Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»

**Н. П. ПУЧКОВ, Т. В. ЖУКОВСКАЯ,
Е. А. МОЛОКАНОВА и др.**

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОРАЗВИТИЯ БАКАЛАВРА

В четырёх частях

**Часть 4. Интегральное исчисление. Ряды.
Дифференциальные уравнения**

Рекомендовано Учебно-методическим объединением
по университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Инноватика»

Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2013

УДК 514.12:512.64(075.8)
ББК В11я73
П764

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой распределённых
вычислительных систем ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
С. М. Дзюба

Доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой
алгебры и геометрии ФГБОУ ВПО «ТГУ им. Г. Р. Державина»
А. И. Булгаков

Авторский коллектив:
Н. П. Пучков, *Т. В. Жуковская*, *Е. А. Молоканова*,
И. А. Парфенова, *А. И. Попов*

П764 **Применение** математических знаний в профессиональной деятельности. Пособие для саморазвития бакалавра : в 4 ч. / Н. П. Пучков [и др.]. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013.

ISBN 978-5-8265-1237-1

Ч. 4 : Интегральное исчисление. Ряды. Дифференциальные уравнения : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Инноватика» / Н. П. Пучков [и др.]. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2013. – 96 с. – 100 экз.

ISBN 978-5-8265-1238-8.

Представлены базовые понятия интегрального исчисления, теории рядов, дифференциальных уравнений, изложены методы по использованию математических знаний при решении модельных задач профессиональной деятельности, даны рекомендации по организации самостоятельной работы.

Предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки бакалавров «Инноватика».

УДК 514.12:512.64(075.8)
ББК В11я73

ISBN 978-5-8265-1238-8 (ч. 4)
ISBN 978-5-8265-1237-1

ВВЕДЕНИЕ

Теория компетентностного подхода в обучении предполагает глубокое усвоение основ изучаемой дисциплины, обеспечивающее возможность эффективной деятельности будущего специалиста.
Несмотря на то, что по классическому курсу высшей математики для вузов написано много учебников и учебных пособий, некоторые основополагающие разделы, ориентированные на новые направления подготовки (например, 222000 «Инноватика»), нуждаются в дополнительных методических рекомендациях по их освоению.

Данное пособие не преследует цели последовательного изложения всего программного материала, здесь более подробно, отчасти не совсем строго, рассматриваются вопросы программного материала, лежащие в основе изучаемого курса, и в наибольшей мере, на наш взгляд, способствующие формированию предметных компетенций.

Основной упор в пособии делается на формирование навыков самостоятельной работы, что вполне обосновывает основную цель профессионального образования, заключающуюся в подготовке квалифицированного работника соответствующего уровня и профиля, конкурентоспособного на рынке труда, готового к постоянному творческому росту, социальной и профессиональной мобильности.

Становится оптимально разрешимой задача обучения студентов в вузе, заключающаяся, с одной стороны, в получении необходимых знаний, умений и навыков для конкретной профессиональной деятельности, а с другой, в формировании своих личностных качеств, необходимых для любой профессии и общественной жизни, творческой самореализации.

Предлагаемое учебное пособие может также быть использовано студентами высших технических учебных заведений, обучающимися на инженерных направлениях подготовки, и, в частности, магистрами, желающими оперативно повторить и закрепить полученные на младших курсах математические знания.

Материал пособия обеспечивает не только углубление математических знаний, но и их использование при изучении других разделов математики, а также дисциплин математического, естественнонаучного и профессионального циклов.

1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

I. Учебные цели. В результате изучения материала лекции студенты должны *получить представление* о неопределённом интеграле и его свойствах, первообразной; различных методах интегрирования. *Уметь* интегрировать функции методом замены переменной и с помощью интегрирования по частям, пользоваться таблицей интегралов; интегрировать по частям; интегрировать различные классы функций.

II. Формирование компетенций. Способность к применению базовых математических знаний в профессиональной деятельности; способность применять методы математического анализа и моделирования.

III. Введение в тему. Интегральное исчисление первоначально развивалось независимо от учения о дифференцировании. Только к концу XVII столетия, когда оба исчисления получили уже значительное развитие и научились решать, каждое своими собственными методами, большое число задач геометрии и механики, была раскрыта существующая между ними глубокая связь: их основные проблемы оказались двумя взаимно обратными задачами анализа бесконечно малых; интегрирование и дифференцирование функций стоят друг к другу в том же отношении, как сложение и вычитание чисел. Этот исторический момент обычно считают датой рождения того учения, которое в настоящее время называется математическим анализом.

В дифференциальном исчислении решалась задача нахождения производной данной функции. Однако разнообразные вопросы математического анализа и его многочисленные приложения к геометрии, механике, физике и технике приводят к решению обратной задачи: по заданной производной найти саму функцию. Задача восстановления функции по заданной производной является одной из основных задач интегрального исчисления. Операция нахождения первообразной (первоначальной) функции по имеющейся производной называется интегрированием. Этот раздел посвящён решению задачи интегрирования функции.

Для контроля качества усвоения изложенного материала необходимо сконцентрировать внимание на следующих вопросах:

1. Неопределённый интеграл, первообразная.
2. Таблица интегралов.
3. Простейшие методы интегрирования.
4. Инвариантность формул интегрирования.
5. Метод замены переменной.
6. Метод интегрирования по частям.
7. Интегрирование рациональных дробей.
8. Интегрирование тригонометрических функций.
9. Интегрирование иррациональных функций: рациональные и тригонометрические подстановки.

1.1. НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Математические действия встречаются попарно, образуя пары двух взаимообратных действий. Такими парами, например, являются сложение и вычитание, умножение и деление, возвышение в целую положительную степень n и извлечение корня.

Характеристики функций можно также рассматривать как действия, и эти действия также распределяются попарно: на прямые и обратные. Если заданная функция обозначается через $f(x)$, то имеет место обратная функция $x = \varphi(y)$ [можно писать $y = \varphi(x)$]. Так, например, функции, написанные в одной колонке, обратны функциям, стоящим в другой колонке:

$$\begin{array}{cc} x^2+1 & \pm\sqrt{x-1} \\ a^x & \log_a x \\ \sin x & \arcsin x \end{array}$$

При этом следует обратить внимание на то обстоятельство, что в то время, как прямые действия почти всегда однозначны, действия обратные, чаще всего, – действия многозначные (например, первая и третья функции).

В разделе, посвящённом дифференциальному исчислению, также была пара функций: $f(x)$ и $f'(x)$, из которых первая есть исходная (первообразная), а вторая – её производная. Далее первообразную будем обозначать $F(x)$, а производную – $f(x)$ и дадим следующее определение:

О п р е д е л е н и е 1.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на некотором промежутке, если для всех значений x из этого промежутка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Например, для функции $f(x) = 4x^3$ первообразной является функция $F(x) = x^4$, так как $F'(x) = 4x^3 = f(x)$ при любом действительном x. Дифференциальное исчисление имеет своей основной задачей следующую прямую задачу.

Из заданной первообразной $F(x)$ вывести её производную $f(x)$ (продифференцировать).

Интегральное исчисление имеет своей основной задачей следующую обратную задачу: по заданной производной $f(x)$ отыскать её первообразную $F(x)$ (проинтегрировать).

Поэтому в широком смысле действие интегрирования обратно действию дифференцирования. В соответствии с действием отыскания первообразных, каждая такая первообразная $F(x)$ для данной производной $f(x)$ называется интегралом (индивидуальным) от функции $f(x)$.

Дифференцирование есть действие прямое и однозначное, ибо непрерывная функция $F(x)$ не может иметь двух различных производных $f(x)$. Интегрирование же есть действие обратное, и подобно большинству обратных действий, оно есть действие многозначное, дающее для заданной производной $f(x)$ не один только результат $F(x)$, но бесчисленное множество их. Нетрудно доказать теорему о том, что для того, чтобы две функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ имели одну и ту же производную $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $F_1(x)$ и $F_2(x)$ отличались на постоянную величину: $F_2(x) - F_1(x) = C$.

Отсюда сразу же вытекает многозначность действия интегрирования, так как если для заданной производной $f(x)$ удалось отыскать какую-нибудь её первообразную $F(x)$, то тогда совокупность всех первообразных для $f(x)$ заключена в выражении $F(x) + C$, где C – произвольное постоянное число.

Выражение $F(x) + C$ носит название неопределённого интеграла функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$. При этом $F(x)$ называется функциональной частью неопределённого интеграла, а C – постоянной интегрирования.

Пример 1.1. Так как $\frac{d}{dx}\left(x^4\right) = 4x^3$, то функция x^4 является первообразной для $4x^3$, поэтому x^4 есть индивидуальный интеграл от $4x^3$. Такими же индивидуальными интегралами от $4x^3$ будут $x^4 + 2$, $x^4 - 7$ и т.д. Выражение $x^4 + C$, где C – произвольное постоянное число, есть неопределённый интеграл $\int 4x^3 dx = x^4 + C$. Первое слагаемое x^4 есть функциональная часть неопределённого интеграла от $4x^3$. Второе слагаемое C есть постоянное интегрирования, численную величину его можно брать какой угодно.

Произволом постоянного интегрирования пользуются для того, чтобы из всех первообразных для данной производной $f(x)$ отыскать ту, которая имеет какое-нибудь наперёд заданное свойство.

Так, в рассмотренном выше примере надо выбрать численное значение постоянного интегрирования так, чтобы получить первообразную, имеющую в заданной заранее точке $x = 2$ наперёд заданное численное значение $y = 17$.

Имеем неопределённый интеграл $x^4 + C$ и заданное условие $2^4 + C = 17$. Тогда $C = 1$.

Определённый интеграл. Хотя у всякой данной производной $f(x)$ имеется бесчисленное множество первообразных $F(x) + C$, все они обладают общим свойством: «приращения, получаемые первообразными в концах какого-нибудь данного отрезка $[a, b]$, все равны друг другу».

Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ две какие-нибудь первообразные для $f(x)$. Тогда $F_2(x) = F_1(x) + C$ и $F_2(b) = F_1(b) + C$, $F_2(a) = F_1(a) + C$.

Приращения, испытываемые первообразными для заданной $f(x)$ при переходе аргумента x от значения «a» к значению «b» есть величина постоянная:

$$F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) - F_1(a) = F(b) - F(a),$$

не зависящая, но обусловленная только самой природой произвольной $f(x)$ и числами a и b.

По этой причине приращение $F(b) - F(a)$ обозначают $\int_a^b f(x)dx$ и называют определённым интегралом от $f(x)$ между пределами a и b, причём a пишут внизу и называют нижним пределом, а число b пишут вверху и называют верхним пределом. При этом предполагается, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Таким образом, мы познакомились с тремя видами интегралов: индивидуальным, определённым и неопределённым.

1. Индивидуальный интеграл – это любая первообразная $F(x)$ данной функции $f(x)$. Такое отождествление привело к тому, что термин «индивидуальный» в учебниках последних лет практически не встречается.

2. Неопределённый интеграл – это совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$, записываемая в виде $\int f(x) = F(x) + C$.

3. Определённый интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$. Этот интеграл – число, равное приращению $F(x)$ при переходе x от точки a к точке b.

Далее мы посвятим определённому интегралу целый раздел, где он будет рассматриваться как результат суммирования и где будет более основательно показана связь неопределённого и определённого интегралов.

Из определения неопределённого интеграла вытекают его свойства.

Свойство 1.

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x) \quad \text{или} \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

Свойство 2.

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{или} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

Следующее свойство легко проверяется дифференцированием.

Свойство 3. (Линейность). Пусть $a = \text{const}, b = \text{const}$, тогда

$$\int (af(x) + bg(x))dx = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx.$$

Свойство 4. (Инвариантность формул интегрирования). Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – любая функция, имеющая непрерывную производную.

Следствие. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \text{ где } a = \text{const}, b = \text{const}.$$

О нахождении неопределённых интегралов. Одной из важных задач интегрального исчисления является: для заданной функции $f(x)$ отыскать её первообразную $F(x)$. Здесь возникают два вопроса:

1. Всегда ли имеется первообразная у заданной функции $f(x)$?

2. Как отыскать первообразную $F(x)$ для $f(x)$ (если доказано, что она существует)?

Ответ на первый вопрос гласит так: «всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ может рассматриваться как производная от некоторой другой непрерывной функции $F(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$».

Ответ на второй вопрос более сложный, так как математический анализ, утверждая, что у всякой непрерывной $f(x)$ имеется первообразная $F(x)$, не утверждает, что её можно фактически (т.е. конечным образом) отыскать. Более того, алгебраические и всякие иные конечные манипуляции необходимо приводят к весьма ограниченному кругу неопределённых интегралов, которые можно «взять», т.е. выразить через комбинации известных нам функций, как то: алгебраических, тригонометрических и им обратных, логарифмических и показательных, взятых в конечном виде. Каждые из перечисленных функций, а также и их всевозможные комбинации (в конечном числе) составляют так называемый класс элементарных функций. Этот класс, однако, далеко не исчерпывает всех непрерывных функций и, следовательно, далеко не всякий интеграл, существование которого доказано, может быть выражен через элементарные функции.

Например, рассмотрим четыре интеграла:

$$\int \frac{dx}{\ln x}, \quad \int \frac{\ln x}{x}dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{\sin x}{x}dx.$$

Интегралы: первый и третий, а также второй и четвёртый отличаются тем, что в них вместо $\ln x$ присутствует $\sin x$. Но между ними большая разница: $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ не берутся в элементарных функциях, а

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{\ln^2 x}{x} + C\ ; \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C\ .$$

Тем не менее, функции, которые изображаются интегралами $\int \frac{dx}{\ln x}$, $\int \frac{\sin x}{x}dx$ существуют; значения этих функций могут быть вычислены с любой степенью точности посредством использования бесконечного числа простых алгебраических операций (степенных рядов).

Интегральное исчисление предлагает ряд целесообразных приёмов, достаточных для довольно многих случаев. Но не надо заблуждаться относительно силы этих приёмов, они лишь систематизируют и приводят в некоторый порядок первоначальный подход при помощи непосредственного нащупывания и догадки, и ничего более. Фактически можно сказать, что интегрирование в сущности есть процесс целесообразно направленных гаданий и попыток, для облегчения которых составлена таблица так называемых основных интегралов. Используемый зачастую способ непосредственного интегрирования состоит в том, что сравнивается данный дифференциал $f(x)dx$, который надо проинтегрировать с формулами этой таблицы, и если окажется, что он там содержится, то интеграл найден.

Если же его там нет, тогда всё-таки пробуют его привести к одному из них, употребляя те или иные приёмы, из которых некоторые требуют большого искусства или даже удачи, и достигнуть этого искусства можно только практикой.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$;
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;
4. $\int e^x dx = e^x + C$;
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$;
8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$;
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
11. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$;
12. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$;
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;
14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$;
15. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;
16. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$;
17. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$;
18. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$.

1.2. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИЁМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Простейшие приёмы интегрирования используют свойства неопределённых интегралов и тождественные преобразования подынтегральной функции. Их можно проклассифицировать следующим образом: непосредственное интегрирование, разложение подынтегральной функции, подведение под знак дифференциала.

Непосредственное интегрирование – нахождение неопределённых интегралов непосредственно по таблице с использованием свойства линейности и следствия к свойству 4.

Пример 1.2.

$$\int\left(4\cos 2x-3x^2+\frac{1}{4x-3}\right)dx=4\int\cos 2x dx-3\int x^2dx+\int\frac{dx}{4x-3}=$$

$$=4\frac{1}{2}\sin 2x-3\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}\ln|4x-3|+C=2\sin 2x-x^3+\frac{1}{4}\ln|4x-3|+C.$$

Разложение подынтегральной функции – приём интегрирования, при котором подынтегральная функция путём тождественных алгебраических или тригонометрических преобразований представляется в виде суммы функций, которые интегрируются непосредственно.

Пример 1.3. $\int \operatorname{tg}^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\operatorname{tg}x-x+C.$$

Пример 1.4.

$$\int\frac{dx}{x^2-4x+3}=\left|\begin{array}{c}\text{найдём корни уравнения } x^2-4x+3=0,\\ \text{разложим знаменатель на множители}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{dx}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{2}\int\frac{(x-1)-(x-3)}{(x-1)(x-3)}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{x-1}{(x-1)(x-3)}-\frac{x-3}{(x-1)(x-3)}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x-1|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C.$$

Подведение под знак дифференциала – преобразование дифференциала $g'(x)dx=dg(x)$, с помощью которого функция $g(x)$ становится переменной интегрирования, и на основании инвариантности формул интегрирования интеграл берётся непосредственно.

Пример 1.5. $\int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+1}\,d\left(x^2+1\right)=\frac{1}{2}\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}{3/2}+C.$

Пример 1.6. $\int\sin x\cos^5 x\,dx=|\sin x dx=-d\cos x|=-\int\cos^5 x\,d\cos x=$

$$=-\frac{\cos^6 x}{6}+C.$$

1.3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Так как интегрирование – действие, обратное дифференцированию, то правилам дифференцирования должны соответствовать некоторые правила интегрирования. Два основных метода: метод замены переменной и интегрирование по частям – являются соответственно аналогами правил дифференцирования сложной функции и дифференцирования произведения.

Интегрирование называется формальным, когда его, в конце концов, сводят на использование таблицы интегралов. Если в каком-нибудь рассматриваемом случае эта таблица не имеет интеграла, похожего на заданный интеграл, часто всё же оказывается возможным так преобразовать этот последний, чтобы он зависел только от формул, образующих эту таблицу.

Различными способами такого сведения на таблицу являются:

а) использование подходящей замены переменной;

б) интегрирование по частям;

в) применение теории разложения рациональных дробей.

Метод замены переменной. Этот метод является обобщением приёма интегрирования подведением под знак дифференциала. В сложных случаях интеграл $\int f(x)dx$ удаётся привести к табличному, если вместо *x* ввести новую переменную интегрирования *t*, сделав подстановку $x = \varphi(t)$. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \, . \qquad (1.1)$$

Формула (1.1) называется *формулой замены переменной* в неопределённом интеграле. Здесь $\varphi(t)$ – монотонная, непрерывно дифференцируемая функция. В результате интегрирования по формуле (1.1) получаем функцию переменной *t*. Для возвращения к переменной *x* необходимо *t* выразить через *x* из соотношения $x = \varphi(t)$.

Пример 1.7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+x} = \left| \begin{matrix} x = t^4 \\ dx = 4t^3dt \end{matrix} \right| = \int \frac{4t^3dt}{t^2+t^4} = 2\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{t^2+1} =$

$= 2\ln\left(t^2+1\right) + C = 2\ln\left(\sqrt{x}+1\right) + C$.

Замечание. При замене переменной в неопределённом интеграле иногда более удобно задавать не *x* как функцию от *t*, а наоборот: *t* как функцию от *x*.

Пример 1.8.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{e^x+1}=t,\ e^x=t^2-1, \\ x=\ln\left(t^2-1\right),\ dx=\dfrac{2tdt}{t^2-1} \end{array} \right| = \int \frac{2tdt}{t\left(t^2-1\right)} =$$

$$=2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C .$$

Метод интегрирования по частям. Пусть $u=u(x)$, $v=v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные. Тогда $d(uv)=u\cdot dv+v\cdot du$ или $u\cdot dv=d(uv)-v\cdot du$. Интегрируя это равенство, получим

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du . \qquad (1.2)$$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям*. Она даёт возможность свести вычисление интеграла $\int u\,dv$ к вычислению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Чтобы применить этот метод в каком-нибудь данном случае, нужно уметь разбить заданное подынтегральное выражение на два множителя, именно на u и на dv. Общих правил для этого, к сожалению, никаких нельзя дать, кроме:

а) dx должен быть всегда часть dv;

б) надо уметь интегрировать dv;

в) когда интегрируемое выражение есть произведение двух функций, тогда наиболее сложный множитель надо рассматривать как часть dv.

Пример 1.9.

$$\int x\sin x\,dx = \left| \begin{array}{c} u=x,\quad du=dx,\quad dv=\sin x\,dx, \\ v=\int \sin x dx=-\cos x \text{ (можно положить } C=0) \end{array} \right| =$$

$$=-x\cos x-\int(-\cos x)dx=-x\cos x+\sin x+C .$$

Укажем некоторые типы функций, которые удобно интегрировать по частям, т.е. с помощью формулы (1.2).

1. Функции вида $P_n(x)e^{ax}$, $P_n(x)\sin ax$, $P_n(x)\cos ax$, где $P_n(x)$ – многочлен, a – число. Удобно положить $u=P_n(x)$ (пример 1.9).

2. Функции вида

$P_n(x)\arcsin x,\ P_n(x)\arccos x,\ P_n(x)\operatorname{arctg} x,\ P_n(x)\ln x$. Удобно положить $dv = P_n(x)dx$.

Пример 1.10.

$$\int \operatorname{arctg} x\,dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x, & du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = dx, & v = x \end{matrix} \right| = x\operatorname{arctg} x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{1+x^2} = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + C.$$

3. Функции вида $e^{ax}\sin bx,\ e^{ax}\cos bx$, где a и b – числа. Здесь формула интегрирования по частям применяется дважды. За u оба раза можно принять функцию $u = e^{ax}$.

Пример 1.11.

$$\int e^x \cos x\,dx = \left| \begin{matrix} u = e^x, \quad du = e^x dx, \\ dv = \cos dx,\ v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx = \left| \begin{matrix} u = e^x, \quad du = e^x dx, \\ dv = \sin x\,dx,\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x + \int e^x \cos x\,dx\right) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx.$$

Проинтегрировав два раза по частям, вернулись к исходному интегралу. Такой интеграл называется возвратным. Обозначим его $J = \int e^x \cos x\,dx$ и найдём из уравнения

$$J = e^x \sin x + e^x \cos x - J.$$

Учитывая произвольную постоянную, окончательно получим

$$\int e^x \cos x\,dx = \frac{e^x}{2}\left(\sin x + \cos x\right) + C.$$

Интегрирование функций требует некоторой изобретательности: индивидуального подхода к каждой подынтегральной функции. Однако есть классы функций, интегралы от которых находятся при помощи определённой последовательности действий.

1.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рациональные функции (рациональные дроби) – функции вида

$$R(x)=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степени m и n соответственно.

Если $m<n$, то рациональная дробь называется *правильной*, в противном случае, т.е. при $m\geq n$, рациональная дробь является неправильной. Если дробь неправильная, то числитель $P_m(x)$ делят «уголком» на знаменатель $Q_n(x)$ и получают сумму многочлена и правильной рациональной дроби. Например, рациональная дробь

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1}$$

является неправильной. Выполним деление «уголком»:

$$\begin{array}{r|l}
-\;x^5+x^3-x^2+1 & x^3-2x+1 \\
\underline{x^5-2x^3+x^2} & \overline{x^2+3} \\
-\;3x^3-2x^2+1 & \\
\underline{3x^3-6x+3} & \\
-2x^2+6x-2. &
\end{array}$$

Представим неправильную рациональную дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби (так же, как числовую дробь):

$$\frac{x^5+x^3-x^2+1}{x^3-2x+1}=x^2+3+\frac{-2x^2+6x-2}{x^3-2x+1}.$$

Таким образом, интегрирование рациональной функции сводится к нахождению интеграла от правильной рациональной дроби.

Среди правильных рациональных дробей выделяют простейшие. К ним относятся

(I) $\dfrac{A}{x-a}$; (II) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k\geq 2,\ k\in N)$;

(III) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (знаменатель не имеет действительных корней, т.е. $p^2-4q<0$);

(IV) $\dfrac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}$ ($k \geq 2$, знаменатель не имеет действительных корней), где A, a, M, N, p, q – действительные числа. Такие дроби называются *простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов.*

Найдём интегралы от простейших рациональных дробей.

(I) $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C$.

(II) $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}dx = A\frac{(x-a)^{1-k}}{1-k} + C$.

(III) $\displaystyle J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \left| \begin{matrix} \text{выделим в числителе производную} \\ \text{знаменателя}: \left(x^2+px+q\right)' = 2x+p \end{matrix} \right| =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{M(2x+p)+2N-Mp}{x^2+px+q}dx = \frac{M}{2}\int \frac{(2x+p)\,dx}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

Выделим в знаменателе второго интеграла полный квадрат, и учитывая, что $q - p^2/4 > 0$, получаем

$$J = \frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x+p/2)^2 + q - p^2/4} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{(N - M\,p/2)}{\sqrt{q-p^2/4}}\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C.$$

(IV) Интеграл IV типа подстановкой $x + p/2 = t$ сводится к сумме двух интегралов:

$$\int \frac{Mx+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = \left| \begin{matrix} x+p/2 = t, \ dx = dt \\ a^2 = q - p^2/4 > 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= M\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{M}{2}\int \left(t^2+a^2\right)^{-k}dt^2 +$$

$$+ \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{M}{2}\frac{\left(t^2+a^2\right)^{1-k}}{1-k} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k}.$$

Ко второму интегралу можно применить рекуррентную формулу [5]

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^k} = \frac{t}{2a^2(k-1)\left(t^2+a^2\right)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{k-1}}.$$

Приведём пример интегрирования простейшей рациональной дроби III типа.

Пример 1.12.

$$\int \frac{3x+5}{x^2+4x+8}dx = \left| \begin{array}{c} \left(x^2+4x+8\right)' = \\ = 2x+4 \end{array} \right| = \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)-4}{x^2+4x+8}dx +$$

$$+\int \frac{5dx}{x^2+4x+8} = \frac{3}{2}\int \frac{d\left(x^2+4x+8\right)}{x^2+4x+8} - \int \frac{dx}{x^2+4x+8} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+4x+8\right) - \int \frac{dx}{(x+2)^2+4} = \frac{3}{2}\ln\left(x^2+4x+8\right) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{2} + C\ .$$

Итак, мы показали, как интегрировать простые дроби. Что касается произвольной правильной дроби, то её интегрирование основывается на следующей важной теореме, которая доказывается в курсе алгебры [1].

Теорема 1.1. Каждая правильная рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, $m < n$, может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей.

С доказательством этого утверждения можно познакомиться в [3, 5]. Здесь же ограничимся рассмотрением на конкретном примере.

Пример 1.13. $\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx$.

Разложим знаменатель на множители:

$$x^3-3x^2+4 = x^3+x^2-4x^2+4 = x^2(x+1)-4(x-1)(x+1) =$$

$$= (x+1)\left(x^2-4x+4\right) = (x+1)(x-2)^2\ ,$$

тогда подынтегральную функцию можно представить как сумму простейших дробей с неопределёнными коэффициентами:

$$\frac{x-5}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}\ .$$

Найдём коэффициенты A, B, C. Приведя дроби в правой части равенства к общему знаменателю и освобождаясь от него, получим

$$x-5 = A(x-2)^2 + B(x+1)(x-2) + C(x+1)$$

или

$$x-5 = x^2(A+B) + x(C-4A-B) + 4A-2B+C\ .$$

Составим три уравнения для вычисления коэффициентов A, B, C. Здесь удобно положить $x=-1$, $x=2$ и приравнять коэффициенты левой и правой части равенства при x^2:

$$\begin{array}{r|l} x=-1 & -6=9A \ \Rightarrow\ A=-2/3, \\ x=2 & -3=3C \ \Rightarrow\ C=-1, \\ x^2 & 0=A+B \Rightarrow\ B=2/3. \end{array}$$

Следовательно,

$$\int \frac{x-5}{x^3-3x^2+4}dx=\int\left(\frac{-2/3}{x+1}+\frac{2/3}{x-2}-\frac{1}{(x-2)^2}\right)dx=$$

$$=-\frac{2}{3}\ln|x+1|+\frac{2}{3}\ln|x-2|+\frac{1}{x-2}+C=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C\,.$$

1.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Часто при интегрировании главные усилия направляются на отыскание преобразований, сводящих данный интеграл к интегралу от рациональной функции.

Обозначим $R(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ – выражение, рациональное относительно $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$, т.е. такое, в котором над $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ производится только четыре арифметических действия, сложение с числом и умножение на число.

Интегралы вида $\int R(\sin x,\cos x)dx$ приводятся к интегралам от рациональных дробей с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, $-\pi<x<\pi$. Действительно,

$$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x=2\operatorname{arctg}t,\qquad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}\,,$$

так что

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}=\int R_1(t)dt\,,$$

где $R_1(t)$ – рациональная функция.

Пример 1.14.

$$\int\frac{dx}{2+3\sin x}=\left|\begin{array}{c} t=\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{2},\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}, \\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{2\,dt}{1+t^2}}{2+3\dfrac{2t}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+3t+1}=\int\frac{dt}{(t+3/2)^2-5/4}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{t+3/2-\sqrt{5}/2}{t+3/2+\sqrt{5}/2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2t+3-\sqrt{5}}{2t+3+\sqrt{5}}\right|+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2\,\mathrm{tg}(x/2)+3-\sqrt{5}}{2\,\mathrm{tg}(x/2)+3+\sqrt{5}}\right|+C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка даёт возможность проинтегрировать всякую функцию вида $R(\sin x,\cos x)$. Однако на практике она часто приводит к слишком сложным рациональным функциям, поэтому бывает полезно также знать другие подстановки.

1) Если подынтегральная функция обладает свойством $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, то применяется *тригонометрическая подстановка* $t=\mathrm{tg}\,x$, тогда

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2},\ \sin^2 x=\frac{\mathrm{tg}^2 x}{1+\mathrm{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2},\ dx=\frac{dt}{1+t^2}.$$

После подстановки получим интеграл от рациональной функции.

Пример 1.15.

$$\int\frac{dx}{2-\sin^2 x}=\left|\begin{array}{c} t=\mathrm{tg}\,x,\ \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}, \\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{\dfrac{dt}{1+t^2}}{2-\dfrac{t^2}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\,x}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

2) Если подынтегральная функция обладает свойством

$$R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)\quad\text{или}$$

$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x), \tag{1.3}$$

то применяются подстановки $t=\cos x$ или $t=\sin x$ соответственно

Пример 1.16. $\int \frac{\cos^3 x}{1+\sin^2 x}dx = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x}{1+\sin^2 x}dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x, \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right| =$

$= \int \frac{1-t^2}{1+t^2}dt = \int \frac{2-\left(t^2+1\right)}{t^2+1}dt = \int \left(\frac{2}{t^2+1} - 1 \right)dt = 2\,\mathrm{arctg}\; t - t + C =$

$= 2\,\mathrm{arctg}\,(\sin x) - \sin x + C$.

3) Если подынтегральная функция имеет вид $R(\sin x, \cos x) = \sin^m x \cos^n x$, где m и n – целые числа, то возможны три случая. Если, по крайней мере, одно из этих чисел нечётное, то подынтегральная функция обладает свойством (3.4), и применяются подстановки, рассмотренные выше. Если m и n – числа неотрицательные и чётные, то применяются тригонометрические формулы понижения степени:

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x, \quad 2\cos^2 x = 1 + \cos 2x.$$

Если m и n – числа чётные, и хотя бы одно из них отрицательное, то применяется подстановка $t = \mathrm{tg}\, x$ или $t = \mathrm{ctg}\, x$.

Пример 1.17. $\int \sin^4 x\,dx = \int \left((1-\cos 2x)/2\right)^2 dx =$

$= \frac{1}{4}\int \left(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx \right) =$

$$= 0{,}25(1{,}5x - \sin 2x + 0{,}125\sin 4x) + C.$$

4) Рассмотрим в заключение интегралы вида:

$$\int \cos mx \cos nx\,dx, \quad \int \sin mx \cos nx\,dx, \quad \int \sin mx \sin nx\,dx.$$

Они берутся при помощи следующих формул тригонометрии:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right];$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right];$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right].$$

Пример 1.18. $\int \cos 2x \cos 5x\,dx = \frac{1}{2}\int (\cos 7x + \cos 3x)dx = \frac{1}{14}\sin 7x +$

$+ \frac{1}{6}\sin 3x + C$.

1.6. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1) Интеграл вида

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/p}\right) dx$$

сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$,

где k – общий знаменатель дробей $m/n, \ldots, r/p$.

Пример 1.19. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt{x+2}} = \left| \begin{array}{l} x+2 = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6\int \frac{t^2 dt}{t-1} =$

$$= 6\int \frac{(t^2-1)+1}{t-1} dt = 6\int \left(t+1+\frac{1}{t-1} \right) dt = 3t^2 + 6t + 6\ln|t-1| + C = \left| t = \sqrt[6]{x+2} \right| =$$

$$= 3 \cdot \sqrt[3]{x+2} + 6 \cdot \sqrt[6]{x+2} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+2} - 1\right| + C.$$

2) Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$, $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$, $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) dx$ приводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций, с помощью следующих тригонометрических подстановок: $x = a \sin t$ для первого интеграла; $x = a \operatorname{tg} t$ для второго интеграла; $x = a/\sin t$ для третьего интеграла.

Пример 1.20. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2} dx = \left| \begin{array}{c} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t dt \end{array} \right| = \int \frac{\sqrt{4 - 4\sin^2 t}}{4\sin^2 t} 2\cos t \, dt =$

$$= \int \frac{4\cos^2 t}{4\sin^2 t} dt = \int \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t} dt = \int \left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1 \right) dt = -\operatorname{ctg} t - t + C =$$

$$= \left| t = \arcsin(x/2) \right| = C - \arcsin(x/2) - \operatorname{ctg} \arcsin(x/2) =$$

$$= C - \arcsin(x/2) - \sqrt{4-x^2} \Big/ x.$$

В последнем выражении использованы тригонометрические преобразования

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-(x/2)^2}}{x/2} = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}.$$

3) Рассмотрим несколько интегралов, зависящих от иррационального выражения $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

3.1) $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Этот интеграл можно разбить на два интеграла, выделив в числителе производную подкоренного выражения; тогда один легко взять непосредственно (как интеграл от степенной функции), а во втором – выделить полный квадрат. Аналогичные преобразования проводились в примере 1.12.

3.2) $\int \frac{dx}{(x-\beta)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Приводится к интегралу 3.1 с помощью подстановки $x-\beta=1/t$.

Пример 1.21. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x+3}} = \begin{vmatrix} x-1=1/t, & x>1, \ t>0, \\ x=1+1/t, & dx=-dt/t^2 \end{vmatrix} =$

$$= -\int \frac{t}{t^2\sqrt{(1+1/t)^2-2(1+1/t)+3}}dt = -\int \frac{dt}{\sqrt{(t+1)^2-2(t^2+t)+3t^2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{2t^2+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\sqrt{2}t+\sqrt{2t^2+1}\right)+C = \left| t=1/(x-1) \right| =$$

$$= C-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{x-1}+\sqrt{\frac{2}{(x-1)^2}+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x-1}{\sqrt{2}+\sqrt{x^2-2x+3}}+C .$$

3.3) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$. Выделением полного квадрата в подкоренном выражении интеграл сводится к одному из интегралов $\int \sqrt{p^2-t^2}\,dt$, $\int \sqrt{p^2+t^2}\,dt$, $\int \sqrt{t^2-p^2}\,dt$.

О множественности ответов при интегрировании. При нахождении неопределённых интегралов не исключены случаи получения разнообразных ответов на один и тот же интеграл. Однако проверки подтверждают правильность всех ответов, что создаёт впечатление о множественности верных ответов.

На самом деле, ответы всегда тождественны между собой, и кажущееся различие ответов всегда вызывается различием произвольных постоянных в этих случаях, обозначенных, тем не менее, одной и той же буквой *C*.

Например,

$$\int \sin 2x dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C \text{ ,}$$

с другой стороны,

$$\int \sin 2x dx = \int 2\sin x \cos x dx = 2\int \sin x d(\sin x) = \sin^2 x + C \text{ .}$$

Ответы как будто различные. Однако известно, что $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

Различие произвольных постоянных (здесь на $\frac{1}{2}$) и создало здесь кажущееся различие самих ответов.

1.7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.7.1[1]. Укажите все верные утверждения (C – произвольная постоянная)

☐ $\left(\int \cos(4-3x)dx\right)' = \cos(4-3x)$;

☐ $\int (x-1)e^{1-x}dx = \int (x-1)dx \int e^{1-x}dx$;

☐ $\int d\left(\sqrt{4-x^2}\right) = \left(\sqrt{4-x^2}\right) + C$;

☐ $\int 2\,\mathrm{tg}\, x dx = 2\int \mathrm{tg}\, x dx$.

1.7.2. Множество первообразных функции $y = e^{2x-2}$ имеет вид:

○ $e^{2x-2} + C$; ○ $2e^{2x-2} + C$; ○ $-\frac{1}{2}e^{2x-2} + C$; ○ $\frac{1}{2}e^{2x-2} + C$.

1.7.3. Первообразными функции $y = x\ln x$ являются:

☐ $\frac{x^2}{2}\ln x + 11$; $\ln x + 1$; $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) - 5$; $\frac{x^2}{4}(2\ln x - 1)$.

1.7.4. Неопределённый интеграл $\int \sqrt{1-x^2}dx$ можно представить как:

---

[1] В тестовых заданиях приняты обозначения: ○ – выбирается один вариант ответа; ☐ – выбираются несколько вариантов ответа

○ $x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; ○ $x\sqrt{1-x^2}+\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

○ $x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$; ○ $x\sqrt{1-x^2}-\int\frac{x^2dx}{2\sqrt{1-x^2}}$.

1.7.5. Правильную рациональную дробь $\frac{x}{(x-1)(x+2)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей:

○ $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}$; ○ $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}$; ○ $\frac{2x}{x-1}+\frac{x}{x+2}$; ○ $\frac{Ax+B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x+2}$.

1.7.6. Найдите интегралы (простейшие приемы интегрирования):

1) $\int\frac{dx}{5+4x}$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x}}$; 3) $\int\left(2\sqrt{x}+1\right)^2dx$;

4) $\int\frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$; 5) $\int\frac{dx}{e^{4x}}$; 6) $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

7) $\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx$; 8) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$; 9) $\int x^2\sqrt{x^3+4}\,dx$;

10) $\int\frac{dx}{x\ln x}$; 11) $\int\frac{x\,dx}{x^4+1}$; 12) $\int\frac{\operatorname{arctg}^2 x\,dx}{1+x^2}$;

13) $\int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x}$; 14) $\int\frac{3x-1}{x^2+9}dx$; 15) $\int\frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

1.7.7. Найдите интегралы (основные методы интегрирования):

1) $\int x\cos 3x\,dx$; 2) $\int(2x+3)e^{-x}dx$; 3) $\int x^2 5^x dx$;

4) $\int x^7\ln x\,dx$; 5) $\int x\operatorname{arctg} x dx$; 6) $\int x(3x+5)^9dx$;

7) $\int\frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}$; 8) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$; 9) $\int\sin\sqrt{x}\,dx$.

1.7.8. Найдите интегралы (интегрирование рациональных дробей):

1) $\int\frac{dx}{(x-3)^4}$; 2) $\int\frac{x-2}{x^2-4x+7}dx$; 3) $\int\frac{x^2dx}{x^6+2x^3+3}$;

4) $\int\frac{x-3}{x^3-x}dx$; 5) $\int\frac{(x+1)^3}{x^2-x}dx$; 6) $\int\frac{3x+2}{x(x+1)^3}dx$;

7) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; 8) $\int \frac{dx}{(x^2+2)(x-1)^2}$; 9) $\int \frac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}dx$.

1.7.9. Найдите интегралы (интегрирование тригонометрических функций):

1) $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$; 2) $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$; 3) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos x-3}$;

4) $\int \cos^3 x\,dx$; 5) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$; 6) $\int \sin^2 x\,dx$;

7) $\int \mathrm{ctg}^3 x\,dx$; 8) $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$; 9) $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{4}\,dx$.

1.7.10. Найдите интегралы (интегрирование иррациональных функций):

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-x+3}}$; 2) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$; 3) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+\sqrt{x}}$;

4) $\int \frac{\sqrt[3]{3x+4}}{1+\sqrt[3]{3x+4}}dx$; 5) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2x^2-3x+5}}$; 6) $\int \frac{dx}{\sqrt{(9+x^2)^3}}$;

7) $\int \frac{dx}{(x^2+16)\sqrt{9-x^2}}$; 8) $\int \frac{dx}{x\sqrt{10x^2-6x+1}}$; 9) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

2. ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Учебные цели. В результате изучения материала лекции студенты должны *получить представление* об определённом интеграле и его свойствах; задачах, приводящих к понятию определённого интеграла и разрешаемых, следовательно, с его помощью; интеграле с переменным верхним пределом, его свойствах; формуле Ньютона–Лейбница. *Уметь* вычислять интеграл по определению и с применением основных свойств определённого интеграла, применять определённые интегралы к решению геометрических, физических и технических задач.

II. Формирование компетенций. Способность к применению базовых математических знаний в профессиональной деятельности; способность применять методы математического анализа и моделирования.

III. Введение в тему. К понятию определённого интеграла приводят разнообразные вопросы математики и других наук. Например, один из основоположников интегрального исчисления Готфрид Лейбниц, придерживаясь геометрического подхода, отметил, что задача определения площади фигуры, расположенной под графиком, – задача интегрирования. Исаак Ньютон, в свою очередь, пришёл к понятию интеграла, решая задачу об определении пути по известной скорости.

Определённый интеграл обладает рядом важных свойств, отражающих качественных характер процессов и явлений. При геометрической иллюстрации свойств будем пользоваться геометрическим смыслом определённого интеграла: определённый интеграл равен площади криволинейной трапеции, расположенной под графиком подынтегральной функции, если эта функция на отрезке интегрирования неотрицательна.

Определённый интеграл имеет широчайшее практическое применение в математике, физике и технике.

Вопросы для контроля качества усвоения изложенного материала:

1. Задачи, приводящие к понятию определённого интеграла.
2. Определение определённого интеграла.
3. Основные свойства определённого интеграла.
4. Интеграл с переменным верхним пределом.
5. Формула Ньютона–Лейбница.
6. Приложения определённого интеграла.

2.1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Понятие интеграла возникло и постепенно укреплялось в своём значении, когда целый ряд задач геометрии и механики приводил к необходимости производить над функциями одну и ту же аналитическую операцию, содержание которой составлял предельный переход некоторого совершенно определённого типа.

Задача о площади криволинейной трапеции. Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$, определённую на отрезке $[a,b]$, такую что $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a,b]$.

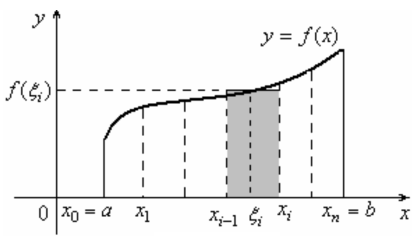

Рис. 2.1

Криволинейной трапецией называется часть плоскости, ограниченная графиком функции $y = f(x)$, отрезком $[a,b]$ оси абсцисс, прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 2.1).

Отрезок $[a,b]$ будем называть *основанием* трапеции.

Поставим задачу найти площадь S криволинейной трапеции.

Для этого разобьём отрезок $[a,b]$ на n частичных промежутков точками $a = x_0 < x_1 < x_2 <...< x_n = b$. Получим совокупность элементарных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots,n$. Тогда криволинейная трапеция разобьётся на n элементарных трапеций с основаниями $[x_{i-1}, x_i]$ (рис. 2.1).

Положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, и на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольным образом выберем точку ξ_i. Рассмотрим прямоугольник с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ и высотой $f(\xi_i)$. Тогда площадь S_i криволинейной трапеции с основанием $[x_{i-1}, x_i]$ приближённо будет равна площади этого прямоугольника:

$$S_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Сумма площадей элементарных трапеций

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sigma_n$$

будет приближённо характеризовать площадь криволинейной трапеции.

Фактически σ_n зависит как от способа разбиения отрезка $[a,b]$, так и от выбора точек ξ_i. Очевидно, что чем меньше каждый из отрезков разбиения, тем точнее σ_n.

Задача о работе переменной силы. Пусть под действием переменной силы $\vec{F}(s)$ тело движется по прямой линии от точки M к точке N, причём направление силы совпадает с направлением движения (рис. 2.2). Здесь сила $F(s)$ есть функция расстояния s от точки M до данной точки отрезка MN. Требуется определить работу A, совершаемую при перемещении тела из точки M в точку N. Обозначим через S длину пути MN.

Разобьём отрезок MN на элементарные части точками, находящимися на расстояниях $s_0 = 0,\ s_1, s_2, \dots, s_{i-1}, s_i, \dots, s_n = S$ от точки M.

Найдём работу A_i на элементарном участке $[s_{i-1}, s_i]$ приближённо, считая силу на этом участке постоянной и равной $F(\xi_i)$, где ξ_i –

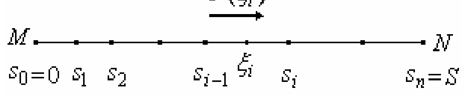

Рис. 2.2

произвольно выбранная точка отрезка $[s_{i-1}, s_i]$. Тогда работа равна произведению силы на перемещение

$$A_i \approx F(\xi_i)\Delta s_i .$$

Так как работа на всём пути равна сумме работ, то

$$A = \sum_{i=1}^{n} A_i \approx \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta s_i = \sigma_n .$$

Несмотря на различный характер решаемых задач математического анализа для исследования получили одну и ту же формулу.

2.2. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА, ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Пусть задана некоторая функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Разобьём этот отрезок на n частей, обозначая точки деления через

$$a < x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b ;$$

в каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i] (i = 1, 2, ..., n)$ выберем произвольную точку ξ_i; значение функции $f(\xi_i)$ умножим на длину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего отрезка и составим сумму всех таких произведений $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ – такую сумму в математическом анализе называют интегральной.

Представим теперь, что перед нами вся совокупность подобного рода разбиений отрезка $[a, b]$ и всех возможных выборов точек ξ_i (число n частичных отрезков разбиения также может произвольно варьироваться), а значит и всех возможных значений суммы σ_n .

Обозначим через λ длину наибольшего из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ в данном разбиении. Если существует такое число I, что сумма σ_n стремится к I при $\lambda \to 0$, каковы бы ни были предприняты разбиения и выбранные точки ξ_i, то это число называют определённым интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают

$$\int_a^b f(x)dx .$$

Существует более математически строгая формулировка определения определённого интеграла, которую можно найти в классических учебниках по математическому анализу.

Функция $f(x)$, для которой существует определённый интеграл на отрезке $[a, b]$, называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$.

Необходимым условием интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ является её *ограниченность* на этом отрезке. Поэтому в дальнейшем, рассматривая определённые интегралы, будем считать подынтегральную функцию $f(x)$ ограниченной, т.е.

$$\exists\, m, M \in \mathrm{R}\ \forall x \in [a, b]\ (\, m \le f(x) \le M\,).$$

Достаточным условием интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ является *непрерывность* функции на этом отрезке.

2.3. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Все рассмотренные ниже функции являются интегрируемыми на соответствующих отрезках.

Свойство 1. Определённый интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(y)dy = \ldots\ .$$

Свойство 2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Свойство 3 (ориентированность). При перестановке пределов интегрирования определённый интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\ .$$

Свойство 4. $\int_a^b dx = b - a$.

Свойство 5 (аддитивность)

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\ . \qquad (2.1)$$

Свойство 6 (однородность)

$$\int_a^b c\, f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx\ .$$

Свойство 7 (аддитивность по отрезку). Для любых чисел a, b и c имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx .$$

Свойство 8 (монотонность). Если для всех x из $[a, b]$ имеет место неравенство $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_b^b g(x)dx .$$

Следствие. Если $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Свойство 9. $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \ (a < b)$.

Свойство 10. Если M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ $(a < b)$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) . \tag{2.2}$$

Свойство 11. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то существует точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) . \tag{2.3}$$

Формула (2.3) называется *формулой среднего значения*, а величина $f(c)$ в этой формуле называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

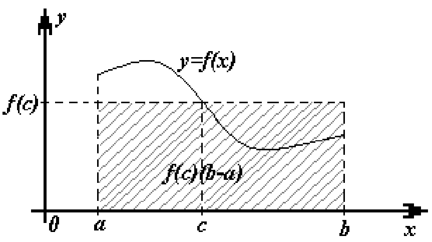

Рис. 2.3

Понятие среднего значения очень употребительно в технике. Многие величины часто характеризуются своими средними значениями; таковы, например, давление пара, сила и напряжение переменного тока и т.п.

Замечание 1. Свойство 11 имеет чёткий геометрический смысл: величина определённого интеграла при $f(x) > 0$ равна площади прямоугольника, имеющего высоту $f(c)$ и основание $b - a$ (рис. 2.3).

Замечание 2. Если $f(x) > 0$ на отрезке $[a, b]$, то $f(c)(b-a) > 0$, а, следовательно, и $\int_a^b f(x)dx > 0$.

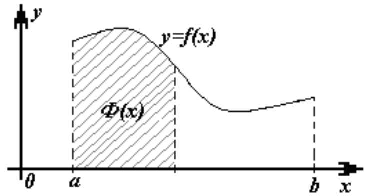

Рис. 2.4

Интеграл с переменным верхним пределом и его производная. Рассмотрим интеграл с переменным верхним пределом, представляющий собой функцию своего верхнего предела. Обозначим

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt .$$

Геометрически функция $\Phi(x)$ представляет собой площадь заштрихованной криволинейной трапеции, если $f(x) \geq 0$ (рис. 2.4). При этом функция $\Phi(x)$ является возрастающей, так как с ростом x площадь криволинейной трапеции увеличивается.

Свойство 13. Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т.е.

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)'_x = f(x) .$$

Следовательно, одной из первообразных для $f(x)$ будет $\int_a^x f(t)dt$.

2.4. ФОРМУЛА НЬЮТОНА–ЛЕЙБНИЦА

Рассмотрим наиболее удобный метод вычисления определённых интегралов, основанный на тесной связи между понятиями первообразной и определённого интеграла.

Теорема 2.1 (основная теорема интегрального исчисления). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и функция $F(x)$ является некоторой её первообразной на этом отрезке, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) . \qquad (2.4)$$

Формула (5.4) называется формулой Ньютона–Лейбница.

Примем теорему без доказательства.

Разность $F(b) - F(a)$ принято условно записывать в виде $F(x)\Big|_a^b$.

Тогда формула (4.4) примет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b .$$

Таким образом, для вычисления определённого интеграла следует найти первообразную функцию, а потом вычислить приращение первообразной функции на отрезке интегрирования $[a, b]$.

Пример 2.1. Вычислить интеграл

$$\int_0^1 \left(e^x - 1\right)^4 e^x dx = \int_0^1 \left(e^x - 1\right)^4 d\left(e^x - 1\right) = \frac{\left(e^x - 1\right)^5}{5}\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\left(e^1 - 1\right)^5}{5} - \frac{\left(e^0 - 1\right)^5}{5} = \frac{(e-1)^5}{5} .$$

Формула Ньютона–Лейбница существенно предполагает, что подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на всём отрезке $[a, b]$ и, значит, не имеет на этом отрезке никаких особенностей.

Если же этого не принимать во внимание и если начать применять формулу Ньютона–Лейбница, не соблюдая этого условия, то тогда легко прийти к грубейшим ошибкам и к неверным ответам в чисто технических вопросах.

Например, формально находим интеграл

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2} = \left(-\frac{1}{x-2}\right)\Bigg|_1^3 = -1 - 1 = -2 .$$

Ясно, что произошла ошибка, так как подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ везде на отрезке $[1, 3]$ положительна. Поэтому соответствующая интегральная сумма при $a < b$ также положительна, и её предел не может быть отрицательным числом.

Ошибка произошла из-за того, что при $x \to 2$ подынтегральная функция уходит в $+\infty$.

2.5. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Замена переменной в определённом интеграле.

Пусть $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда если: функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[\alpha, \beta]$; множеством значений функции $x = \varphi(t)$ является отрезок $[a, b]$; $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\ . \tag{2.5}$$

Формула (5.5) носит название *формулы замены переменной в определённом интеграле*. При вычислении определённого интеграла по формуле (5.5) не требуется возвращения к старой переменной x. Достаточно из формул $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ найти пределы изменения новой переменной t.

Пример 2.2.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{ll} x = \sin t & dx = \cos t\,dt \\ 0 \le x \le 1 \ \Rightarrow & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t\,dt \right) = \frac{1}{2}\left(t\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sin 2t\ \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

В случае введения подстановки $\varphi(x) = t$, пределы новой переменой определяются просто $\varphi(a) = t_1$, $\varphi(b) = t_2$, но функция должна быть строго монотонной на интервале (a, b) и иметь производную, не равную нулю ни в одной точке этого интервала.

Интегрирование по частям в определённом интеграле.

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны вместе со своими производными $u'(x)$ и $v'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\ \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx\ . \tag{2.6}$$

Формула (2.6) носит название *формулы интегрирования по частям в определённом интеграле.*

Пример 2.3. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx$.

Решение. Разобьём подынтегральное выражение на части $u = \ln(x+1)$ и $dv = dx$ и применим формулу (2.6):

$$\int\limits_0^{e-1} \ln(x+1)dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln(x+1), & du = \dfrac{dx}{x+1}; \\ dv = dx, & v = x; \end{array} \right| = x\ln(x+1)\Big|_0^{e-1} - \int\limits_0^{e-1} \frac{xdx}{x+1} =$$

$$= (e-1)\ln(e-1+1) - 0 - \int\limits_0^{e-1} \frac{x+1-1}{x+1}dx = (e-1) - \int\limits_0^{e-1} dx + \int\limits_0^{e-1} \frac{dx}{x+1} =$$

$$= (e-1) - x\Big|_0^{e-1} + \ln(x+1)\Big|_0^{e-1} = (e-1) - (e-1) + 0 + \ln(e-1+1) - \ln 1 = 1.$$

2.6. ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЁННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассматривание интегрирования как процесса, обратного дифференцированию, является лишь одной стороной дела. Другой стороной и, притом, несравненно более важной для применения интегрального исчисления к геометрии, механике и, вообще, ко всему естествознанию, является то обстоятельство, что интегральное исчисление даёт нам в руки могущественный способ фактически находить предел сумм бесконечно увеличивающегося числа бесконечно малых слагаемых.

Стремление сводить свои проблемы к отысканию пределов таких сумм естествознание имело ещё до эпохи Ньютона. Таким образом, интегральное исчисление появилось даже несколько ранее дифференциального исчисления. С этой точки зрения интегральное исчисление получает вид уже не исчисления, обратного дифференцированию, а процесса суммирования.

Однако обе эти стороны интегрального исчисления тесно переплетаются между собой и, без обращения дифференцирования, интегральное исчисление как процесс суммирования не много бы стоило, так как этот процесс суммирования есть процесс не прямой, а косвенный. Прямым образом производить отыскание таких сумм чрезвычайно трудно, практически возможно лишь в «модельных» случаях.

Но если решена проблема, обратная дифференцированию, т.е. отыскание неопределённого интеграла $\int f(x)dx$, то тогда становится решённой и проблема суммирования, ибо предел суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i$, где $x_0 = a$, $x_n = b$ и где при $n \to \infty$ в то время, когда все $\Delta x_i \to 0$ равен $\left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b$.

Таким образом, вся сила интегрального исчисления основана на возможности находить неопределённые интегралы $\int f(x)dx$, не производя никаких переходов к пределу. По этой причине в первую очередь необходимо обучиться искусству отыскивать неопределённые интегралы всеми возможными приёмами, а уж затем научиться применять найденные интегралы к суммированию бесконечно малых величин, необходимому для многочисленных задач геометрии, механики и, вообще, всего естествознания.

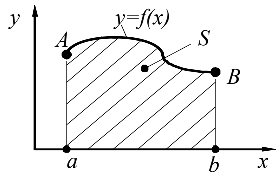

Рис. 2.5

Площадь плоской фигуры в декартовых и полярных координатах.

Площадь криволинейной трапеции. В пункте 1.1 была получена формула для вычисления площади криволинейной трапеции (рис. 2.5), ограниченной сверху графиком непрерывной неотрицательной на отрезке [a, b] функции $y = f(x)$:

$$S = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad (2.7)$$

Если $f(x) \le 0$ для $\forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le 0$ и тогда $S = -\int_a^b f(x)dx$.

Рассмотрим сложную криволинейную трапецию, ограниченную линиями $x = a,\ x = b,$ $y = f(x), y = g(x)$, $\left(f(x) \ge g(x) \forall x \in [a,b]\right)$, функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке [a, b] (рис. 2.6).

Тогда площадь S будет равна

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)dx\,. \qquad (2.8)$$

Если верхняя граница $\overset{\cup}{AB}$ криволинейной трапеции задана *параметрически*:

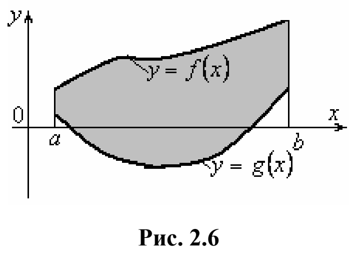

Рис. 2.6

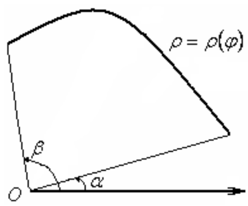

Рис. 2.7

$$\overset{\cup}{AB}:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \; t\in[\alpha,\beta],\; x(\alpha)=a,\; x(\beta)=b,$$

функция $y(t)$ непрерывная и неотрицательная на отрезке $[\alpha,\beta]$, функция $x(t)$ имеет на этом отрезке непрерывную производную, тогда

$$S=\int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt\,. \tag{2.9}$$

Площадь криволинейного сектора. Рассмотрим полярную систему координат на плоскости. *Криволинейным сектором* называется часть плоскости, ограниченная лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и графиком непрерывной функции $\rho=\rho(\varphi)$ (рис. 2.7).

Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi\,. \tag{2.10}$$

Пример 2.4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+3$ и $y=3x-1$.

Решение. Изобразим кривые на плоскости Oxy (рис. 2.8).

Решая систему уравнений $\begin{cases} y=x^2-2x+3, \\ y=3x-1 \end{cases}$, находим координаты точек пересечения кривых $x_1=1,\ x_2=4$.

Используя формулу (2.8), получаем:

$$S=\int_1^4\left(3x-1-\left(x^2-2x+3\right)\right)dx=\int_1^4\left(-x^2+5x-4\right)dx=-\frac{x^3}{3}\bigg|_1^4+5\frac{x^2}{2}\bigg|_1^4-4x\big|_1^4=\frac{9}{2}.$$

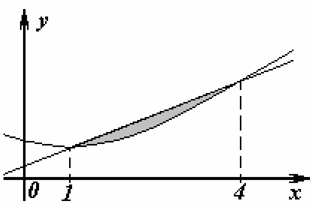

Рис. 2.8

Пример 2.5. Найти площадь, ограниченную эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Параметрические уравнения эллипса: $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t, \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ (рис. 2.9). Учитывая симметрию фигуры, вычислим площадь заштрихованной криволинейной трапеции. По формуле (2.9), учитывая, что при $x = 0$ имеем $t=\frac{\pi}{2}$, а при $x = a$ имеем $t = 0$, получаем

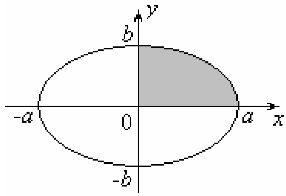

Рис. 2.9

$$S_1=\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} a\sin t\left(b\cos t\right)' dt=-ab\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sin^2 t\,dt=$$

$$=ab\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{ab}{2}\left(t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\sin 2t}{2}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)=\frac{\pi ab}{4}.$$

Тогда площадь всей фигуры $S=4\cdot\frac{\pi ab}{4}=\pi ab$ (ед. кв.).

Пример 2.6. Найти площадь фигуры, ограниченной полярной осью и первым витком спирали Архимеда $\rho = a\varphi$, $a > 0$ (рис. 2.10).

Решение. При изменении φ от 0 до 2π полярный радиус описывает кривую, ограничивающую криволинейный сектор. Применяем формулу (2.10)

$$S=\frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi^2 d\varphi,$$

$$S=\frac{a^2}{6}\varphi^3\Bigg|_{0_3}^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi^3a^2 \text{ (кв. ед.).}$$

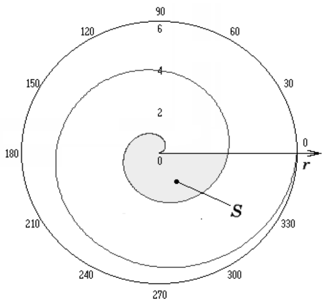

Рис. 2.10

Длина дуги плоской кривой. Пусть плоская кривая $\overset{\smile}{AB}$ задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ (рис. 2.11), функция $f(x)$ имеет непрерывную производную на $[a, b]$. Длина L кривой $\overset{\smile}{AB}$ будет равна

$$L=\int\limits_{a}^{b}\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx. \qquad (2.11)$$

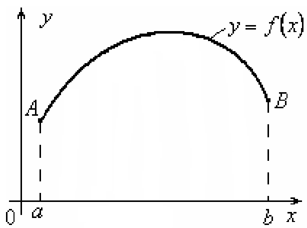

Рис. 2.11

Если кривая $\overset{\smile}{AB}$ задана параметрически:

$$\overset{\cup}{AB}:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta],$$

длина кривой вычисляется по формуле

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt . \qquad (2.12)$$

Если кривая $\overset{\cup}{AB}$ задана в полярных координатах: $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, длина кривой равна

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi . \qquad (2.13)$$

Пример 2.7. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключённой между точками (0,0) и (4,8).

Решение. Длина дуги в этом случае вычисляется по формуле (2.11). Функция $y(x)$ определена для $x \ge 0$. Поскольку данные точки лежат в первой четверти, то $y = x^{\frac{3}{2}}$. Отсюда $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ и $\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}$. Следовательно,

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left[\left(1 + \frac{9}{4}4\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - 1\right) .$$

Пример 2.8. Вычислить длину дуги первого витка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$.

Решение. Кривая задана в полярной системе координат, следовательно, будем использовать формулу (2.13). Первый виток архимедовой спирали образуется при изменении полярного угла от 0 до 2π. Поэтому

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\ d\varphi = a^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\ d\varphi = a\left[\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right)\right].$$

Пример 2.9. Вычислить длину дуги одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 + \cos t), 0 \le x \le 2\pi$.

Решение. Уравнение кривой задано параметрически, следовательно, будем использовать формулу (2.12). Из уравнения циклоиды находим

$$y'(t)=a(1-\cos t), x'(t)=-a\sin t.$$

$$L=\int_0^{2\pi a}\sqrt{1+y'^2(x)}dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}\,dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=-4a[-1-(-1)]=8a.$$

Вычисление объёмов тела.

Вычисление объёмов методом параллельных сечений. Пусть тело T заключено между плоскостями $x=a$ и $x=b$, известна площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью $x=\text{const}$, функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, тогда объём V тела T (рис. 2.12) равен

$$V=\int_a^b S(x)dx. \qquad (2.14)$$

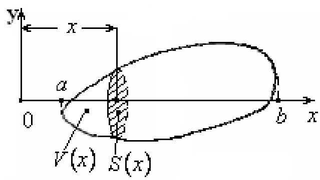

Рис. 2.12

Вычисление объёмов тел вращения. В случае, когда тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y=f(x)$, $x\in[a, b]$, вокруг оси Ox (рис. 2.13), сечением тела вращения плоскостью $x=\text{const}$ будет круг радиуса $f(x)$, поэтому

$$S(x)=\pi f^2(x),$$

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (2.15)$$

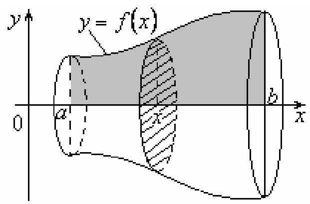

Рис. 2.13

Пример 2.10. Цилиндр радиуса R пересечён плоскостью, проходящей через диаметр основания под углом α к плоскости основания. Методом параллельных сечений найти объём отсечённой части.

Решение. Методом сечений объём тела вычисляется по формуле (2.14).

Направим ось Ox вдоль того диаметра основания, по которому секущая плоскость пересекает цилиндр.

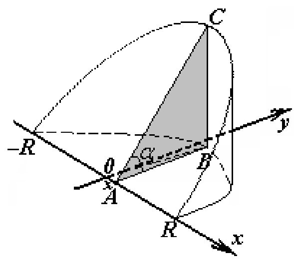

Рис. 2.14

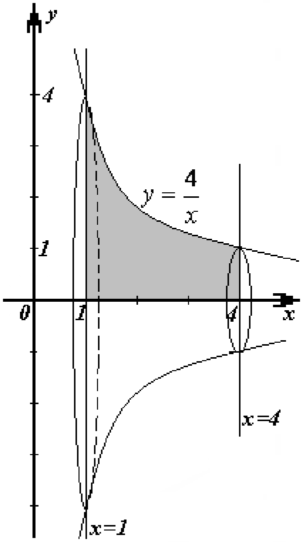

Рис. 2.15

Рассмотрим сечение ABC тела плоскостью $x = \text{const}$. Площадь этого сечения равна

$$S(x) = \frac{1}{2}\left(R^2 - x^2\right)\cdot \operatorname{tg}\alpha .$$

Тогда

$$V = \frac{1}{2}\int_{-R}^{R}\left(R^2 - x^2\right)\cdot \operatorname{tg}\alpha dx =$$

$$= \operatorname{tg}\alpha\int_0^R\left(R^2 - x^2\right)dx = \operatorname{tg}\alpha\cdot\left(R^2 x\Big|_0^R - \frac{x^3}{3}\Big|_0^R\right) =$$

$$= \frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg}\alpha \text{ (куб.ед.).}$$

Пример 2.11. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $xy = 4,\ x = 1,\quad x = 4,\ y = 0$.

Решение. Если тело образовано вращением криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, вокруг оси Ox , то объём тела вращения вычисляется по формуле (2.15).

В нашем случае $y = \dfrac{4}{x}$ и

$$V = \pi\int_1^4\left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi\int_1^4\frac{dx}{x^2} = 16\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^4 = 12\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Пример приложения определённого интеграла в механике.

Работа переменной силы. Работа, произведённая при перемещении материальной точки M из положения $x = a$ в положение $x = b$ $(a < b)$ по прямой линии под действием силы F, направленной параллельно перемещению, вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(s)ds\,. \tag{2.16}$$

Здесь сила $F(s)$ является непрерывной функцией от пройденного пути s.

Пример 5.12. Какую работу (Дж) нужно совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1Н она растянется на 1 см?

Решение. Согласно закону Гука, сила растяжения пружины на x ед. длины равна $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Коэффициент пропорциональности найдём из условия: если x = 0,01 м, то F = 1 Н $\Rightarrow k = \dfrac{1}{0{,}01} = 100$. Итак $F = 100x$. Тогда, используя формулу (2.16), получим

$$A = \int_0^{0{,}04} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08 \text{ (Дж)}.$$

2.7. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.7.1. Определённый интеграл $\int_0^1 x^5 dx$ равен:

1) $\dfrac{5}{6}$; 2) $\dfrac{1}{6}$; 3) $\dfrac{1}{4}$; 4) 5.

2.7.2. Определённый интеграл $\int_{-1}^{-e} \dfrac{dx}{x} dx$ равен:

1) $\dfrac{1}{e}$; 2) e; 3) –1; 4) 1.

2.7.3. Выяснить, не вычисляя, какой из интегралов больше:

1) $\int_1^2 \dfrac{dx}{x^2}$ или $\int_1^2 \dfrac{dx}{x^3}$; 2) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ или $\int_0^1 e^{-x} dx$; 3) $\int_1^2 \ln x\,dx$ или $\int_1^2 \ln^2 x\,dx$.

2.7.4. Вычислить определённые интегралы с помощью замены переменной:

1) $\int_1^9 \dfrac{dx}{5 + 2\sqrt{x}}$; 2) $\int_{-1}^1 \dfrac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; 3) $\int_2^3 x(3-x)^7 dx$; 4) $\int_0^1 \dfrac{x^2}{(x+1)^3} dx$.

2.7.5. Вычислить определённые интегралы при помощи формулы интегрирования по частям:

1) $\int\limits_{0}^{0,2} xe^{5x}dx$; 2) $\int\limits_{1}^{e} (x+1)\ln x dx$; 3) $\int\limits_{0}^{1} 4x \arcsin x dx$; 4) $\int\limits_{0}^{\pi/4} x\cos^2 x dx$.

2.7.6. Интеграл $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{x^2+x}$ равен:

1) $\ln\frac{1}{3}$; 2) $\ln\frac{3}{2}$; 3) $\ln 3$; 4) $\ln 2$.

2.7.7. Интеграл $\int\limits_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$ равен:

1) 2; 2) $\ln 2$; 3) $\ln 3$; 4) 1.

2.7.8. Интеграл $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$ равен:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) $\frac{1}{2}$.

2.7.9. Интеграл $\int\limits_{3}^{4} \frac{dx}{x^2-3x+2}$ равен:

1) $\ln\frac{2}{3}$; 2) $\ln\frac{3}{4}$; 3) $\ln\frac{1}{2}$; 4) $\ln\frac{4}{3}$.

2.7.10. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, прямыми $x=-1$ и $x=2$ и осью абсцисс.

2.7.11. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y=-x$ от параболы $y=2x-x^2$.

2.7.12. Площадь фигуры, ограниченной линиями: $r=4\cos\varphi$, $r=6\cos\varphi$, равна:

1) 5π; 2) 2π; 3) 4π; 4) 6π.

2.7.13. Площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и отрезком оси абсцисс, равна:

1) $3\pi a^2$; 2) πa^2; 3) $\frac{\pi}{2}a^2$; 4) $2\pi a^2$.

2.7.14. Длина дуги линии $y=1-\ln(x^2-1)$ при $9\le x\le 16$, равна:

1) $7+\ln\dfrac{12}{17}$;   2) $5+\ln\dfrac{68}{75}$;   3) $5+\ln\dfrac{75}{68}$;   4) $7+\ln\dfrac{75}{68}$.

2.7.15. Длина дуги линии $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t-t^3/3 \end{cases}$, $0\le t\le 3/2$ равна:

1) $3/2$;   2) $5/8$;   3) $16/8$;   4) $21/8$.

2.7.16. Длина дуги линии $r=10\sin\varphi$ равна:

1) 5π;   2) 10π;   3) 15π;   4) 20π.

2.7.17. Объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+5x-6$, $y=0$, равен:

1) $\pi/30$;   2) $\pi/5$;   3) $\pi/6$;   4) $2\pi/15$.

3. РЯДЫ

I. Учебные цели. Раскрыть сущностные основы теории бесконечных рядов и методики их использования при решении профессиональных задач. Научить решать вопросы исследования процессов сходимости рядов. Сформировать навыки применения рядов при решении различного рода математических и профессиональных задач.

II. Формирование компетенции: способность представить адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений и методов математики; способность использовать законы и методы математики при решении профессиональных задач.

III. Введение в тему. Ряды являются одним из важнейших инструментов математического анализа, так как представляются техническим орудием исследования, очень полезным и удобным, но скромным по своему принципиальному значению. Поэтому теория рядов заслуживает тщательного изучения. И не столько потому, что многочисленными применениями его проникнуто всё здание как самого анализа, так и почти всех опирающихся на него прикладных наук, сколько по той причине, что на сравнительно несложном материале, какой представляет нам собою теория рядов, типичные для всего анализа ходы мыслей, цепи представлений и образов и даже целые логические схемы выступают с особой ясностью и рельефностью. Обучающемуся, который активно и прочно овладел теорией рядов, дальнейшее усвоение основных разделов анализа обычно не доставляет уже никаких затруднений.

Изучить основы теории рядов можно по учебникам [3, 5]. В этом пособии основное внимание сосредоточено на особо принципиальных положениях этой теории, поэтому использование более эффективно при повторном изучении учебного материала.

Вопросы для контроля качества усвоения изложенного материала:

1. Что такое числовой ряд? Какие ряды называются сходящимися?
2. Как формируется сумма ряда?
3. Необходимое условие сходимости ряда. Критерий Коши.
4. Необходимый и достаточный признак сходимости числового ряда.
5. Признак сравнения при исследовании сходимости знакоположительных рядов.
6. Интегральный признак Коши.
7. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда.
8. Каков алгоритм исследования числового ряда?
9. Как ставится вопрос сходимости функциональных рядов?
10. Степенные ряды.
11. Теорема Абеля.
12. Условия разложения функции в степенные ряды.

В п. 1.3.2. учебного пособия [4] обсуждалось понятие числовой последовательности и её предела. Излагаемый далее учебный материал является, в определённом смысле, логическим продолжением теории бесконечных последовательностей.

3.1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Когда бесконечная последовательность чисел $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ задана, то числовым рядом называют бесконечный символ

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{3.1}$$

в котором члены этой последовательности располагаются с сохранением их порядка так, как если бы их прибавляли друг к другу, при этом $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называют членами ряда.

Конечные суммы $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ мы будем называть *частичными суммами* ряда.

Основной вопрос, который ставится в отношении каждого данного ряда, есть вопрос о его *сходимости.* Если предел

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

существует, ряд (3.1) называется *сходящимся,* а число s его *суммой.* В противном случае ряд (3.1) называется *расходящимся* и суммы не имеет. Случай, когда $s_n \to \infty$ или $s_n \to -\infty$ при $n \to \infty$, мы формально можем отнести к любой из этих двух разновидностей бесконечных рядов; обычно в этом случае признают ряд расходящимся (так как под суммой ряда всегда разумеют некоторое число), однако при этом мы, объединяя под одним именем *расходящихся* как ряды с бесконечными суммами, так и ряды, вовсе не имеющие сумм, должны помнить, что эти два типа рядов не имеют в своей основе ничего общего и объединяются лишь потому, что оба противостоят (хотя и в разных смыслах) рядам с конечными суммами.

В основных своих разделах анализ оперирует только сходящимися рядами. У того, кто впервые приступает к изучению рядов, первичное представление о сумме ряда и процессе её получения неизбежно складывается по полной, часто не подвергаемой критическому анализу, аналогии с конечными суммами: s_n – это сумма n первых членов ряда, а s – сумма *всех* его членов. Очень часто и сам преподаватель стимулирует и даже прямо воспитывает такое представление. И надо признать, что если относиться к нему достаточно осторожно и не утрачивать критической настроенности, это представление действительно способно как содействовать усвоению основных фактов теории рядов, так и эвристически предвидеть новые, ещё не знакомые закономерности. Однако ни на одну минуту нельзя забывать и об опасности зайти в этой аналогии слишком далеко, а тем более придавать ей доказательную силу. Аналогия между бесконечными рядами и конечными суммами сколько-нибудь далеко может быть проведена только для так называемых абсолютно сходящихся рядов (о которых мы будем говорить ниже); для рядов же «условно сходящихся» наше стремление представить себе их суммы образующимися аналогично конечным суммам немедленно наталкивается на неодолимые препятствия; трудно, в самом деле, представлять себе «суммою *всех* членов ряда» такую сумму, величину которой мы можем изменить, изменив порядок слагаемых. Наконец, слишком крепко угнездившееся представление о сумме ряда, как о чём-то очень похожем на конечные суммы, таит в себе и серьёзную методологическую опасность, угрожая выхолостить всё специфическое идейное и предметное содержание суммы бесконечного ряда. Дело в том, что процесс образования суммы ряда вовсе не подобен процессу конечного суммирования и вовсе не состоит в том (как иногда себе представляют), что члены ряда прибавляются один за другим, «покуда не будут все исчерпаны» это было бы, разумеется, совершенно безнадёжным предприятием; исчерпать члены ряда последовательным прибавлением нельзя, ибо их бесконечное множество, и если мы всё же имеем возможность говорить о сумме ряда, то это именно потому, что мы отказываемся от этого безнадёжного процесса бесконечного прибавления и заменяем его совсем другой операцией (предельным переходом), сразу приводящей нас к цели. Вот подробное описание того, как формируется сумма бесконечного ряда; начинаем мы, разумеется, как и в случае конечных сумм, с последовательного прибавления, т. е. образуем суммы s_1, s_2 и т. д.; но мы вовсе не имеем в виду продолжать этот процесс безгранично; образуя частичные суммы, мы внимательно исследуем их природу и строение, прежде всего – их зависимость от числа n взятых членов; другими словами, предметом нашего изучения служит *величина s_n, как функция от n,* называемая *последовательностью частичных сумм* $\{s_n\}$ (во многих случаях для получения полной картины этой функциональной зависимости вовсе нет надобности в изучении сумм s_1, s_2 и т. д. *небольшого* числа членов, а удаётся сразу получить, например, удобное аналитическое выражение функции s_n; именно так обстоит дело, например, в известном из элементарной алгебры случае геометрической прогрессии). Точнее, мы стараемся узнать, стремится ли величина s_n при $n \to \infty$ к некоторому пределу, и если стремится, то к какому именно. Таким образом, формирование суммы бесконечного ряда слагается из двух последовательных моментов: 1) формирования частичных сумм s_n, и изучения их зависимости от n; 2) перехода к пределу при $n \to \infty$. Вы, конечно, видите, что всё это весьма мало похоже на «прибавление до полного исчерпания», и забывать об этом различии, конечно, ни на минуту нельзя, если мы не хотим иметь над собой постоянной угрозы впадать в ошибки на базе необоснованных аналогий.

Сделаем ещё следующее замечание. Мы видим, что вопрос о сумме данного ряда (3.1) целиком сводится к вопросу о пределе связанной с этим рядом последовательности

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots, \tag{3.2}$$

обратно, если задана совершенно произвольная последовательность (3.2), мы всегда можем, полагая

$$u_1 = s_1, \quad u_2 = s_2 - s_1, \ u_3 = s_3 - s_2, \ \ldots, \ u_n = s_n - s_{n-1}, \ldots,$$

свести вопрос о пределе последовательности (3.2) к вопросу о сумме ряда (3.1); таким образом, с этой точки зрения основная задача теории рядов ничем не отличается от основной задачи теории пределов (для последовательностей).

На самом деле, конечно, специфика теории рядов, её задач и её методов обусловлена именно той особой концепцией, которую получают члены последовательности (3.2), когда мы рассматриваем их как последовательные частичные суммы некоторого ряда (3.1); и эта концепция оказывается достаточно интересной в идейном и достаточно важной в прикладном отношении, чтобы составить собою предмет особой теории; эта теория и есть теория бесконечных рядов.

Необходимое условие сходимости (*Коши*). Если ряд (3.1) *сходится, то* $u_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. В самом деле, $u_n = s_n - s_{n-1}$ при $n > 1$; так как при $n \to \infty$ s_n и s_{n-1} имеют один и тот же предел s, то $u_n \to 0$. Это свойство сходящихся рядов важно потому, что во многих случаях позволяет легко установить расходимость ряда; для этого достаточно показать, что u_n при $n \to \infty$ не является бесконечно малой величиной. Однако из того, что $u_n \to 0$ при $n \to \infty$, нельзя ещё заключить, что ряд (3.1) сходится; так, «гармонический» ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

расходится[2] ($s_n \to \infty$ при $n \to \infty$), хотя n-й член его и бесконечно мал при $n \to \infty$. Такая односторонность рассматриваемого признака (необходимость без достаточности), конечно, в значительной мере ограничивает сферу его применения.

Вопрос о сходимости ряда есть только специальная форма вопроса о существовании предела у некоторой числовой последовательности, поэтому можно получить необходимый и достаточный признак сходимости ряда, переводя на язык теории рядов [3, 5] известный критерий Коши существования предела у последовательности. Для того чтобы последовательность частичных сумм s_n ряда (3.1) имела предел при $n \to \infty$, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ для всех достаточно больших n и для любого $k \geq 0$ выполнялось неравенство

$$|s_{n+k} - s_n| < \varepsilon .$$

Так как $s_{n+k} - s_n = \sum_{i=n+1}^{n+k} u_i$, то мы непосредственно приходим к следующему предложению.

Необходимое и достаточное условие сходимости (*Коши*)[3]. Для сходимости ряда (3.1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n и любом натуральном k выполнялось неравенство

---

[2] См., например, доказательство в [5].

[3] Французский учёный О. Коши внёс большой вклад в теорию рядов, сформулировав, например, как необходимое, достаточное, так и необходимое и достаточное условия их сходимости.

$$\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots+u_{n+k}\right|<\varepsilon . \tag{3.3}$$

Выражаясь образно, условие критерия Коши состоит в том, чтобы достаточно удалённый и как угодно длинный «кусок» ряда становился сколь угодно малым по абсолютному значению. Разумеется, как и в теории пределов, критерий Коши может только установить существование суммы ряда, но ничего не говорит нам о её величине.

Критерий Коши, будучи очень плодотворным орудием общетеоретического исследования, сравнительно редко применяется к установлению сходимости индивидуальных, конкретных рядов; причиной этого является то, что обычно бывает нелегко установить, выполняется ли для данного конкретного ряда условие (3.3).

Поэтому теория рядов строит большое число других признаков сходимости; эти признаки, не имея присущей критерию Коши характеристичности (т.е. необходимости и достаточности одновременно), зато с несравненно большим удобством применяются к отдельным конкретным рядам. Большинство этих признаков относится к рядам с положительными членами (точнее сказать, со знакопостоянными членами). Этот простейший и вместе с тем важнейший класс рядов методологически удобно рассмотреть в самом начале, чтобы затем постараться по возможности свести изучение произвольного ряда к исследованию рядов этого простейшего типа.

Ряды с положительными членами. Если все члены ряда (3.1) неотрицательны, то s_n, очевидно, есть неубывающая функция от n и возможен, поэтому лишь один из двух случаев: либо ряд (3.1) сходится, либо $\lim s_n=+\infty$; другими словами, ряд (3.1) сходится или расходится, смотря по тому, ограничена или не ограничена величина s_n при $n\to\infty$. Все признаки сходимости для рядов этого класса устанавливаются поэтому таким образом, что доказывается ограниченность функции s_n при соответствующих условиях.

В основе большинства этих признаков лежит следующий, чрезвычайно мощный принцип сравнения:

если все члены рядов

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{3.4}$$

и

$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{3.5}$$

неотрицательны, и если при $n\ge n_0$

$$u_n\ge v_n , \tag{3.6}$$

то из сходимости ряда (3.5) *вытекает сходимость ряда* (3.4) (и, значит, из расходимости ряда (3.4) вытекает расходимость ряда (3.5)).

Взяв в качестве ряда (3.5) какой-нибудь ряд, сходимость которого уже установлена, обычно затем доказывают, что в случае, когда ряд (3.4) подчиняется какому-либо определённому условию, члены его необходимо связываются с членами ряда (3.5) соотношением (3.6); всякое такое условие и может служить признаком сходимости для ряда (3.4). Так, если выбрать в качестве ряда (3.5) члены обыкновенной геометрической прогрессии

$$v_1 = a,\ v_1 = aq,\ v_3 = aq^2,\ \dots,\ v_n = aq^n,\ \dots,\ q > 0,$$

то соответствующий ряд

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^n + \dots$$

при $q < 1$ сходится и имеет своей суммой число $\dfrac{a}{1-q}$.

То обстоятельство, что отношение двух соседних членов – последующего и предыдущего остаётся одним и тем же (равным q) для всех членов ряда может быть основой для формулировки достаточного признака сходимости – признака Д'Аламбера.

Пусть дан знакоположительный ряд (3.4) и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r$. Если $r < 1$, то ряд сходится, если $r > 1$, то ряд расходится, если $r = 1$, то необходимы дополнительные исследования.

Как эти, так и все другие признаки всегда представляют собой условия, в той или другой конкретной форме высказывающие требование, чтобы члены ряда (3.4) *достаточно быстро убывали* с ростом n; так, известный признак Даламбера требует, чтобы отношение u_{n+1}/u_n при достаточно большом n оставалось не больше числа, меньшего единицы, что очевидным образом характеризует собой именно достаточную быстроту убывания величины u_n с ростом n.

Здесь нам нет надобности останавливаться на признаках этого типа; вы найдёте их в большом числе вместе с исчерпывающими доказательствами в каждом курсе анализа. Вместо этой, в основном формальной, теории постараемся повнимательнее вглядеться в наши представления о *быстроте сходимости* ряда с положительными членами. Вопрос этот, как раз имеет, независимо от своего принципиального интереса, и непосредственно практическое значение. В самом деле, если ряд сходится медленно, т. е. если для получения суммы s_n сколько-нибудь близкой к предельному значению s, приходится суммировать очень большое число n его членов, то такой ряд при всей своей теоретической полноценности не может служить инструментом для приближённого вычисления числа s, и поэтому в практическом отношении, по крайней мере непосредственно, не может принести значительной пользы. Заметим вскользь, что иногда приходится встречаться и с обратным положением вещей: расходящийся ряд при известных условиях может оказаться очень удобным орудием для практического вычисления некоторых величин. Это обстоятельство дало повод известному французскому учёному Анри Пуанкаре, занимавшемуся исследованием этого явления, высказать парадоксальную мысль о том, что сходящиеся ряды иногда оказываются «практически расходящимися» и, наоборот, расходящиеся ряды – «практически сходящимися».

Для всякого сходящегося ряда «остаток»

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

есть величина бесконечно малая при $n \to \infty$; быстрота сходимости ряда целиком зависит от порядка этой бесконечной малой, т. е. от того, насколько быстро она стремится к нулю при $n \to \infty$. Обычно считают, что ряд сходится с хорошей быстротой, если при $n \to \infty$ остаток r_n убывает подобно члену геометрической прогрессии; для этого достаточно, чтобы члены u_n данного ряда при достаточно большом n сами не превосходили соответствующих членов некоторой геометрической прогрессии.

Значительно медленнее сходятся ряды, у которых с ростом n остаток убывает как некоторая отрицательная степень числа n, т. е., например, имеет порядок $\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}$ и т.п. Такие ряды часто представляют уже затруднения для практического использования.

Возвращаясь теперь к вопросу о признаках сходимости, сделаем следующее замечание. Для всякого сходящегося ряда $u_n \to 0$ при $n \to \infty$; однако даже для ряда с положительными членами это стремление «общего члена» u_n к нулю может не быть монотонным; простым примером может служить ряд, полученный из геометрической прогрессии с помощью перестановки u_1 с u_2, u_3 с u_4 и т. д., т. е., например, ряд

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{2n-1}} + \dots$$

Однако в подавляющем большинстве случаев конкретные числовые ряды с положительными членами, встречающиеся в анализе и его приложениях, обладают тем свойством, что $u_{n+1} \le u_n$ (n = 1, 2, ...), т.е. $u_n \to 0$ в этих рядах, монотонно убывая с возрастанием n. Поэтому заслуживает большого внимания группа специальных критериев сходимости рядов с монотонно убывающими положительными членами, тем более что в этой группе имеются признаки характеристические (т.е. необходимые и достаточные) и в то же время часто находящие себе удобное применение к исследованию отдельных конкретных рядов. Мы рассмотрим два из этого рода признаков.

Теорема 3.1 (*Интегральный признак Коши*). *Пусть $f(x)$ – положительная, непрерывная и невозрастающая функция на полупрямой* $0 \le x < +\infty$. *Тогда для сходимости ряда*

$$f(1) + f(2\ ) + \ldots + f(n) \ldots \tag{3.7}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел при $a \to +\infty$ *интеграла*

$$\int_0^a f(u)du \tag{3.8}$$

(для чего, в свою очередь, необходимо и достаточно, разумеется, чтобы этот интеграл оставался ограниченным при $0 \le a < +\infty$).

Абсолютная и условная сходимость. Мы переходим теперь к рядам с членами произвольного знака; сходящиеся ряды этого общего типа принято разделять на два класса, действительно существенно различных по своим свойствам: ряды, абсолютно сходящиеся, и ряды, сходящиеся условно. Мы говорим, что ряд (3.1) сходится *абсолютно,* если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{3.9}$$

если же ряд (3.1) сходится, а ряд (3.9) расходится, то мы называем ряд (3.1) *условно* сходящимся.

Здесь, прежде всего, надо обратить внимание на то, что *абсолютная* сходимость данного ряда определяется как сходимость некоторого *другого* ряда; поэтому совсем нетривиальной является теорема: *всякий абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Смысл этой теоремы состоит, конечно, в том, что из сходимости ряда (3.9) вытекает сходимость ряда (3.1); доказательство её проще всего проводится на основе критерия Коши: так как при любых $n > 0$, $k > 0$

$$\left|\sum_{i=1}^{k} u_{n+i}\right| \le \sum_{i=1}^{k} |u_{n+i}| \tag{3.10}$$

и так как, согласно необходимому и достаточному условию сходимости (Коши), в случае сходимости ряда (3.9) правая часть сколь угодно мала при всех достаточно больших n и любом k, то тоже справедливо и для левой части, откуда, в силу того же критерия Коши, вытекает сходимость ряда (3.1).

Абсолютно сходящиеся ряды обнаруживают в своих свойствах далеко идущее сходство с конечными суммами: их можно почленно перемножать как конечные суммы (распределительный закон); члены их можно произвольно перемещать (переместительный закон) и группировать (сочетательный закон), не нарушая этим сходимости ряда и не изменяя его суммы (в частности, всеми этими свойствами обладают, конечно, ряды с положительными членами, сходимость которых всегда имеет абсолютный характер). Мы не будем здесь останавливаться на доказательствах этих свойств; они чисто формальны, и те изложения, которые вы найдёте в учебниках, не вызовут у вас никаких затруднений.

Вглядимся зато несколько подробнее в условно сходящиеся ряды; вот перед нами *сходящийся* ряд, известный как ряд Лейбница

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\dots .$$

Это знакопеременный ряд (идёт чередование знаков). Сходимость таких рядов исследуется с помощью признака Лейбница: если $u_n \to 0$ при $n \to \infty$ и, начиная с некоторого n, $|u_{n+1}| < |u_n|$, то знакочередующийся ряд сходится.

Всё здесь обстоит благополучно, частичные суммы стремятся к пределу, остаток стремится к нулю (и даже не слишком медленно), как у всякого сходящегося ряда. Но как шатко это благополучие! Стоит только надлежащим образом изменить порядок членов, и ряд получает другую сумму, а то и вовсе перестаёт сходиться. И всё это потому, что ряд (3.9) (в нашем примере – это гармонический ряд) расходится. Вы понимаете, конечно, что такое суммирование, при котором результат зависит от порядка слагаемых, не может приводить к конструкциям, сколько-нибудь аналогичным конечным суммам; само наименование «условно сходящиеся ряды» имеет, по-видимому, своей психологической предпосылкой желание называть такие ряды сходящимися только с известной оговоркой.

Общий обзор алгоритма исследования рядов на сходимость. Всё сказанное о числовых рядах можно резюмировать следующим образом.

1. Когда задан какой-нибудь числовой ряд

$$u_1+u_2+\dots+u_n+\dots,$$

необходимо прежде всего посмотреть, стремится ли его общий член u_n к нулю, когда $n \to +\infty$; если мы не имеем равенства $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, ряд расходится и его надо оставить[4].

2. Если же имеем $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, тогда надо посмотреть не есть ли это знакочередующийся ряд и не убывают ли по абсолютной величине его члены; если эти условия для данного ряда выполняются, тогда ряд сходящийся.

3. Если данный ряд не оказывается знакочередующимся и монотонно убывающим, тогда нужно посмотреть, не будет ли он абсолютно сходящимся; для этого надо отыскать предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho$. Если $\rho < 1$, то ряд абсолютно сходится; если $\rho > 1$, ряд расходится; если $\rho = 1$, ряд ещё не раскрыл своей природы, ибо он может оказаться и сходящимся, и расходящимся, можно попытаться применить другие признаки сходимости. Например, в случае, когда $\rho = 1$ и когда $|u_n|$ монотонно убывает до нуля, надо попробовать применить интегральный признак Коши.

Для знакоположительных рядов можно эффективно использовать принцип сравнения, о котором говорилось ранее. В качестве «эталонных» рядов берут или ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^n$, который сходится при $q < 1$, или $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, где α – любое вещественное число, который сходится при $\alpha > 1$. В принципе, допустимо и многократное последовательное использование принципа сравнения.

3.2. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Пример 3.1. Исследовать ряд

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} + \ldots$$

[4] Этот пункт не является обязательным, так как его выполнение бывает сопряжено с большими трудностями, чем проверка выполнения одного из известных достаточных условий.

Решение. Это знакоположительный ряд.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = 0$ (легко проверяется).

Находим предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0,$$

поэтому ряд сходится. Существует доказательство, что его сумма равна числу e.

Пример 3.2. Исследовать ряд

$$\frac{1!}{10} + \frac{2!}{10^2} + \frac{3!}{10^3} + \ldots + \frac{n!}{10^n} + \ldots \ .$$

Решение. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{10^n}$ не для всех просто. Поэтому переходим сразу к пункту 3.

Здесь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} = \infty,$$

следовательно, ряд расходится.

Пример 3.3. Исследовать ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n} + \ldots$$

Решение. Здесь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+1)2n} = 0 \ \text{ и } \ \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1,$$

поэтому признак Д'Аламбера не отвечает на вопрос сходимости. В то же время функция $f(x) = \frac{1}{(2x+1)2x}$ при $1 \le x \le +\infty$ положительная, непрерывная и убывающая, т.е. удовлетворяет условиям интегрального признака Коши. Интеграл

$$\int_1^a \frac{dx}{(2x+1)2x} = \int_1^a \left(\frac{1}{2x+1} - \frac{1}{2x} \right) dx = \left[\frac{1}{2} \ln|2x-1| - \frac{1}{2} \ln|x| \right] \Bigg|_1^a =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2a - \ln a) = \frac{1}{2} \ln a \ \text{ (при всех } a \to \infty \text{)}.$$

В то же время ряд

$$f(1)+f(2)+...+f(n)+...$$

является исходным для исследования рядом. Конечное значение интеграла гарантирует его сходимость.

3.3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

До сих пор члены рассматриваемых нами рядов были числами. Но математическому анализу в первую очередь нужны *функциональные* ряды, т. е. такие ряды, члены которых являются функциями одной или нескольких независимых переменных. Для теории этих рядов всё, что мы до сих пор рассматривали, играет роль подготовительного материала.

Пусть

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+... \tag{3.11}$$

есть ряд, члены которого – функции одной и той же независимой переменной *x*, определённые на некотором отрезке [*a*, *b*]. Давая этой переменной какое-нибудь числовое значение $x=\alpha$, мы превращаем ряд (3.11) в обыкновенный числовой ряд $\sum_{m=1}^{\infty} u_n(\alpha)$; поэтому, с точки зрения теории числовых рядов, можно сказать, что формула (3.11) выражает собой не один ряд, а целую совокупность различных рядов.

Для функциональных рядов проблема сходимости ставится совсем иначе, чем для числовых; по отношению к ряду (3.11) не имеет смысла ставить вопрос о том, сходится он или расходится, так как, вообще говоря, он может сходиться при одних значениях *x* и расходиться при других значениях. Осмысленная постановка вопроса здесь гласит: при каких значениях величины *x* на данном отрезке [*a*, *b*] ряд (3.11) сходится и при каких расходится? Условимся называть *областью сходимости* данного ряда множество тех значений *x*, при которых он сходится, и *областью расходимости* – совокупность значений, делающих его расходящимся. Проблема сходимости для функционального ряда состоит в первую очередь в отыскании его области сходимости.

Для всех аналитических применений теории функциональных рядов основное значение имеет понятие равномерной сходимости. Вот как лучше всего подойти к определению этого понятия. Если ряд (3.11) сходится в каждой точке некоторого множества *M* (т. е. для всех значений $x \in M$), то остаток

$$r_n(x)=s(x)-s_n(x)$$

этого ряда (будучи, конечно, подобно сумме ряда $s(x)$ и частичным суммам $s_n(x)$, функцией от x) для любого $x \in M$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Для нашей цели нам потребуется более детально описать этот факт: каково бы ни было $x \in M$ и каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое n_0 (зависящее, конечно, как от ε, так и от x), что $|r_n(x)| < \varepsilon$ для всех $n \geq n_0$. Оставим теперь ε неизменным, но заставим число x пробегать всё множество M; при этом для каждого x найдётся своё n_0, т. е. своё «место» в данном ряде, начиная с которого $|r_n(x)| < \varepsilon$; но существует ли в этом ряде такое «место», начиная с которого, неравенство $|r(x)| < \varepsilon$ выполнялось бы уже для $x \in M$? Очевидно, это зависит от того, будет ли множество тех чисел n_0, которые мы выше построили для различных x, ограниченным или нет; если среди этих чисел есть наибольшее, то оно, очевидно, и сможет служить тем «местом», начиная с которого $|r_n(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in M$. Если же среди построенных нами чисел n_0 встречаются сколь угодно большие, то это показывает, что, как бы далеко мы ни продвигались в нашем ряде, всегда найдутся такие $x \in M$, для которых искомое «место» ещё не достигнуто и лежит дальше; в этом случае выбор такого n_0, которое в указанном смысле годилось бы для всех $x \in M$, очевидно, невозможен.

Степенные ряды. Бесспорно, наиболее важный для анализа специальный класс функциональных рядов составляют так называемые *степенные ряды,* т.е. ряды вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{3.12}$$

где a_0, a_1, a_2,…, a_n,… суть данные вещественные числа. Мы рассмотрим здесь некоторые важнейшие свойства этого класса рядов.

Для степенного ряда всегда существует некоторый открытый отрезок $(-r, r)$ с центром в точке О, так называемый *интервал сходимости,* внутри которого данный ряд сходится, а вне – расходится; число r называется *радиусом сходимости* данного ряда; r может иметь любое значение от 0 до $+\infty$, включая оба этих крайних значения (так, $r = 0$ при $a_n = n!$, $r = +\infty$ при $a_n = \dfrac{1}{n!}$); заданием радиуса сходимости область сходимости данного ряда определяется с точностью до двух граничных её точек, именно область сходимости может быть либо закрытым, либо открытым отрезком, либо, наконец, «полузакрытым», т.е. содержащим один из своих концов и не содержащим другого; так, каждый из трёх рядов с коэффициентами соответственно $a_n = 1$,

$a_n = \dfrac{1}{n+1}$, $a_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$ имеет радиус сходимости, равный единице. Первый из этих рядов расходится при $x = 1$ и $x = -1$, т. е. в обоих концах интервала сходимости (этот ряд есть геометрическая прогрессия со знаменателем x), второй ряд при $x = 1$ обращается в гармонический ряд, а при $x = -1$ в «ряд Лейбница»

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots;$$

он, следовательно, расходится при $x = 1$ и условно сходится при $x = -1$; третий ряд абсолютно сходится в обоих концах интервала сходимости.

Укажем, как устанавливается эта специальная форма области сходимости для степенных рядов. Вывод её основан на замечательной теореме: *если ряд* (3.12) *сходится при* $x = \alpha$, *то он абсолютно сходится при любом значении* x, *для которого* $|x| < \alpha$. Вот её доказательство: из сходимости ряда (3.12) при $x = \alpha$ вытекает, что $a_n\alpha^n \to 0$ при $n \to \infty$; значит существует такое $c > 0$, что $\left|a_n\alpha^n\right| < c$ ($n = 1, 2, \ldots$); пусть теперь $|x| < |\alpha|$ тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\left|a_k x^k\right| = \sum_{k=1}^{n}\left|a_k a^k\right| \cdot \left|\frac{x}{\alpha}\right|^k < c\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{x}{\alpha}\right|^k < c\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x}{\alpha}\right|^k = \frac{c}{1 - \left|\dfrac{x}{\alpha}\right|};$$

так как правая часть от n не зависит, то левая остаётся ограниченной при $n \to \infty$, т. е. ряд (3.12) абсолютно сходится. Из этой теоремы сразу вытекает специальная форма области сходимости для степенных рядов, так как вместе с точкой x этой области принадлежат и все точки, лежащие к нулю ближе, чем x. Другим следствием этой теоремы является то, что в каждой *внутренней* точке интервала сходимости ряд (3.12) сходится *абсолютно.* Что касается равномерной сходимости, то для всего интервала сходимости мы её утверждать не можем, как показывает уже пример геометрической прогрессии ($a_n = 1$): как бы велико ни было n, $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k$ становится сколь угодно большим, если x достаточно близко к единице. Но легко сказать, что степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, концы которого лежат внутри интервала сходимости. Из этой теоремы, между прочим, вытекает то весьма важное следствие, что *сумма степенного ряда есть функция непрерывная в каждой внутренней точке интервала сходимости.*

В случае, когда ряд (3.12) сходится при $x = r$, можно, впрочем, утверждать, что он равномерно сходится на отрезке $[0, r]$ (и значит сумма его непрерывна на этом отрезке); эта замечательная *теорема Абеля* играет важную роль в теории функций.

На практике радиус сходимости степенного ряда находят по правилу: если для ряда (3.13) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = l$, то $r = \dfrac{1}{l}$.

3.4. ПРИМЕРЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СХОДИМОСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ РЯДОВ

Пример 3.5. Найти область сходимости ряда

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \ldots .$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^{n+1}|}{|x^n|}\cdot\frac{n}{n+1} = |x| .$$

Следовательно при $|x| < 1$ или $-1 < x < 1$ ряд сходится.

При $x = -1$ имеем числовой ряд:

$-1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} - \ldots - \dfrac{1}{n} - \ldots$, это умноженный на (-1) гармонический ряд, и следовательно, расходящийся.

При $x = 1$ имеем числовой ряд:

$1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\dfrac{1}{n} + \ldots$ – это сходящийся ряд Лейбница.

Окончательно область сходимости ряда определена неравенством

$$-1 < x \le 1 .$$

Пример 3.6. Найти область сходимости ряда

$$1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \ldots + n^2 \cdot x^{n-1} + \ldots$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2 x^n}{n^2 x^{n-1}}\right| = |x| .$$

Следовательно, при $-1 < x < 1$ ряд сходится.

При $x = 1$ имеем числовой ряд

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + \ldots + n^2 + \ldots .$$

Это расходящийся ряд, так как общий член $a_n = n^2$ при $n \to \infty$ не стремится к нулю.

При $x = -1$ имеем числовой ряд

$$1 - 4 + 9 - 16 + \ldots + (-1)^{n+1} n^2 + \ldots ,$$

который также не удовлетворяет необходимому признаку сходимости.

Окончательно область сходимости ряда определена неравенством

$$-1 < x < 1 .$$

3.5. РЯДЫ В РОЛИ АППАРАТА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ

Когда мы даём синусу и косинусу их первоначальное геометрическое определение, то целый ряд важнейших свойств этих функций мы выводим непосредственно из их определения. Когда мы затем вводим для этих функций общепринятые обозначения $\sin x$ и $\cos x$, то эти «аналитические выражения» ничего нового к нашим сведениям о выражаемых ими функциях, разумеется, не прибавляют. Но когда мы находим для тригонометрических функций новые аналитические выражения, представляющие их в виде степенных рядов

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} ,$$

то с помощью этих представлений мы легко обнаруживаем целый ряд таких свойств *этих* функций, которые мы совсем не могли бы или могли бы лишь очень сложным путём получить из их первоначальных определений; и прежде всего, эти разложения дают нам возможность с максимальной принципиальной простотой вычислять значения тригонометрических функций при любых значениях аргумента.

Аналитическое выражение, если мы с самого начала подойдём к нему в роли хозяев, а не покорных и немудрствующих подчинённых, если мы будем видеть в нём лишь то, что оно есть на самом деле, – послушное нашим целям и замыслам орудие исследования функций, – может сыграть в этом исследовании огромную решающую роль и принести чрезвычайно много пользы. Более того, можно считать нормальным и естественным такое положение вещей, когда исследователь, стоящий перед задачей определения какой-либо функции, прежде всего ищет для неё удобное аналитическое выражение; из деталей такого выражающего данную функцию аналитического аппарата в большинстве случаев и удаётся наиболее рациональным способом вычитать нужные свойства этой функции.

Среди различных аналитических аппаратов, могущих в этом смысле служить орудиями исследования функций, первое место по своей простоте, гибкости, прозрачности и удобству употребления, без сомнения, занимают функциональные ряды. Идея этого важнейшего аналитического аппарата очень проста: функция, которую мы хотим исследовать, представляется как предел последовательности других, более простых и доступных исследованию функций (частичных сумм изображающего ряда); если такая частичная сумма на всём рассматриваемом участке весьма близка к изучаемой функции, то мы имеем основание рассчитывать из свойств этой приближённой частичной суммы узнать, хотя бы приближённо, некоторые свойства изучаемой функции; в частности, умея приближённо вычислять, при тех или других значениях аргумента, значения этих частичных сумм, мы тем самым имеем метод для приближённого вычисления соответствующих значений изучаемой функции.

Какими же функциями всего удобнее и выгоднее пользоваться в качестве элементов разложения, т. е. членов того ряда, который призван изображать собою изучаемую функцию и помочь нам в её исследовании? На этот вопрос, как и естественно ожидать, нельзя дать единого ответа, пригодного для всех случаев; здесь почти всё зависит от природы изучаемой функции и характера тех задач, которые мы по отношению к ней себе ставим. Необходимо только отметить, что существует несколько важнейших типов функциональных рядов, в такой степени зарекомендовавших себя в этой своей роли, что применение их совершается на каждом шагу и естественно вызвало создание соответствующих общих теорий; сюда относятся в первую очередь *степенные ряды* (где элементами разложения служат целые, в первую очередь неотрицательные степени независимой переменной) и *тригонометрические ряды* (с элементами вида $\sin kx$, $\cos kx$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$). Однако в очень многих случаях в качестве элементов разложения бывает удобное выбрать не эти простейшие, универсальные, а совсем другие функции, хотя и не столь простые, но зато по своим свойствам более тесно связанные с изучаемой функцией (например, так называемые собственные функции в краевых задачах). Вообще при выборе *типа* разложения основным руководящим принципом должно служить отсутствие всякой предвзятости, которое в максимальной степени позволило бы учесть в каждом отдельном случае всю специфику поставленных вами перед собою задач.

Ряд Маклорена. Пусть степенной ряд (3.12) имеет своей суммой $f(x)$ на промежутке сходимости $(-r, r)$, $r > 0$:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (3.13)$$

Нетрудно показать (см., например [3, 5]), что если безгранично дифференцируемая функция $f(x)$ является суммой степенного ряда (3.12), но не зная его коэффициентов, мы можем их все определить по формуле Маклорена:

$$a_0 = f(0),\ \ a_1 = \frac{f'(0)}{1!},\ \ a_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ \ldots$$

В этом случае говорят, что функция $f(x)$ разложима в промежутке $(-r, r)$ в степенной ряд и имеет место тождество

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \qquad (3.14)$$

которое называется рядом Маклорена.

Не следует думать, что бесконечный ряд Маклорена сам по себе чрезвычайно ясен и что не стоит, поэтому, спрашивать о его законности. Здесь кроется большая тонкость.

На первый взгляд, кажется, что когда мы имеем какую-нибудь безгранично дифференцируемую функцию $f(x)$, то весьма просто её «разложить в степенной ряд». И на первый взгляд кажется, что здесь нет места никаким сомнениям, ибо представляется, что бесконечный ряд Маклорена должен сходится и должен иметь суммой разлагаемую функцию $f(x)$. Но в действительности дело обстоит гораздо сложнее и тоньше.

Во-первых, составленный по правилу Маклорена для заданной функции $f(x)$ бесконечный ряд (3.141) может оказаться *расходящимся всюду* (кроме точки $x = 0$).

Во-вторых, составленный по правилу Маклорена для заданной функции $f(x)$ бесконечный ряд (3.14), хотя и может оказаться сходящимся в его промежутке сходимости $(-r, +r)$, $r > 0$, однако суммой этого степенного ряда может оказаться вовсе не заданная функция $f(x)$, а совершенно посторонняя.

Все, что можно извлечь из формулы Маклорена, это только то, что если рассматриваемая функция $f(x)$ способна служить суммой степенного ряда, то такой ряд имеется *только один* и его коэффициенты должны тогда определяться по правилу Маклорена. Но на основной вопрос: *может ли данная безгранично дифференцируемая функция $f(x)$ быть суммой степенного ряда, т. е. возможно ли её разложение в ряд степеней,* бесконечный ряд Маклорена ответить не может.

В целях решения этого вопроса обычно прибегают к конечной формуле Маклорена, устанавливающей оценку разности между рассматриваемой функцией $f(x)$ и суммой n первых членов бесконечного ряда Маклорена; эту разность обозначают через $R_n(x)$:

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} \right].$$

Ясно, что для того чтобы *сумма бесконечного ряда Маклорена была равна функции* $f(x)$ *в промежутке сходимости* $(-r, +r)$ *этого ряда,* необходимо и достаточно, *чтобы имели*

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

всюду в промежутке $(-r, +r)$.

Так как равенство (3.14) можно переписать в виде

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{2!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1!)} + R_n(x),$$

то *называют* это равенство *конечной формулой* (не рядом) *Маклорена,* а количество $R_n(x)$, стоящее последним в правой части, *дополнительным членом* (или, неправильно, «остатком»).

Для того чтобы безгранично дифференцируемая функция разлагалась в промежутке $(-r, +r)$, *в сходящийся ряд степеней, необходимо и достаточно, чтобы дополнительный член стремился к нулю всюду в этом промежутке, когда n безгранично возрастает.*

В целях наибольшего удобства ему дают *различные формы.* Одни из этих форм удобны для одних функций *f(x)*, другие – для других. Общих правил здесь нет. Мы здесь укажем простейшую из форм дополнительного члена $R_n(x)$, а именно:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n,$$

где ξ есть величина средняя, находящаяся между 0 и x.

Правую часть этого равенства принято называть остаточным членом в форме Лагранжа. Пользование этой формой во многих случаях затруднительно, так как неизвестно, в каком месте отрезка $[0, x]$ находится средняя величина ξ. Однако для трёх функций: e^x, $\sin x$ и $\cos x$ остаточный член в форме Лагранжа довольно быстро приводит к цели.

Пример 3.7. Разложить в степенной ряд $f(x) = e^x$.

Решение. Имеем $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x, \ldots$ Значит $f(0) = 1$, $f'(0) = 1, f''(0) = 1$, и остаточный член в форме Лагранжа будет

$R_n(x) = e^{\xi} \cdot \dfrac{x^n}{n!}$, где ξ промежуточное число между 0 и x. Отсюда следует, что

$$|R_n(x)| < e^{|x|} \cdot \frac{|x|^n}{n!}.$$

Но ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{|x|^n}{n!}$ есть везде сходящийся. Значит имеем

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0.$$

Поэтому $R_n(x) \to 0$, когда $n \to +\infty$ для любого x.

Окончательно, *для всякого x:*

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Пример 3.8. Разложить в степенной ряд $f(x) = \sin x$.

Решение. Имеем $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, \ldots, f'''(x) = -\cos x$ и $f^{VI}(x) = \sin x$. Дальше производные, очевидно, повторяются периодически. Общая формула для n-й производной: $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Для x = 0 имеем $f(0) = 0,\ \ f'(0) = 1,\ \ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1$ и т. д. Следовательно, мы имеем период из четырёх чисел: 0, 1, 0, – 1. Остаточный член в форме Лагранжа будет

$$R_n(x) = \sin\left(\xi + n\frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{x^n}{n!}.$$

Следовательно, $|R_n(x)| \le \dfrac{|x|^n}{n!} \to 0$ для всякого x при $n \to +\infty$.

Окончательно, имеем *сходящееся всюду* разложение:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{3.15}$$

Пример 3.9. Разложить в степенной ряд $f(x) = \cos x$.

Решение. Можно было бы проделать такое же исследование остаточного члена в форме Лагранжа, какое было сделано для $\sin x$. Но ясно, что делать это не стоит, потому что можно воспользоваться правом дифференцировать сходящиеся *степенные ряды* (см., например, [3, 5]). Таким образом, дифференцируя почленно разложение (3.15), мы сразу получаем разложение Маклорена для $\cos x$:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

сходящееся для всякого x.

Для того чтобы произвести разложение в степенные ряды других функций, необходимо сначала придать остаточному члену $R_n(x)$ другую форму, ибо форма Лагранжа оказывается уже недостаточной, и уже затем, пользуясь этими другими формами, устанавливать сходимость рядов Маклорена к заданным функциям $f(x)$ в их промежутке сходимости. Но такое исследование даже для элементарных функций представляется затруднительным.

3.6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.6.1. Применив признак Д'Аламбера, показать, что нижеследующие ряды сходятся[5]:

1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \ldots$;

2. $\frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 6 \cdot 9} + \ldots$;

3. $\frac{1}{3} + \frac{4}{9} + \frac{9}{27} + \ldots$;

4. $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$;

5. $\frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 13} + \ldots$;

6. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \ldots 7} + \ldots$;

7. $\frac{1 \cdot 2}{10} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{10^3} + \ldots$.

3.6.2. Путём сравнения рядов показать сходимость нижеследующих рядов.

У к а з а н и е. Первоначально необходимо записать формулу общего члена (u_n) и осуществить его сравнение с соответствующими членами рядов $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ или $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$, условия сходимости которых известны.

---

[5] Здесь мы не указываем формулы для общего члена ряда (u_n), предоставив это читателю как дополнительное задание.

1. $1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}+\ldots$;

2. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$;

3. $\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots$;

4. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots$;

5. $1+\frac{1+2}{1+2^2}+\frac{1+3}{1+3^2}+\frac{1+4}{1+4^2}+\ldots$;

6. $2+\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}\ldots$.

3.6.3. Выяснить, какие из нижеследующих рядов сходятся абсолютно и какие условно:

1. $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^n}+\ldots$;

2. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots$;

3. $\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{4}+\frac{\sin 3\alpha}{9}+\ldots$;

4. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\ldots$;

5. $\frac{1}{3}-\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3-\left(\frac{4}{9}\right)^4+\ldots$.

3.6.4. Найти области сходимости следующих рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$; **2.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$; **3.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n}}$; **4**. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

5. $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$; **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{n!}$; **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 3^n}$; **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n^2+1}$;

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n-1}3^n}$; **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{2^{n-1}\cdot n\cdot(n+1)}$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

I. Учебные цели. Раскрыть сущностные основы теории дифференциальных уравнений и основных методов их решения. Научить решать типовые дифференциальные уравнения. Привить элементарные навыки моделирования простейших физических явлений с помощью дифференциальных уравнений.

II. Формирование компетенций: способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и путей её достижения; способность выявить естественнонаучную сущность проблем, возникающих в профессиональной деятельности, привлекать для их решения соответствующий математический аппарат (дифференциальных уравнений); способность применять математический аппарат для решения профессиональных задач.

III. Введение в тему. Дифференциальные уравнения занимают особое место в математике и используются во многих науках. Исследование природных явлений и изучение закономерностей общественных процессов приводит к построению математических моделей, основу которых составляют дифференциальные уравнения.

В дифференциальных уравнениях неизвестная функция содержится вместе со своими производными. Главная задача теории дифференциальных уравнений – изучение функций, представляющих собой решение этих уравнений.

В данном учебном курсе излагаются элементы теории обыкновенных дифференциальных уравнений (неизвестные функции зависят от одной переменной). Теория дифференциальных уравнений в частных производных (неизвестные функции зависят от нескольких переменных) является более сложной и изучается в других курсах.

Вопросы для контроля качества усвоения изложенного материала:

1. Что называют дифференциальным уравнением, его решением?
2. Решение уравнений с разделяющимися переменными.
3. Какие уравнения называются однородными?
4. Методы решения линейных однородных и неоднородных уравнений.
5. Виды дифференциальных уравнений, допускающих понижение порядка.
6. Дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

4.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ИХ ПОРЯДОК И СТЕПЕНЬ

Дифференциальным уравнением называется такое уравнение, которое содержит производные или дифференциалы неизвестной функции. С дифференциальными уравнениями мы уже имели дело при изучении неопределённых интегралов, в частности при решении практических задач.

Пример 4.1. Найти уравнение кривой, в каждой точке которой угловой коэффициент касательной равен $2x$.

Решение. Так как угловой коэффициент касательной к кривой в любой точке равен $\frac{dy}{dx}$, то по условию задачи имеем

$$\frac{dy}{dx} = 2x \text{ или } dy = 2xdx. \tag{4.1}$$

Получили простейшее дифференциальное уравнение первого порядка.

Очевидно, что

$$y = \int 2xdx = x^2 + C \ -$$

общий интеграл (неопределённый интеграл), который называют общим решением дифференциального уравнения (4.1).

Уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{4.2}$$

называют дифференциальным уравнением второго порядка, согласно порядку производной.

Вообще, порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, содержащейся в нём.

Порядок дифференциального уравнения следует отличать от его степени. Мы далее будем изучать в основном линейные уравнения, когда неизвестная функция y и все её производные, содержащиеся в уравнении, входят в него в первой степени. Но, например,

$$(y'')^2 = (1 + y')^3$$

уже не является линейным.

4.2. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ. ПОСТОЯННЫЕ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Решением или интегралом дифференциального уравнения называется такое соотношение между переменными величинами $(x \text{ и } y)$, следствием которого является данное дифференциальное уравнение.

Поясним это на примерах.

Пример 4.2. Соотношение $y = C_1 \sin x$, где C_1 – некоторая постоянная величина, есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0 \text{ или } y''+y=0\,, \tag{4.3}$$

ибо, находя последовательно $y'=C_1\cos x$, $y''=-C_1\sin x$ и подставляя в (4.3), мы получаем тождество

$$-C_1\sin x+C_1\sin x\equiv 0\,.$$

Значит уравнение (4.3) тождественно удовлетворено и притом при произвольном C_1.

Точно также $y=C_2\cos x$ является решением уравнения (4.3) при всяком постоянном C_2.

Соотношение же

$$y=C_1\sin x+C_2\cos x \tag{4.4}$$

является ещё более общим решением дифференциального уравнения (4.3), ибо решения $y=C_1\sin x$ и $y=C_2\cos x$ включаются в это решение (при определённых значениях C_1 и C_2).

Произвольные постоянные C_1 и C_2, содержащиеся в (4.4), называются *постоянными интегрирования*. Всякое решение вроде (4.4), которое содержит столько же произвольных постоянных, сколько единиц содержится в порядке уравнения (в рассматриваемом примере – две), называются *общим решением*[6].

Решения, выводимые из общего решения путём задания произвольных постоянных, называются *частными решениями*. На практике частное решение ищется из общего не прямым заданием произвольным постоянным определённых численных значений, а исходя из тех условий, которым должно удовлетворять искомое частное решение.

Так, если потребовать для уравнения (4.3), чтобы $y=2$ и $y'=-1$ при $x_0=0$, то из системы условий:

$$y=2=C_1\sin 0+C_2\cos 0=C_2\,,$$
$$y'=-1=C_1\cos 0-C_2\sin 0=C_1$$

находим, что $C_1=-1$, а $C_2=2$ и

$$y=2\cos x-\sin x\ \ -$$

искомое частное решение.

---

[6] Здесь имеются в виду лишь независимые друг от друга произвольные постоянные; число их уже нельзя изменить; высказанные утверждения об общем решении Н. П. Пучков считает наиболее приемлемым для студентов нематематических специальностей.

Задача поиска решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется задачей Коши.

Пример 4.3. Соотношение $xy + \ln\frac{y}{x} = C$ есть общее решение дифференциального уравнения

$$\left(x^2 y + x\right)dy + \left(y^2 x - y\right)dx = 0,$$

в чём нетрудно убедиться, продифференцировав обе части исходного соотношения.

Мы дали определение решения, используя понятие «соотношение» (между x и y), т.е. переменная y не обязательно должна явно выражаться через переменную x, как это формулируется в некоторой учебной литературе при определении решения дифференциального уравнения.

Обычно считается, что решение дифференциального уравнения доведено до конца, если его удалось получить в виде выражения, содержащего неопределённые интегралы («квадратуры»), при этом считается ненужным рассуждать о том, можно ли их «взять» или нет.

Пример 4.4. Соотношение

$$y\ln y = \int \frac{\sin x}{x}dx + C$$

есть общее решение дифференциального уравнения

$$x(\ln y + 1)dy - \sin x dx = 0.$$

Прежде чем приступить к задаче решения дифференциальных уравнений, необходимо, на наш взгляд, самостоятельно освоить методику проверки решений дифференциальных уравнений.

Дифференциальные уравнения	*Решения*
$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} = 0;$	$y = \frac{C_1}{x} + C_2;$
$8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{12y}{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 27 = 0;$	$C(y + C)^2 = x^3;$
$x\frac{dy}{dx} - y + x\sqrt{x^2 - y^2} = 0;$	$\arcsin\frac{y}{x} = C - x;$
$\frac{dy}{dx} + \frac{2xy}{x^2 + 1} = \frac{1}{x};$	$y = \frac{0{,}5x^2 + \ln x}{x^2 + 1};$
$xy\frac{d^2y}{dx^2} + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0.$	$\frac{x^2}{C_1} + \frac{y^2}{C_2} = 1.$

Процесс решения дифференциальных уравнений часто (и не случайно) называют их интегрированием (с целью избавиться от дифференциалов). Поэтому алгоритм нахождения решения обязательно содержит действия (преобразования исходного уравнения) «подведения» дифференциалов под интегралы вида $\int f(x)dx$ и $\int \varphi(y)dy$, которые могут быть как «берущимися», так и «не берущимися». Но в любом случае переменные x и y должны быть разделены. Рассмотрим методику разделения переменных на примере дифференциальных уравнений первого порядка с разделёнными переменными $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$.

4.3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

4.3.1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Общий вид таких уравнений

$$f_1(x)\cdot\varphi_1(y)dx + f_2(x)\cdot\varphi_2(y)dy = 0. \tag{4.5}$$

В предположении, что $f_1(x)\cdot\varphi_1(y) \neq 0,$ это уравнение сводится к виду

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = 0.$$

В этом случае

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int\frac{\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}dy = C,$$

что уже можно считать общим решением исходного дифференциального уравнения.

4.3.2. Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{4.6}$$

называется однородным, когда $M(x,y)$ и $N(x,y)$ суть однородные функции от x и y одной степени: $M(\lambda x,\lambda y) = \lambda^m M(x,y)$; $N(\lambda x,\lambda y) = \lambda^m N(x,y)$ и таким образом

$$\frac{M(\lambda x,\lambda y)}{N(\lambda x,\lambda y)} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}.$$

В частности, если $\lambda = \dfrac{1}{x}$, то $\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)} = \dfrac{M\left(1, {}^{y}\!/\!_{x}\right)}{N\left(1, {}^{y}\!/\!_{x}\right)}$.

Последняя дробь является функцией одной переменной $v = \dfrac{y}{x}$.

Такие дифференциальные уравнения всегда можно интегрировать посредством подстановки $y = v \cdot x$, где $v = v(x)$.

Эта подстановка приводит к дифференциальному уравнению относительно v и x, в котором эти переменные отделимы.

В самом деле из (4.6) имеем:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = \frac{M(x,xv)}{N(x,xv)} = \frac{x^m M(1,v)}{x^m N(1,v)} = \frac{M(1,v)}{N(1,v)} = f(v).$$

С другой стороны,

$$\frac{d(x \cdot v)}{dx} = v + x \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Поэтому получается уравнение

$$x \cdot \frac{dv}{dx} + v = f(v)$$

и значит переменные v и x легко отделимы: $\dfrac{dv}{f(v) - v} = \dfrac{dx}{x}$.

Проинтегрировав последнее уравнение и найдя соотношение между v и x, можно найти и соотношение между y и x.

4.3.3. Линейные уравнения

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно y имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x). \tag{4.7}$$

Если $Q(x) \equiv 0$, то соответствующее уравнение называется *линейным однородным уравнением*. «Однородность» проявляется в том, что, если $y^*(x)$ – решение этого уравнения, то $\lambda y^*(x)$ также является решением. В учебниках встречаются и несколько другие (по форме) объяснения этого факта. Очевидно, что однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = 0 \ -$$

уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{y} + P(x) \cdot dx = 0 \, .$$

Чтобы интегрировать уравнение (4.7), полагают $y = u \cdot v$, где u и v неизвестные функции независимого переменного x, подлежащие определению.

В этом случае

$$\frac{dy}{dx} = d(u \cdot v) = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} \, .$$

Уравнение (4.7) записывается в виде

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx} + P(x) \cdot u \cdot v = Q(x)$$

или

$$u \cdot \frac{dv}{dx} + v\left(\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u\right) = Q(x) \, . \qquad (4.8)$$

Мы всегда имеем право предположить, что первая неизвестная функция $u(x)$ уничтожает круглую скобку этого равенства, обращая её в ноль, т.е. что

$$\frac{du}{dx} + P(x) \cdot u = 0 \, . \qquad (4.9)$$

Тогда имеет место второе уравнение

$$u \cdot \frac{dv}{dx} = Q(x) \, . \qquad (4.10)$$

Уравнение (4.9) – однородное уравнение, соответствующее данному неоднородному (4.7), где вместо переменной y фигурирует переменная u; после нахождения $u(x)$ уравнение (4.10) будет содержать только одну неизвестную функцию $v(x)$, находящуюся под знаком дифференциала. Здесь перемененные v и x также разделены.

Ясно, что найденные $u(x)$ и $v(x)$ удовлетворяют уравнению (4.8), решение линейного уравнения (4.7) будет дано формулой $y = u(x) \cdot v(x)$.

В таком порядке идеи некоторых видов дифференциальных уравнений первого порядка сводятся к уравнениям с разделёнными переменными.

Примеры нахождения решений дифференциальных уравнений первого порядка.

Пример 4.5. Решить уравнение

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

Решение. Запишем соответствующие уравнения (4.9) и (4.10):

$$\frac{du}{dx}-\frac{2u}{x+1}=0\,,\ u\cdot\frac{dv}{dx}=(x+1)^{\frac{5}{2}}.$$

Решение первого

$$\int\frac{du}{u}=2\int\frac{dx}{x+1},$$

откуда $u=(x+1)^2$.

Тогда второе уравнение $u\dfrac{dv}{dx}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ при найденной $u=(x+1)^2$ представляется как

$$\frac{dv}{dx}=(x+1)^{\frac{1}{2}}\text{, или } dv=(x+1)^{\frac{1}{2}}dx\text{, а } v=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Находим искомую функцию $y=u\cdot v$

$$y=\frac{2(x+1)^{\frac{7}{2}}}{3}+C(x+1)^2.$$

Пример 4.6. Решить уравнение

$$y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}.$$

Решение. Преобразуем данное уравнение к виду

$$y^2dx+\left(x^2-xy\right)dy=0$$

Переменные x и y здесь не разделены и не могут быть разделены, так как выражение в круглых скобках нельзя представить как произведение функции только от x на функцию только от y. Но нетрудно заметить, что это однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}.$$

В результате, подставим $y = x \cdot v$

$$x\frac{dv}{dx} + v = -\frac{v^2}{1-v} \text{ или } vdx + x(1-v)dv = 0.$$

Чтобы отделить переменные, делим на $v \cdot x$. Это даёт

$$\frac{dx}{x} + \frac{1-v}{v}dv = 0;$$

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dv}{v} - \int dv = C;$$

$$\ln x + \ln v - v = C \text{ или } \ln xv = C + v.$$

Возвращаясь к переменной $y = v \cdot x$, имеем

$$y = Ce^{\frac{x}{y}} -$$

общее решение.

Если заданы начальные условия: $y = 4$ при $x = 0$, то оно имеет место при $C = 4$ и, таким образом,

$$y = 4e^{\frac{x}{y}} -$$

частное решение.

4.4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

К этому классу уравнений относят дифференциальные уравнения, содержащие производные (дифференциалы) – начиная со второго порядка и выше. Методы их решения разнообразны, с ними можно познакомиться, например, по учебникам [3, 5]. Среди них имеются те, которые путём замен переменных понижают порядок исходного дифференциального уравнения или сводят решение дифференциальных уравнений к уравнениям алгебраическим.

Рассмотрим некоторые примеры уравнений второго порядка.

1. *Уравнения, допускающие понижение порядка.*

Предположим, что дифференциальное уравнение второго прядка задано в общем виде

$$\Phi(x, y, y', y'') = 0$$

и не содержит самой функции y, а только x и производные y' и y'', то его можно заменить другим, на порядок ниже. Будем рассматривать в качестве неизвестной функции производную y', тогда $y''=\dfrac{dy'}{dx}$, и мы будем иметь уравнение первого порядка относительно y'. После того, как удастся найти эту неизвестную функцию y', выраженную через x, то само y получается уже взятием одного неопределённого интеграла.

Пример 4.7. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''=1+(y')^2.$$

В этом уравнении нет самой неизвестной функции y. Поэтому его (второй) порядок можно понизить на одну единицу, взяв за неизвестную функцию y'. Таким образом, имеем

$$dy'=\left(1+(y')^2\right)dx$$

или

$$\frac{dy'}{1+(y')^2}=dx.$$

Отсюда, интегрируя один раз и обозначая через C_1 произвольное постоянное, находим

$$\operatorname{arctg} y'=x+C_1.$$

Решаем это уравнение относительно y', получаем

$$y'=\operatorname{tg}(x+C_1),$$

значит

$$dy=\operatorname{tg}(x+C_1)\cdot dx.$$

Отсюда неизвестная функция y находится при помощи одной квадратуры

$$y=\int \operatorname{tg}(x+C_1)dx=\ln(\cos(x+C_1)+C_2),$$

где C_2 есть вторая произвольная постоянная.

Разрешимыми аналогичным образом являются ситуации, когда дифференциальное уравнение не содержит явным образом независимого переменного x или когда оно однородно относительно x, y' и y''.

2. *Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.*

Рассмотрим уравнение

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{4.11}$$

где p и q – суть постоянные и $f(x)$ непрерывная функция только x.

Нахождение общего решения этого уравнения основывается на следующих, доказанных, например, в учебниках [3, 5], положениях.

Правило отыскания общего решения однородного уравнения.

1. Рассматривается однородное уравнение

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{4.12}$$

соответствующее данному неоднородному (4.11).

Структура общего решения уравнения (4.12) $y_{\text{од}}$ следующая:

$$y_{\text{од}} = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x), \tag{4.13}$$

где $y_1(x), \cdot y_2(x)$ – суть два любые линейно независимые между собой частные решения, а C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Две функции $y_1(x)$, $y_2(x)$ считаются линейно независимыми, если составленный на их основе определитель Вронского (вронскиан) не равен нулю:

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Общее решение неоднородного уравнения (4.11) складывается как решение (4.13) и y^* – любое частное решение уравнения (4.11)

$$y_{\text{неод}} = y_{\text{од}} + y^* .$$

При таких условиях проблема нахождения общего решения уравнения (4.11) сводится к двум проблемам: проблеме нахождения линейно независимых функций $y_1(x), \cdot y_2(x)$, являющихся решением уравнения (4.12), и проблеме нахождения функции $y^* = y^*(x)$, являющейся решением уравнения (4.11).

В целях иметь частное решение уравнения (4.12) ищется такое постоянное r, чтобы (4.12) было удовлетворено функцией $y = e^{rx}$. Её производные: $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$.

Подставляя в (4.12) найденные величины и сокращая на неуничтожающийся (не равный нулю) множитель e^{rx}, мы получаем квадратное уравнение

$$r^2 + pr + q = 0 . \tag{4.14}$$

Его корни r_1 и r_2 – суть нужные нам значения постоянной r.

Уравнение (4.14) называется *характеристическим* уравнением для (4.12).

Итак, функции $y_1 = e^{r_1 x}$, $y_2 = e^{r_2 x}$ могут рассматриваться как частные решения уравнения (4.12).

Соответствующий им вронскиан:

$$W\left[e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\right] = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) e^{(r_1 - r_2)x} .$$

Условие $r_1 \neq r_2$ гарантирует линейную независимость функций y_1 и y_2, поэтому, если корни r_1, r_2 уравнения (4.13) действительные и различные, общее решение уравнения (4.12) записывается в виде

$$y_{\text{од}} = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \; r_1 \neq r_2 . \qquad (4.15)$$

Если же корни r_1, r_2 характеристического уравнения суть комплексные числа, то общее решение (4.15) уравнения (4.12) надо немного преобразовать, чтобы оно могло быть применено к задачам естествознания и техники.

Так как коэффициенты p и q дифференциального уравнения (4.11) суть действительные, то комплексные корни r_1, r_2 квадратного уравнения (4.14) суть сопряжённые, т.е. имеющие вид

$$r_1 = a + bi \text{ и } r_2 = a - bi .$$

Поэтому при действительном x по формуле Эйлера[7] имеем

$$e^{r_1 x} = e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx),$$
$$e^{r_2 x} = e^{(a-bi)x} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx).$$

Отсюда общее решение (4.15) получит вид

$$y = e^{ax}\left((C_1 + C_2)\cos bx + i(C_1 - C_2)\sin bx\right).$$

Вводя обозначения $C_1^* = C_1 + C_2$ и $C_2^* = i(C_1 - C_2)$, мы можем написать общее решение уравнения (4.12) в виде

$$y = e^{ax}\left(C_1^* \cos bx + C_2^* \sin bx\right).$$

Из этой формы общего решения следует, что

$$y_1 = e^{ax} \cos bx \text{ и } y_2 = e^{ax} \sin bx$$

[7] $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

суть два действительные частные решения уравнения (4.12). Нетрудно убедиться, что $W[y_1, y_2] = b \neq 0$, т.е. найденные решения линейно независимые и

$$y_{\text{од}} = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx .$$

Если корни r_1, r_2 характеристического уравнения равны, то тогда они обязательно действительны и оба $r = -\frac{p}{2}$. В этом случае в качестве частных решений рекомендуют брать $y_1 = e^{rx}$, $y_2 = xe^{rx}$, так как y_2 является решением уравнения (4.12) (при $q = \frac{p^2}{4}$) и, кроме того,

$$W\left[e^{rx}, xe^{rx}\right] = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx} + xre^{rx} \end{vmatrix} = 1 + xr - xr = 1 \neq 0 .$$

Примеры решения линейных однородных уравнений второго порядка.

Пример 4.8. Решить уравнение $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее данному линейному однородному уравнению

$$r^2 - 2r - 3 = 0 .$$

Корни этого уравнения

$$r_1 = 3, r_2 = -1 \ -$$

действительные и различные. Следовательно, общее решение исходного уравнения записывается в виде

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} .$$

Пример 4.9. Решить уравнение $y'' + 4y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, соответствующее данному линейному однородному уравнению

$$r^2 + 4 = 0 .$$

Корни этого уравнения

$$r_{1,2} = \pm 2i \ -$$

комплексно-сопряжённые, при этом $a = 0, b = 2$. Следовательно, общее решение уравнения исходного уравнения записывается в виде

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x .$$

Пример 4.10. Решить уравнение $y'' + 2y' + y = 0$ и найти такое его частное решение, что $y = 4$ и $y' = -2$ при $x = 0$.

Решение. Требуется найти решение задачи Коши. Составим характеристическое уравнение, соответствующее данному линейному однородному уравнению

$$r^2 + 2r + 1 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$r_{1,2} = -1 \ -$$

действительные и равные. Следовательно, общее решение уравнения исходного уравнения записывается в виде

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}. \qquad (4.16)$$

Найдём частное решение линейного однородного уравнения, соответствующее заданным начальным условиям. Для этого необходимо найти y':

$$y' = -C_1 e^{-x} + C_2 e^{-x} - C_2 x e^{-x}. \qquad (4.17)$$

Подставляя в уравнения (4.16) и (4.17) начальные условия $y = 4$ и $y' = -2$ при $x = 0$, получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 = 4, \\ -C_1 + C_2 = -2. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $C_1 = 4$, $C_2 = 2$. Подставив значения C_1 и C_2 в общее решение, получим частное решение

$$y = 4e^{-x} + 2xe^{-x}.$$

Правило отыскания частного решения неоднородного уравнения.

1. *Метод Лагранжа вариации постоянных*.

Этот метод изобретён для отыскания частного решения $y^*(x)$ неоднородного уравнения (4.11), когда известно общее решение однородного уравнения (4.12), соответствующего неоднородному (4.11).

Пусть $y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2$ – общее решение однородного уравнения (4.12).

Метод вариации произвольных постоянных состоит в том, что на C_1 и C_2 мы перестаём смотреть как на постоянные и, предполагая их функциями от x, определяем их так, чтобы искомое частное решение $y^*(x)$ было бы дано формулой

$$y^*(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) . \qquad (4.18)$$

Подставляя $y^*(x)$ в (4.11) и производя его преобразование так, как указано, например, в [3, 5], можно, по крайней мере, в квадратурах, найти $C_1(x)$, $C_2(x)$, а, следовательно, и $y^*(x)$.

2. *Отыскание частного решения в случаях определённой формы функции, стоящей в правой части неоднородного уравнения.*

Форма функции $f(x)$ в уравнении (4.11)	Форма решения $y^*(x)$
$f(x) = a + bx$;	$y^* = A + Bx$;
$f(x) = ae^{bx}$;	$y^* = Ae^{bx}$;
$f(x) = a_1 \cos bx + a_2 \sin bx$.	$y^* = A_1 \cos bx + A_2 \sin bx$.

Специальные случаи:

I. Форму решения y^* надо умножить на x.

1) если $x = 0$ есть простой корень характеристического уравнения (4.14) и $f(x) = a + bx$;

2) если $x = b$ есть простой корень характеристического уравнения и $f(x) = ae^{bx}$;

3) если $x = \pm bi$ есть суть корни характеристического уравнения и $f(x) = a_1 \cos bx + a_2 \sin bx$.

II. Форму решения y^* надо умножить на x^2, если:

1) $x = 0$ есть двойной корень характеристического уравнения (4.14) и $f(x) = a + bx$;

2) если $x = b$ есть двойной корень характеристического уравнения и $f(x) = ae^{bx}$;

Сам же метод отыскания решения y^* состоит в подстановке указанных выражений для y^* в неоднородное уравнение (4.11) и далее, в определении постоянных A, B, A_1, A_2 так, чтобы уравнение (4.11) было удовлетворено.

Пример 4.11. Решить уравнение $y'' - 2y' - 3y = 2x$.

Решение. Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{неод}} = y_{\text{од}} + y^* .$$

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $r^2 - 2r - 3 = 0$ имеет корни $r_1 = 3, r_2 = -1$ и общее его решение равно $y_{\text{од}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$.

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = 2x$. Следовательно, частное решение надо искать в виде $y^* = Ax + B$, так как $x = 0$ не является корнем характеристического уравнения.

Для отыскания коэффициентов A и B, продифференцируем дважды y^*

$$y^{*\prime} = A\ ,\ \ y^{*\prime\prime} = 0$$

и подставим y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение

$$-2A - 3Ax - 3B = 2x\ .$$

Это равенство должно выполняться при всех x , тогда

$$\begin{cases} -2A - 3B = 0, \\ \quad -3A = 2, \end{cases}$$

откуда получаем $A = -\dfrac{2}{3}$, $B = \dfrac{4}{9}$. Частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y^* = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}x\ .$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения равно

$$y_{\text{неод}} = \frac{4}{9} - \frac{2}{3}x + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}\ .$$

Пример 4.12. Решить уравнение $y'' - 2y' - 3y = 2e^{-x}$.

Решение. Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{неод}} = y_{\text{од}} + y^*\ .$$

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $r^2 - 2r - 3 = 0$ имеет корни $r_1 = 3, r_2 = -1$ и его общее решение равно $y_{\text{од}} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}$.

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = 2e^{-x}$. $\alpha = -1$ является однократным корнем характеристического уравнения.

Следовательно, частное решение надо искать в виде $y^* = Axe^{-x}$, тогда

$$y^{*\prime} = Ae^{-x} - Axe^{-x} = Ae^{-x}\left(1 - x\right),$$

$$y^{*\prime\prime} = -Ae^{-x}(1 - x) - Ae^{-x}$$

и подставим y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение и, сокращая затем обе части уравнения на e^{-x}, получаем:

$$A(x - 2) - 2A(1 - x) - 3Ax = 2,$$

$$Ax + 2Ax - 3Ax - 2A - 2A = 2.$$

После приведения подобных и решения линейной системы двух уравнений с двумя неизвестными, получаем $A = -\dfrac{1}{2}$. Частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y^* = -\frac{1}{2}xe^{-x}.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения равно

$$y_{\text{неод}} = -\frac{1}{2}xe^{-x} + C_1e^{3x} + C_2e^{-x}.$$

Пример 4.13. Решить задачу Коши $y'' + 4y = 2\cos 2x$, $y = 0$, $y' = 2$ при $x = 0$.

Решение. Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{неод}} = y_{\text{од}} + y^*.$$

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения имеет вид $r^2 + 4 = 0$. Его корни $r_{1,2} = \pm 2i$, следовательно, общее решение равно

$$y_{\text{од}} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Найдём частное решение неоднородного уравнения.

Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = 2\cos 2x$. $\alpha = 0, \beta = 2$, следовательно, $\alpha \pm \beta i = \pm 2i$ – являются корнями характеристического уравнения.

В таком случае частное решение необходимо искать в виде

$$y^* = A_1 x\cos 2x + A_2 x\sin 2x\,.$$

Для отыскания коэффициентов A_1 и A_2, продифференцируем дважды y^*

$$y^{*\prime} = A_1\cos 2x - 2A_1 x\sin 2x + A_2\sin 2x + 2A_2 x\cos 2x\,,$$

$$y^{*\prime\prime} = -2A_1 x\sin 2x - A_1\sin 2x - 4A_1 x\cos 2x + 2A_2\cos 2x +$$
$$+ 2A_2\cos 2x - 4A_2 xsos 2x$$

и подставим y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение. После приведения подобных, получаем

$$-2A_1 x\sin 2x - A_1\sin 2x - 4A_1 x\cos 2x + 2A_2\cos 2x + 2A_2\cos 2x -$$
$$-4A_2 x\cos 2x + x\left(A_1\cos 2x + A_2\sin 2x\right) = 2\cos 2x.$$

После приведения подобных и решения линейной системы двух уравнений с двумя неизвестными, получаем $A_1 = 0$, $A_2 = \dfrac{1}{2}$. Частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y^* = \frac{1}{2}x\sin 2x\,.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения равно:

$$y_{\text{неод}} = \frac{1}{2}x\sin 2x + C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\text{, тогда}$$

$$y'_{\text{неод}} = \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - 2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x\,.$$

Подставив в $y_{\text{неод}}$ и $y'_{\text{неод}}$ начальные условия $y = 0$, $y' = 2$ при $x = 0$, получаем $C_1 = 0$, $2 = 2C_2$, т.е. $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

Отсюда решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $y = 0$, $y' = 2$ при $x = 0$, равно

$$y = \frac{1}{2}x\sin 2x + \sin 2x\,.$$

Пример 4.14. Решить уравнение $y'' = 2x$.

Решение. Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y_{\text{неод}} = y_{\text{од}} + y^*\,.$$

Характеристическое уравнение соответствующего однородного уравнения $r^2 = 0$ имеет корни $r_{1,2} = 0$ и его общее решение равно $y_{од} = C_1 + C_2 x$.

Найдём частное решение неоднородного уравнения. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = 2x$. $\alpha = 0$ является двукратным корнем характеристического уравнения.

Следовательно, частное решение надо искать в виде $y^* = x^2(Ax + B)$.

Для отыскания коэффициентов A и B, продифференцируем дважды y^*

$$y^{*\prime} = 3Ax^2 + 2Bx\,,\ y^{*\prime\prime} = 6Ax + 2B$$

и подставим y^*, $y^{*\prime}$ и $y^{*\prime\prime}$ в исходное уравнение

$$6Ax + 2B = 2x\,.$$

После приведения подобных и решения линейной системы двух уравнений с двумя неизвестными, получаем $A = \frac{1}{3}x^3$, $B = 0$. Частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид

$$y^* = \frac{1}{3}x^3\,.$$

Следовательно, общее решение неоднородного уравнения равно

$$y_{\text{неод}} = \frac{1}{3}x^3 + C_1 + C_2 x\,.$$

4.5. ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Очень многие задачи механики и физики решаются методами теории дифференциальных уравнений.

Например, задачи прямолинейного движения очень часто приводят к дифференциальным уравнениям первого и второго порядков так, что решение этих задач зависит от решения названных уравнений.

Пусть действуют обозначения: t – время, s – расстояние движущейся точки от фиксированного начала по траектории в момент времени t, v – скорость этого движения, a – ускорение.

Тогда $s(t)$ – зависимость пройденного пути от времени, $v = \frac{ds}{dt}$, а

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dt}\frac{ds}{ds} = v\frac{dv}{ds}. \qquad (4.19)$$

Пример 4.15. Известно, что ускорение обратно пропорционально квадрату расстояния s и равно -1 для $s = 2$. При этом $v = 5$ и $s = 8$ для $t = 0$.

а) Найти v, когда $s = 24$;

б) Найти время T, затраченное точкой во время пробега от $s = 8$ до $s = 24$.

Решение.

а) Согласно первому условию, имеем:

ускорение равно $a = -\frac{4}{s^2}$.

Согласно равенству (4.19)

$$v \cdot \frac{dv}{ds} = -\frac{4}{s^2} \; -$$

дифференциальное уравнение первого порядка. Неизвестная функция $v(s)$.

Переменные s и v разделяются:

$$vdv = -\frac{4ds}{s^2} \text{ и } \frac{v^2}{2} = \frac{4}{s} + C \text{, т.е. } v^2 = \frac{8}{s} + C_1.$$

Согласно второму условию, $v = 5$ и $s = 8$, тогда $C_1 = 24$ и

$$v^2 = \frac{8}{s} + 24 \qquad (4.20)$$

при $s = 24$ $v = \sqrt{\frac{1}{3} + 24} \cong 4{,}93$.

б) Разрешая (4.20) относительно v, получаем:

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{8}\,\frac{\sqrt{s + 3s^2}}{s}.$$

Разделим переменные s и t и интегрируем

$$T = \int dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_8^{24} \frac{sds}{\sqrt{s + 3s^2}} = 3{,}20.$$

4.6. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

4.6.1. Проверить следующие решения соответствующих дифференциальных уравнений:

Дифференциальные уравнения	*Решения*
1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{2}{x}\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2y}{x^2}=0$;	$y=C_1x+C_2x^2$;
2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-7\dfrac{dy}{dx}+12y=0$;	$y=C_1e^{3x}+C_2e^{4x}$;
3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$;	$y=C_1\sin(kx+C_2)$;
4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=8\sin 2x$.	$y=2(1-x)\cos 2x$.

4.6.2. Найти общее решение каждого из следующих дифференциальных уравнений:

1. $(1+y)dx-(1-x)dy=0$;
2. $xydx+\sqrt{1-x^2}\,dy=0$;
3. $\sqrt{1-y^2}\,dx=\sqrt{1+x^2}\,dy$;
4. $(1+x^2)dy=\sqrt{1-y^2}\,dx$;
5. $(1+2y)xdx+(1+x^2)dy=0$;
6. $(x+y)dx+xdy=0$;
7. $xy^2dy=(x^3+y^3)dx$;
8. $(x^2-2y^2)dx+2xydy=0$;
9. $\sqrt{1-x^2}\,dy+\sqrt{1-y^2}\,dx=0$;
10. $(x^2y+x)dy+(xy^2-y)dx=0$.

4.6.3. Решить задачу Коши:

1. $\dfrac{dx}{y}+\dfrac{dy}{x}=0,\ x_0=3,\ y_0=4$;

2. $x(x+2y)dy-y^2dx=0,\ x_0=1,\ y_0=1$;

3. $(1+y^2)dx-xydy=0,\ x_0=1,\ y_0=0$;

4. $(x+y)dy+(x-y)dx=0,\ \ x_0=0,\ y_0=1$.

4.6.4. Найти общее решение каждого из следующих дифференциальных уравнений:

1. $\dfrac{dy}{dx}+y=e^{-x}$; **2.** $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{ny}{x}=e^xx^n$; **3.** $\dfrac{dy}{dx}\cos x+y\cdot\sin x=1$;

4. $\dfrac{dy}{dx}+y\cdot\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$; **5.** $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^3$.

4.6.5. Решить задачу Коши:

1. $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^3e^x$, $x_0=1$, $y_0=0$; **2.** $x\dfrac{dy}{dx}+y=3$, $x_0=1$, $y_0=0$;

3. $\dfrac{dy}{dx}+y\,\mathrm{tg}x=\dfrac{1}{\cos x}$, $x_0=0$, $y_0=0$; **4.** $x\dfrac{dy}{dx}+y=x+1$, $x_0=2$, $y_0=3$.

4.6.6. Найти общее решение дифференциального уравнения $\dfrac{d^2y}{dx^2}=x^2-2x$.

4.6.7. Найти общее решение каждого из следующих линейных однородных дифференциальных уравнений:

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+3y=0$; **2.** $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}-6y=0$;

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=0$; **4.** $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$;

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-9y=0$; **6.** $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}=0$;

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+13y=0$; **8.** $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+8y=0$.

4.6.8. В следующих примерах отыскать частные решения, удовлетворяющие данным условиям:

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=0,\ x_0=0,\ y(0)=\dfrac{1}{2},\ y'(0)=1$;

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-2y=0,\quad x_0=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=0$;

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=0,\quad x_0=0,\ y(0)=6,\ y'(0)=0$;

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0,\quad x_0=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=10$;

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=0;\quad x_1=0,\ y(0)=4;\ x_2=\dfrac{\pi}{2},\ y(\dfrac{\pi}{2})=0$;

6. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+9y=0,\quad x_0=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=2$;

7. $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0, \quad x_0=0,\ y(0)=3,\ y'(0)=-3$;

8. $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+5y=0, \quad x_0=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$.

4.6.9. Найти общее решение каждого из следующих дифференциальных уравнений:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=x+\frac{1}{2}$;

2. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=2x+1$;

3. $\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+13y=39$;

4. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=e^{2x}$;

5. $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-2y=e^{2x}$;

6. $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=9e^{3x}$;

7. $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=5\cos 2x$;

8. $\frac{d^2y}{dx^2}+9y=3\cos 3x$;

9. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-3y=8\cos 2x$.

4.6.10. В следующих задачах разыскать частное решение, удовлетворяющее поставленным условиям:

1. $\frac{d^2y}{dx^2}-4y=4, \quad x_0=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$;

2. $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=8x, \quad x_0=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=4$;

3. $\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}=6, \quad x_0=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$;

4. $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=2x, \quad x_0=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=1$;

5. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=\sin 2x, \quad x_0=0,\ y(0)=0,\ y'(0)=0$;

6. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=2\cos x, \quad x_0=0,\ y(0)=2,\ y'(0)=0$.

ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

1. Первообразная. Неопределённый интеграл. Свойства. Теорема существования.
2. Таблица интегралов.
3. Методы интегрирования: непосредственное интегрирование, метод подстановки, интегрирование по частям.
4. Рациональные дроби. Простейшие дроби и их интегрирование.
5. Метод неопределённых коэффициентов разложения дроби на простейшие.
6. Интегрирование рациональных дробей.
7. Интегрирование тригонометрических функций.
8. Интегрирование иррациональных функций. Тригонометрические подстановки.
9. Определение определённого интеграла.
10. Задача о площади криволинейной трапеции. Геометрический смысл определённого интеграла.
11. Свойства определённого интеграла.
12. Интеграл с переменным верхним пределом. Производная интеграла с переменным верхним пределом.
13. Формула Ньютона–Лейбница.
14. Метод интегрирования по частям в определённом интеграле.
15. Замена переменной в определённом интеграле.
16. Определённый интеграл на симметричном интервале.
17. Приложения определённых интегралов: вычисление площадей, длины дуги, объёма.
18. Числовые ряды.
19. Необходимый признак сходимости ряда.
20. Знакоположительные ряды: признаки сравнения, признак Даламбера и интегральный признак Коши.
21. Признак Лейбница сходимости знакочередующегося ряда. Абсолютная сходимость знакопеременного ряда.
22. Функциональные ряды. Область сходимости.
23. Степенные ряды. Радиус сходимости.
24. Ряд Тейлора.
25. Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
26. Дифференциальные уравнения первого порядка: с разделяющимися переменными, однородные, линейные.

27. Уравнения, допускающие понижение порядка.

28. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Однородное и неоднородное.

29. Структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.

30. Структура общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализация принципов компетентностного подхода в образовательной деятельности вузов требует соответствующего методического обеспечения, целенаправленного на формирование особых умений – компетенций. Одним из показателей профессиональной компетентности выпускника вуза является его способность самостоятельно осваивать новые знания, используя соответствующую специальную литературу. Учебное пособие «Применение математических знаний в профессиональной деятельности» способствует, на наш взгляд, формированию этой способности за счёт оригинальной, в определённом смысле, методики изложения, не дающей прозрачного набора знаний, а требующей их самостоятельного поиска. В то же время это пособие даёт полное отражение образовательной программы по математике для инженерного бакалавриата. Эффект его использования наиболее проявляется при подготовке к контрольным испытаниям, предполагающим интегрированный, систематизированный подход ко всему вузовскому курсу математики.

Предлагаемое учебное пособие целесообразно также использовать магистрам первого курса для восстановления математических знаний, необходимых при изучении специальных предметов.

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ
ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.7.1. $\frac{1}{6}$. **2.7.2.** 1. **2.7.4.** 1) $2-\frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}$; 2) $\frac{1}{6}$; 3) $\frac{19}{72}$; 4) $\ln 2-\frac{5}{8}$. **2.7.5.** 1) $\frac{1}{25}$; 2) $\frac{e^2+5}{4}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{\pi^2}{64}+\frac{\pi}{16}-\frac{1}{8}$. **2.7.6.** $\ln\frac{3}{2}$. **2.7.7.** $\ln 2$. **2.7.8.** 1. **2.7.9**. $\ln\frac{4}{3}$. **2.7.10.** 3. **2.7.11.** 4,5. **3.6.5.** 1) $-1<x<1$; 2) $-1\le x\le 1$; 3) $-1\le x<1$; 4) $x\in R$; 5) $x\in R$; 6) $x\in R$; 7) $-3\le x<3$; 8) $-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}$; 9) $-6\le x\le 6$; 10) $-2\le x\le 2$. **4.6.2.** 1) $(1+y)(1-x)=C$; 2) $y=Ce^{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\arcsin y=\ln C\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$; 4) $\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{x+C}{1-Cx}$; 5) $(1+2y)\left(1+x^2\right)=0$; 6) $x^2+2xy=C$; 7) $y^3=3x^2\ln Cx$; 8) $y^2+x^2\ln Cx=0$; 9) $y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}=C$; 10) $xy+\ln\frac{y}{x}=C$. **4.6.3.** 1) $x^2+y^2=25$; 2) $xy+y^2=2x$; 3) $x^2-y^2=1$. **4.6.4.** 1) $y=(x+C)e^{-x}$; 2) $y=x^n\left(e^x+C\right)$; 3) $y=\sin x+C\cos x$; 4) $y=\sin x-1+Ce^{-\sin x}$; 5) $2y=(x+1)^4+C(x+1)^2$. **4.6.5.** 1) $y=x^2\left(e^x-e\right)$; 2) $xy=3(x-1)$; 3) $y=\sin x$; 4) $y=\frac{2}{x}+\frac{x}{2}+1$. **4.6.7.** 1) $y=C_1ex^t+C_2e^{3x}$; 2) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}$; 3) $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$; 4) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$; 5) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$; 6) $y=C_1-C_2e^{-3x}$; 7) $y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$; 8) $y=e^{-2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$. **4.6.8.** 1) $y=\frac{1}{2}e^{2x}$; 2) $y=2e^x+e^{-2x}$; 3) $y=3e^{2x}+3e^{-2x}$; 4) $y=5\sin 2x$; 5) $y=4\cos x$; 6) $y=2xe^{3x}$; 7) $y=3e^{-x}\cos x$; 8) $y=e^{-x}(\cos 2x+\sin 2x)$. **4.6.9.** 1) $y=C_1\cos 3x+$ $+C_2\sin 3x+\frac{x}{9}+\frac{1}{18}$; 2) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-2x}-\frac{2x}{3}+\frac{1}{9}$; 3) $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+$

$+C_2\sin 2x\big)+3$; 4) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\dfrac{e^{2x}}{3}$; 5) $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-\dfrac{xe^{2x}}{3}$;

6) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\dfrac{1}{2}e^{3x}$; 7) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\cos 2x$;

8) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\dfrac{1}{2}x\sin 3x$; 9) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-x}-\dfrac{32}{65}\sin 2x-$

$-\dfrac{56}{65}\cos 2x$. **4.6.10.** 1) $y=e^{2x}+e^{-2x}-1$; 2) $y=\sin 2x+2x$;

3) $y=e^{3x}-2x$; 4) $y=e^{x}$; 5) $y=\dfrac{2}{3}\sin x-\dfrac{1}{3}\sin 2x$; 6) $y=2\cos x+x\sin x$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Винберг, Э. Б.** Курс алгебры / Э. Б. Винберг. – Москва : МЦНМО, 2011. – 592 с.

2. **Сборник** задач по высшей математике. 1 курс / К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин и др. – 7-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2008. – 576 с.

3. **Письменный, Д. Т.** Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. : Ч. 1 / Д. Т. Письменный. – 5-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2006. – 256 с.

4. **Применение** математических знаний в профессиональной деятельности. Пособие для саморазвития бакалавра. Ч. 3. Математический анализ: учебное пособие / Н. П. Пучков, Т. В. Жуковская, Е. А. Молоканова, И. А. Парфенова, А. И. Попов. – Тамбов: Изд-во ФГБОУ ВПО ТГТУ, 2013. – 78 с.

5. **Шипачев, В. С.** Высшая математика : учебник для вузов / В. С. Шипачев. – Москва : Высшая школа, 1996. – 479 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

ПУЧКОВ Николай Петрович
ЖУКОВСКАЯ Татьяна Владимировна
МОЛОКАНОВА Елена Анатольевна и др.

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗНАНИЙ В ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ САМОРАЗВИТИЯ БАКАЛАВРА

Часть 4. Интегральное исчисление. Ряды.
Дифференциальные уравнения

Учебное пособие

Редактор И. В. Калистратова
Инженер по компьютерному макетированию О. М. Гурьянова

ISBN 978-5-8265-1238-8

Подписано в печать 26.12.2013.
Формат 60×84 /16. 5,58 усл. печ. л.
Тираж 100 экз. Заказ № 574

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14
Тел. 8(4752) 63-81-08;
E-mail: izdatelstvo@admin.tstu.ru