механики, в которой все тела рассматриваются как абсолютно твёрдые, в сопротивлении материалов учитывается, что элементы конструкций при действии внешних сил изменяют свою форму и размеры, т.е. деформируются.

В сопротивлении материалов широко применяются методы теоретической механики (в первую очередь статики) и математического анализа, а также используются данные из разделов физики, в которых изучаются свойства различных материалов.

Сопротивление материалов является экспериментально-теоретической наукой, так как она широко использует опытные данные и теоретические исследования.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. РАСЧЁТНАЯ СХЕМА. НАГРУЗКИ

Реальный объект, освобождённый от несущественных особенностей, носит название расчётной схемы. С геометрической точки зрения все объекты рассматривают как комбинацию брусьев (стержней), оболочек и массивных тел.

Элемент конструкции, длина которого значительно больше его поперечных размеров, называется *брусом*.

Элемент конструкции, длина и ширина которого значительно больше его толщины, называется *оболочкой*.

Элемент конструкции, все размеры которого соизмеримы, называется *массивным телом*.

Нагрузки, действующие на конструкцию, являются по отношению к ней *внешними силами*. Эти силы приложены к тому или иному элементу конструкции по некоторым участкам его поверхности или распределены по его объёму.

При составлении расчётных схем нагрузку, приложенную к участку, размеры которого значительно меньше размеров объекта, заменяют *сосредоточенной силой* P , Н/м.

Пара сил, приложенная к объекту, рассматривается как *сосредоточенный момент* m , Н·м.

Нагрузки, приложенные к участкам, размеры которых соизмеримы с размерами объекта, считаются *распределенными по длине* – q , Н/м.

К внешним силам, действующим на элементы конструкции, кроме нагрузок (активных сил) – относятся также реакции связей – реактивные силы.

Нагрузки различаются не только по способу их приложения (распределённые и сосредоточенные), но также по длительности действия (постоянные и временные) и характеру воздействия на конструкцию (статические и динамические).

1.2. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Под внутренними силами (или внутренними усилиями) в сопротивлении материалов обычно понимают силы взаимодействия между отдельными элементами сооружения или между отдельными частями элемента, возникающие под действием внешних сил.

Рассмотрим общий приём определения внутренних усилий, называемый методом сечений. Пусть дан брус, который под действием внешних нагрузок находится в равновесии. Рассечём его плоскостью, совпадающей с поперечным сечением стержня, и рассмотрим левую отсечённую часть. Поскольку весь брус находился в равновесии, любая из отсечённых частей также должна находиться в равновесии. Это возможно лишь в том случае, когда в поперечном сечении возникают внутренние усилия, уравновешивающие внешние нагрузки. В общем случае могут возникнуть шесть внутренних усилий: продольная сила N ; поперечные силы Q_x и Q_y ; крутящий момент M_z ; изгибающие моменты M_x и M_y . (рис. 1.1).

В общем случае численные значения внутренних усилий определяются с помощью уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \sum X = 0; \quad \sum Y = 0; \quad \sum Z = 0; \\ \sum M_z = 0; \quad \sum M_y = 0; \quad \sum M_x = 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

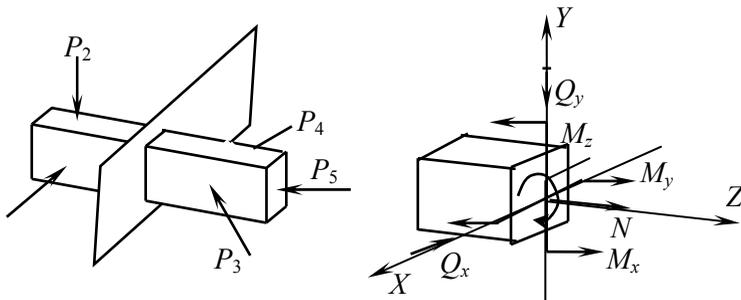


Рис. 1.1

1.3. НАПРЯЖЕНИЯ

Сосредоточенные внутренние силы и моменты, характеризующие взаимодействие между отдельными частями элемента, являются лишь статическим эквивалентом внутренних сил, распределённых по площади сечения.

Интенсивность касательных сил в рассматриваемой точке сечения называется касательным напряжением и обозначается τ , а интенсивность нормальных сил – нормальным напряжением и обозначается σ . Напряжения τ и σ выражаются формулами

$$\tau = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} (\Delta Q / \Delta F); \quad \sigma = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} (\Delta N / \Delta F). \quad (1.2)$$

Напряжения выражаются в ньютонах на квадратный метр (Н/м²) или паскалях (Па), мегапаскалях (МПа).

Нормальное и касательное напряжения являются составляющими полного напряжения p в рассматриваемой точке. Очевидно, что $p = (\tau^2 + \sigma^2)^{0,5}$.

Совокупность напряжений, действующих по различным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, представляет собой напряжённое состояние в этой точке.

1.4. ОСНОВНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ НАУКИ О СОПРОТИВЛЕНИИ МАТЕРИАЛОВ

В сопротивлении материалов используется ряд предпосылок (допущений), упрощающих расчёты.

Основные предпосылки в сопротивлении материалов следующие:

1. Материал конструкции является однородным и сплошным, т.е. его свойства не зависят от формы и размеров тела и одинаковы во всех его точках.

2. Материал конструкции изотропен, т.е. его свойства по всем направлениям одинаковы.

3. Материал конструкции обладает свойством идеальной упругости, т.е. способностью полностью восстанавливать первоначальную форму и размеры тела после устранения причин, вызвавших его деформацию.

4. Деформации материала конструкции в каждой его точке прямо пропорциональны напряжениям в этой точке. Данная предпосылка, впервые сформулированная Р. Гуком (1660), называется законом Гука.

Закон Гука справедлив для большинства материалов, но для каждого из них лишь при напряжениях, не превышающих некоторого значения (предела пропорциональности).

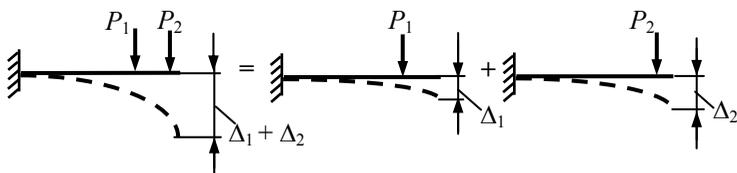


Рис. 1.2

5. Деформации конструкции предполагаются настолько малыми, что можно не учитывать их влияние на взаимное расположение нагрузок и на расстояния от нагрузок до любых точек конструкции.

6. Результат воздействия на конструкцию системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки в отдельности (принцип независимости действия сил). Его часто называют также принципом наложения или принципом суперпозиции.

Принцип независимости действия сил представлен на рис. 1.2.

7. Поперечные сечения бруса, плоские до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и при действии нагрузки.

Эта предпосылка называется гипотезой плоских сечений или гипотезой Бернулли.

2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1. ПРОДОЛЬНАЯ СИЛА

Центральным растяжением (сжатием) называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса (стержня) возникает только продольная (нормальная) сила. Численные значения продольных сил N определяют по участкам, используя метод сечений, составляя уравнения равновесия суммы проекций на ось бруса z всех сил, действующих на отсечённую часть.

Растягивающие продольные силы принято считать положительными, а сжимающие – отрицательными.

Рассмотрим (рис. 2.1, а) прямой брус постоянной толщины, закреплённый одним концом и нагруженный на другом конце силой P , направленной вдоль его оси. Под действием внешней силы P брус растягивается (деформируется). При этом в закреплении возникает некоторое усилие, благодаря которому верхний край бруса остаётся неподвижным. Это усилие называют *реакцией* закрепления R на внешнюю нагрузку (рис. 2.1, б).

Под действием двух внешних воздействий – известной силы P и неизвестной пока реакции R – брус находится в равновесии.

Уравнение равновесия бруса

$$\sum Z = 0; \quad -R + P = 0 \quad \text{или} \quad R = P. \quad (2.1)$$

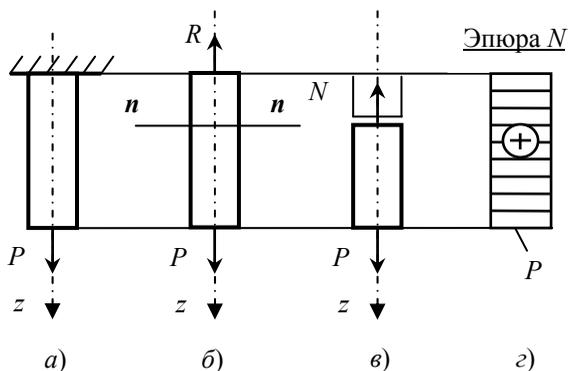


Рис. 2.1

При построении уравнений общего равновесия механики принято следующее правило знаков: проекция усилия на ось положительна, если её направление совпадает с выбранным направлением этой оси; проекция отрицательна, если направлена в противоположную сторону.

Мысленно разрежем стержень на две части по интересующему нас сечению $n-n$ (рис. 2.1, б). Влияние на нижнюю часть верхней части представим действием на нижнюю часть в её верхнем торце $n-n$ нормальной силы N . Уравнение равновесия нижней отсечённой части бруса

$$\sum Z = 0; \quad -N + P = 0 \quad \text{или} \quad N = P. \quad (2.2)$$

На рисунке 2.1, г показан график изменения продольной силы вдоль оси бруса. График, показывающий изменение продольных сил по длине оси бруса, называется эпюрой продольных сил (эпюрой N).

2.2. НАПРЯЖЕНИЯ В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ БРУСА

Продольная сила N , возникающая в поперечном сечении бруса, представляет собой равнодействующую внутренних нормальных сил, распределённых по площади поперечного сечения, и связана с возникающими в этом сечении нормальными напряжениями зависимостью

$$N = \int_F \sigma dF, \quad (2.3)$$

где σ – нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, принадлежащей элементарной площадке dF ; F – площадь поперечного сечения бруса.

Произведение $\sigma dF = dN$ представляет собой элементарную внутреннюю силу, приходящуюся на площадку dF .

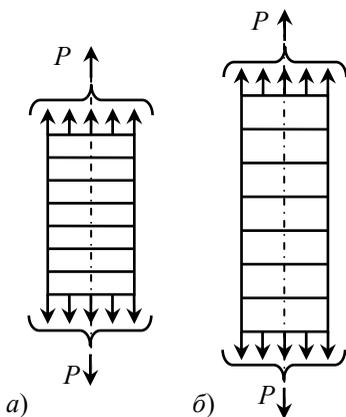


Рис. 2.2

Значение продольной силы N в каждом частном случае легко можно определить при помощи метода сечений. Для нахождения напряжений в каждой точке поперечного сечения бруса надо знать закон их распределения по этому сечению.

Проведём на боковой поверхности бруса до его нагружения линии, перпендикулярные к оси бруса (рис. 2.2).

Каждую такую линию можно рассматривать как след плоскости поперечного сечения бруса. При нагружении бруса осевой силой P эти линии, как показывает опыт, остаются прямыми и

параллельными между собой (их положения после нагружения бруса показаны на рис. 2.2, б). Это позволяет считать, что поперечные сечения бруса, плоские до его нагружения, остаются плоскими и при действии нагрузки. Такой опыт подтверждает гипотезу плоских сечений (гипотезу Бернулли).

Согласно гипотезе плоских сечений, все продольные волокна бруса растягиваются одинаково, значит, их растягивают одинаковые по величине силы $\sigma dF = dN$, следовательно, во всех точках поперечного сечения нормальное напряжение σ имеет постоянное значение. Выведем из-под знака интеграла в формуле (2.3) постоянное значение σ и окончательно получим

$$N = \int_F \sigma dF = \sigma F, \quad (2.4)$$

откуда

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (2.5)$$

В поперечных сечениях бруса при центральном растяжении или сжатии возникают равномерно распределённые нормальные напряжения, равные отношению продольной силы к площади поперечного сечения.

Для наглядного изображения изменения нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня (по его длине) строится *эпюра нормальных напряжений*. Осью этой эпюры является отрезок прямой, равный длине стержня и параллельный его оси. При стержне постоянного сечения эпюра нормальных напряжений имеет такой же вид, как и эпюра продольных сил. При стержне переменного сечения вид этих двух эпюр различен.

2.3. ПРОДОЛЬНЫЕ И ПОПЕРЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим прямой брус постоянного сечения длиной l , заделанный одним концом и нагруженный на другом конце растягивающей силой P (рис. 2.3). Под действием силы P брус удлиняется на некоторую величину Δl , которая называется полным или абсолютным удлинением (абсолютной продольной деформацией).

В любых точках рассматриваемого бруса имеется одинаковое напряжённое состояние и, следовательно, линейные деформации для всех его точек одинаковы. Поэтому значение относительного удлинения ε можно определить как отношение абсолютного удлинения Δl к первоначальной длине бруса l , т.е. $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$.

Брусья из различных материалов удлиняются различно. Для случаев, когда напряжения в брус не превышают предела пропорциональности, опытом установлена зависимость

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}, \quad (2.6)$$

где N – продольная сила в поперечных сечениях бруса; F – площадь поперечного сечения бруса; E – коэффициент, зависящий от физических свойств материала.

Учитывая, что нормальное напряжение в поперечном сечении бруса $\sigma = N/F$, получаем

$$\varepsilon = \sigma/E, \quad (2.7)$$

откуда

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (2.8)$$

Абсолютное удлинение бруса выражается формулой

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}. \quad (2.9)$$

Более общей является следующая формулировка закона Гука: относительная продольная деформация прямо пропорциональна нормальному напряжению. В такой формулировке закон Гука используется не только при изучении растяжения и сжатия брусев, но и в других разделах курса.

Величина E называется модулем упругости первого рода. Это физическая постоянная материала, характеризующая его жёсткость. Чем больше значение E , тем меньше при прочих

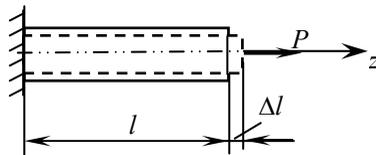


Рис. 2.3

равных условиях продольная деформация. Модуль упругости выражается в тех же единицах, что и напряжение, т.е. в паскалях (Па).

Произведение EF называется жёсткостью поперечного сечения бруса при растяжении и сжатии.

Кроме продольной деформации при действии на брус сжимающей или растягивающей силы наблюдается также поперечная деформация. При сжатии бруса поперечные размеры его увеличиваются, а при растяжении — уменьшаются. Если поперечный размер бруса до приложения к нему сжимающих сил P обозначить b , а после приложения этих сил $b - \Delta b$, то величина Δb будет обозначать абсолютную поперечную деформацию бруса.

Отношение $\varepsilon' = \Delta b/b$ является относительной поперечной деформацией.

Опыт показывает, что при напряжениях, не превышающих предела упругости, относительная поперечная деформация прямо пропорциональна относительной продольной деформации, но имеет обратный знак

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon. \quad (2.10)$$

Коэффициент пропорциональности μ зависит от материала бруса. Он называется коэффициентом поперечной деформации (или коэффициентом Пуассона) и представляет собой отношение относительной поперечной деформации к продольной, взятое по абсолютной величине, т.е. коэффициент Пуассона наряду с модулем упругости E характеризует упругие свойства материала.

Коэффициент Пуассона определяется экспериментально. Для различных материалов он имеет значения от нуля (для пробки) до величины, близкой к 0,5 (для резины и парафина).

2.4. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЙ БРУСЬЕВ

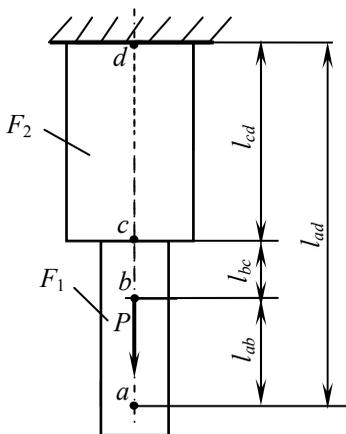


Рис. 2.4

Определим продольное перемещение δ_a точки a оси бруса, растянутого силой P (рис. 2.4).

Оно равно абсолютной деформации части бруса ad , заключённой между заделкой и сечением, проведённым через точку a , т.е. продольная деформация бруса определяется по формуле $\Delta l = \frac{Nl}{EF}$.

Эта формула применима, лишь когда в пределах всего участка длиной l продольные силы N и жёсткости EF поперечных сечений бруса постоянны. В рассматриваемом случае на участке ab продольная сила N равна нулю (собственный

вес бруса не учитываем), а на участке bd она равна P ; кроме того, площадь поперечного сечения бруса на участке ac отличается от площади сечения на участке cd . Поэтому продольную деформацию участка ad следует определять как сумму продольных деформаций трёх участков ab , bc и cd , для каждого из которых значения N и EF постоянны по всей его длине:

$$\Delta l_{ad} = \Delta l_{ab} + \Delta l_{bc} + \Delta l_{cd}.$$

Продольные силы на рассматриваемых участках бруса:

$$N_{ab} = 0; \quad N_{bc} = N_{cd} = P.$$

Следовательно,

$$\Delta l_{ab} = 0; \quad \Delta l_{bc} = \frac{Pl_{bc}}{EF_1}; \quad \Delta l_{cd} = \frac{Pl_{cd}}{EF_2};$$

$$\delta_a = \Delta l_{ad} = \frac{P}{E} \left(\frac{l_{bc}}{F_1} + \frac{l_{cd}}{F_2} \right).$$

Аналогично можно определить перемещения δ любых точек оси бруса, а по их значениям построить эпюру *продольных перемещений* (эпюру δ), т.е. график, изображающий изменение этих перемещений по длине оси бруса.

2.5. ДИАГРАММЫ РАСТЯЖЕНИЯ И СЖАТИЯ

Механические характеристики материалов (т.е. величины, характеризующие их прочность, пластичность и т.д., а также модуль упругости и коэффициент Пуассона) определяются путём испытаний специальных образцов, изготовленных из исследуемого материала. Наиболее распространёнными являются статические испытания на растяжение. Для некоторых строительных материалов (камня, цемента, бетона и т.д.) основными являются испытания на сжатие. Испытания проводятся на специальных машинах различных типов.

В процессе испытания специальное устройство автоматически вычерчивает график, изображающий зависимость между нормальным напряжением в поперечных сечениях стержня и относительной деформацией (рис. 2.5).

Для пластичных материалов по диаграммам определяют пределы пропорциональности и пластичности (рис. 2.5, *a*).

Некоторые пластичные материалы, например дюралюмин (рис. 2.5, *б*), не имеют на диаграмме растяжения площадки текучести. Для таких материалов вводится понятие условного предела текучести, в качестве которого принимается напряжение, соответствующее остаточной деформации 0,2%.

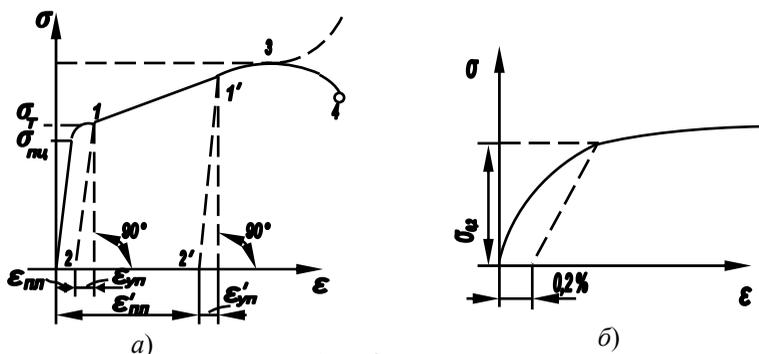


Рис. 2.5

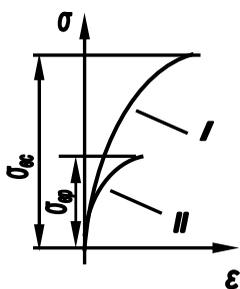


Рис. 2.6

При сжатии образец из пластичного материала расплющивается, и площадь его сечения увеличивается, в связи с чем увеличиваются также сжимающие силы и условные напряжения. Таким образом, понятие предела прочности при сжатии пластичной стали лишено физического смысла. Пределы текучести при растяжении и сжатии для одной и той же пластичной стали практически одинаковы.

Весьма хрупким материалом является чугун. Для образцов из обычного серого литейного чугуна относительное остаточное удлинение при разрыве не превышает 0,015%, в то время как для стали марки Ст3 оно превышает 20%. Деформации чугуна очень малы. Они с самого начала не следуют закону Гука, а потому диаграммы его растяжения и сжатия получаются криволинейными; однако участки диаграмм, соответствующие малым напряжениям, лишь незначительно отличаются от прямой (рис. 2.6).

Некоторые материалы обладают различными свойствами в различных направлениях. Такие материалы называются анизотропными. Анизотропным материалом является, например, сосна, сопротивляемость которой существенно зависит от направления силы по отношению к направлению волокон. Сопротивление сосны вдоль волокон значительно больше, чем поперёк волокон, а деформация меньше.

2.6. ДОПУСКАЕМЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. РАСЧЁТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЁСТКОСТЬ

В общем случае условия прочности при растяжении и сжатии имеют следующий вид:

$$\sigma_p \leq [\sigma_p]; \quad \sigma_c \leq [\sigma_c], \quad (2.11)$$

где σ_p и σ_c – наибольшие расчётные растягивающие и сжимающие напряжения в конструкции; $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ – допускаемые напряжения при растяжении и сжатии соответственно. (В случае, когда решающими для прочности конструкции являются не нормальные, а касательные напряжения, условие прочности имеет вид $\tau \leq [\tau]$)

Допускаемые напряжения $[\sigma_p]$ и $[\sigma_c]$ зависят от пределов прочности материала на растяжение $\sigma_{в.р}$ и сжатие $\sigma_{в.с}$ и определяются выражениями

$$[\sigma_p] = \frac{\sigma_{в.р}}{[n_p]}; \quad [\sigma_c] = \frac{\sigma_{в.с}}{[n_c]}, \quad (2.12)$$

где $[n_p]$ – нормативный (требуемый) коэффициент запаса прочности по отношению к пределу прочности.

В формулы (2.11) и (2.12) подставляются абсолютные значения напряжений $[\sigma_c]$, σ_c и $\sigma_{в.с}$.

Для конструкций из пластичных материалов (у которых пределы прочности на растяжение и сжатие одинаковы) используется условие прочности

$$\sigma \leq [\sigma], \quad (2.13)$$

где σ – наибольшее по абсолютной величине сжимающее или растягивающее расчётное напряжение в конструкции.

Допускаемое напряжение $[\sigma]$ для пластичных материалов определяется по формуле

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[\sigma_T]}, \quad (2.14)$$

где $[n_T]$ – нормативный (требуемый) коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести.

Расчёт прочности, выполняемый с использованием условий прочности (2.11) или (2.13), называется *расчётом по допускаемым напряжениям*. Нагрузка, при которой наибольшие напряжения в конструкции равны допускаемым напряжениям, называется *допускаемой*.

При расчёте конструкций на прочность встречаются три вида задач, различающихся формой использования условий прочности:

- 1) проверка напряжений (проверочный расчёт);
- 2) подбор сечений (проектный расчёт);
- 3) определение грузоподъемности (определение допускаемой нагрузки).

При проверке напряжений площади поперечных сечений F и продольные силы N известны и расчёт заключается в вычислении расчётных (фактических) напряжений σ в характерных сечениях элементов. Полученное при этом наибольшее напряжение сравнивают затем с допускаемым:

$$\sigma = \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (2.15)$$

При подборе сечений определяют требуемые площади $[F]$ поперечных сечений элемента (по известным продольным силам N и допускаемому напряжению $[\sigma]$). Принимаемые площади сечений F должны удовлетворять условию прочности

$$F \geq [F] = \frac{N}{[\sigma]}. \quad (2.16)$$

При определении грузоподъёмности по известным значениям F и допускаемому напряжению $[\sigma]$ вычисляют допускаемые величины $[N]$ продольных сил: $[N] = F[\sigma]$. По полученным значениям $[N]$ затем определяются допускаемые величины внешних нагрузок $[P]$.

Для этого случая условие прочности имеет вид

$$P \leq [P]. \quad (2.17)$$

Величины нормативных коэффициентов запаса прочности устанавливаются нормами. Они зависят от класса конструкции (капитальная, временная и т.п.), намечаемого срока её эксплуатации, нагрузки (статическая, циклическая и т.п.), возможной неоднородности изготовления материалов (например, бетона), от вида деформации (растяжение, сжатие, изгиб и т.д.) и других факторов. В ряде случаев приходится снижать коэффициент запаса в целях уменьшения веса конструкции, а иногда увеличивать коэффициент запаса – при необходимости учитывать износ трущихся частей машин, коррозию и загнивание материала.

Величины нормативных коэффициентов запаса для различных материалов, сооружений и нагрузок имеют в большинстве случаев значения: $[n_b] - 2,5 \dots 5,0$ и $[n_m] - 1,5 \dots 2,5$.

Под проверкой жесткости элемента конструкции, находящегося в состоянии чистого растяжения-сжатия, понимается поиск ответа на вопрос: достаточны ли значения жёсткостных характеристик элемента (модуля упругости материала E и площади поперечного сечения F), чтобы максимальное из всех значений перемещений точек элемента, вызванных внешними силами, u_{\max} не превысило некоторого заданного предельного значения $[u]$. Считается, что при нарушении неравенства $u_{\max} \leq [u]$ конструкция переходит в предельное состояние.

2.7. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

Наиболее важным этапом расчёта статически неопределимых систем является составление дополнительных (к уравнениям равновесия) уравнений перемещений. Способы их составления рассмотрим на примерах решения различных задач расчёта статически неопределимых систем.

Рассмотрим стержень, заделанный (заделанный) обоими концами и нагруженный силой P (рис. 2.7).

Под действием силы P в заделках возникают реакции R_1 и R_2 , требуется определить эти силы.

Для данного случая статика позволяет составить только одно уравнение равновесия

$$\sum Z = -R_1 - R_2 + P = 0.$$

Следовательно, для определения двух неизвестных R_1 и R_2 необходимо составить дополнительно одно уравнение. Поэтому рассматриваемый стержень является один раз статически неопределимым. Для составления дополнительного уравнения отбросим правую заделку и заменим её влияние на стержень неизвестной силой X . Под действием силы P деформируется левый участок AB , а участок BC перемещается вправо. В действительности правый конец стержня, будучи заделанным, не получает перемещения. Следовательно, перемещение его вправо, вызванное силой P , должно быть равно 0, т.е. перемещение точки C $\delta_C = 0$. Перемещение точки C складывается из деформаций участков $AB - \Delta_{AB}$ и $BC - \Delta_{BC}$. Для расчёта этих деформаций определим внутренние усилия на участках так же, как и в предыдущем примере:

$$N_1 = -X; \quad N_2 = -X + P.$$

$$\delta_C = \Delta_{AB} + \Delta_{BC} = \frac{N_1 l_{AB}}{EF} + \frac{N_2 l_{BC}}{EF} = -\frac{X l_{AB}}{EF} + \frac{(-X + P) l_{BC}}{EF} = 0.$$

После определения силы X построение эпюры продольных сил и расчёт на прочность производится, как в случае статически определимой задачи.

3. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ

3.1. ВИДЫ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ

Взаимодействие между частями элемента конструкции можно охарактеризовать величинами нормальных и касательных напряжений в каждой точке элемента. Эти величины зависят от направления сечения, проведённого через данную точку.

Совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, называется *напряжённым состоянием* в этой точке.

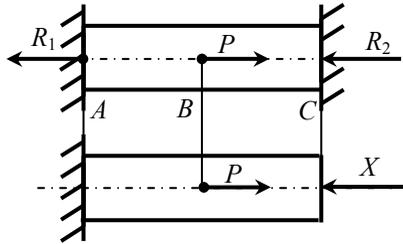


Рис. 2.7

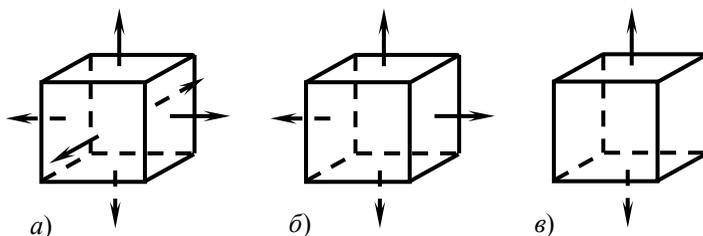


Рис. 3.1

При расчётах на прочность необходимо устанавливать напряжённые состояния в опасных точках конструкции.

Если через рассматриваемую точку тела нельзя провести ни одной площадки, в которой касательные и нормальные напряжения были бы равны нулю, то в этой точке имеется *пространственное (трёхосное) напряжённое состояние* (рис. 3.1, а). Если в одной (и только в одной) площадке, проходящей через рассматриваемую точку тела, касательные и нормальные напряжения равны нулю, то в этой точке имеется *плоское (двухосное) напряжённое состояние* (рис. 3.1, б). Если касательные и нормальные напряжения равны нулю в двух площадках, проходящих через рассматриваемую точку тела, то в этой точке имеется *линейное (одноосное) напряжённое состояние* (рис. 3.1, в); в таком случае касательные и нормальные напряжения равны нулю и во всех площадках, проходящих через линию пересечения указанных двух площадок.

Длины рёбер элементарного параллелепипеда бесконечно малы, а поэтому напряжения на его гранях, параллельных друг другу, одинаковы и равны напряжениям в параллельной им площадке, проходящей через рассматриваемую точку тела.

3.2. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЁННОЕ СОСТОЯНИЕ

При плоском напряжённом состоянии в одной из площадок, проходящих через рассматриваемую точку, касательные и нормальные напряжения равны нулю.

Касательные напряжения по двум взаимно перпендикулярным площадкам равны по абсолютной величине и обратны по знаку. Эта связь между τ_x и τ_y называется *законом парности касательных напряжений*.

$$\tau_y = -\tau_x. \quad (3.1)$$

Из закона парности касательных напряжений следует, что в двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения направлены либо к линии пересечения этих площадок (рис. 3.3, а), либо от неё (рис. 3.3, б).

Нормальные и касательные напряжения в любых площадках, проходящих через данную точку можно определить по формулам:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + \tau_x \sin 2\alpha ; \quad (3.2)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha - \tau_x \cos 2\alpha , \quad (3.3)$$

если известны напряжения σ_x , σ_y и $\tau_x = -\tau_y$ в любых двух проходящих через неё взаимно перпендикулярных площадках.

Сумма величин нормальных напряжений в двух взаимно перпендикулярных площадках есть величина постоянная:

$$\sigma_{\alpha_1} + \sigma_{\alpha_2} = \sigma_x + \sigma_y = \text{const} . \quad (3.4)$$

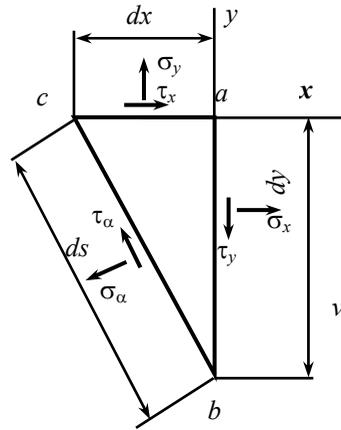


Рис. 3.2

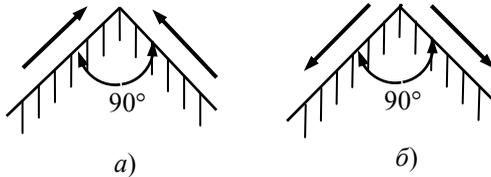


Рис. 3.3

Следовательно, если в одной из таких площадок нормальные напряжения имеют максимальное значение, то в другой они имеют минимальное значение.

3.3. ГЛАВНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ГЛАВНЫЕ ПЛОЩАДКИ

При расчёте инженерных конструкций нет необходимости определять напряжения во всех площадках, проходящих через данную точку; достаточно знать экстремальные (т.е. максимальные и минимальные) их значения.

Максимальные и минимальные нормальные напряжения называются *главными напряжениями*, а площадки, по которым они действуют, – *главными площадками*.

Для определения положений главных площадок используют формулы

$$\text{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} , \quad (3.5)$$

или на основании (3.1)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_y}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (3.6)$$

Формула (3.15) или (3.6) дает значения углов α_0 , определяющие две взаимно перпендикулярные площадки. Следовательно, обе *главные площадки взаимно перпендикулярны*. Для определения их положений площадки, в которых действуют напряжения σ_x и σ_y , следует повернуть на угол α_0 против часовой стрелки (при $\alpha_0 > 0$) или по часовой стрелке (при $\alpha_0 < 0$).

При любом значении $\operatorname{tg} 2\alpha_0$, полученном по формуле (3.5) или (3.6), можно установить соответствующую величину угла $2\alpha_0$, находящуюся в интервале от -90 до $+90^\circ$, и, следовательно, значение α_0 от -45 до $+45^\circ$. Поэтому поворот площадок всегда можно произвести на угол, не больший 45° .

По одной из главных площадок действует максимальное напряжение σ_{\max} , а по другой – минимальное напряжение σ_{\min} . Экстремальные нормальные напряжения определяются по формуле:

$$\sigma_{\begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}. \quad (3.7)$$

Для определения положения главной площадки с напряжением σ_{\max} можно выполнить следующее: площадку с большим (в алгебраическом смысле) нормальным напряжением повернуть на угол α_0 (по абсолютной величине не больший 45°) в направлении, в котором вектор касательного напряжения, действующего по этой же площадке, стремится вращать элементарный параллелепипед относительно его центра.

После определения положения главной площадки с напряжением σ_{\max} легко находится перпендикулярная к ней вторая главная площадка с напряжением σ_{\min} . Такой приём позволяет приближённо определять положения главных площадок, не вычисляя значения α_0 , а используя то обстоятельство, что угол α_0 всегда можно взять по абсолютной величине не больший 45° .

3.4. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Площадки, по которым касательные напряжения имеют экстремальные (максимальные и минимальные) значения, называют *площадками сдвига*. Положение площадок сдвига определяют по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha_1 = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_x}, \quad (3.8)$$

где α_1 – угол наклона площадки сдвига к площадке, по которой действует напряжение σ_x . Если угол α_1 положителен, то площадку, по которой действует напряжение σ_x для совмещения с площадкой, по которой действует экстремальное касательное напряжение, надо повернуть на этот угол против часовой стрелки.

Формула (3.8) даёт значения углов α_1 , определяющие две взаимно перпендикулярные площадки, по одной из которых действует максимальное напряжение τ_{\max} , а по другой – минимальное τ_{\min} . Из закона парности касательных напряжений следует, что $\tau_{\max} = -\tau_{\min}$.

Площадки сдвига наклонены к главным площадкам под углами, равными 45° .

Нормальные напряжения σ в площадках сдвига одинаковы по величине и знаку и равны

$$\frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}.$$

Для определения величин τ_{\max} и τ_{\min} за исходные примем главные напряжения σ_{\max} и σ_{\min} . Подставив в формулу (3.3) значения $\sigma_x = \sigma_{\max}$, $\sigma_y = \sigma_{\min}$, $\tau_x = 0$, $\alpha_1 = \pm 45^\circ$, получим

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}. \quad (3.9)$$

Подставив в формулу (3.9) значения σ_{\max} и σ_{\min} , по формуле (3.7) найдём

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_x^2}. \quad (3.10)$$

3.5. ПОНЯТИЕ О ПРОСТРАНСТВЕННОМ НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ

В общем случае напряжённого состояния через исследуемую точку нельзя провести ни одной площадки, по которой одновременно и касательное, и нормальное напряжения были бы равны нулю. Такое напряжённое состояние называется *пространственным, или трёхосным, или объёмным*.

В курсе теории упругости доказывается, что при пространственном напряжённом состоянии через каждую точку всегда можно провести три площадки, по которым касательные напряжения равны нулю. Такие площадки называются *главными площадками*, а нормальные напряжения, действующие по ним, – *главными напряжениями*. Все три главные площадки взаимно перпендикулярны. Наибольшее (в алгебраическом смысле)

главное напряжение принято обозначать σ_1 , следующее по величине σ_2 , а наименьшее σ_3 :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3.$$

Напряжение σ_1 является максимальным ($\sigma_1 = \sigma_{\max}$), а напряжение σ_3 – минимальным ($\sigma_3 = \sigma_{\min}$); нормальные напряжения по любым площадкам, проходящим через данную точку, имеют промежуточные значения между σ_1 и σ_3 .

Закон парности касательных напряжений, доказанный выше для плоского напряжённого состояния, действителен и в случае пространственного напряжённого состояния, однако в этом случае равны друг другу по абсолютной величине не полные касательные напряжения, действующие по двум взаимно перпендикулярным площадкам, а их *составляющие*, нормальные к линиям пересечения этих площадок (рис. 3.4).

Выделим в окрестности точки, напряжения в которой изучаются, элементарный кубик с гранями, параллельными главным площадкам (рис. 3.5).

Проведём через кубик площадку, параллельную напряжению σ_1 (на рис. 3.5 эта площадка заштрихована). Величины σ и τ нормальных и касательных напряжений, действующих по этой площадке, зависят только от напряжений σ_2 и σ_3 и не зависят от напряжений σ_1 , поэтому для определения значений σ и τ можно использовать формулы, применяемые при исследовании плоского напряжённого состояния.

Аналитически напряжения σ и τ в любой площадке определяются по формулам:

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3; \quad (3.11)$$

$$\tau = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma^2}, \quad (3.12)$$

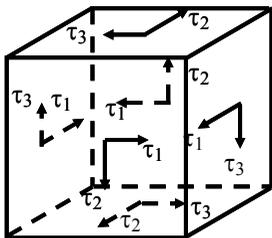


Рис. 3.4

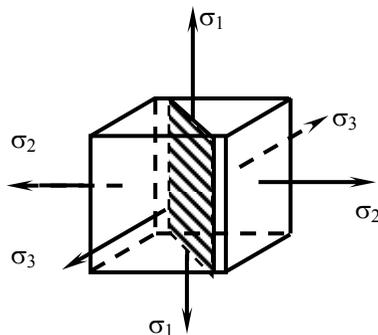


Рис. 3.5

где α_1 , α_2 и α_3 – углы между нормалью к рассматриваемой площадке и нормальями к главным площадкам.

Если по формуле (3.11) определить нормальные напряжения σ_x , σ_y и σ_z по любым трём взаимно перпендикулярным площадкам и сложить их значения, то сумма этих напряжений будет равна сумме главных напряжений

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 . \quad (3.13)$$

Таким образом, *сумма нормальных напряжений, действующих по любым трём взаимно перпендикулярным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку, есть постоянная величина.*

Экстремальные касательные напряжения действуют по площадкам, параллельным главному напряжению σ_2 . Эти площадки наклонены к площадкам, по которым действуют главные напряжения σ_1 и σ_3 , под углами в 45° . Значения экстремальных касательных напряжений

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} .$$

4. СДВИГ

4.1. ЧИСТЫЙ СДВИГ

Чистым сдвигом называется такой случай плоского напряженного состояния, при котором в окрестности данной точки можно выделить элементарный параллелепипед с боковыми гранями, находящимися под действием одних лишь касательных напряжений.

Определим нормальные и касательные напряжения на площадке $n-n$, проходящей через точку 0 и составляющей угол α с вертикальной исходной площадкой (рис. 4.1):

$$\sigma = \tau \sin 2\alpha ; \quad \tau = -\tau \cos 2\alpha . \quad (4.1)$$

Из выражения видно, что касательные напряжения по абсолютной величине больше касательных напряжений по любым другим площадкам, проходящим через точку 0 (так как $\cos 2\alpha$ при $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 90^\circ$ по абсолютной величине меньше единицы).

Следовательно, касательные напряжения τ , действующие по боковым граням рассматриваемого параллелепипеда, являются экстремальными (τ_{\max} и τ_{\min}), а эти грани являются площадками сдвига и образуют с главными площадками углы, равные 45° .

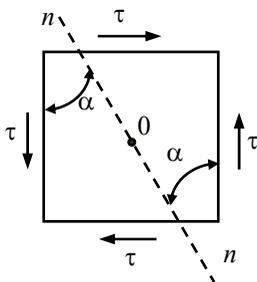


Рис. 4.1

В случае плоского напряжённого состояния рассматриваются только площадки, перпендикулярные той плоскости, в которой нормальные и касательные напряжения равны нулю. Эту плоскость при изображении элементарного параллелепипеда (или призмы), находящегося в плоском напряжённом состоянии, обычно совмещают с плоскостью чертежа. Эти площадки сдвига отличаются от площадок сдвига в общем случае напряжённого состояния тем, что по ним не действуют нормальные напряжения. В связи с

этим их называют площадками чистого сдвига.

Из формулы (4.1) следует, что σ_α при $\alpha = 45^\circ$ имеет максимальное значение, равное $\tau = \tau_{\max}$ (так как при этом $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$), а при $\alpha = -45^\circ$ – минимальное значение, равное $-\tau = -\tau_{\max}$. Следовательно, при чистом сдвиге главные напряжения (т.е. экстремальные нормальные напряжения и экстремальные касательные напряжения) по абсолютной величине равны друг другу.

Подставим в выражение (4.1) значения углов α_1 и $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$, соответствующие двум взаимно перпендикулярным площадкам:

$$\sigma_{\alpha_1} = \tau \sin 2\alpha_1; \quad \sigma_{\alpha_2} = \tau \sin(2\alpha_1 + 180^\circ) = -\tau \sin 2\alpha_1;$$

$$\sigma_{\alpha_1} = -\sigma_{\alpha_2}.$$

Следовательно, при чистом сдвиге нормальные напряжения на любых двух взаимно перпендикулярных площадках равны друг другу по величине и противоположны по знаку. Поэтому чистым сдвигом можно называть такое плоское напряжённое состояние, при котором нормальные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны друг другу по величине и противоположны по знаку.

4.2. ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ СДВИГЕ. ЗАКОН ГУКА ПРИ СДВИГЕ

Напряжённое состояние, изображённое на рис. 4.2, а, представляет собой чистый сдвиг. В этом состоянии длины ребер элементарного параллелепипеда не изменяются, а изменяются лишь углы между боковыми гранями: первоначально прямые углы становятся равными $90^\circ + \gamma$ и $90^\circ - \gamma$ (рис. 4.2, б).

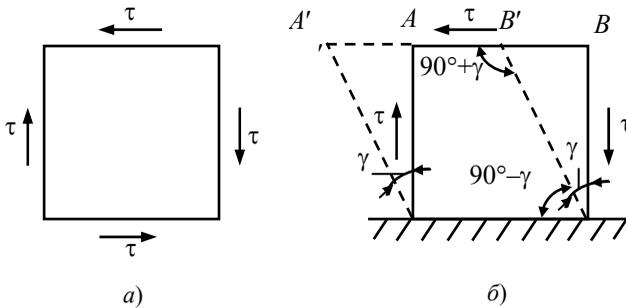


Рис. 4.2

Каждая из граней параллелепипеда при деформации чистого сдвига перемещается относительно противоположной грани на величину AA' , называемую абсолютным сдвигом. Отношение абсолютного сдвига к расстоянию между противоположными гранями называется относительным сдвигом, при малых деформациях оно равно углу сдвига γ . Абсолютный сдвиг выражается в мерах длины, а относительный сдвиг является безразмерной величиной. Угол сдвига γ , как показывает опыт, прямо пропорционален касательным напряжениям. Эта зависимость между γ и τ , называемая законом Гука при сдвиге, выражается в виде

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad (4.2)$$

или

$$\tau = \gamma G.$$

Она справедлива при напряжениях, не превышающих предела пропорциональности материала.

Коэффициент пропорциональности G в формулах называется модулем сдвига (или модулем упругости второго рода). Модуль сдвига является физической постоянной материала, характеризующей его жёсткость (т.е. способность сопротивляться упругим деформациям) при сдвиге. Модуль сдвига G , как и модуль упругости E , выражается в паскалях (Па), мегапаскалях (МПа). Модуль сдвига G связан с модулем упругости E следующей зависимостью:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (4.3)$$

Для большинства материалов можно приближённо принимать $G = 0,4E$.

4.3. ПРАКТИЧЕСКИЕ РАСЧЁТЫ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ КОНСТРУКЦИЙ, РАБОТАЮЩИХ НА СДВИГ

В некоторых конструкциях по отдельным сечениям действуют значительные касательные напряжения. В этих же сечениях, как правило, действуют и нормальные напряжения, а потому они не являются площадками чистого сдвига. Однако если нормальные напряжения в них значительно меньше касательных, то в приближённых расчётах учитываются лишь касательные напряжения, а указанные сечения при этом рассматриваются как площадки чистого сдвига.

Рассмотрим заклёпочное соединение на примере стыка элемента конструкции (с сечением, состоящим из двух уголков), растянутого силой P (рис. 4.3).

Касательные напряжения в заклёпках по плоскостям среза определяются по формуле

$$\tau = \frac{P}{n(\pi d^2/4) m}, \quad (4.4)$$

где d – диаметр стержней заклёпок; n – минимальное число заклёпок, одновременное срезание которых приводит к потере работоспособности; m – число плоскостей среза заклёпки. В случае, показанном на рис. 4.3, $n = 2$, $m = 2$.

Найденное значение должно удовлетворять условию прочности

$$\frac{P}{n(\pi d^2/4) m} \leq [\tau], \quad (4.5)$$

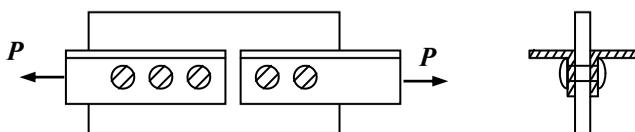


Рис. 4.3

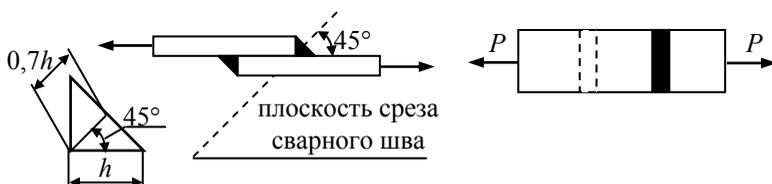


Рис. 4.4

где $[\tau]$ – допускаемое касательное напряжение. Для большинства материалов допускаемое касательное напряжение составляет от 60 до 80% допускаемого растягивающего напряжения.

Аналогично рассчитываются сварные соединения (рис. 4.4).

$$\tau = \frac{Q}{F_{\text{ср}}}; \quad Q = P; \quad F_{\text{ср}} = l \cdot 0,7h,$$

где l – длина шва.

$$\tau = \frac{P}{l \cdot 0,7h} \leq [\tau_{\text{ш}}],$$

где $[\tau_{\text{ш}}]$ – допускаемые напряжения для шва в зависимости от типа электродов (50...70% от допускаемых напряжений на растяжение свариваемого металла).

5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Как уже известно, при растяжении и сжатии прочность и жёсткость стержней, напряжения, возникающие в их поперечных сечениях, потенциальная энергия деформации и т.д. зависят от площадей поперечных сечений стержней.

Площадь является простейшей геометрической характеристикой поперечного сечения. Если представить сечение состоящим из бесчисленного множества элементарных площадок dF , то площадь всего сечения

$$F = \int_F dF. \tag{5.1}$$

При расчётах на изгиб, кручение, сложное сопротивление, а также при расчётах сжатых стержней на устойчивость используются более сложные геометрические характеристики сечений: статический момент, а также осевой (или экваториальный), полярный и центробежный моменты инерции сечений. Выражения этих характеристик отличаются от выражения (5.1) тем, что у них под знаки интеграла входят произведения элементарных площадок dF на функции координат y , x , ρ этих площадок (рис. 5.1). Таким образом, указанные геометрические характеристики зависят не только от формы и размеров сечения, но также от положения осей и точек (полусов), относительно которых они вычисляются.

Геометрические характеристики сечений простой формы можно определить по специальным формулам. Кроме того, в таблицах ГОСТа (на-

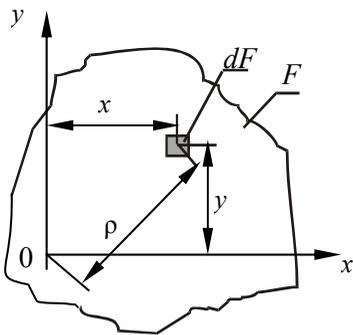


Рис. 5.1

зываются также таблицами нормального сортамента) приводятся геометрические характеристики профилей стандартного проката (уголков, швеллеров, двутавров). Для определения геометрических характеристик сложных сечений приходится расчленять их на ряд простых фигур и пользоваться формулами, устанавливающими зависимости между геометрическими характеристиками относительно различных осей.

5.1. СТАТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЙ

Статическим моментом сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на их расстояния от этой оси, т.е.

$$S_x = \int_F y dF ; \quad S_y = \int_F x dF . \quad (5.2)$$

Статические моменты выражаются в см^3 , м^3 и т.д.

Статический момент сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме статических моментов всех частей этого сечения относительно той же оси.

Нельзя суммировать статические моменты частей сечения, вычисленные относительно различных осей. Изменение положительного направления оси y вызывает изменение знака статического момента S_x ; аналогично, изменение положительного направления оси x вызывает изменение знака статического момента S_y .

Зависимости между статическими моментами одного и того же сечения относительно двух параллельных друг другу осей x и x_1 (рис. 5.2) выражаются формулами

$$S_{x_1} = S_x - aF ; \quad (5.3)$$

$$S_{y_1} = S_y - bF . \quad (5.4)$$

Найдём теперь положение осей x_1 и y_1 , относительно которых

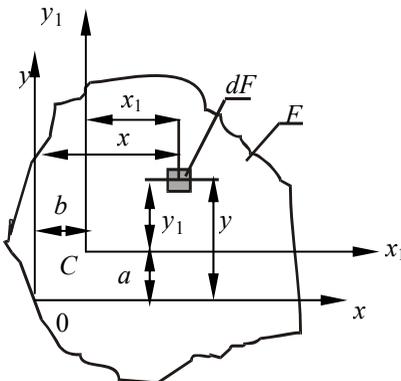


Рис. 5.2

статические моменты равны нулю. Для этого приравняем нулю выражения (5.3) и (5.4):

$$S_{x_1} = S_x - y_C F = 0 ;$$

$$S_{y_1} = S_y - x_C F = 0 ,$$

откуда

$$y_C = S_x / F ; \quad x_C = S_y / F . \quad (5.5)$$

Оси, проходящие через центр тяжести, называются центральными осями. Относительно любой оси, проходящей через центр тяжести сечения (т.е. относительно любой центральной оси), статический момент равен нулю. Формулы (5.5) используются для определения координат центра тяжести сечения.

Для случаев, когда положение центра тяжести сечения известно, а требуется определить статические моменты сечения относительно любых осей y и x , формулы (5.5) преобразуются к виду

$$S_x = y_C F ; \quad S_y = x_C F . \quad (5.6)$$

На основании вышеизложенного можно установить следующий порядок определения положения центра тяжести сложного сечения:

1. Сложное сечение разбивается на части, имеющие вид простых фигур.

2. Определяются площади и положения центров тяжести каждой фигуры.

3. Выбираются случайные координатные оси y и x .

4. По формулам (5.6) вычисляются статические моменты S_y^i и S_x^i каждой фигуры относительно осей y и x . Затем путём суммирования значений S_y^i определяется статический момент S_y , а значений S_x^i – статический момент S_x всего сечения.

5. По формулам (5.5) вычисляются координаты центра тяжести всего сечения.

В отдельных случаях, когда заданное сечение нельзя разбить на такие фигуры, положение центров тяжести которых известны, положение центра тяжести всего сечения необходимо определить путём непосредственного интегрирования.

5.2. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ СЕЧЕНИЙ

Осевым (или экваториальным) моментом инерции сечения относительно некоторой оси называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на квадраты их расстояний от этой оси, т.е.

$$J_y = \int_F x^2 dF ; \quad J_x = \int_F y^2 dF . \quad (5.7)$$

Полярным моментом инерции сечения относительно некоторой точки (полюса) называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на квадраты их расстояний от этой точки, т.е.

$$J_\rho = \int_F \rho^2 dF . \quad (5.8)$$

Центробежным моментом инерции сечения относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей называется взятая по всей его площади F сумма произведений элементарных площадок dF на их расстояния от этих осей, т.е.

$$J_{yx} = \int_F yx dF . \quad (5.9)$$

Моменты инерции выражаются в см^4 , м^4 и т.д. Осевые и полярные моменты инерции всегда положительны, так как в их выражения под знаки интегралов входят величины площадок dF (всегда положительные) и квадраты расстояний этих площадок от данной оси или полюса.

На рисунке 5.3 изображено сечение площадью F и показаны оси y и x . Осевые моменты инерции этого сечения относительно осей y и x :

$$J_y = \int_F x^2 dF ; \quad J_x = \int_F y^2 dF .$$

Сумма осевых моментов инерции сечения относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции этого сечения относительно точки пересечения указанных осей

$$J_y + J_x = J_\rho . \quad (5.10)$$

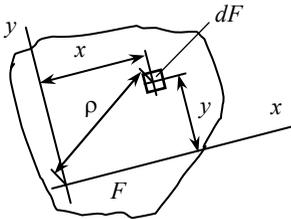


Рис. 5.3

Центробежные моменты инерции могут быть положительными, отрицательными или равными нулю. Центробежный момент инерции сечения относительно осей, из которых одна или обе совпадают с его осями симметрии, равен нулю. Осевой момент инерции сложного сечения относительно некоторой оси равен сумме осевых моментов инерции составляющих его частей относительно этой же оси. Аналогично,

центробежный момент инерции сложного сечения относительно любых двух взаимно перпендикулярных осей равен сумме центробежных моментов инерции составляющих его частей относительно этих же осей. Также и полярный момент инерции сложного сечения относительно некоторой точки равен сумме полярных моментов инерции составляющих его частей относительно той же точки. Следует иметь в виду, что нельзя суммировать моменты инерции, вычисленные относительно различных осей и точек.

5.3. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ ПЕРЕНОСЕ ОСЕЙ

Часто при решении практических задач необходимо определять моменты инерции сечения относительно осей, различным образом ориентированных в его плоскости. При этом удобно использовать уже известные значения моментов инерции всего сечения (или отдельных составляющих его частей) относительно других осей, приводимые в технической литературе, специальных справочниках и таблицах, а также подсчитываемые по имеющимся формулам. Поэтому очень важно установить зависимости между моментами инерции одного и того же сечения относительно разных осей.

В самом общем случае переход от любой *старой* к любой *новой* системе координат может рассматриваться как два последовательных преобразования старой системы координат:

- 1) путём параллельного переноса осей координат в новое положение;
- 2) путём поворота их относительно нового начала координат.

При параллельном переносе осей координат x и y в новое положение x_1 и y_1 (рис. 5.2), где $x_1 = x - b$ и $y_1 = y - a$ выражения (5.7) осевых моментов инерции относительно осей и x_1 и y_1 принимают вид:

$$J_{x_1} = J_x - 2aS_x + a^2F; \quad (5.11)$$

$$J_{y_1} = J_y - 2bS_y + b^2F. \quad (5.12)$$

Если оси x и y проходят через центр тяжести сечения, то статические моменты $S_x = 0$ и $S_y = 0$, тогда

$$J_{x_1} = J_x + a^2F; \quad (5.13)$$

$$J_{y_1} = J_y + b^2F. \quad (5.14)$$

Из всех моментов инерции относительно параллельных осей осевой момент инерции имеет наименьшее значение относительно оси, проходящей через центр тяжести сечения.

Подставим теперь значения $y_1 = y - a$ и $x_1 = x - b$ в выражение центростремительного момента инерции относительно осей y_1 и x_1 , получим

$$J_{y_1x_1} = J_{yx} - aS_y - bS_x + abF. \quad (5.15)$$

В частном случае, когда начало старой системы координат yx находится в центре тяжести сечения,

$$S_y = S_x = 0$$

и

$$J_{y_1x_1} = J_{yx} + abF. \quad (5.16)$$

Если сечение симметрично и одна из старых осей (или обе) совпадает с осью симметрии, то $J_{yx} = 0$ и выражение (5.16) принимает вид

$$J_{y_1x_1} = abF. \quad (5.17)$$

5.4. ИЗМЕНЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕЙ

Предположим, что известны моменты инерции J_y , J_x и J_{yx} сечения относительно осей y и x старой системы координат с началом в точке O .

Возьмём новую систему координат y_1x_1 с началом в той же точке O , но повернутую на некоторый угол α относительно старой. Будем считать угол α положительным, если старую систему координат для перехода к новой надо повернуть на этот угол против часовой стрелки.

При повороте осей на некоторый угол α осевые моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 примут вид:

$$J_{x_1} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{yx} \sin 2\alpha; \quad (5.18)$$

$$J_{y_1} = J_y \cos^2 \alpha + J_x \sin^2 \alpha + J_{yx} \sin 2\alpha. \quad (5.19)$$

Если сложить величины моментов инерции относительно осей y_1 и x_1 , то

$$J_{y_1} + J_{x_1} = J_y + J_x. \quad (5.20)$$

Следовательно, *сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей сохраняет постоянную величину при повороте осей на любой угол*. Этот результат объясняется также тем, что сумма моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат; величина же полярного момента инерции не изменяется, если начало координат остаётся на месте, а координатные оси поворачиваются.

Величина центробежного момента инерции относительно осей y_1 и x_1 :

$$J_{y_1 x_1} = \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{yx} \cos 2\alpha. \quad (5.21)$$

5.5. ГЛАВНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ. ГЛАВНЫЕ ОСИ ИНЕРЦИИ

Формулы (5.18), (5.19) и (5.21) позволяют установить, как изменяются величины моментов инерции сечения при повороте осей на произвольный угол α . Для некоторых значений угла α величины осевых моментов инерции достигают максимума и минимума. Экстремальные (максимальные и минимальные) значения осевых моментов инерции сечения называются *главными моментами инерции*. Оси, относительно которых осевые моменты инерции имеют экстремальные значения, называются *главными осями инерции*.

Из формулы (5.20) следует, что если осевой момент инерции относительно некоторой оси является максимальным (т.е. эта ось главная), то осевой момент инерции относительно перпендикулярной к ней оси является минимальным (т.е. эта ось также главная), так как сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей не зависит от угла α .

Таким образом, *главные оси инерции взаимно перпендикулярны*.

Для нахождения главных моментов инерции и положения главных осей инерции определим первую производную по углу α от момента инерции J_x [см. формулу (5.18)]:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{x_1}}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} (J_x \cos^2 \alpha + J_y \sin^2 \alpha - J_{yx} \sin 2\alpha) = \\ &= -J_x 2 \sin \alpha \cos \alpha + J_y 2 \sin \alpha \cos \alpha - J_{yx} 2 \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

Приравниваем этот результат к нулю:

$$\left(\frac{dJ_{x_1}}{d\alpha} \right)_{\alpha=\alpha_0} = -(J_x - J_y) \sin 2\alpha_0 - 2J_{yx} \cos 2\alpha_0 = 0, \quad (5.22)$$

где α_0 – угол, на который надо повернуть координатные оси y и x , чтобы они совпали с главными осями.

Сравнивая выражения (5.22) и (5.21), устанавливаем, что

$$(J_{y_1 x_1})_{\alpha=\alpha_0} = 0.$$

Следовательно, *относительно главных осей инерции центробежный момент инерции равен нулю*. Поэтому главными осями инерции можно

называть оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю.

Как уже известно, центробежный момент инерции сечения относительно осей, из которых одна или обе совпадают с осями симметрии, равен нулю.

Следовательно, *взаимно перпендикулярные оси, из которых одна или обе совпадают с осями симметрии сечения, всегда являются главными осями инерции*. Это правило позволяет во многих случаях непосредственно (без расчёта) устанавливать положение главных осей.

Решим уравнение (5.22) относительно угла α_0 :

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{yx}}{J_x - J_y}. \quad (5.23)$$

Уравнению (5.23) в каждом конкретном случае удовлетворяет ряд значений α_0 . Из них выбирается одно любое. *Если оно положительно, то для определения по нему положения одной из главных осей инерции ось x следует повернуть на угол α_0 против вращения часовой стрелки, а если отрицательное – то по вращению часовой стрелки; другая главная ось инерции перпендикулярна к первой*. Одна из главных осей инерции является *осью максимум* (относительно нее осевой момент инерции сечения максимален), а другая – *осью минимум* (относительно нее осевой момент инерции сечения минимален).

Ось максимум всегда составляет меньший угол с той из осей (y или x), относительно которой осевой момент инерции имеет большее значение. Это обстоятельство позволяет легко устанавливать, какая из главных осей инерции является осью максимум, а какая – осью минимум. Так, например, если $J_y > J_x$, а главные оси инерции u и v расположены, как это показано на рис. 5.4, то ось u является осью максимум (так как образует с осью y меньший угол, чем с осью x), а ось v – осью минимум.

При решении конкретной числовой задачи для определения главных моментов инерции J_{\max} и J_{\min} можно выбранное значение угла α_0 и значение $\alpha'_0 = \alpha_0 + 90^\circ$ подставить в формулу (5.18) или (5.19).

Подставив эти выражения в формулу (5.18), после простых преобразований получим

$$J_{\max} = \frac{J_y + J_x}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_y - J_x)^2 + 4J_{yx}^2}. \quad (5.24)$$

Главные оси инерции можно провести через любую точку, взя-

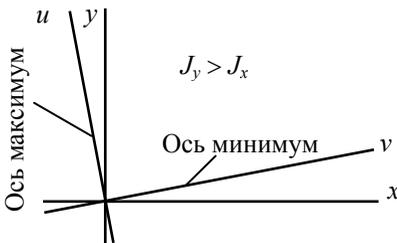


Рис. 5.4

тую в плоскости сечения. Однако практическое значение для расчётов элементов конструкции имеют лишь главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, т.е. *главные центральные оси инерции*. Моменты инерции относительно этих осей (*главные центральные моменты инерции*) в дальнейшем будем обозначать J_{\max} и J_{\min} .

Моменты инерции относительно всех центральных осей равны между собой и все эти оси являются главными осями инерции.

Если $J_x = J_y$ и $J_{yx} \neq 0$, то по формуле (5.23)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \infty; \quad 2\alpha_0 = 90^\circ; \quad \alpha_0 = 45^\circ.$$

В этом случае главные оси инерции наклонены к исходным осям y и x под углами 45° .

6. КРУЧЕНИЕ

6.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. КРУТЯЩИЙ МОМЕНТ

Кручением называется такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – крутящий момент M_k (крутящий момент можно также обозначить M_z , так как это момент внутренних сил относительно продольной оси бруса – оси z).

Кручение возникает в валах, винтовых пружинах и других элементах конструкций. Кручение прямого бруса происходит при нагружении его внешними скручивающими моментами (парами сил), плоскости действия которых перпендикулярны к его продольной оси. Эти моменты обозначим m . Кручение криволинейных брусьев может возникать и при других видах нагружения.

При расчёте валов в ряде случаев величины внешних скручивающих моментов определяются по величине потребляемой мощности и по скорости вращения вала. Если вал делает в минуту n оборотов, то угол поворота вала за одну секунду, выраженный в радианах, равен $(n/60)2\pi$, или $\pi n/30$. Работа скручивающего момента m за одну секунду, т.е. мощность N , передаваемая валом, равна произведению величины момента на угол поворота вала (в радианах) за одну секунду:

$$N = m \frac{\pi n}{30},$$

откуда

$$m = \frac{30N}{\pi l}, \text{ кгс}\cdot\text{м},$$

где мощность N выражена в кгс·м/с.

Если мощность N задана в лошадиных силах (л. с.), то

$$m = \frac{30 \cdot 75N}{\pi l} = 716,2 \frac{N}{n}, \text{ кгс}\cdot\text{м}, \quad (6.1)$$

Если мощность N задана в киловаттах, то, учитывая, что 1 л. с. равна 0,736 кВт, получаем

$$m = 973,6 \frac{N}{n}, \text{ кгс}\cdot\text{м}. \quad (6.2)$$

Крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях брусьев, определяются по внешним скручивающим моментам с помощью метода сечений. В простейшем случае, когда брус нагружен только двумя внешними моментами (эти моменты из условия равновесия бруса $\sum M_z = 0$ всегда равны друг другу по величине и направлены в противоположные стороны), как показано на рис. 6.1, а, крутящий момент M_k в любом поперечном сечении бруса (на участке между внешними моментами) по величине равен внешнему моменту $m_1 = m_2$.

На основании метода сечений *крутящий момент в произвольном поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних скручивающих моментов, приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения.*

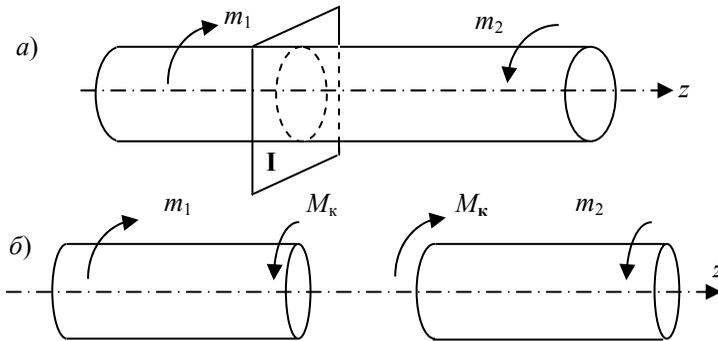


Рис. 6.1

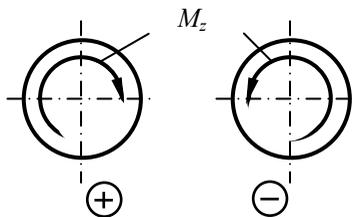


Рис. 6.2

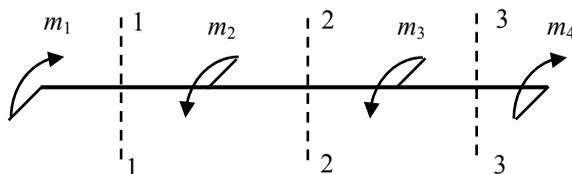


Рис. 6.3

При расчётах на прочность и жёсткость знак крутящего момента не имеет никакого значения, но для удобства построения эпюр M_z примем следующее правило знаков: *крутящий момент считается положительным, если при взгляде в торец отсечённой части бруса действующий на него момент представляется направленным по движению часовой стрелки* (рис. 6.2).

В частности, в сечении I бруса (рис. 6.1, а) крутящий момент отрицателен (рис. 6.1, б) и численно равен внешнему моменту m_1 (или m_2).

На рисунке 6.3 изображён брус, к которому приложены четыре внешних скручивающих момента. Крутящий момент $M_{1к}$ в сечении 1–1 численно равен m_1 и, согласно принятому правилу знаков, отрицателен. Крутящий момент в сечении 2–2 численно равен разности моментов m_1 и m_2 , т.е. $|M_{2к}| = |m_1 - m_2|$, а его знак зависит от соотношения этих моментов: если $m_2 > m_1$, то момент $M_{2к}$ положителен, а если $m_2 < m_1$, то отрицателен.

Абсолютная величина крутящего момента в сечении 3–3 бруса, если его вычислять по внешним моментам, приложенным слева от рассматриваемого сечения, определится из выражения

$$|M_{3к}| = |m_1 - m_2 - m_3|.$$

В данном случае крутящий момент $M_{3к}$ удобнее определять по внешним нагрузкам, приложенным справа от сечения 3–3, так как с этой стороны приложен лишь внешний момент m_4 (вместо трех внешних моментов, приложенных слева от сечения). Момент $M_{3к}$, действующий

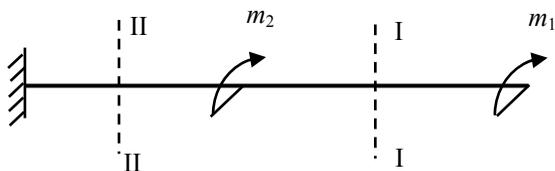


Рис. 6.4

на правую отсечённую часть бруса, направлен противоположно моменту m_4 , что следует из условия равновесия этой части; следовательно, по принятому правилу знаков он положителен.

Для брусьев, имеющих один неподвижно закреплённый (заделанный) и один свободный конец, крутящие моменты в их поперечных сечениях удобно выразить через внешние моменты, приложенные с той стороны от рассматриваемого сечения, с которой расположен свободный конец. Это позволяет определять крутящие моменты, не вычисляя реактивного момента, возникающего в заделке. Так, например, крутящие моменты $M_{Iк}$ и $M_{IIк}$ в сечениях I–I и II–II бруса, изображённого на рис. 6.4, можно определить без вычисления реактивного момента левой заделки:

$$M_{Iк} = m_1; \quad M_{IIк} = m_1 + m_2.$$

Оба момента $M_{Iк}$ и $M_{IIк}$ положительны.

Изменение крутящих моментов по длине бруса удобно изображать графически – с помощью так называемой эпюры крутящих моментов. На рисунке 6.5, а показана такая эпюра для бруса, изображённого на рис. 6.1, а. На рисунке 6.5, б показана эпюра крутящих моментов для бруса, изображённого на рис. 6.5, б.

Каждая ордината эпюры крутящих моментов в принятом масштабе равна величине крутящего момента, действующего в том поперечном сечении бруса, которому соответствует эта ордината. В сечении, в котором к брусу приложен внешний скручивающий момент, ордината эпюры изменяется скачкообразно на величину, равную значению этого момента (рис. 6.5, в).

Следует учитывать, что наибольший внешний скручивающий момент, приложенный к брусу, не всегда равен наибольшему крутящему моменту, по которому ведётся расчёт бруса на прочность и жёсткость. Так, например, на рис. 6.5, б наибольший внешний момент равен 300 кгс·см, а наибольший (по абсолютной величине) крутящий момент (внутренний) равен 250 кгс·см (рис. 6.5, в).

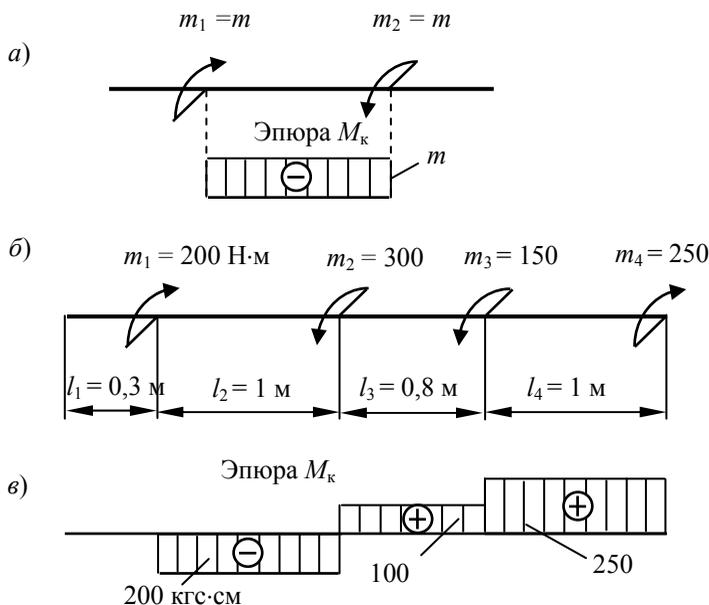


Рис. 6.5

6.2. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Рассмотрим прямой брус с поперечным сечением в виде круга, нагруженный на концах скручивающими моментами m (рис. 6.6). Левый из моментов представляет собой реакцию заделки.

В результате действия этих моментов крайние сечения бруса повернутся друг относительно друга вокруг его продольной оси на некоторый угол φ , который представляет собой полный угол закручивания на участке длиной l . Отношение полного угла закручивания $d\varphi$ на элементарном участке бруса к длине dz называется относительным углом закручивания, который обозначается

$$\vartheta = \frac{d\varphi}{dz}. \quad (6.3)$$

Если размеры поперечных сечений прямого бруса и крутящие моменты, действующие в них, на некотором участке бруса постоянны, то значение ϑ также постоянно и равно отношению полного угла φ закручивания на этом участке к его длине l , т.е.

$$\vartheta = \frac{\varphi}{l}$$

Угол φ измеряется в радианах, а относительный угол закручивания ϑ выражается в рад/см, рад/м и т.п.

Теория кручения брусков, имеющих круглое сплошное или кольцевое поперечное сечение, основана на следующих положениях.

1. Поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к ней и после деформации (гипотеза плоских сечений); они лишь поворачиваются на некоторые углы вокруг этой оси.

2. Радиусы поперечных сечений не искривляются и сохраняют свою длину.

3. Расстояния (вдоль оси бруса) между поперечными сечениями не изменяются.

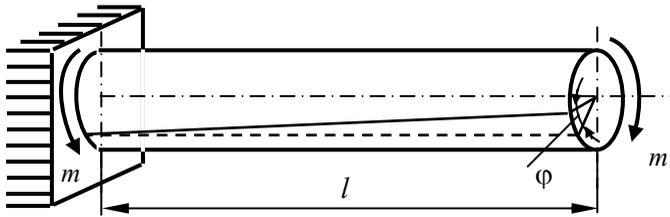


Рис. 6.6

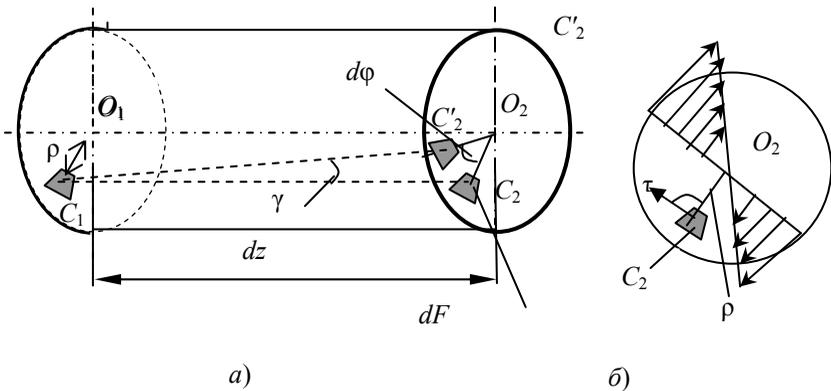


Рис. 6.7

Выделим двумя поперечными сечениями элемент скручиваемого бруса длиной dz (рис. 6.7, а). В результате деформации одно сечение повернётся относительно другого на угол $d\varphi = \vartheta dz$. Будем считать левое сечение элемента dz неподвижно закреплённым. Тогда величина $d\varphi$ представит собой угол поворота правого торцевого сечения элемента вокруг продольной оси бруса.

Продольное волокно C_1C_2 (рис. 6.7, а), находящееся на расстоянии ρ от оси бруса, можно рассматривать как параллелепипед высотой dz с бесконечно малыми основаниями C_1 и C_2 . Этот параллелепипед в результате деформации перекосится и займёт положение C_1C_2' . Основание C_2 при этом сместится в своей плоскости, повернувшись вместе с правым торцевым сечением рассматриваемого элемента на угол $d\varphi$ вокруг продольной оси бруса.

Величина C_1C_2' его смещения равна $\rho d\varphi = \rho \vartheta dz$ и представляет собой абсолютный сдвиг основания C_2 параллелепипеда относительно основания C_1 в направлении, перпендикулярном к радиусу ρ . Отношение этой величины к высоте параллелепипеда dz является относительным сдвигом γ (см. рис. 6.7, а):

$$\gamma = \frac{C_1C_2'}{dz} = \frac{\vartheta \rho dz}{dz} = \vartheta \rho .$$

По основанию C_2 параллелепипеда в направлении сдвига, т.е. перпендикулярно к радиусу ρ , действуют касательные напряжения τ (рис. 6.7, б). Величина их, на основании закона Гука при сдвиге, равна

$$\tau = \gamma G = \vartheta \rho G . \quad (6.4)$$

Итак, в поперечных сечениях бруса при кручении возникают касательные напряжения, направление которых в каждой точке перпендикулярно к радиусу, соединяющему эту точку с центром сечения, а величина прямо пропорциональна расстоянию точки от центра. В центре (при $\rho = 0$) касательные напряжения равны нулю; в точках же, расположенных в непосредственной близости от внешней поверхности бруса, они наибольшие. График изменения величин τ вдоль какого-либо радиуса (т.е. эпюра касательных напряжений) изображается прямой линией (см. рис. 6.7, б).

Крутящий момент, возникающий в поперечном сечении бруса, определяется по формуле

$$M_k = \vartheta G J_\rho . \quad (6.5)$$

Относительный угол закручивания определяется по формуле:

$$\vartheta = \frac{M_k}{G J_\rho} . \quad (6.6)$$

Подставив значение ϑ в формулу (6.4), найдём касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения скручиваемого круглого бруса

$$\tau = \frac{M_k}{J_\rho} \rho. \quad (6.7)$$

Наибольшее касательное напряжение, возникающее в непосредственной близости к наружной боковой поверхности бруса, т.е. в точках контура его поперечного сечения, найдём, подставив в выражение (6.7) значение $\rho = d/2$:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{J_\rho} \frac{d}{2} = \frac{M_k}{W_\rho}, \quad (6.8)$$

где W_ρ – полярный момент сопротивления поперечного сечения бруса:

$$W_\rho = \frac{J_\rho}{d/2} = \frac{2J_\rho}{d}. \quad (6.9)$$

Полярным моментом сопротивления сечения называется отношение полярного момента инерции к расстоянию от центра тяжести сечения до наиболее удалённой его точки. Полярный момент сопротивления выражается в см^3 , мм^3 и т.п.

Полярный момент инерции круглого поперечного сечения определяется по формуле

$$J_y + J_x = J_\rho,$$

$$J_\rho = 2J_x = \frac{2\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$$

и, следовательно, полярный момент сопротивления равен

$$W = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (6.10)$$

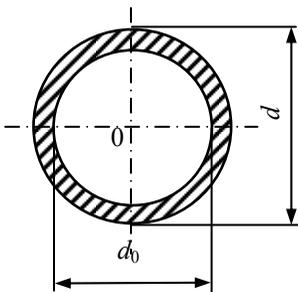


Рис. 6.8

Формулы (6.5) – (6.9), выведенные для расчёта на кручение прямых брусков круглого сплошного сечения, применимы и в случае, если поперечное сечение имеет форму кольца (рис. 6.8), так как характер деформации при кручении для обеих указанных форм поперечных сечений одинаков.

Полярный момент инерции кольцевого сечения определяется по формуле

$$J_p = \frac{\pi(d^4 - d_0^4)}{32} = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4) \approx 0,1d^4(1 - c^4),$$

где $c = \frac{d_0}{d}$ (рис. 6.8).

Полярный момент сопротивления кольцевого сечения определяется по формуле

$$W_p = \frac{J_p}{d/2} = \frac{\pi(d^4 - d_0^4)}{16d} = \frac{\pi d^3}{16}(1 - c^4) \approx 0,2d^3(1 - c^4). \quad (6.11)$$

Отметим, что полярный момент сопротивления кольцевого сечения не равен разности полярных моментов сопротивления, подсчитанных для двух сплошных сечений: одного с диаметром, равным наружному диаметру кольца, а другого – внутреннему.

Полный угол закручивания стержня на участке длиной l на основании формул (6.3) и (6.6)

$$\varphi = \int_l \vartheta dz = \int_l \frac{M_\kappa}{GJ_p} dz. \quad (6.12)$$

Угол φ представляет собой взаимный угол поворота концевых сечений участка.

Если крутящий момент во всех поперечных сечениях бруса имеет одно и то же значение, а размеры сечения постоянны по всей его длине, то полный угол закручивания определяется из выражения

$$\varphi = \vartheta l = \frac{M_\kappa l}{GJ_p}. \quad (6.13)$$

Из формул (6.7) и (6.8) видно, что значения напряжений при кручении не зависят от физических свойств материала бруса, так как величина G в формулы напряжений не входит. Значения же деформаций зависят от свойств материала.

Произведение GJ_p называется жёсткостью сечения при кручении. Она выражается в кгс·мм², кгс·см² и т.д. Из формул (6.6), (6.12) и (6.13) следует, что величины относительных и полных углов закручивания бруса обратно пропорциональны жёсткости его поперечных сечений.

6.3. РАСЧЁТ БРУСА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЁСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

Наибольшие касательные напряжения, возникающие в скручиваемом брусе, не должны превышать соответствующих допускаемых напряжений:

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \quad (6.14)$$

Это требование называется условием прочности. Допускаемое напряжение при кручении $[\tau]$ (так же как и при других видах деформаций) зависит от свойств материала рассчитываемого бруса и от принятого коэффициента запаса прочности:

$$[\tau] = \tau_{\text{пред}} / [n]. \quad (6.15)$$

В случае пластичного материала в качестве опасного (предельного) напряжения $\tau_{\text{пред}}$ принимается τ_T – предел текучести при сдвиге, а в случае хрупкого материала – τ_B – предел прочности.

В связи с тем, что механические испытания материалов на кручение производятся значительно реже чем на растяжение, не всегда имеются экспериментально полученные данные об опасных (предельных) напряжениях при кручении. Поэтому в большинстве случаев допускаемые напряжения на кручение принимают в зависимости от допускаемых напряжений на растяжение для того же материала. Например, для стали $[\tau] \approx 0,5[\sigma]$; для чугуна $[\tau] \approx [\sigma_p]$, где $[\sigma_p]$ – допускаемое напряжение при растяжении чугуна.

Следует стремиться к тому, чтобы материал бруса был по возможности полностью использован, т.е. чтобы наибольшие расчётные напряжения, возникающие в брусе, равнялись допускаемым напряжениям.

Величина τ_{\max} в условии прочности (6.14) представляет собой значение наибольшего касательного напряжения в опасном сечении бруса в непосредственной близости к его внешней поверхности. Опасным сечением бруса является сечение, для которого абсолютная величина отношения M_k / W_p имеет наибольшее значение. Для бруса постоянного сечения наиболее опасным является сечение, в котором крутящий момент имеет наибольшее абсолютное значение.

При расчёте скручиваемых брусьев на прочность, как и при расчёте других конструкций, возможны следующие три вида задач, различающихся формой использования условия прочности (6.14): а) проверка напряжений (проверочный расчёт); б) подбор сечения (проектный расчёт); в) определение допускаемой нагрузки.

При проверке напряжений по заданным нагрузке и размерам бруса определяются наибольшие возникающие в нём касательные напряжения. При этом во многих случаях предварительно следует построить эпюру M_k , наличие которой облегчает определение опасного сечения бруса. Наибольшие касательные напряжения в опасном сечении затем сравниваются с допускаемыми напряжениями. Если при этом условие (6.14) не удовлетворяется, то требуется изменить размеры сечения бруса или уменьшить действующую на него нагрузку, или применить материал более высокой прочности. Конечно, незначительное (порядка 5%) превышение максимальных расчётных напряжений над допускаемыми не опасно.

При подборе сечения по заданной нагрузке определяются крутящие моменты в поперечных сечениях бруса (обычно строится эпюра M_k), а затем по формуле

$$W_p \geq \frac{|M_k|_{\max}}{[\tau]}, \quad (6.16)$$

являющейся следствием формулы (6.8) и условия (6.14), определяется необходимый полярный момент сопротивления поперечного сечения бруса для каждого его участка, на котором сечение принимается постоянным. Здесь $|M_k|_{\max}$ – величина наибольшего (по абсолютному значению) крутящего момента в пределах каждого такого участка.

По величине полярного момента сопротивления с помощью формулы (6.10) определяется диаметр сплошного круглого или с помощью формулы (6.11) – наружный и внутренний диаметры кольцевого сечения бруса.

При определении допускаемой нагрузки с помощью формулы (6.8) по известному допускаемому напряжению $[\tau]$ и полярному моменту сопротивления W_p определяется величина допускаемого крутящего момента $|M_k|_{\max}$; затем устанавливаются величины допускаемых внешних нагрузок, от действия которых возникающий в сечениях бруса наибольший крутящий момент равняется допускаемому моменту.

Расчёт вала на прочность не исключает возможности возникновения деформаций, недопустимых при его эксплуатации. Большие углы закручивания вала особенно опасны при передаче им переменного во времени момента, так как при этом возникают опасные для его прочности крутильные колебания. В технологическом оборудовании, например металлорежущих станках, недостаточная жёсткость на кручение некоторых элементов конструкции (в частности, ходовых винтов токарных станков) приводит к нарушению точности обработки изготавливаемых на этом стан-

ке деталей. Поэтому в необходимых случаях валы рассчитывают не только на прочность, но и на жёсткость.

Условие жёсткости бруса при кручении имеет вид

$$\vartheta_{\max} \leq [\vartheta], \quad (6.17)$$

где ϑ_{\max} – наибольший относительный угол закручивания бруса, определяемый по формуле (6.6); $[\vartheta]$ – допускаемый относительный угол закручивания, принимаемый для разных конструкций и разных видов нагрузки равным от 0,15 до 2° на 1 м длины стержня (от 0,0015 до 0,02° на 1 см длины или от 0,000026 до 0,00035 рад на 1 см длины вала).

Брус прямоугольного сечения

Если обозначить большую сторону прямоугольного сечения h и меньшую b , то

$$J_{\kappa} = \alpha b^4; \quad W_{\kappa} = \beta b^3, \quad (6.18)$$

где α и β определяются по табл. 6.1 в зависимости от отношения сторон h/b .

При $h/b \geq 10$ можно пользоваться упрощёнными формулами:

$$J_{\kappa} = \frac{hb^3}{3}; \quad W_{\kappa} = \frac{J_{\kappa}}{b} = \frac{hb^2}{3}. \quad (6.19)$$

Напряжения τ_{\max} [см. формулу (6.8)] возникают в серединах длинных сторон прямоугольника. Касательные напряжения τ в серединах коротких сторон

$$\tau = \gamma \tau_{\max}, \quad (6.20)$$

где γ определяется по табл. 6.1; при $h/b \geq 4$ можно принимать $\gamma = 0,74$.

Таблица 6.1

h/b	α	β	γ	h/b	α	β	γ
1,0	0,140	0,208	1,000	4,0	1,123	1,150	0,745
1,5	0,294	0,346	0,859	6,0	1,789	1,789	0,743
2,0	0,457	0,493	0,795	8,0	2,456	2,456	0,742
3,0	0,790	0,801	0,753	10,0	3,123	3,123	0,742

6.4. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ ЗАДАЧИ ПРИ КРУЧЕНИИ

При расчёте на кручение прямых брусьев, жёстко защемлённых одним концом, а также при расчёте валов (представляющих собой вращающиеся брусья, нагруженные взаимно уравновешенными скручивающими моментами) значения крутящих моментов в поперечных сечениях можно определить с помощью одних лишь уравнений равновесия (методом сечений). Следовательно, такие задачи являются *статически определенными*.

Задачи расчёта на кручение являются *статически неопределимыми*, если крутящие моменты, возникающие в поперечных сечениях скручиваемых стержней, нельзя определить с помощью только уравнений равновесия. Для решения этих задач дополнительно к уравнениям равновесия, составляемым для системы в целом или её отсечённой части, необходимо составить также *уравнения перемещений*, основанные на рассмотрении характера деформации системы.

Рассмотрим для примера брус круглого сечения, жёстко заделанный обоими концами и нагруженный моментом m на расстоянии a от левого конца (рис. 6.9, а).

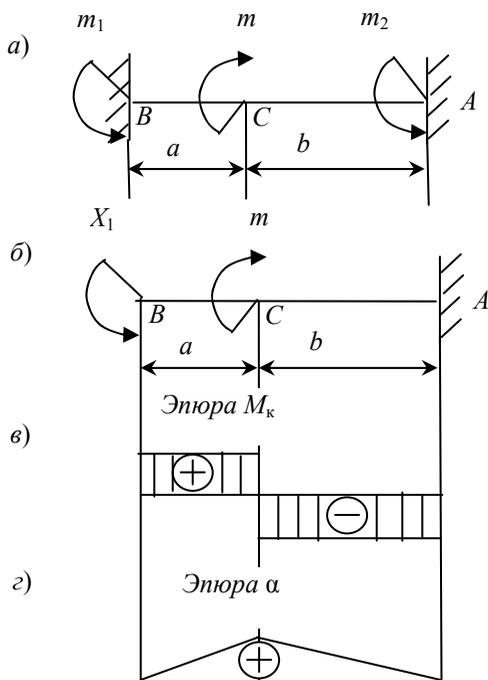


Рис. 6.9

Для решения данной задачи можно составить лишь одно уравнение равновесия – в виде равенства нулю суммы моментов относительно оси бруса:

$$\sum M_k = m_1 - m + m_2 = 0,$$

где m_1 и m_2 – реактивные скручивающие моменты, возникающие в заделках.

Дополнительное уравнение для решения рассматриваемой задачи можно получить следующим образом. Отбросим левое опорное закрепление бруса, но оставим правое (рис. 6.9, б). Поворот левого конца полученного таким путем бруса должен быть равен нулю, т.е. $\alpha_B = 0$, так как в действительности этот конец жёстко закреплён и не может поворачиваться.

На основании принципа независимости действия сил уравнение перемещений имеет вид

$$\alpha_B = \alpha_{B_1} + \alpha_{B_2}.$$

Здесь α_{B_1} угол поворота левого конца бруса от действия внешнего скручивающего момента m_1 ; α_{B_2} – угол поворота левого конца от действия внешнего момента m .

По формуле $\alpha_{\text{лев}} = \alpha_{\text{прав}}$, учитывая, что правый конец бруса не поворачивается (т.е. $\alpha_A = 0$), и по формуле (6.13) находим

$$\alpha_{B_1} = -\varphi_1 = -\frac{m_1 l}{G J_p};$$

$$\alpha_{B_2} = -\varphi_2 = \frac{mb}{G J_p}.$$

Подставим эти значения в уравнение перемещений

$$-\frac{m_1 l}{G J_p} + \frac{mb}{G J_p} = 0,$$

откуда

$$m_1 = \frac{mb}{l}.$$

Из уравнения равновесия

$$m_2 = m - m_1 = \frac{ma}{l}.$$

После определения моментов m_1 и m_2 эпюру крутящих моментов можно построить обычным способом, т.е. как для статически определимого бруса. Для рассмотренной задачи эта эпюра представлена на рис. 6.9, в.

Наглядное представление об изменении углов поворота поперечных сечений бруса по его длине даёт *эпюра углов поворота* (иногда её называют эпюрой углов закручивания). Каждая ордината этой эпюры даёт в принятом масштабе величину угла поворота соответствующего поперечного сечения бруса.

Построим такую эпюру для бруса по рис. 6.9, б, учитывая при этом, что значение m_1 уже найдено и эпюра крутящих моментов построена. Крайнее правое сечение A бруса неподвижно, т.е. $\alpha_A = 0$. Произвольное поперечное сечение, принадлежащее участку AC и отстоящее на расстоянии z от правого конца, повернётся на угол

$$\alpha_x = \alpha_A - \varphi_z = 0 + \frac{M_2 z}{GJ_\rho} = \frac{M(a/l)z}{GJ_\rho}.$$

Здесь φ_z – угол закручивания на участке длиной x , определяемый по формуле (6.13).

Таким образом, углы поворота изменяются по линейному закону в зависимости от расстояния z . Подставляя в полученное выражение $z = b$, найдём угол поворота сечения C :

$$\alpha_C = \frac{M(a/l)b}{GJ_\rho}.$$

Заметим, что всегда при нагружении бруса постоянного сечения сосредоточенными скручивающими моментами эпюра углов поворота поперечных сечений на каждом из участков бруса линейна.

Для построения эпюры на участке CB вычислим угол поворота сечения B . На основании формулы

$$\alpha_B = \alpha_C - \varphi_{CB} = \frac{M(a/l)b}{GJ_\rho} - \frac{M_1 a}{GJ_\rho} = \frac{M(a/l)b}{GJ_\rho} - \frac{M(b/l)a}{GJ_\rho} = 0.$$

Этот результат подтверждает правильность решения задачи, так как по условию сечение B заделано жёстко.

Построенная по полученным значениям эпюра углов поворота представлена на рис. 6.9, г.

7. ПРЯМОЙ ИЗГИБ

7.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Изгиб представляет собой такую деформацию, при которой происходит искривление осей прямых брусьев или изменение кривизны осей кривых брусьев.

Изгибающий момент – внутренний силовой фактор (внутреннее усилие), возникающий в поперечном сечении бруса, а именно момент относительно оси, расположенной в плоскости поперечного сечения и проходящей через его центр тяжести; он действует в плоскости, перпендикулярной к поперечному сечению бруса.

Здесь рассмотрен *прямой изгиб*, возникающий в случае, когда изгибающий момент в данном поперечном сечении бруса действует в плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции этого сечения. Прямой изгиб возникает, например, тогда, когда на прямой брус действует нагрузка в виде системы сосредоточенных сил, расположенных в одной плоскости, проходящей через одну из главных центральных осей инерции каждого поперечного сечения бруса.

Случай, когда плоскость действия изгибающего момента в данном поперечном сечении бруса не проходит ни через одну из главных центральных осей инерции этого сечения, называется *косым изгибом*.

7.2. ВНУТРЕННИЕ УСИЛИЯ

Внешние нагрузки, действующие на сооружение, вызывают появление в нём внутренних усилий. При действии на брус внешних нагрузок, расположенных в одной плоскости, проходящей через ось бруса (т.е. в случае плоского действия сил), в каждом поперечном сечении бруса возникают внутренние силовые факторы (усилия), действующие в этой же плоскости, а именно (рис. 7.1):

а) продольная сила N , приложенная в центре тяжести сечения, действующая перпендикулярно к сечению;

б) поперечная сила Q , действующая в плоскости поперечного сечения, проходящая через его центр тяжести;

в) изгибающий момент M_y , действующий в плоскости, перпендикулярной к поперечному сечению. Изгибающий момент обозначается также M_x (где индекс y или x указывает на ось, расположенную в поперечном сечении бруса, относительно которой действует момент) или просто M .

Изгибающий момент M_n в поперечном сечении считается положительным, когда на левом торце правой части бруса он направлен по часовой стрелке, а на правом торце левой части – против часовой стрелки.

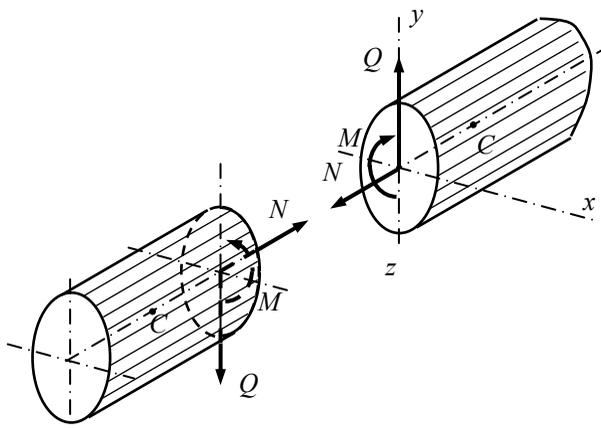


Рис. 7.1

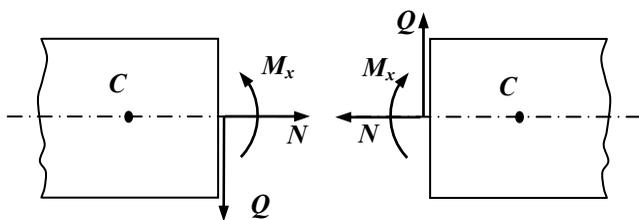


Рис. 7.2

Продольная сила N в сечении положительна при растяжении. Поперечная сила Q положительна, когда на левом торце правой части бруса она направлена снизу вверх, а на правом торце левой части – сверху вниз; положительная поперечная сила стремится вращать отсечённую часть бруса (на которую она действует) по часовой стрелке – относительно любой точки C , расположенной на внутренней нормали к поперечному сечению. Положительные направления внутренних усилий показаны на рис. 7.1 (в аксонометрии) и 7.2.

Из рисунка 7.2 следует, что при положительном изгибающем моменте верхние волокна бруса испытывают сжатие (укорочение), а нижние – растяжение (удлинение).

Изгибающий момент, продольная сила и поперечная сила, действующие в каждом поперечном сечении, связаны с напряжениями, возникающими в этом сечении, следующими зависимостями:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_F \sigma y dF; \\ Q &= \int_F \tau_y dF; \\ N &= \int_F \sigma dF. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Для определения проекции на какую-либо ось внутренних сил в сечении, действующих со стороны левой части бруса на правую, на эту ось надо спроектировать все внешние силы, приложенные к левой части. Аналогично, чтобы определить момент (относительно какой-либо оси) внутренних сил в сечении, действующих со стороны левой части бруса на правую, надо вычислить момент (относительно этой оси) всех внешних сил, приложенных к левой части. Определение внутренних сил, действующих со стороны левой части бруса на правую, можно производить по внешним силам, приложенным не к левой части, а к правой. В этом случае проекции внешних сил на выбранные оси и их моменты относительно этих осей необходимо взять с обратными знаками. Эти положения позволяют сформулировать следующие правила определения внутренних усилий, возникающих в поперечном сечении бруса, для случаев, когда все внешние силы расположены в одной плоскости.

Изгибающий момент M_x относительно центральной оси x поперечного сечения по величине и знаку равен сумме моментов относительно этой оси всех внешних сил, приложенных к левой части бруса, или сумме моментов (относительно той же оси), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части:

$$M_x = \sum_{\text{лев}} M_x = - \sum_{\text{прав}} M_x, \quad (7.2)$$

при этом моменты внешних сил положительны, когда они действуют по часовой стрелке.

Поперечная сила Q по величине и знаку равна сумме проекций всех внешних сил, приложенных к левой части бруса, на нормаль к его продольной оси, проведённую в рассматриваемом поперечном сечении, или сумме проекций (на ту же нормаль), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части бруса:

$$Q = \sum_{\text{лев}} Y = - \sum_{\text{прав}} Y. \quad (7.3)$$

Продольная сила N по величине и знаку равна сумме проекций всех внешних сил, приложенных к левой части бруса, на его продольную ось,

или сумме проекций (на ту же ось), взятой с обратным знаком, всех внешних сил, приложенных к правой части бруса:

$$N = \sum_{\text{лев}} Z = - \sum_{\text{прав}} Z. \quad (7.4)$$

Отметим, что при определении внутренних усилий моменты и проекции вычисляются от всех внешних сил, приложенных к брусу по одну (и только по одну) сторону от рассматриваемого поперечного сечения (т.е. или слева, или справа от сечения).

7.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ МЕЖДУ ИЗГИБАЮЩИМ МОМЕНТОМ, ПОПЕРЕЧНОЙ СИЛОЙ И ИНТЕНСИВНОСТЬЮ РАСПРЕДЕЛЁННОЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим балку, находящуюся под действием плоской системы сил (рис. 7.3, а). Двумя поперечными сечениями, отстоящими на расстоянии dz друг от друга, выделим из балки элемент так, чтобы на него не действовали внешние сосредоточенные силы и моменты. На левый торец элемента действуют внутренние усилия M и Q (рис. 7.3, б), а на правый $M + dM$ и $Q + dQ$. Здесь dM и dQ представляют собой приращения величин внутренних усилий на участке dz балки. Кроме того, на элемент действует распределённая нагрузка, перпендикулярная к оси балки; интенсивность её у левого конца элемента равна q , а у правого $q + dq$ (см. рис. 7.3, б).

Так как вся балка в целом находится в равновесии, то в равновесии находится и её элемент dz . Составим уравнение равновесия элемента dz в виде суммы проекций на ось y всех действующих на него сил (рис. 7.3):

$$\sum Y = Q + qdz - (Q + dQ) = 0,$$

откуда

$$\frac{dQ}{dz} = q. \quad (7.5)$$

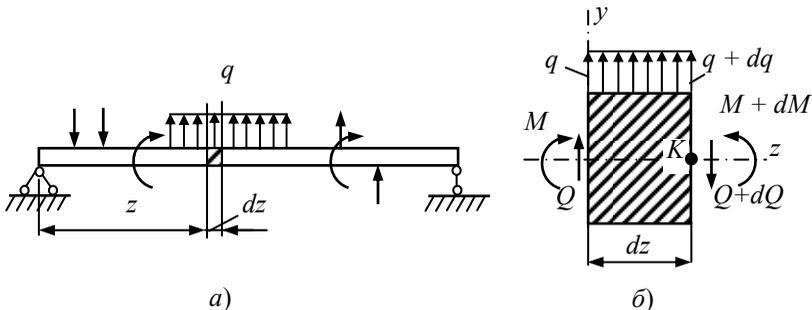


Рис. 7.3

Итак, *первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной нагрузки, перпендикулярной к оси балки.*

Составим теперь уравнение равновесия элемента dz в виде суммы моментов действующих на него сил относительно точки K (рис. 7.3, б):

$$\sum M = M + Qdz - (M + dM) + qdz \frac{dz}{2} = 0.$$

Отбросив бесконечно малые величины высших порядков, получим

$$Qdz - dM = 0,$$

откуда

$$\frac{dM}{dz} = Q. \quad (7.6)$$

Таким образом, *первая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна поперечной силе.* Эта зависимость называется *теоремой Журавского.*

Зависимости (7.5) и (7.6) действительны, когда абсцисса поперечного сечения возрастает от левого конца балки к правому. Если, наоборот, абсцисса z возрастает от правого конца балки к левому, то в правых частях формул (7.5) и (7.6) перед q и Q должен стоять знак «минус».

Из курса высшей математики известен геометрический смысл первой производной dy/dz : при любом значении аргумента z она равна тангенсу угла между касательной к кривой $y = f(z)$ (в точке с координатами z, y) и положительным направлением оси z , т.е. $\operatorname{tg} \alpha = dy/dz$.

Если первая производная (а следовательно, и угол α) положительна, то функция $y = f(z)$ возрастает, а если она отрицательна, — то убывает. Экстремум (максимум или минимум) функции $y = f(z)$ имеется при тех значениях z , при которых производная dy/dz равна нулю, и, следовательно, угол α также равен нулю, т.е. касательная к кривой $y = f(z)$ параллельна оси z .

Используя изложенные зависимости между функцией и её первой производной, из теоремы Журавского можно сделать ряд важных выводов:

1. Тангенс угла α между касательной к линии, ограничивающей эпюру M , и осью эпюры равен поперечной силе Q .

2. На участках балки, на которых поперечная сила положительна, изгибающий момент возрастает (слева направо), а на участках, на которых она отрицательна, — убывает.

3. Чем больше по абсолютной величине значение поперечной силы Q , тем круче линия, ограничивающая эпюру M .

4. На участке балки, на котором поперечная сила имеет постоянное значение, эпюра M ограничена прямой линией.

5. Если на границе соседних участков балки эпюра Q не имеет скачка, то линии, ограничивающие эпюру M на этих участках, сопрягаются без перелома, т.е. имеют в точке сопряжения общую касательную.

6. Если на границе соседних участков балки в эпюре Q имеется скачок, то линии, ограничивающие эпюру M на этих участках, сопрягаются с переломом, т.е. не имеют в точке сопряжения общей касательной.

7. Изгибающий момент достигает максимума или минимума в сечениях балки, в которых поперечная сила равна нулю; касательная к линии, ограничивающей эпюру M , в этом сечении параллельна оси эпюры.

7.4. ПРЯМОЙ ЧИСТЫЙ ИЗГИБ

Для наглядного представления характера деформации брусьев (стержней) при изгибе проводится следующий опыт. На боковые грани резинового бруса прямоугольного сечения наносится сетка линий, параллельных и перпендикулярных оси бруса (рис. 7.4, а). Затем к бруску по его концам прикладываются моменты M (рис. 7.4, б), действующие в плоскости симметрии бруса, пересекающей каждое его поперечное сечение по одной из главных центральных осей инерции. Плоскость, проходящая через ось бруса и одну из главных центральных осей инерции каждого его поперечного сечения, будем называть главной плоскостью.

Под действием моментов M брус испытывает прямой чистый изгиб. В результате деформации, как показывает опыт, линии сетки, параллельные оси бруса, искривляются, сохраняя между собой прежние расстояния. При указанном на рис. 7.4, б направлении моментов M : эти линии в верхней части бруса удлиняются, а в нижней – укорачиваются.

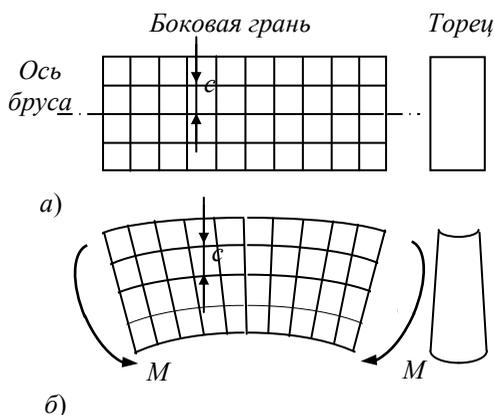


Рис. 7.4

Каждую линию сетки, перпендикулярную к оси бруса, можно рассматривать как след плоскости некоторого поперечного сечения бруса. Так как эти линии остаются прямыми, то можно предполагать, что *поперечные сечения бруса, плоские до деформации, остаются плоскими и в процессе деформации*. Это предположение, основанное на опыте, как известно, носит название *гипотезы плоских сечений*, или гипотезы Бернулли.

Гипотеза плоских сечений применяется не только при чистом, но и при поперечном изгибе. Для поперечного изгиба она является приближённой, а для чистого изгиба – строгой, что подтверждается теоретическими исследованиями, проведёнными методами теории упругости.

Рассмотрим теперь прямой брус с поперечным сечением, симметричным относительно вертикальной оси, заделанный правым концом и нагруженный на левом конце внешним моментом M , действующим в одной из главных плоскостей бруса (рис. 7.5). В каждом поперечном сечении этого бруса возникают только изгибающие моменты $M_x = m$, действующие в той же плоскости, что и момент m .

Таким образом, брус на всём своём протяжении находится в состоянии прямого чистого изгиба. В состоянии чистого изгиба могут находиться отдельные участки балки и в случае действия на неё поперечных нагрузок.

Выделим из рассматриваемого бруса (см. рис. 7.5) двумя поперечными сечениями ac и bd элемент длиной dz . В результате деформации, как это следует из гипотезы Бернулли, сечения ac и bd останутся плоскими, но наклонятся по отношению друг к другу на некоторый угол $d\vartheta$. Примем левое сечение ac условно за неподвижное. Тогда в результате поворота правого сечения bd на угол $d\vartheta$ оно займёт положение $b'd'$ (рис. 7.6).

Прямые ac и $b'd'$ пересекутся в некоторой точке A , которая является центром кривизны (или, точнее, следом оси кривизны) продольных волокон элемента dz . Верхние волокна рассматриваемого элемента при показанном на рис. 7.5 направлении момента m удлиняются, а нижние укорачиваются. Волокна же некоторого промежуточного слоя kn , перпендикулярного к плоскости действия момента m , сохраняют свою длину. Этот слой называется *нейтральным слоем*.

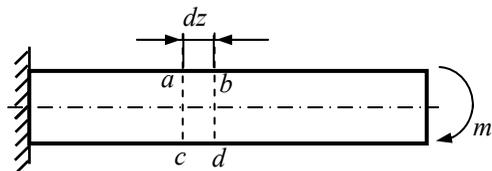


Рис. 7.5

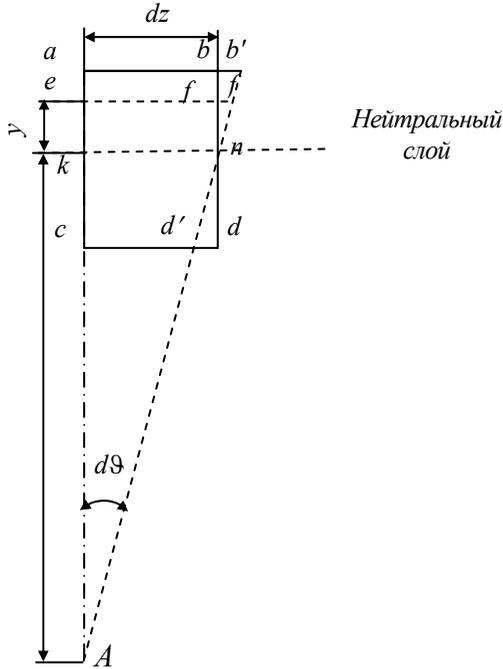


Рис. 7.6

Обозначим ρ радиус кривизны нейтрального слоя, т.е. расстояние от этого слоя до центра кривизны A (см. рис. 7.6). Рассмотрим некоторый слой ef , расположенный на расстоянии y от нейтрального слоя. Абсолютное удлинение волокон этого слоя равно ff' , а относительное $\varepsilon = ff'/ef$.

Рассматривая подобные треугольники nf' и Akn , устанавливаем, что $ff':kn = y:\rho$. Следовательно,

$$\varepsilon = \frac{\overline{ff'}}{ef} = \frac{(y/\rho)\overline{kn}}{ef} = \frac{y dz}{\rho dz}$$

или

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}, \quad (7.7)$$

так как $kn = ef = dz$.

В теории изгиба предполагается, что продольные волокна бруса не давят друг на друга. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что это предположение не влияет существенно на результаты расчета. При чистом изгибе в поперечных сечениях бруса не возникают

касательные напряжения. Таким образом, все волокна при чистом изгибе находятся в условиях одноосного растяжения или сжатия.

По закону Гука для случая одноосного растяжения или сжатия нормальное напряжение σ и соответствующая относительная деформация ε связаны зависимостью

$$\sigma = E\varepsilon$$

или на основании формулы (7.7)

$$\sigma = \frac{E y}{\rho} . \quad (7.8)$$

Из формулы (7.8) следует, что нормальные напряжения в продольных волокнах бруса прямо пропорциональны их расстояниям y от нейтрального слоя, следовательно, в поперечном сечении бруса в каждой его точке нормальные напряжения пропорциональны расстоянию y от этой точки до нейтральной оси, представляющей собой линию пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением (рис. 7.7, а). Из симметрии бруса и нагрузки следует, что нейтральная ось горизонтальна. В точках нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю; по одну сторону от нейтральной оси они растягивающие, а по другую – сжимающие.

Эпюра напряжений σ представляет собой график, ограниченный прямой линией, с наибольшими по абсолютной величине значениями напряжений для точек, наиболее удалённых от нейтральной оси (рис. 7.7, б).

Для определения абсолютных значений напряжений σ используется формула

$$\sigma = (M_x / J_x) y , \quad (7.9)$$

поэтому в неё следует подставлять абсолютные значения изгибающего момента M_x и ординаты y . Знак же напряжений всегда легко устанавливается по знаку момента M_x или по характеру деформации балки.

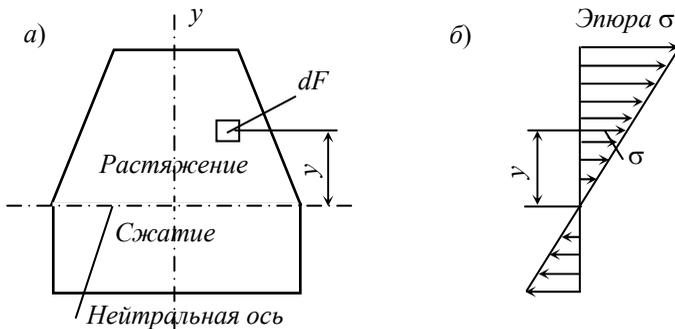


Рис. 7.7

Формула (7.9), определяющая нормальное напряжение в произвольной точке рассматриваемого сечения бруса, применима при условии, что плоскость действия изгибающего момента проходит через одну из главных осей инерции этого сечения или ей параллельна. При этом нейтральная ось поперечного сечения является его главной центральной осью инерции, перпендикулярной к плоскости действия изгибающего момента.

Из формулы (7.9) следует, что наибольшие (положительные – растягивающие) и наименьшие (отрицательные – сжимающие) нормальные напряжения в поперечном сечении бруса возникают в точках, наиболее удалённых от нейтральной оси, расположенных по обе стороны от неё. При поперечном сечении, симметричном относительно нейтральной оси, абсолютные величины наибольших растягивающих и сжимающих напряжений одинаковы и их можно определить по формуле

$$\sigma_{\max} = (M_x / J_x) y_{\max},$$

где y_{\max} – расстояние от нейтральной оси до наиболее удалённой точки сечения.

Величина J_x / y_{\max} , зависящая только от размеров и формы поперечного сечения, называется осевым моментом сопротивления сечения и обозначается W_x :

$$W_x = J_x / y_{\max}. \quad (7.10)$$

Следовательно,

$$\sigma_{\max} = M_x / W_x. \quad (7.11)$$

Определим осевые моменты сопротивления для прямоугольного и круглого сечений.

Для прямоугольного сечения шириной b и высотой h

$$W_x = J_x / y_{\max} = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{bh^2}{6}. \quad (7.12)$$

Для круглого сечения диаметром d

$$W_x = J_x / y_{\max} = \frac{J_x}{d/2} = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3. \quad (7.13)$$

Момент сопротивления выражается в мм^3 , см^3 , м^3 . Для сечений, не симметричных относительно нейтральной оси, например для треугольника, тавра и т.п., расстояния от нейтральной оси до наиболее удалённых растянутых и сжатых волокон различны; поэтому для таких сечений имеются два момента сопротивления:

$$W_x^I = J_x / y_{\max}^I \quad \text{и} \quad W_x^{II} = J_x / y_{\max}^{II},$$

где y_{\max}^I и y_{\max}^{II} – расстояния от нейтральной оси до наиболее удалённых растянутых и сжатых волокон.

7.5. ПРЯМОЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

При поперечном изгибе в поперечном сечении бруса (балки), кроме изгибающего момента, действует также поперечная сила. Если поперечный изгиб является прямым, то изгибающий момент действует в плоскости, совпадающей с одной из главных плоскостей бруса. Поперечная сила при этом обычно параллельна плоскости действия изгибающего момента и проходит через определённую точку поперечного сечения, называемую центром изгиба. Положение центра изгиба зависит от формы и размеров поперечного сечения бруса. При поперечном сечении, имеющем две оси симметрии, центр изгиба совпадает с центром тяжести сечения.

Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что формулы, полученные для случая прямого чистого изгиба, применимы и при прямом поперечном изгибе.

Поперечная сила, действующая в сечении бруса, связана с касательными напряжениями, возникающими в этом сечении, зависимостью

$$Q = \int_F \tau_y dF, \quad (7.14)$$

где τ_y – составляющая касательного напряжения в поперечном сечении бруса, параллельная оси y и силе Q .

Величина $\tau_y dF$ представляет собой элементарную касательную силу (параллельную силе Q), действующую на элементарную площадку dF поперечного сечения бруса.

Касательные напряжения в поперечных сечениях балки и в сечениях её плоскостями, параллельными нейтральному слою, определяются по формуле

$$\tau = QS / (Jb), \quad (7.15)$$

где Q – поперечная сила в рассматриваемом поперечном сечении балки; S – статический момент (относительно нейтральной оси) отсечённой части поперечного сечения, расположенной по одну сторону от уровня, на котором определяются касательные напряжения; J – момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси; b – ширина поперечного сечения балки на том уровне, на котором определяются касательные напряжения τ .

7.6. РАСЧЁТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

Расчёт балок на прочность обычно ведётся по наибольшим нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях. Обозначая эти напряжения σ_{\max} , получаем условие прочности в виде

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]. \quad (7.16)$$

Здесь $[\sigma]$ – допускаемое напряжение, зависящее в основном от материала балки и её назначения.

При расчёте на прочность элементов конструкций, работающих на изгиб, возможны три вида задач, различающихся формой использования условия прочности (формула (7.16)):

- а) проверка напряжений (проверочный расчёт);
- б) подбор сечения (проектный расчёт);
- в) определение допускаемой нагрузки (определение грузоподъёмности).

Методика решения этих задач для балок из пластичных и хрупких материалов различна, так как балки из пластичных материалов одинаково работают на растяжение и сжатие, а из хрупких материалов лучше работают на сжатие, чем на растяжение. Это влияет на применяемые формы поперечных сечений балок и на способ определения опасного сечения.

8. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

В данной главе речь пойдёт об одновременном действии деформаций бруса, что чаще встречается на практике. Каждый из простых видов деформации (растяжение или сжатие, сдвиг, кручение, изгиб) ранее был рассмотрен в отдельности. Исключением является прямой поперечный изгиб, который не принято рассматривать как случай сложного сопротивления, хотя при этом в сечениях возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент и поперечная сила. Этот вид деформации рассматривают как простой потому, что в подавляющем большинстве случаев расчёты на прочность и жёсткость ведутся без учёта влияния поперечных сил, т.е. по одному силовому фактору – изгибающему моменту.

8.1. КОСОЙ ИЗГИБ

Косым изгибом называется такой вид изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента, возникающего в поперечном сечении бруса, не совпадает ни с одной из его главных плоскостей.

Случай косоугольного изгиба, когда в поперечном сечении бруса возникает только изгибающий момент, называется чистым косым изгибом.

Если в сечении наряду с изгибающим моментом действует поперечная сила, то этот вид изгиба называется поперечным косым изгибом.

Пусть имеется брус прямоугольного поперечного сечения с жёстко заделанным левым концом. К нему на свободном конце приложена сила P , причём линия действия силы отклонена от вертикальной оси y на угол α (рис. 8.1).

В случае косоугольного изгиба изгибающий момент необходимо разложить на два изгибающих момента M_x и M_y . При этом полный изгибающий момент будет равен $M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, и он будет действовать в плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей рассматриваемого сечения.

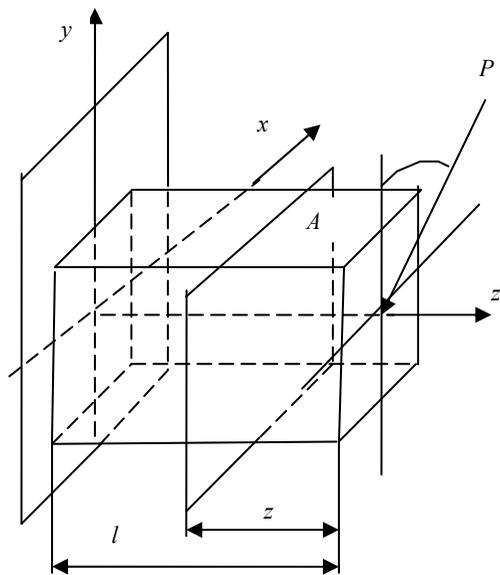


Рис. 8.1

Таким образом, косой изгиб можно рассматривать как сочетание двух прямых изгибов, вызываемых изгибающими моментами, действующими относительно двух главных центральных осей инерции поперечного сечения x и y . Следовательно, напряжение в любой точке поперечного сечения можно определить по формуле

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x. \quad (8.1)$$

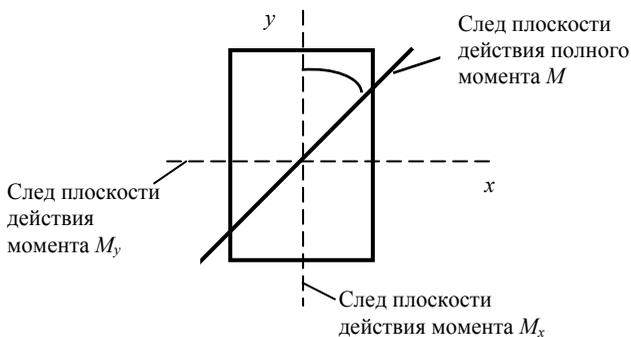


Рис. 8.2

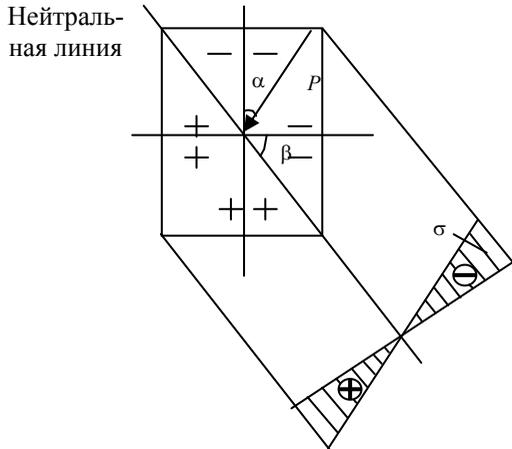


Рис. 8.3

Вместо значений M_x и M_y в уравнение (8.1) подставим соответствующие выражения, получим

$$\sigma = \pm M \left(\frac{\cos \alpha}{I_x} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} x \right). \quad (8.2)$$

В данной формуле α – угол между вертикальной осью y и плоскостью действия полного момента.

При косом изгибе нормальные напряжения будут распределяться как показано на рис. 8.3.

Уравнение нейтральной оси имеет вид

$$\frac{\cos \alpha}{I_x} y + \frac{\sin \alpha}{I_y} x = 0.$$

Тангенс угла наклона β нейтральной оси к оси x равен

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha \frac{I_x}{I_y}. \quad (8.3)$$

Эта формула служит для определения положения нейтральной оси при косом изгибе.

Нейтральная ось всегда отклоняется от оси x на угол β в ту же сторону, в которую плоскость действия изгибающего момента отклоняется от оси y на угол α .

8.2. ВНЕЦЕНТРЕННОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ БРУСЬЕВ

При нагружении бруса внецентренно приложенной силой (рис. 8.4) параллельно его продольной оси получается сочетание изгиба с растяжением или сжатием. Применив метод сечений, легко установить, что в любом поперечном сечении бруса возникают три внутренних силовых фактора N , M_x и M_y (рис. 8.4).

Координаты x_p и y_p точки приложения силы называются эксцентриситетами этой силы относительно главных центральных осей инерции x и y соответственно. Точку A называют центром давления или полюсом.

Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения определяется как

$$\sigma = P = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} \right), \quad (8.4)$$

где $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}$.

Величины i_x , i_y – радиусы инерции поперечного сечения бруса относительно главных центральных осей инерции x и y соответственно.

Для определения положения нейтральной оси (нулевой линии), разделяющей положительные и отрицательные нормальные напряжения, приравняем к нулю уравнение (8.5):

$$1 + \frac{y_p y}{i_x^2} + \frac{x_p x}{i_y^2} = 0. \quad (8.5)$$

Данное выражение является уравнением прямой, так как координаты x и y входят в него в первой степени, и представляет собой уравнение нейтральной оси.

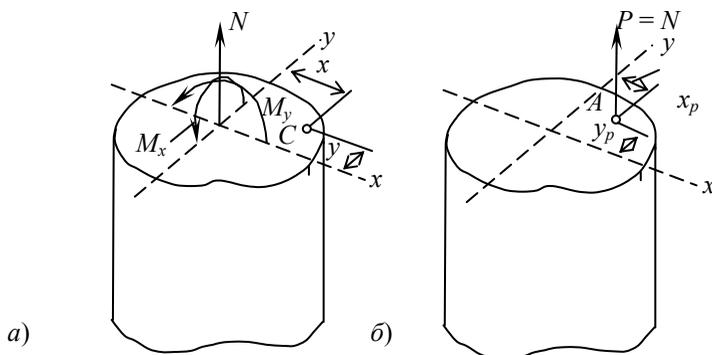


Рис. 8.4

8.3. ЯДРО СЕЧЕНИЯ

Ядром сечения называется его некоторая центральная область, обладающая тем свойством, что сжимающая сила, приложенная в любой её точке, вызывает во всех точках поперечного сечения бруса сжимающие напряжения, т.е. напряжения одного знака.

Методика построения ядра сечения.

1. Определяется положение центра тяжести сечения и главных центральных осей инерции сечения x и y , а также значения главных моментов инерции сечения I_x и I_y , и значения квадратов радиусов инерции (i_x^2, i_y^2) .

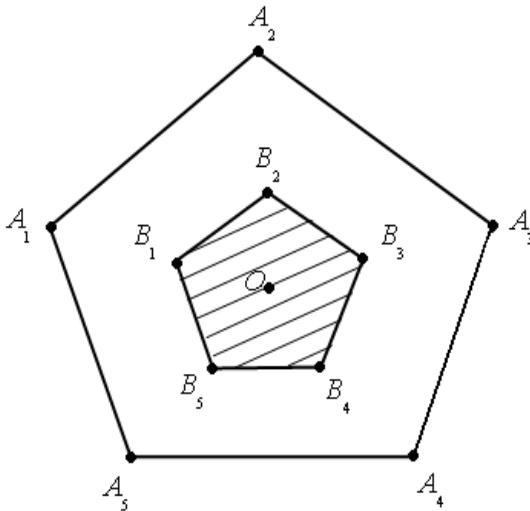


Рис. 8.5

2. Если сечение имеет вид многоугольника, то вершины его углов последовательно рассматриваются как полюсы, и для каждого такого полюса определяют положение нейтральной линии. Контур, ограниченный этими линиями, образует ядро сечения (рис. 8.5).

3. Если многоугольное сечение имеет внутренние углы, например угол при вершине C , то эти углы при обходе вершин не рассматриваются как полюсы (рис. 8.6).

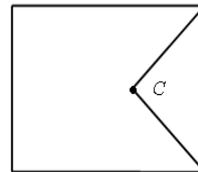


Рис. 8.6

8.4. РАСЧЁТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ С КРУЧЕНИЕМ

Наиболее часто встречаются сочетания изгиба в одной или двух плоскостях и кручения брусев, например при расчёте валов редукторов. При решении подобных задач строятся эпюры M_x , M_y , M_z на всех участках бруса. После чего находится опасное сечение путём определения расчётного момента в нескольких сечениях по формуле

$$M_p = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \quad (8.6)$$

Рассмотрим случай, когда по граням параллелепипеда действуют нормальные и касательные напряжения. При этом две боковые грани свободны от напряжений, т.е. создаётся плоское напряжённое состояние (рис. 8.7).

При этом главные напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 + \sigma_2 - \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau_2^2} \right);$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 4\tau_2^2} \right).$$

Так как напряжение σ_2 , действующее по боковым граням параллелепипеда, равно нулю, указанные зависимости примут вид:

$$\sigma_{\min} = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \quad \sigma_{\max} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.$$

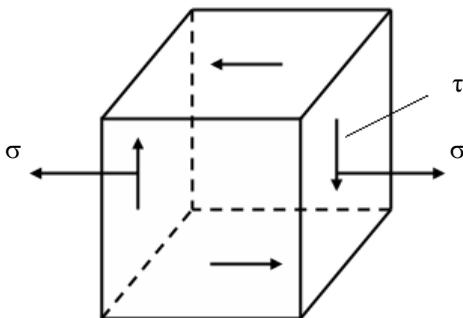


Рис. 8.7

Главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ можно определить по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

Расчёт брусьев на прочность при изгибе с кручением производят по третьей и четвёртой гипотезам прочности.

Третья гипотеза прочности

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (8.8)$$

Для расчёта опасной точки по третьей теории прочности значения σ и τ подставляются в формулу (8.8).

Четвёртая гипотеза прочности (энергетическая)

$$\sigma_{\text{расч}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (8.9)$$

8.5. ПОРЯДОК ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ДЛЯ ЛОМАНОГО (ПРОСТРАНСТВЕННОГО) БРУСА

Проставляем оси координат на каждом из участков, начиная обход от защемлённого конца. При переходе на следующий участок систему $ху$ следует повернуть относительно оси, перпендикулярной плоскости, в которой лежат эти два участка, направляя ось z вдоль оси бруса.

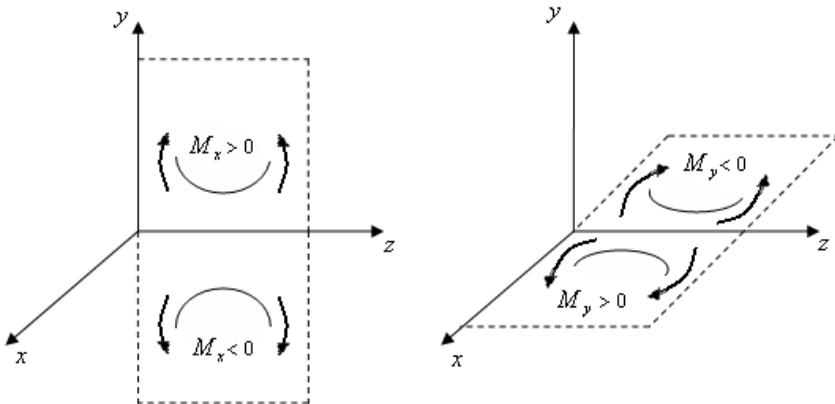


Рис. 8.8

Правило знаков: в пространственных системах правило знаков такое же, что и для плоских систем, если смотреть на ось z так, чтобы она была направлена вправо, а начало координат считать расположенным в крайней левой точке участка (рис. 8.8).

Эпюра M_x строится в плоскости yoz . Эпюра M_y в плоскости xoz (рис. 8.8), причём положительные значения силовых факторов откладываются по положительному направлению соответствующей оси координат (y или x).

Крутящий момент M_z действует в плоскости yox . Для крутящих моментов M_z используется произвольное правило знаков, которому следует придерживаться до конца решения задачи. Эпюра M_z строится в плоскости xoz или yoz .

9. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

9.1. ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ СТАТИЧЕСКОМ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗОК

В основу энергетического метода определения перемещений положено условие равенства работы внешних сил, приложенных к упругой системе, и энергии деформации системы.

Внешние нагрузки, приложенные к любому элементу конструкции или конструкции в целом, вызывают его деформацию. При этом части конструкции выходят из состояния покоя и приобретают некоторые скорости и ускорения. Если нагрузка возрастает медленно, то ускорения невелики и можно пренебречь силами инерции, возникающими при переходе системы в деформированное состояние, таким образом медленно возрастающая нагрузка от нуля до своего конечного значения называется статической.

Работа статически приложенной внешней силы равна половине произведения конечного значения силы на конечное значение соответствующего перемещения:

$$A = P \Delta / 2, \quad (9.1)$$

где P – сила; Δ – перемещение по направлению действия силы P .

В дальнейшем под силой будем понимать любое воздействие, приложенное к упругой системе, т.е. не только сосредоточенная сила, но и изгибающий момент, равномерно распределённая нагрузка и др.; перемещение – вид деформации, на которой обобщённая сила производит работу.

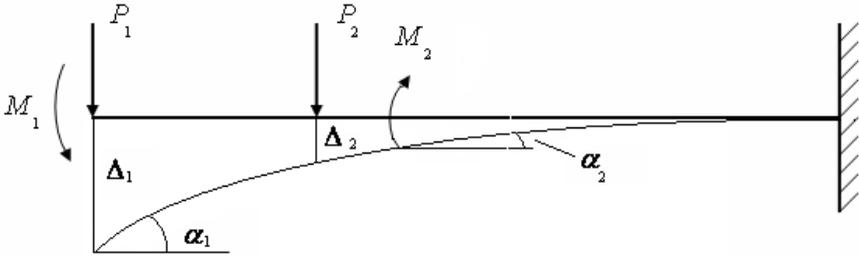


Рис. 9.1

При статическом действии на сооружение группы внешних сил работа этих сил равна половине суммы произведений каждой силы на величину соответствующего ей перемещения, вызванного действием всей группы сил. Например, при действии на балку сосредоточенных сил P_1 и P_2 , и сосредоточенных моментов M_1 и M_2 (рис. 9.1), работа внешних сил будет иметь вид

$$A = P_1 \Delta_1 / 2 + P_2 \Delta_2 / 2 + M_1 \alpha_1 / 2 - M_2 \alpha_2 / 2.$$

Знак (-) перед последним членом суммы принят потому, что направление угла поворота α_2 поперечного сечения балки, в котором приложен изгибающий момент M_2 , противоположно направлению этого момента.

Работу внешних сил на вызванных ими перемещениях можно выразить через изгибающие моменты, продольные и поперечные силы, возникающие в поперечных сечениях стержней конструкции.

При плоском действии сил на элемент dz полная работа внешних сил равна сумме работ:

$$dA = dA_N + dA_M + dA_Q.$$

В случае пространственной задачи работа внешних сил равна

$$dA = dA_N + dA_{M_y} + dA_{M_x} + dA_{Q_y} + dA_{Q_x} + dA_{M_z}. \quad (9.2)$$

На основании закона сохранения энергии работа внешних сил переходит в потенциальную энергию деформации:

$$A = U.$$

Интегрируя выражение (9.2) в пределах длины каждого участка и производя суммирование по всем участкам системы, получаем сле-

дующую формулу для вычисления работы и потенциальной энергии деформации:

$$A = U = \int_{\ell} \frac{N^2 dz}{2EF} + \int_{\ell} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \int_{\ell} \frac{M_y^2 dz}{2EI_y} + \eta_y \int_{\ell} \frac{Q_y^2 dz}{2GF} + \eta_x \int_{\ell} \frac{Q_x^2 dz}{2GF} + \int_{\ell} \frac{M_z^2 dz}{2GI_p}. \quad (9.3)$$

Эта формула аналогична соответствующим формулам для случая центрального растяжения-сжатия и изгиба стержней. Она применима не только для прямых стержней, но и для стержней малой кривизны.

9.2. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ РАБОТ

Перемещения системы в результате её деформации условимся обозначать через Δ_{ij} , где i указывает направление перемещения, а j соответствует причине, вызвавшей данную деформацию.

Любое перемещение может представлять собой либо линейное, либо угол поворота в зависимости от того, является ли усилие j сосредоточенной силой или изгибающим моментом. Таким образом, под силой j понимается любая нагрузка, действующая на сооружение.

Рассмотрим два состояния системы, находящейся в равновесии. В каждом из них на систему действует статическая нагрузка (рис. 9.2), например сила P_1 или P_2 .

Δ_{11} – перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_1 .

Δ_{12} – перемещение по направлению силы P_1 от действия силы P_2 .

Δ_{21} – перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_1 .

Δ_{22} – перемещение по направлению силы P_2 от действия силы P_2 .

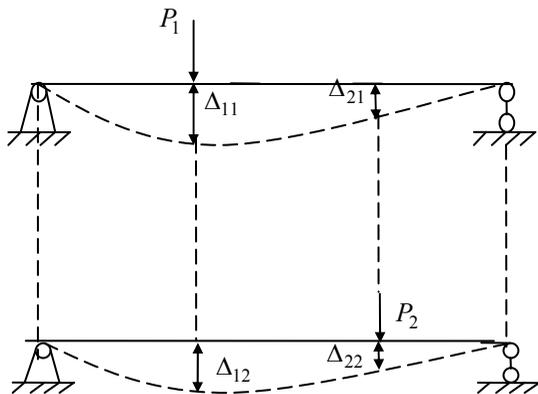


Рис. 9.2

Работу силы P_1 на вызванном ею перемещении обозначим через A_{11} , а работу силы P_2 на вызванном ею перемещении обозначим через A_{22} .

Рассмотрим случай статического нагружения системы силами P_1 и P_2 в следующей последовательности: сначала прикладывается сила P_1 , в результате её приложения деформация системы соответствует первому состоянию, затем на систему действует сила P_2 , в результате её воздействия система получает дополнительные деформации и внутренние усилия, соответствующие деформациям и усилиям во втором состоянии. В процессе приложения силы P_2 сила P_1 , оставаясь постоянной, перемещается вниз на величину дополнительного прогиба Δ_{12} и, следовательно, совершает дополнительную работу A_{12} .

$$A_{12} = A_{21}, \quad (9.4)$$

или

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}. \quad (9.5)$$

Выражения (9.4) и (9.5) являются математическими выражениями теоремы о взаимности работ.

Работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванная силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.

9.3. ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассмотрим два состояния системы (рис. 9.3). В первом состоянии к системе приложена сила $P_1=1$, а во втором состоянии – $P_2=1$. Перемещения, вызванные единичными силами или моментами, будем

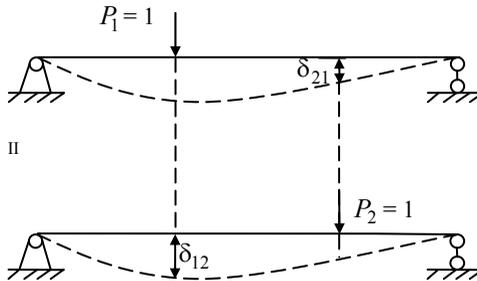


Рис. 9.3

обозначать через δ , в отличие от перемещений, вызванных неединичными силами и обозначаемых через Δ .

На основании теоремы о взаимности работ для рассмотренных состояний: $P_1\delta_{12} = P_2\delta_{21}$, а так как $P_1 = P_2 = 1$, то $\delta_{12} = \delta_{21}$, или в общем случае при действии любых единичных сил

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}. \quad (9.6)$$

Для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй единичной силы, вызванному первой единичной силой.

9.4. ИНТЕГРАЛ МОРА

Перемещение от любой нагрузки с помощью формулы можно выразить через внутренние усилия, возникающие в данной системе от этой нагрузки и возникающие в ней же от единичной силы.

$$A_{21} = \Delta_{21} = \int_{\ell} \frac{\overline{N_1 N_2} dz}{EF} + \int_{\ell} \frac{M_{x1} \overline{M_{x2}} dz}{EI_x} + \eta_y \int_{\ell} \frac{Q_{y1} \overline{Q_{y2}} dz}{GF}. \quad (9.7)$$

Если определяется прогиб, то единичная сила – безразмерная сосредоточенная сила, приложенная в месте определения прогиба.

Если определяется угол поворота сечения, то в качестве единичной силы используется безразмерный единичный момент, приложенный в рассматриваемой точке.

Состояние системы, вызванное действием единичной силы, называется единичным или фиктивным состоянием.

Состояние системы, вызванное действием внешней нагрузки, называется действительным или грузовым состоянием.

В случае пространственной задачи интеграл Мора содержит не три слагаемых, а шесть – по числу внутренних усилий в поперечном сечении элементов.

$$\begin{aligned} \Delta = & \int_{\ell} \frac{M_x \overline{M_x}}{EI_x} dz + \int_{\ell} \frac{M_y \overline{M_y}}{EI_y} dz + \eta_y \int_{\ell} \frac{M_z \overline{M_z}}{EI_p} dz + \\ & + \int_{\ell} \frac{N \overline{N}}{EF} dz + \eta_y \int_{\ell} \frac{Q_x \overline{Q_x}}{GF} dz + \eta_y \int_{\ell} \frac{Q_y \overline{Q_y}}{EI_x} dz. \end{aligned} \quad (9.8)$$

В большинстве случаев пространственной задачи используют или три первых члена формулы, когда элементы системы работают в основ-

ном на изгиб и кручение, или только четвёртый член при расчётах пространственных ферм.

Наиболее часто используют простые формулы перемножения эпюр.

1. Обе эпюры прямолинейны (формула трапеций, рис. 9.4).

$$\Delta = \frac{l}{6EI_x} (2ac + 2bd + ad + bc).$$

2. Прямолинейная и криволинейная эпюры (формула Симпсона, рис. 9.5).

$$\Delta = \frac{l}{6EI_x} (M_{\text{л}} \overline{M}_{\text{л}} + M_{\text{пр}} \overline{M}_{\text{пр}} + 4M_{\text{ср}} \overline{M}_{\text{ср}}).$$

При расчёте перемещений по последним двум формулам значения с эпюр должны браться с учётом знака.

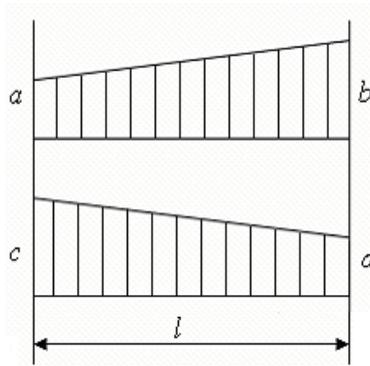


Рис. 9.4

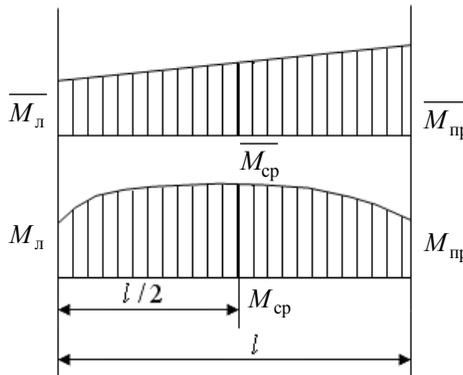


Рис. 9.5

10. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ

10.1. СТАТИЧЕСКАЯ НЕОПРЕДЕЛИМОСТЬ

Статически неопределимыми называют системы, в которых внутренние усилия невозможно определить из уравнений статики, а необходимо составить дополнительные уравнения – уравнения деформаций.

Геометрически неизменяемой называется такая система, изменение формы которой возможно лишь в связи с деформациями её элементов.

Статически определимая система не имеет ни одной лишней связи. Удаление из неё хотя бы одной связи превращает её в геометрически изменяемую систему, т.е. в механизм.

Расчёт статически неопределимой системы начинается с определения степени статической неопределимости. Степень статической неопределимости равна числу «лишних» связей, удаление которых превращает систему в статически определимую и оставляет её геометрически неизменяемой. Степень статической неопределимости для балок и рам определяется по различным зависимостям. Для балок

$$n = c - m - 2,$$

где n – степень статической неопределимости; c – число опорных звеньев; m – число одиночных шарниров.

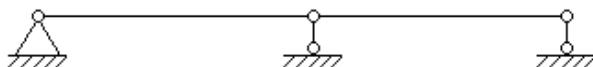


Рис. 10.1

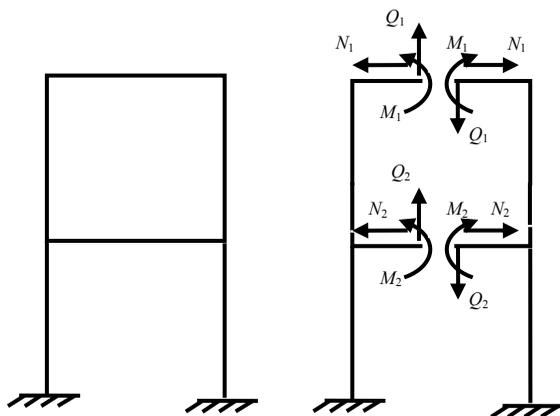


Рис. 10.2

Например (рис. 10.1), $n = 3 - 2 = 1$. Удаление правой или средней опоры приводит к тому, что конструкция становится статически определимой и геометрически неизменяемой.

Систему, состоящую из ряда элементов, жёстко связанных между собой и образующих замкнутую цепь, называют замкнутым контуром.

Любой замкнутый контур трижды статически неопределим, так как при его разрезании возникают: продольная сила, поперечная сила, изгибающий момент (только для плоских систем).

Если силы лежат не в плоскости замкнутого контура, то при разрезании возникает шесть внутренних усилий (рис. 10.2).

Степень статической неопределённости для плоских рам

$$n = c + 3k - m - 3,$$

где k – число замкнутых контуров.

10.2. МЕТОД СИЛ. ОСНОВНАЯ И ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СИСТЕМЫ

Для определения усилий в статически неопределимой системе необходимо составлять дополнительные уравнения – уравнения деформаций. Для этого необходимо превратить заданную статически неопределимую задачу в статически определимую удалением лишних связей. Полученная таким образом система называется основной системой (рис. 10.3).

Удаление каких-либо связей не изменяет внутренних усилий в системе и её деформаций, если к ней прикладываются дополнительные силы и моменты, являющиеся реакциями отброшенных связей. Поэтому, если к основной системе, кроме заданной нагрузки, приложить реакции утраченных связей, то её деформации и внутренние усилия будут такими же, как в заданной системе, т.е. обе системы будут эквивалентными.

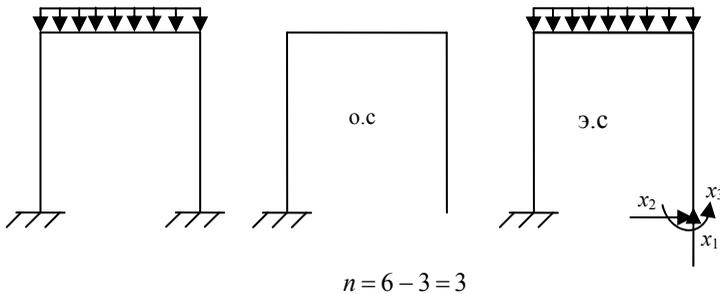


Рис. 10.3

В заданной системе в направлениях имеющихся связей перемещений быть не может, поэтому в эквивалентной системе перемещения по направлению отброшенных связей должны быть равны нулю. Следовательно, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равны нулю.

10.3. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СИЛ

Перемещения по направлению любой из отброшенных связей должны быть равны нулю, следовательно, реакции отброшенных связей должны иметь такие значения, при которых перемещения по их направлениям равны нулю. На основании принципа независимости действия сил

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \dots + \Delta_{in-2} + \Delta_{in} + \Delta_{ip} = 0. \quad (10.1)$$

Первый индекс при Δ – направление перемещения и одновременно номер отброшенной связи. Второй индекс – причина, вызвавшая перемещение. Обозначим через x_k – реакцию связи k и выразим перемещение Δ_{ik} через единичное с помощью равенства

$$\Delta_{ik} = x_k \delta_{ik}.$$

После подстановки в уравнение (10.1), получим следующую зависимость:

$$\Delta_i = x_1 \delta_{i1} + x_2 \delta_{i2} + \dots + x_{n-1} \delta_{in-1} + x_n \delta_{in} + \Delta_{ip} = 0.$$

Условие эквивалентности сводится к удовлетворению системы n -линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \delta_{11} + x_2 \delta_{12} + \dots + x_n \delta_{1n} + \Delta_{1p} &= 0; \\ x_1 \delta_{21} + x_2 \delta_{22} + \dots + x_n \delta_{2n} + \Delta_{2p} &= 0; \\ \dots & \\ x_1 \delta_{n1} + x_2 \delta_{n2} + \dots + x_n \delta_{nn} + \Delta_{np} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Система уравнений (10.2) – дополнительные уравнения деформаций.

Первое уравнение выражает равенство нулю перемещения в основной системе по направлению первой отброшенной связи. Второе уравнение – по направлению второй и т.д. Уравнения (10.2) называются каноническими уравнениями метода сил. Число уравнений равно числу отброшенных связей, т.е. степени статической неопределенности системы.

Единичные перемещения δ_{ii} , т.е. имеющие два одинаковых символа, называются главными, а имеющие два разных символа δ_{ik} – побочными.

В соответствии с теоремой о взаимности перемещений

$$\delta_{ik} = \delta_{ki}.$$

Данная зависимость позволяет уменьшить объём вычислений при определении коэффициентов канонических уравнений.

Для определения коэффициентов δ следует построить единичные эпюры \overline{M} изгибающих моментов в основной системе, т.е. от действия каждого неизвестного $\overline{x} = 1$, обозначив каждую эпюру номером неизвестного. Отдельно строится грузовая эпюра M_p . Единичное перемещение δ_{ik} вычисляется умножением единичной эпюры \overline{M}_i на эпюру \overline{M}_k , а грузовое перемещение Δ_{ip} умножением единичной эпюры \overline{M}_i на грузовую M_p . При перемножении эпюр необходимо учитывать знаки перемножаемых величин. После вычисления единичных и грузовых перемещений решают систему канонических уравнений и определяют значения неизвестных x_i .

Построение окончательной суммарной эпюры M для заданной статически неопределимой системы проводят следующим образом: к основной системе прикладываются найденные неизвестные усилия x_i и заданная нагрузка, а затем от их суммарного воздействия строят окончательную эпюру изгибающих моментов.

Для проверки правильности решения определяют перемещения в направлении неизвестных x_i , а так как это реакции опор, то они должны быть равны нулю. Для этого последовательно перемножают окончательную итоговую эпюру M на единичные и проверяют правильность решения.

10.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИММЕТРИИ

Симметричной называется такая система, у которой её правая часть может рассматриваться как зеркальное отражение левой части относительно плоскости симметрии, включая и жёсткость стержней.

Использование симметрии позволяет упростить расчёт системы за счёт снижения числа неизвестных силовых факторов x_1 , x_2 и т.д. Нагружение симметричной системы может быть симметричным и кососимметричным.

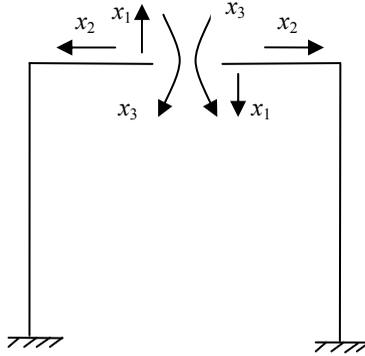


Рис. 10.4

Симметричная нагрузка возникает, когда все внешние силы, приложенные к одной части рамы, являются зеркальным отображением силовых факторов, приложенных к другой части рамы.

Кососимметричная нагрузка возникает, когда внешние силовые факторы, приложенные к одной части рамы, являются зеркальным отображением силовых факторов, приложенных к другой части рамы, но противоположны по знаку.

Для симметричных рам рациональная система возникает при разрезании её по оси симметрии, при этом возникают три неизвестных силовых фактора: изгибающий момент x_1 , продольная сила x_2 и поперечная сила x_3 (рис. 10.4).

Таким образом, необходимо составить и решить систему канонических уравнений с тремя неизвестными. Однако внутренние силовые факторы также можно разбить на симметричные и кососимметричные. К симметричным относятся: изгибающий момент x_3 и продольная сила x_2 ; к кососимметричным относится поперечная сила x_1 .

При симметричном нагружении обращаются в ноль кососимметричные силовые факторы, а при кососимметричном нагружении симметричные силовые факторы.

Таким образом, для симметричной системы с симметричным нагружением вместо трёх остаются два канонических уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x_1\delta_{11} + x_2\delta_{12} + x_3\delta_{13} + \Delta_{1p} &= 0; \\ x_1\delta_{21} + x_2\delta_{22} + x_3\delta_{23} + \Delta_{2p} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.3)$$

При кососимметричном нагружении вместо трёх остаётся одно уравнение.

$$x_1 \delta_{11} + \Delta_{1p} = 0. \quad (10.4)$$

Наличие шарнира на оси симметрии системы (рис. 10.5) приводит к тому, что изгибающий момент x_3 при разрезании симметричной системы обращается в ноль.

Для симметричной рамы с замкнутым контуром рациональным является разрезание по оси симметрии верхней или нижней горизонтальной балки, в зависимости от того, где располагается шарнир, а также является ли нагрузка рамы симметричной или кососимметричной.

При построении всех эпюр они строятся для одной половины рамы, а для второй половины они являются либо симметричными, либо кососимметричными, в зависимости от типа внешней нагрузки.

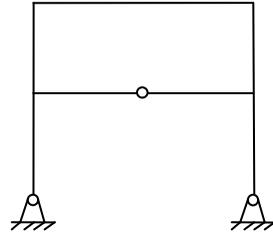


Рис. 10.5

10.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

1. Путём отбрасывания лишних связей заданная статически неопределимая система превращается в статически определимую.

2. По направлению искомого перемещения к полученной статически определимой системе прикладывается единичная сила (при определении линейного перемещения – сосредоточенная сила, при определении угла поворота – единичный момент).

3. От приложенного единичного силового фактора строится единичная эпюра изгибающих моментов \bar{M} в статически определимой системе.

4. Путём умножения единичной эпюры \bar{M} на суммарную окончательную эпюру изгибающих моментов M_p определяется искомое перемещение.

11. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ

Для надёжной работы элементов конструкций необходимо обеспечить сохранение первоначальной формы равновесия как самих элементов, так и всей конструкции в целом.

Равновесие механической системы называется **устойчивым**, если при отклонении от положения равновесия система возвращается в перво-

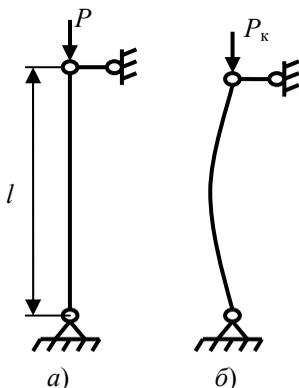


Рис. 11.1

начальное положение после устранения причин, вызывающих это отклонение.

Равновесие называется **неустойчивым**, если система не возвращается в исходное положение, а отклоняется от него ещё больше.

Равновесие называется **безразличным**, если новое положение системы после отклонения от исходного остаётся равновесным и после удаления внешнего воздействия.

Прямолинейная форма равновесия длинного стержня, подвергнутого осевому сжатию силой P (рис. 11.1), устойчива только до определённого значения сжимающей силы. Если такой стержень при

малых значениях силы P отклонить от исходного положения, то при устранении причин прямолинейная форма восстановится.

При некотором значении силы P , называемом **критическим**, стержень не распрямится, а сохранит ту форму, которую ему придали при малом отклонении. При значении силы P , равном критическому ($P = P_k$), стержень будет находиться в условиях безразличного равновесия.

Если сила P превысит критическое значение, прямолинейная форма равновесия станет неустойчивой.

Явление изгиба стержня продольной силой называется **продольным изгибом**.

Допускаемую нагрузку при расчёте на устойчивость определяют как часть критической:

$$P_{\text{доп}} = \frac{P_k}{n_y}, \quad (11.1)$$

где n_y – коэффициент запаса устойчивости.

Величина коэффициента запаса устойчивости принимается примерно равной запасу прочности. Например, для стали $n_y = 2 \dots 4$.

11.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА

Формулу Эйлера можно обобщить на случай любых опорных устройств, если записать как

$$P_k = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}, \quad (11.2)$$

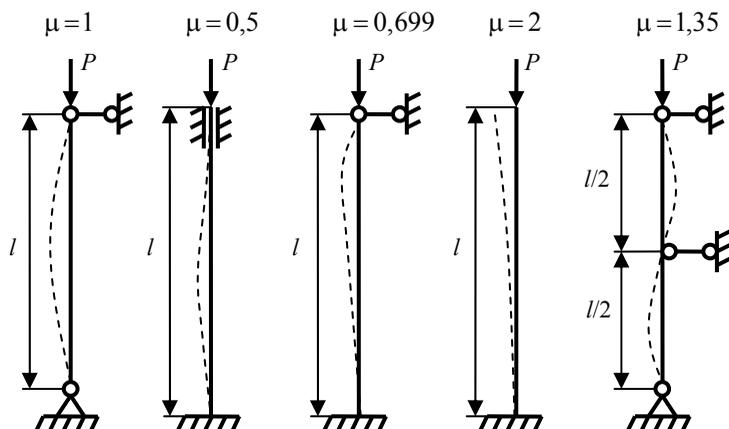


Рис. 11.2

где $\mu = l/n$ — величина постоянная, обратная числу полувольт n синусоиды, по которой изогнётся стержень. Постоянная μ называется коэффициентом приведения длины, а μl — приведённая длина стержня, которая является длиной полувольты синусоиды, по которой изгибается стержень.

Случай шарнирного закрепления концов стержня является основным. Значения коэффициента приведения μ для некоторых случаев закрепления стержня приведены на рис. 11.2.

Формула Эйлера основана на дифференциальном уравнении упругой линии балки, которое справедливо только в пределах упругих деформаций. Следовательно, критические напряжения, определяемые по этой формуле, не должны превосходить предела пропорциональности $\sigma_{\text{пц}}$.

11.2. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Для стержней средней и малой гибкости формула Эйлера даёт значения критических нагрузок, превышающие их действительные значения. Поэтому для практических расчётов на устойчивость при $\lambda < \lambda_0$ часто пользуются либо непосредственно экспериментальными данными, либо эмпирическими формулами.

Наибольшее распространение имеет формула, предложенная Ф. С. Ясинским:

$$\sigma_k = a - b\lambda, \quad (11.3)$$

где λ – гибкость стержня, а a и b – коэффициенты, зависящие от свойств материала. Например, для Ст3 при $\sigma_b = 380$ МПа и $\sigma_T = 240$ МПа формула (11.3) имеет вид

$$\sigma_k = 310 - 1,14\lambda.$$

По формуле (11.3) проводится расчёт на устойчивость стержней средней гибкости, разрушение которых при сжатии сопровождается значительным боковым выпучиванием.

При расчёте на устойчивость прежде всего необходимо определить гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}.$$

Если $\lambda > \lambda_0$, то формула Эйлера применима, и $P_{\text{доп}}$ можно найти из условия

$$P_{\text{доп}} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{n_y (\mu l)^2}. \quad (11.4)$$

Если $\lambda < \lambda_0$, то формула Эйлера не применима, и для определения $P_{\text{доп}}$ применяется формула (11.3).

12. РАСЧЁТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ, ДВИЖУЩИХСЯ С УСКОРЕНИЕМ

12.1. ВНУТРЕННИЕ СИЛЫ, ВЫЗВАННЫЕ ДВИЖЕНИЕМ. СИЛЫ ИНЕРЦИИ

Расчёт деталей машин на динамическую нагрузку более сложен, чем расчёт на статическую нагрузку. Во-первых, более сложный метод определения внутренних усилий и напряжений, возникающих от действия динамической нагрузки, и, во-вторых, более сложное определение механических свойств материалов. Так, при действии ударной нагрузки многие материалы, которые при статическом нагружении были пластичными, работают как хрупкие. Допускаемые напряжения при динамическом нагружении должны задаваться в зависимости от скорости нагружения. В первом приближении в этих случаях можно использовать характеристики механических свойств материала, полученные при статическом нагружении.

Для определения усилий, возникающих в движущемся теле, широко используется *принцип Даламбера*, который формулируется следующим образом.

Если движущееся тело (систему тел) в какой-то момент времени представить находящимся в состоянии покоя, но помимо сил, производящих движение, приложить к нему силы инерции, то в нём будут действовать такие же внутренние усилия, напряжения и деформации, какие имеют место во время его движения.

12.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ, ПРИВОДИМЫЕ К ЗАДАЧАМ СТАТИЧЕСКОГО РАСЧЁТА СИСТЕМ

Рассмотрим балку постоянного сечения, подвешенную на тросе крана (рис. 12.1); эта балка изогнута в результате действия её собственного веса. После включения двигателя крана сечение A балки, в котором к ней прикреплен трос, начинает подниматься с некоторым ускорением. При этом возникают силы инерции, распределённые по длине оси балки. Интенсивность их определяется формулой

$$p_i = \frac{dP_i}{dx} \frac{\gamma F}{g} a,$$

где dP_i – сила инерции, действующая на элемент стержня длиной dx ; γ – объёмный вес материала; F – площадь поперечного сечения стержня; g – ускорение свободного падения; a – ускорение.

На рисунке 12.1 показаны нагрузки, действующие на балку. Равномерно распределённая нагрузка интенсивностью q представляет собой собственный вес балки, а нагрузка p_i – инерционные силы. Сила S (усилие в тросе) равна по величине равнодействующей нагрузок q и p_i направлена в противоположную сторону, т.е. уравнивает эти нагрузки.

Инерционные силы p_i возникают после включения двигателя крана и вызывают изгиб балки дополнительно к изгибу от действия собственного веса q . В результате изгиба различные сечения балки перемещаются при подъёме с различными ускорениями a . Поэтому в общем случае интенсивность p_i инерционной нагрузки переменна по длине балки.

В частных случаях, например, когда жёсткость балки при изгибе весьма велика или когда сечение A , в котором балка прикреплена к тросу, поднимается на значительную высоту с постоянным ускорением, влиянием деформаций балки, вызванных инерционными силами p_i на величины ускорений a , можно пренебречь. В этих случаях можно считать, что уско-

рения всех сечений балки одинаковы и равны ускорению сечения A , а нагрузка p_i равномерно распределена по длине балки.

Аналогично и при решении ряда других динамических задач можно пренебрегать влиянием деформаций системы на распределение в ней ускорений, а следовательно, и на распределение инерционных сил.

В качестве примера рассмотрим расчёт вертикального бруса постоянного сечения, поднимаемого вверх силой S , превышающей вес бруса G (рис. 12.1). Кроме силы S на брус действуют равномерно распределённая по его длине вертикальная нагрузка интенсивностью $q = G/l$ от собственного веса бруса и инерционная нагрузка $p_i = (q/g)a$.

Ускорение a направлено в сторону действия силы S , т.е. вверх, величину его принимаем одинаковой для всех поперечных сечений бруса. Поэтому нагрузка p_i равномерно распределена по длине бруса и направлена в сторону, противоположную ускорению, т.е. вниз.

Составляем уравнение равновесия в виде суммы проекций всех сил на вертикальную ось x :

$$\sum X = S - G - p_i l = 0, \quad \text{откуда} \quad p_i = (S - G)/l.$$

Нормальное напряжение в поперечном сечении бруса, отстоящем на расстояние x от его нижнего конца,

$$\sigma = (q + p_i) \frac{x}{F} = \left(\frac{G}{l} + \frac{S - G}{l} \right) \frac{x}{F} = \frac{S}{l} \frac{x}{F} = \frac{S}{F} \frac{x}{l}.$$

Наибольшее напряжение возникает в верхнем сечении бруса:

$$\sigma_{\max} = \frac{S}{F}.$$



Рис. 12.1

12.3. РАСЧЁТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ УДАРЕ

Под ударной понимается всякая быстроизменяющаяся нагрузка. При ударе различные точки системы получают некоторые скорости, так что системе придаётся кинетическая энергия, которая переходит в потенциальную энергию деформации конструкции, а также в другие виды энергии – прежде всего в тепловую.

При определении динамических допускаемых напряжений следует учитывать изменение механических характеристик материала. Однако ввиду недостаточной изученности этого вопроса расчёт на прочность при динамической нагрузке обычно ведут по статическим характеристикам, т.е. условие прочности имеет вид

$$\sigma_{д\max} \leq [\sigma]. \quad (12.1)$$

При ударе возникают местные деформации в зоне контакта и общие деформации системы. Условимся рассматривать только общие деформации системы, и предположим, что динамические напряжения не превосходят предела пропорциональности материала.

Отношение динамических и статических перемещений называется коэффициентом динамичности или динамическим коэффициентом

$$k_d = \frac{\delta_d}{\delta_{ст}}. \quad (12.2)$$

В соответствии с законом Гука

$$k_d = \frac{R_d}{R_{ст}} = \frac{\sigma_d}{\sigma_{ст}}, \quad (12.3)$$

где σ_d – динамические напряжения; $\sigma_{ст}$ – статические напряжения.

12.4. ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР

Предположим, что груз массой m падает с некоторой высоты h на упругую систему, масса которой мала по сравнению с массой груза. Упругую систему будем считать невесомой (рис. 12.2, а, б).

Для решения данной задачи необходимо найти динамический коэффициент

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{ст}}}. \quad (12.4)$$

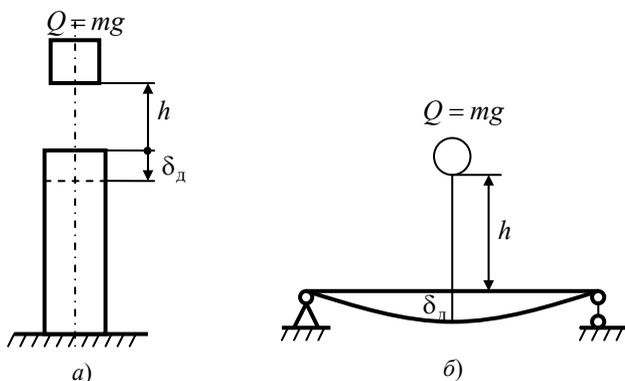


Рис. 12.2

Положительный знак перед радикалом взят потому, что искомыми являются наибольшие деформации. Если груз после удара остаётся на упругой системе, то при отрицательном знаке перед радикалом решение данного уравнения даёт наибольшее отклонение точки удара при возвратном движении.

После нахождения k_d , по уравнениям (12.2), (12.3) могут быть определены динамические напряжения и деформации системы, которые будут в k_d раз больше тех, которые имели бы место в системе при статическом приложении груза Q .

13. УСТАЛОСТЬ

При эксплуатации машин и конструкций напряжения в их многочисленных элементах могут многократно изменяться как по величине, так и по направлению.

Процесс постепенного накопления повреждений под действием переменных напряжений, приводящий к изменению свойств материала, образованию трещин и разрушению детали, называется *усталостным разрушением (усталостью)*.

Испытания образцов на усталость проводятся на специальных установках. Наиболее простой является установка, предназначенная для испытаний на переменный изгиб с вращением при симметричном циклическом изменении напряжений.

13.1. РАСЧЁТ ВАЛА НА УСТАЛОСТНУЮ ПРОЧНОСТЬ

Проверочный расчёт вала на усталостную прочность учитывает все основные факторы, влияющие на усталостную прочность: характер изменения напряжений, абсолютные размеры вала, обработку поверхностей и прочностные характеристики материалов, из которых изготавливаются валы. Таким образом, перед расчётом вала на усталость необходимо полностью уточнить конструкцию вала.

Расчёт на выносливость заключается в определении действительных коэффициентов запаса усталостной прочности для выбранных предположительно опасных сечений и является поэтому уточнённо-проверочным.

При совместном действии изгиба и кручения принимают, что нормальные напряжения меняются по симметричному циклу, а касательные по пульсирующему

$$\sigma_a = \sigma^{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_{\text{ос}}}, \quad (13.1)$$

где $M_{\text{изг}}$ – суммарный изгибающий момент; $W_{\text{ос}}$ – осевой момент сопротивления опасного сечения вала или

$$\tau_a = \tau_m = \frac{M_Z}{2W_{\text{кр}}}, \quad (13.2)$$

где M_Z – крутящий момент в опасном сечении; $W_{\text{кр}}$ – момент сопротивления вала при кручении; σ_a , τ_a – амплитуда цикла соответственно симметричного и пульсирующего; σ_m , τ_m – среднее напряжение цикла соответственно симметричного и пульсирующего.

Запас усталостной прочности по нормальным напряжениям

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a + \psi_\sigma \sigma_m}, \quad (13.3)$$

где σ_{-1} – предел выносливости при симметричном цикле изгиба; для углеродистых конструкционных сталей $\sigma_{-1} = 0,43\sigma_b$ МПа; для легированных $\sigma_{-1} = 0,35\sigma_b + (70...120)$ МПа; k_σ – эффективный коэффициент концентрации нормальных напряжений; ε_σ – масштабный коэффициент для нормальных напряжений; β – коэффициент, учитывающий

шероховатость поверхности: при $R_a = 0,32 \dots 2,5$ мкм принимают $\beta = 0,9 \dots 0,97$; σ_a – амплитуда цикла нормальных напряжений, равная наибольшему напряжению изгиба σ_p^{\max} в рассматриваемом сечении; σ_m – среднее напряжение цикла нормальных напряжений; если осевая нагрузка F_a на вал отсутствует или пренебрежимо мала, то $\sigma_m = 0$; в противном случае

$$\sigma_m = \frac{4F_a}{\pi d^2}, \quad (13.4)$$

где ψ_σ – коэффициент чувствительности к асимметрии цикла

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad (13.5)$$

для углеродистых сталей, имеющих $\sigma_b = 650 \dots 750$ МПа, принимают $\psi_\sigma = 0,2$; для легированных сталей $\psi_\sigma = 0,25 \dots 0,30$.

Коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \beta} \tau_a + \psi_\tau \tau_m}, \quad (13.6)$$

где τ_{-1} – предел выносливости при симметричном цикле кручения; для углеродистых конструкционных сталей $\tau_{-1} = 0,58\sigma_{-1}$; остальные обозначения в формуле имеют тот же смысл, что и в (13.3), с той разницей, что они относятся к напряжениям кручения.

По полученным значениям (13.3) и (13.6) определяем общий коэффициент запаса прочности в опасных сечениях

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \quad (13.7)$$

Расчётное значение n должно быть не ниже допускаемого $[n] = 2,5$, т.е. $n > [n]$.

Для повышения усталостной прочности валов необходимо принимать минимальную разность смежных участков, увеличивать радиусы галтелей, избегать применения резьбы для крепления деталей на участках опасных сечений и стремиться к наименьшей шероховатости поверхностей на валах.

Пример.

Рассчитать вал на усталостную прочность в сечении червячного колеса. Ширина червячного колеса $b_2 = 50$ мм; диаметр червячного колеса $d_2 = 200$ мм; усилия в зацеплении $F_{t2} = 2450$ Н, $F_{r2} = 891,8$ Н, $F_{\alpha 2} = 1000$ Н; крутящий момент на валу $M_2 = 245$ Н·м; консольная нагрузка $Q = 3913$ Н; момент $m_{\alpha 2} = 100$ Н·м; диаметр вала под ступицей червячного колеса $d_V = 60$ мм; глубина шпоночного паза $t_1 = 5,5$ мм. Длины участков указаны на рис. 13.1.

Определим реакции в опорах.

1. Рассмотрим вертикальную плоскость YOZ .

Определим реакции в опорах в плоскости

$$\sum M_A = 0: -0,1Y_C + 0,18Q + 0,05F_{r2} + m_{\alpha 2} = 0,$$

откуда

$$Y_C = \frac{0,18Q + 0,05F_{r2} + m_{\alpha 2}}{0,1} = \frac{0,18 \cdot 3913 + 0,05 \cdot 891 + 100}{0,1} = 8489 \text{ Н.}$$

$$\sum M_C = 0: 0,1Y_A + 0,08Q - 0,05F_{r2} + m_{\alpha 2} = 0,$$

откуда

$$Y_A = \frac{-0,08Q + 0,05F_{r2} - m_{\alpha 2}}{0,1} = \frac{-0,08 \cdot 3913 + 0,05 \cdot 891 - 100}{0,1} = -3685 \text{ Н.}$$

Получили отрицательное значение, меняем знак и направление силы.

$$Y_A = 3685 \text{ Н.}$$

$$\text{Проверка } \sum Y = 0 \Rightarrow -Y_A - F_{r2} + Y_C - Q = 0;$$

$$-3685 - 891 + 8489 - 3913 = 0;$$

$$0 \equiv 0.$$

2. Рассмотрим горизонтальную плоскость XOZ .

Определим реакции в опорах в плоскости.

Так как зубчатое колесо расположено симметрично относительно опор, то

$$X_A = X_C = \frac{F_{t2}}{2} = \frac{2450}{2} = 1225 \text{ Н.}$$

Строим эпюру изгибающего момента M_x .

Участок AB : $0 \leq z_1 \leq 0,05$;
 $M_x = -Y_A z_1$;
 $z_1 = 0, M_x = 0$;
 $z_1 = 0,05$;
 $M_x = -3685 \cdot 0,05 = -184,23 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Участок CD : $0 \leq z_2 \leq 0,08$;
 $M_x = -Q z_2$;
 $z_2 = 0, M_x = 0$;
 $z_2 = 0,08$;
 $M_x = -3913 \cdot 0,08 = -313,04 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Участок BC : $0 \leq z_3 \leq 0,05$;
 $M_x = Q(0,08 + z_3) - Y_C z_3$;
 $z_3 = 0, M_x = -313,04 \text{ Н}\cdot\text{м}$;
 $z_3 = 0,05$;
 $M_x = 3913 \cdot 0,13 - 8489 \cdot 0,05 = -84,23 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Строим эпюру изгибающего момента M_y .

Участок AB : $0 \leq z_1 \leq 0,05$;
 $M_y = X_A z_1$;
 $z_1 = 0, M_y = 0$;
 $z_1 = 0,05$;
 $M_x = 1225 \cdot 0,05 = 61,25 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

Участок BC : $0 \leq z_2 \leq 0,05$;
 $M_y = X_C z_2$;
 $z_2 = 0, M_y = 0$;
 $z_2 = 0,05$;
 $M_x = 1225 \cdot 0,05 = 61,25 \text{ Н}\cdot\text{м}$.

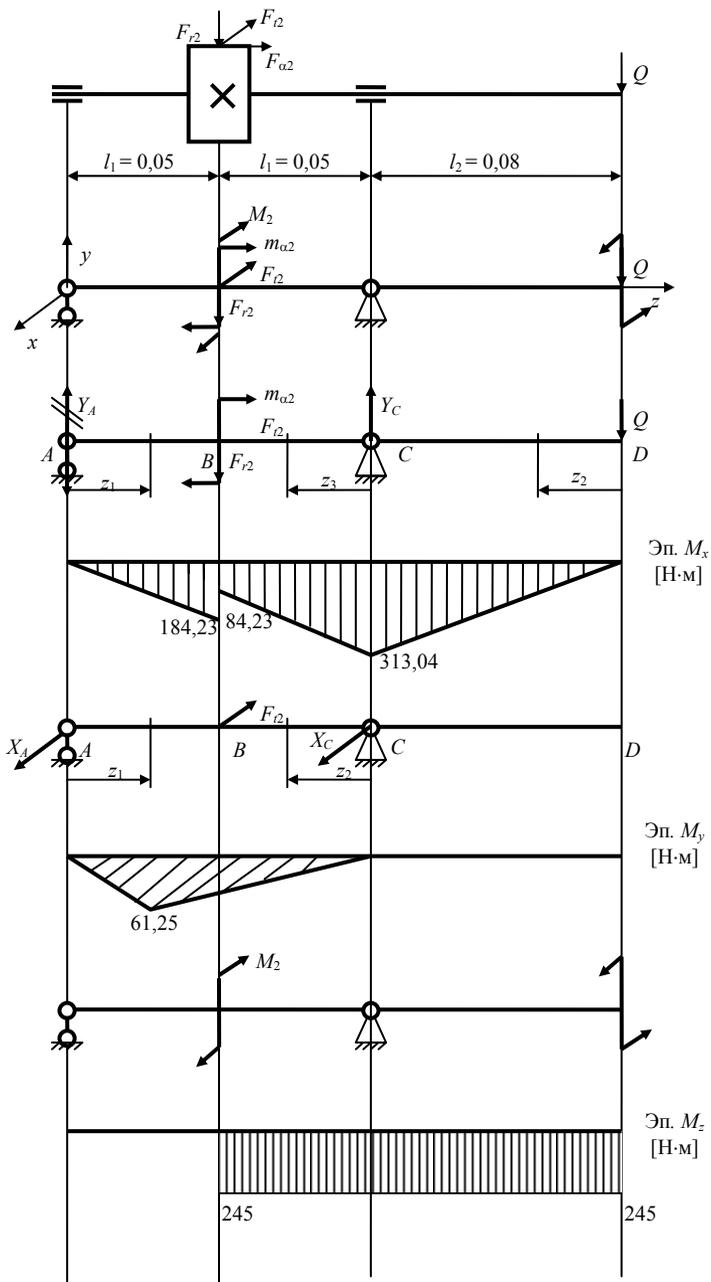


Рис. 13.1

Строим эпюру крутящего момента M_z .

Участок AB : $M_z = 0$ Н·м.

Участок BC и CD : $M_z = M_2 = 245$ Н·м.

Рассчитываем суммарный изгибающий и крутящий момент в сечениях B и C :

$$M_P^B = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{184,23^2 + 64,23^2 + 245^2} = 312 \text{ Н·м};$$

$$M_P^C = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2} = \sqrt{313,04^2 + 245^2} = 397 \text{ Н·м.}$$

Сечение в т. C – опасное, так как суммарный момент в нём больше.

Напряжение в опасном сечении

$$\sigma^{\max} = \frac{M_P^C}{W_{OC}},$$

где W_{OC} – момент сопротивления $W_{OC} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 45^3}{32} = 8942 \text{ мм}^3$.

$$\sigma^{\max} = \frac{M_P^C}{W_{OC}} = \frac{397 \cdot 10^3}{8942} = 44,4 \text{ Н·мм}^2.$$

Расчётный запас прочности в опасном сечении

$$n = \frac{\sigma_{\text{пред}}}{\sigma^{\max}} = \frac{\sigma_T}{\sigma^{\max}} = \frac{280}{44,4} = 6,3 \geq [n].$$

Запас статической прочности обеспечен.

Расчёт вала на усталостную прочность.

Расчёт проводится в сечении концентратора напряжений, в которых обусловлена наличием шпоночного паза. Принимаем, что нормальные напряжения меняются по симметричному циклу, а касательные по пульсирующему.

Нормальное напряжение в опасном сечении

$$\sigma^{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_{OC}},$$

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2} = \sqrt{184,23^2 + 61,25^2} = 194 \text{ Н·м,}$$

где W_{OC} – момент сопротивления изгибу в опасном сечении

$$W_{OC} = \frac{\pi d_V^3}{32} - \frac{b_1 t_1 (d_V - t_1)^2}{2 d_V} = \frac{3,14 \cdot 60^3}{32} - \frac{14 \cdot 5,5 \cdot (60 - 5,5)^2}{2 \cdot 60} = 19\,289 \text{ мм}^3;$$

$$\sigma^{\max} = \frac{M_{\text{изг}}}{W_{OC}} = \frac{194 \cdot 10^3}{19\,290} = 10,06 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.$$

Касательное напряжение в опасном сечении

$$\tau_a = \tau_m = \frac{M_z}{2W_P},$$

где W_P – момент сопротивления кручению в опасном сечении

$$W_P = \frac{\pi d_V^3}{16} - \frac{b_1 t_1 (d_V - t_1)^2}{2 d_V} = \frac{3,14 \cdot 60^3}{16} - \frac{14 \cdot 5,5 \cdot (60 - 5,5)^2}{2 \cdot 60} = 41\,062 \text{ мм}^3;$$

$$\tau_a = \tau_m = \frac{M_z}{2W_P} = \frac{245 \cdot 10^3}{2 \cdot 41\,062} = 2,98 \text{ Н} \cdot \text{мм}^2.$$

Коэффициент усталостной прочности по нормальным напряжениям

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a};$$

для выбранной марки стали

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{k_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a} = \frac{250}{\frac{1,6}{0,97 \cdot 0,8} 10,06} = 12,05.$$

Коэффициент усталостной прочности по касательным напряжениям

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{k_\tau}{\varepsilon_\tau \beta} \tau_a + \psi_\tau \tau_m} = \frac{150}{\frac{1,5}{0,7} \cdot 2,98 + 0,1 \cdot 2,98} = 22,44.$$

Общий запас усталостной прочности

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} = \frac{12,05 \cdot 22,44}{\sqrt{12,05^2 + 22,44^2}} = 10,61 \geq [n],$$

$$[n] = 2,5.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение вопросов расчёта на прочность является необходимым условием эффективной работы инженера на любом производстве. Актуальной задачей на сегодняшний момент при подготовке высококвалифицированных инженеров в условиях модернизации отечественного производства является не только получение и знание теоретических аспектов деятельности предприятия, но и приобретение в процессе обучения практических навыков, в частности расчёта и конструирования типовых механических устройств, используемых в машинах, измерительных приборах и средствах автоматизации.

Многообразие решений задач расчёта механических устройств, деталей и узлов открывает огромные возможности для будущего инженера при проведении модернизации существующего или конструировании совершенно нового оборудования с учётом современных требований к работоспособности, экономичности, технологичности и надёжности. Обучающиеся знакомятся с источниками информации по сопротивлению материалов, появлением новых и развитием известных теорий, гипотез, представлений и проверки их опытным путём, методами расчёта элементов конструкций на прочность и жёсткость, проблемными вопросами прочностных расчётов. Студент в результате изучения представленного материала должен уметь оценивать работоспособность деталей по критериям прочности, самостоятельно конструировать простейшие механические узлы. Студент получает представление об основных задачах, решаемых данной наукой, о возможностях применения знаний, полученных в данном курсе, об основных законах данного курса и навыки определения основных конструктивных параметров и расчёта широко распространённых деталей машин (приборов) и аппаратов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Феодосьев, В. И.** Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1986. – 512 с.
2. **Дарков, А. В.** Сопротивление материалов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высшая школа, 1989. – 623 с.
3. **Степин, П. А.** Сопротивление материалов / П. А. Степин. – М. : Высшая школа, 1983. – 303 с.
4. **Агамиров, Л. В.** Сопротивление материалов. Краткий курс. Для студентов вузов / Л. В. Агамиров. – М. : АСТ, 2003. – 256 с.

ГЛОССАРИЙ

Балка – брус, работающий в основном на изгиб.

Брус – элемент конструкции, длина которого значительно больше его поперечных размеров.

Вал – деталь в форме тел вращения, предназначенная для поддержания вращающихся деталей и для передачи вращающего момента от одной детали к другой (в осевом направлении).

Виброустойчивость – способность работать в нужном диапазоне режимов без недопустимых колебаний.

Внутренние силы – силы взаимодействия между отдельными элементами сооружения или между отдельными частями элемента, возникающие под действием внешних сил.

Временное сопротивление (предел прочности) – напряжение, соответствующее наибольшей нагрузке, предшествующей разрушению образца.

Выносливость – способность материала противостоять действию повторно переменных напряжений.

Главные напряжения – максимальные и минимальные нормальные напряжения.

Главные площадки – площадки, по которым касательные напряжения равны нулю.

Деформация – изменение формы и объёма тела под действием внешних сил.

Деформированное состояние – совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям для одной точки.

Долговечность – способность сохранять заданные показатели до предельного состояния с необходимыми перерывами для ремонтов и технического обслуживания.

Жёсткость – способность детали сопротивляться любой деформации.

Идеализация – подход к решению задачи, при котором опускаются все частности, не оказывающие влияния на решение поставленной задачи.

Изгиб – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникают изгибающие моменты.

Износостойкость – способность сохранять первоначальную форму своей поверхности, сопротивляясь износу.

Косой изгиб – случай, когда внешние силы, перпендикулярные оси стержня, не лежат в плоскости, проходящей через главную ось его поперечного сечения.

Кручение – вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только крутящий момент.

Метод сечений – приём определения внутренних усилий.

Надёжность – свойство изделия выполнять свои функции в течение заданного срока или наработки, сохраняя в заданных пределах эксплуатационные показатели.

Напряжённое состояние – совокупность напряжений, действующих по различным площадкам, проходящим через рассматриваемую точку.

Нормальное напряжение – интенсивность нормальных сил в рассматриваемой точке сечения.

Обобщённый закон Гука – выражения, устанавливающие связь между деформациями и напряжениями при пространственном напряжённом состоянии.

Прочность – способность детали сопротивляться разрушению или необратимому изменению формы (деформации).

Расчётная схема – реальный объект, освобождённый от несущественных особенностей.

Сложное сопротивление – случаи, когда в поперечных сечениях стержня одновременно действуют несколько внутренних силовых факторов (внутренних усилий), одновременно учитываемых при расчёте на прочность.

Сопротивление материалов – наука о том, как реагируют элементы конструкций (механизмов, машин, сооружений) на воздействие нагрузок и как обеспечить их соответствие своему назначению и работоспособность.

Старение – явление изменения механических свойств.

Упругое тело – тело, которое после снятия внешней нагрузки восстанавливает свои размеры и форму, существовавшие до нагружения.

Усталость материала – явление разрушения материала детали под действием периодически меняющихся (циклических) напряжений.

Хрупкость – свойство твёрдых тел мгновенно разрушаться под действием внешних сил без заметной пластичной деформации.

Цикл напряжения – совокупность последовательных значений переменных напряжений за один период процесса их изменения.

Циклическая нагрузка – нагрузка, изменяющаяся по определённому закону.

ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ УСВОЕННЫХ ЗНАНИЙ

1. Способность твёрдого тела (конструкции) сохранять своё состояние (равновесия или движения) при внешних воздействиях называется...

- а) прочностью;
- б) выносливостью;
- в) жёсткостью;
- г) устойчивостью.

2. Изменение размеров или формы реального тела, подверженного действию внешних сил, называется...

- а) перемещением;
- б) пластичностью;
- в) упругостью;
- г) деформацией.

3. Принцип, утверждающий, что результат действия системы сил равен сумме результатов действий каждой силы в отдельности, называется...

- а) принципом начальных размеров;
- б) принципом Сен-Вена;
- в) все утверждения верны.

4. Модели материала в расчётах на прочностную надёжность детали (элемента конструкции) принято считать...

- а) прочными и упругими;
- б) хрупкими и идеально упругими;
- в) сплошными, однородными, изотропными и линейно-упругими;
- г) пластичными и изотропными.

5. Проекция главного вектора R внутренних сил, действующих в рассматриваемом сечении на ось стержня, называется...

- а) нормальным напряжением;
- б) поперечной силой;
- в) напряжённым состоянием в точке;
- г) продольной силой.

6. Проекция главного вектора R внутренних сил на ось (x или y), лежащую в плоскости сечения, называется...

- а) напряжённым состоянием;
- б) поперечной силой Q_x (или Q_y);
- в) продольной силой N ;
- г) касательным напряжением.

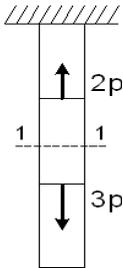
7. Деформации (линейные и угловые) считаются практически малыми, если они не превосходят...

- а) 0,12 (или 12%);
- б) 0,05 (или 5%);
- в) 0,2 (или 20%);
- г) 0,1 (или 10%).

8. Способность материала сопротивляться разрушающему воздействию внешних сил называется ...

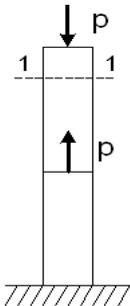
- а) вязкостью;
- б) твёрдостью;
- в) прочностью;
- г) упругостью.

9. Для стержня, схема которого изображена на рисунке, деформации, возникающие в сечении 1–1, будут...



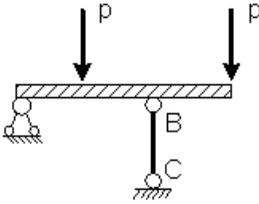
- а) равны нулю;
- б) растягивающими и сжимающими;
- в) сжимающими;
- г) растягивающими.

10. Для стержня, схема которого изображена на рисунке, нормальное усилие в сечении 1–1 будет...



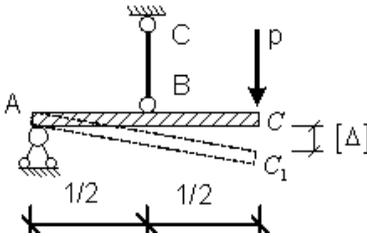
- а) сжимающим;
- б) растягивающим;
- в) равно 0;
- г) растягивающим и сжимающим.

11. Если стержень *BC* одинаково работает на растяжение и сжатие, то проверку прочности проводят по условию...



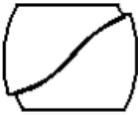
- а) $\sigma \leq \sigma_{\text{пц}}$;
- б) $\sigma = \sigma_{\text{т}}$;
- в) $\sigma > [\sigma]$;
- г) $\sigma \leq [\sigma]$.

12. Если стержень BC одинаково работает на растяжение и сжатие, то проверку на жёсткость проводят по условию...

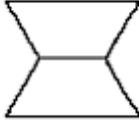


- а) $\Delta l_{BC} \leq 2[\Delta]$;
- б) $\Delta l_{BC} \leq \frac{[\Delta]}{2}$;
- в) $\Delta l_{BC} \leq \frac{[\Delta]}{4}$;
- г) $\Delta l_{BC} > \frac{[\Delta]}{2}$.

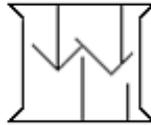
13. Формула растяжения деревянного образца при испытаниях на сжатие вдоль волокон имеет вид...



а)



б)



в)



г)

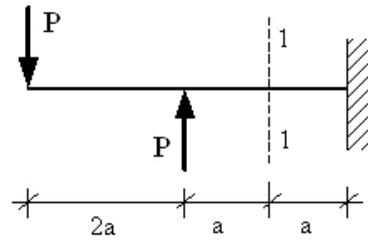
14. Крутящим моментом называется...

- а) равнодействующий момент касательных и нормальных напряжений;
- б) равнодействующий момент нормальных напряжений;
- в) равнодействующий момент касательных напряжений;
- г) равнодействующий момент продольных сил относительно оси стержня.

15. Известен взаимный угол поворота сечений A и B . Модуль сдвига материала образца можно определить из формулы...

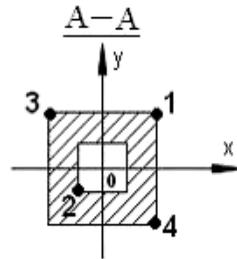
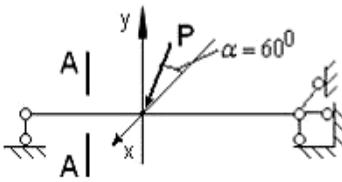
19. В сечении 1–1 имеют место внутренние силовые факторы ...

- а) $M \neq 0, Q \neq 0$;
- б) $M \neq 0, Q = 0$;
- в) $M = 0, Q \neq 0$;
- г) $M = 0, Q = 0$.

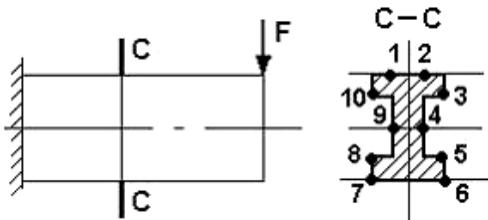


20. В сечении А–А наиболее опасными являются точки ...

- а) 3 и 4;
- б) 1 и 3;
- в) 2 и 4;
- г) 1 и 2.

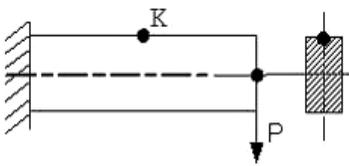


21. Максимальные нормальные напряжения действуют в точках ...



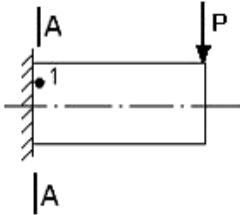
- а) 8, 5;
- б) 9, 4;
- в) 1, 2, 7, 6;
- г) 10, 3, 8, 5.

22. Тип (вид) напряжённого состояния в окрестности точки К консольной балки – ...



- а) линейное (одноосное растяжение);
- б) плоское (двухосное растяжение – сжатие);
- в) линейное (одноосное сжатие);
- г) плоское (чистый сдвиг).

23. В точке 1 поперечного сечения А–А балки ...



- а) действуют касательные напряжения τ ;
- б) действуют нормальные σ и касательные τ напряжения;
- в) действуют нормальные напряжения σ ;
- г) нет напряжений.

24. Статический момент сечения относительно оси x выражается соотношением...

а) $S_x = \int_F y dF$; б) $S_y = \int_F x dF$; в) $I_x = \int_F y^2 dF$; г) $I_y = \int_F x^2 dF$.

25. Осевой момент инерции сечения относительно оси y выражается соотношением...

а) $I_y = \int_F x^2 dF$; б) $I_p = \int_F \rho^2 dF$; в) $I_{yx} = \int_F yx dF$; г) $I_x = \int_F y^2 dF$.

26. Полярный момент инерции сечения относительно некоторой точки выражается соотношением...

а) $I_p = \int_F \rho^2 dF$; б) $I_y = \int_F x^2 dF$; в) $I_x = \int_F y^2 dF$; г) $S_x = \int_F y dF$.

27. Центробежный момент инерции сечения относительно некоторых двух взаимно перпендикулярных осей выражается соотношением...

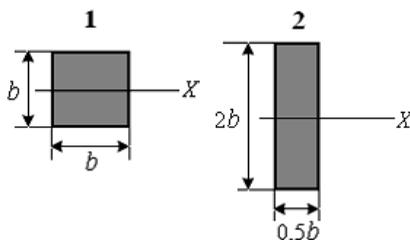
а) $I_{yx} = \int_F yx dF$; б) $S_y = \int_F x dF$; в) $I_x = \int_F y^2 dF$; г) $S_x = \int_F y dF$.

28. Осевые моменты инерции прямоугольника относительно осей y и x , проходящие через центр тяжести параллельно сторонам прямоугольника, выражаются соотношением...

а) $I_x = \frac{bh^3}{12}$; б) $I_y = \frac{hb^3}{12}$; в) $I_x = \frac{bh^3}{3}$; г) $I_x = \frac{hb^3}{3}$.

29. Размеры прямоугольника изменились согласно рисунку. Тогда момент инерции относительно оси X ...

- а) увеличился в 4 раза;
 б) не изменился;
 в) увеличился в 2 раза;
 г) уменьшился в 2 раза.



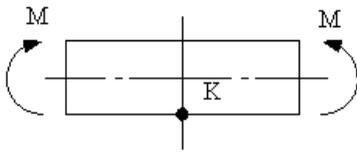
30. Под *напряжённым состоянием* в какой-либо точке деформируемого тела следует понимать...

- а) совокупность нормальных и касательных напряжений в любом сечении стержня;
 б) совокупность нормальных и касательных напряжений на любых трёх элементарных плоскостях, проходящих через эту точку;
 в) совокупность нормальных и касательных напряжений, действующих по множеству элементарных площадок, проходящих через точку;
 г) совокупность нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении стержня.

31. Тензор напряжений – это...

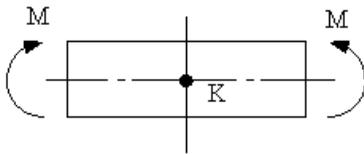
- а) совокупность нормальных и касательных напряжений на любых трёх элементарных плоскостях в окрестности рассматриваемой точки;
 б) совокупность нормальных и касательных напряжений в любом сечении стержня;
 в) совокупность нормальных и касательных напряжений в поперечном сечении стержня;
 г) совокупность нормальных и касательных компонентов напряжений на трёх взаимно перпендикулярных элементарных плоскостях, проходящих через точку тела.

32. Тип (вид) напряжённого состояния в окрестности точки K – ...



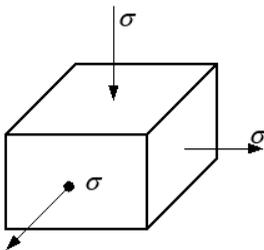
- а) плоское (чистый сдвиг);
- б) плоское (двухосное растяжение);
- в) линейное (сжатие);
- г) линейное (растяжение).

33. Вид (тип) напряжённого состояния в окрестности точки K – ...



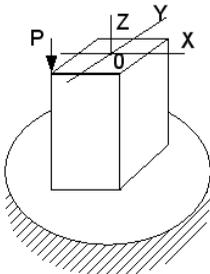
- а) нулевое (напряжения отсутствуют);
- б) линейное (растяжение);
- в) линейное (сжатие);
- г) плоское (чистый сдвиг).

34. При сложном напряжённом состоянии эквивалентное напряжение по теории прочности Мора ($\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_1 = k\sigma_3$, материал серый чугун, $k = 0,2$) равно...



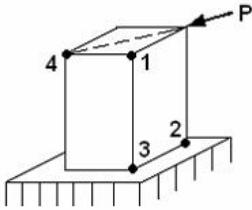
- а) $1,2\sigma$;
- б) $2,2\sigma$;
- в) $1,8\sigma$;
- г) $1,66\sigma$.

35. Для нагруженного стержня вид сложного сопротивления называется ...



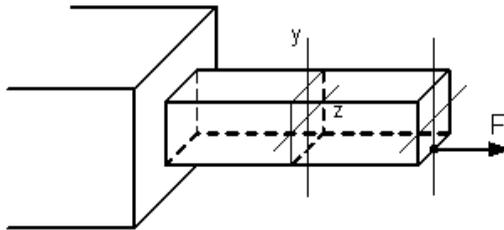
- а) косым изгибом;
- б) внецентренным сжатием;
- в) изгибом с кручением;
- г) общим случаем сложного сопротивления.

36. На схеме, изображённой на рисунке, наиболее опасной точкой является...



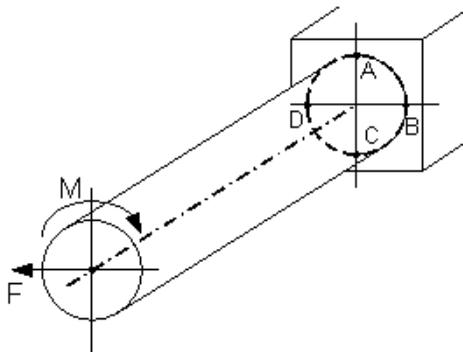
- а) точка 2;
- б) точка 4;
- в) точка 3;
- г) точка 1.

37. В поперечном сечении стержня, изображённого на рисунке, действуют внутренние силовые факторы...



- а) N и M_z ;
- б) N и M_y ;
- в) M_z и Q_y ;
- г) M_z и $M_{кр}$.

38. Опасными точками являются точки...



- а) B и D ;
- б) D и C ;
- в) A и C ;
- г) A и B .

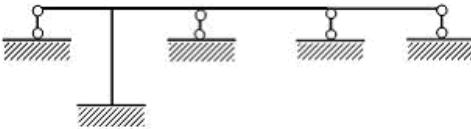
39. При расчёте методом сил составляются...

- а) канонические уравнения;
- б) трансцендентные уравнения;
- в) дифференциальные уравнения;
- г) канонические и дифференциальные уравнения.

40. Коэффициент δ_{11} в каноническом уравнении $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$ определяет...

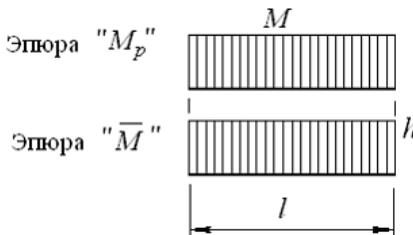
- а) суммарное перемещение от действия силы X_1 и внешней нагрузки;
- б) обобщённое единичное перемещение в направлении действия силы X_1 от силы $\overline{X_1} = 1$;
- в) реакцию от действия силы X_1 ;
- г) грузовое перемещение.

41. Степень статической неопределимости системы, изображённой на рисунке, равна...



- а) 4;
- б) 5;
- в) 1;
- г) 2.

42. При нагружении стержня получены эпюры изгибающих моментов от внешних сил M_p и от единичной силы \overline{M} , приведённые на рисунке. Результат вычисления интеграла $\int_l M_p \overline{M} dz$ по способу Верещагина имеет вид...



- а) Mlh ;
- б) $Ml \frac{2}{3} h$;
- в) $\frac{1}{2} Ml \frac{h}{2}$;
- г) $Ml \frac{h}{2}$.

43. Критическая сила сжатого стержня определяется по формуле...

- а) Журавского;
- б) Верещагина;
- в) Эйлера;
- г) Гука.

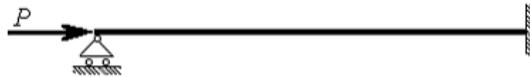
44. В формуле Эйлера для критической силы сжатого стержня

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}$$

произведение EI_{\min} есть...

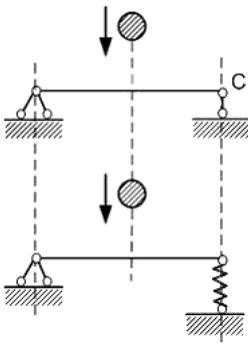
- а) жёсткость сечения при изгибе относительно оси с наибольшим моментом инерции;
- б) жёсткость сечения при сжатии;
- в) жёсткость сечения при изгибе относительно оси с наименьшим моментом инерции;
- г) жёсткость стержня при сжатии.

45. При сжатии упругого стержня, показанного на рисунке, силой $P \geq P_{кр}$ форма потери устойчивости стержня имеет вид ...



- а)
- б)
- в)
- г)

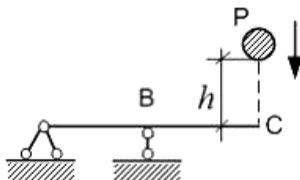
46. На балку падает груз. Если абсолютно жёсткую опору C заменить пружиной, то динамические напряжения в балке...



- а) увеличится в 2 раза;
- б) увеличатся;
- в) останутся неизменными;
- г) уменьшатся.

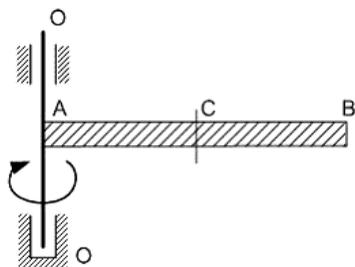
47. На балку падает груз весом P . Динамический коэффициент определяется по формуле $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{ст}}}$. Физическим смыслом величины

$\Delta_{ст}$ является...



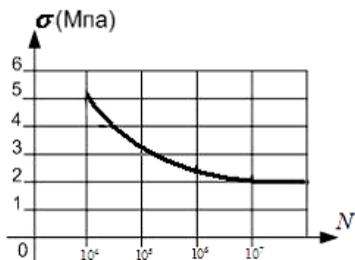
- а) статический угол поворота сечения C , вызванный силой P ;
- б) статический угол поворота сечения B , вызванный силой P ;
- в) статический прогиб сечения C , вызванный силой P ;
- г) статический прогиб сечения C , вызванный максимальной силой взаимодействия между грузом и балкой.

48. Стержень AB постоянного поперечного сечения вращается вокруг оси $O-O$. Максимальное нормальное напряжение от сил инерции действует в сечении...



- а) B ;
- б) C ;
- в) все сечения равноопасны;
- г) A .

49. На рисунке показана кривая усталости стальных образцов предел выносливости приблизительно равен ...



- а) 2 МПа;
- б) 4 МПа;
- в) 5 МПа;
- г) 3 МПа.

50. С увеличением размеров деталей величина предела выносливости...

- а) уменьшается;
- б) не изменяется;
- в) увеличивается;
- г) изменяется незначительно.

51. При расчёте на усталостную прочность определяют предел ...

- а) выносливости;
- б) прочности;
- в) упругости;
- г) текучести.

52. Нагрузка, изменяющаяся по определённому закону, это...

- а) циклическая нагрузка;
- б) симметричная нагрузка;
- в) распределённая нагрузка;
- г) сосредоточенная нагрузка.

53. Явление разрушения материала детали под действием периодически меняющихся (циклических) напряжений – ...

- а) усталость материала;
- б) отпуск материала;
- в) выносливость материала;
- г) сопротивление материала.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	3
1.1. Расчетная схема. Нагрузки	3
1.2. Внутренние силы. Метод сечений	4
1.3. Напряжения	5
1.4. Основные предпосылки науки о сопротивлении материалов	5
2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ	6
2.1. Продольная сила	6
2.2. Напряжения в поперечных сечениях бруса	7
2.3. Продольные и поперечные деформации	9
2.4. Перемещения поперечных сечений брусьев	10
2.5. Диаграммы растяжения и сжатия	11
2.6. Допускаемые напряжения. Расчёты на прочность и жёсткость	12
2.7. Статически неопределимые системы	14
3. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ	15
3.1. Виды напряжённого состояния	15
3.2. Плоское напряжённое состояние	16
3.3. Главные напряжения. Главные площадки	17
3.4. Экстремальные касательные напряжения	18
3.5. Понятие о пространственном напряжённом состоянии	19
4. СДВИГ	21
4.1. Чистый сдвиг	21
4.2. Деформации при сдвиге. Закон Гука при сдвиге	22
4.3. Практические расчёты некоторых простейших конструкций, работающих на сдвиг	24
5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ	25
5.1. Статические моменты инерции сечений	26
5.2. Моменты инерции сечений	27
5.3. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей	29
5.4. Изменение моментов инерции при повороте осей	30
5.5. Главные моменты инерции. Главные оси инерции	31

6. КРУЧЕНИЕ	33
6.1. Основные понятия. Крутящий момент	33
6.2. Кручение прямого бруса круглого поперечного сечения	37
6.3. Расчет бруса круглого поперечного сечения на прочность и жёсткость при кручении	42
6.4. Статически неопределимые задачи при кручении	45
7. ПРЯМОЙ ИЗГИБ	48
7.1. Общие понятия	48
7.2. Внутренние усилия	48
7.3. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределённой нагрузки	51
7.4. Прямой чистый изгиб	53
7.5. Прямой поперечный изгиб	58
7.6. Расчёты на прочность при изгибе	58
8. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ	59
8.1. Косой изгиб	59
8.2. Внецентренное растяжение и сжатие брусьев	62
8.3. Ядро сечения	63
8.4. Расчёты на прочность при изгибе с кручением	64
8.5. Порядок построения эпюр для ломаного (пространственного) бруса	65
9. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	66
9.1. Энергия деформации при статическом действии нагрузок	66
9.2. Теорема о взаимности работ	68
9.3. Теорема о взаимности перемещений	69
9.4. Интеграл Мора	70
10. РАСЧЁТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ	72
10.1. Статическая неопределимость	72
10.2. Метод сил. Основная и эквивалентная системы	73
10.3. Канонические уравнения метода сил	74
10.4. Использование симметрии	75
10.5. Определение перемещений в статически неопределимых системах	77

11. ПОНЯТИЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРВОНАЧАЛЬНОЙ ФОРМЫ РАВНОВЕСИЯ	77
11.1. Определение критической силы. Формула Эйлера	78
11.2. Устойчивость сжатых стержней за пределами упругости	79
12. РАСЧЁТ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ, ДВИЖУЩИХСЯ С УСКОРЕНИЕМ	80
12.1. Внутренние силы, вызванные движением. Силы инерции	80
12.2. Динамические задачи, приводимые к задачам статического расчёта систем	81
12.3. Расчёт на прочность при ударе	83
12.4. Вертикальный удар	83
13. УСТАЛОСТЬ	84
13.1. Расчёт вала на усталостную прочность	85
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	92
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	93
ГЛОССАРИЙ	94
ТЕСТЫ ДЛЯ ПРОВЕРКИ УСВОЕННЫХ ЗНАНИЙ	96

Учебное издание

ВЕДИЩЕВ Сергей Михайлович,
ОСИПОВ Алексей Александрович,
ПЕРШИНА Снежана Владимировна,
ПЕРШИН Владимир Фёдорович

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Редактор Л. В. Комбарова

Инженер по компьютерному макетированию И. В. Евсеева

ISBN 978-5-8265-1280-7



Подписано в печать 29.10.2014.
Формат 60 × 84 / 16. 6,51 усл. печ. л.
Тираж 000 экз. Заказ № 500

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08;
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru