

Министерство образования и науки Российской Федерации
**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Тамбовский государственный технический университет»**

И.А. Жариков, И.И. Жариков, А.И. Евсейчев

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИГР

Рекомендовано Ученым советом университета
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся на экономических специальностях



Тамбов
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
2012

УДК 33:303.687.4(075.8)

ББК У011.3я73

Ж345

Рецензенты:

Доктор экономических наук, профессор ФГБОУ ВПО «ТГТУ»

Б.И. Герасимов

Доктор экономических наук, профессор ФГБОУ ВПО «ТГТУ»

В.В. Быковский

Жариков, И.А.

Ж345 Введение в теорию игр : учебное пособие / И.А. Жариков, И.И. Жариков, А.И. Евсейчев. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 80 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8265-1113-8.

Рынок экономической литературы в настоящее время насыщен всевозможными исследованиями по моделированию процессов управления производством, учебной и учебно-методической литературой. Для большинства эта специфическая терминология просто недоступна. Настоящее учебное пособие знакомит с основными понятиями теории моделирования, в основном, математического моделирования; методологией и основными формулами и определениями и ограничено как введение в теорию игр.

Предназначено для студентов экономических специальностей.

УДК 33:303.687.4(075.8)

ББК У011.3я73

ISBN 978-5-8265-1113-8

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2012

© И.А. Жариков, И.И. Жариков,
А.И. Евсейчев, 2012

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 4 |
| 1. ФОРМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ | 6 |
| 2. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ | 10 |
| 3. ИГРА КАК МОДЕЛЬ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ | 16 |
| 3.1. История математического моделирования | 16 |
| 3.2. Экономическая таблица Ф. Кене | 17 |
| 3.3. Статистическое направление | 17 |
| 3.4. Эконометрика | 18 |
| 3.5. Понятия «модель» и «моделирование» | 18 |
| 3.6. Математическое моделирование | 20 |
| 3.7. Формальное описание игры | 22 |
| 3.8. Пространства стратегий для игры в примере 1 | 26 |
| 3.8.1. Поиск на игровых деревьях | 26 |
| 3.8.2. Минимаксная процедура | 29 |
| 3.8.3. Альфа-бета процедура | 33 |
| 3.8.4. Пленер-алгоритм, реализующий минимаксную процедуру | 38 |
| 3.8.5. Редукция задач | 40 |
| 3.8.6. И/ИЛИ-графы. Решающий граф | 43 |
| 3.8.7. Различия и ключевые операторы | 46 |
| 3.8.8. Интеллектуальные роботы | 49 |
| 3.8.9. Интеллектуальные агенты | 50 |
| 4. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА | 52 |
| 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ | 60 |
| 5.1. Массив информации | 61 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 68 |
| ГЛОССАРИЙ | 70 |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ | 79 |

ВВЕДЕНИЕ

Метод (то греч. *methodos* – путь исследования, познания) определяется как совокупность действий, приемов, направленных на достижение некоторой цели. Методы науки, с одной стороны, отражают познанные законы исследуемой сферы окружающего мира, а с другой – выступают как средства дальнейшего познания.

Среди методов, используемых в исследовании, различают общие методы научного познания (логические методы познания) и методы исследований. *Метод научного познания* – система действий по объективному познанию явлений, любых объектов и процессов. *Метод исследований* – это инструмент для решения научных задач с целью установления закономерностей или знаний в численном выражении о процессах, технологиях, явлениях.

Научные исследования строятся на двух основополагающих классах методов: формальных и эвристических (неформальных). *Формальные методы* опираются на точные математические языки (математические, формальной логики и др.), модели и объекты. *Эвристические методы* – это специальные логические способы решения задач, построенные на методах научного познания и на использовании специальных правил, приемов, упрощений и обобщений.

В науке сформировались различные классификации формальных методов. В настоящем пособии ограничимся методами, которые являются основополагающими для исследования систем управления, особенно в области принятия управленческих решений. К ним относят шесть следующих методов:

- 1) аналитические методы, или методы элементарной математики (функциональный анализ), и классические методы математического анализа (интегральные и дифференциальные, вариационные исчисления);

2) вероятностно-статистические (математическая статистика и теория вероятностей);

3) исследования операций как приложение математического программирования, вероятностно – статистических, аналитических и сетевых методов, методов теории игр к задачам управления;

4) теории выбора и принятия решений;

5) математической логики;

6) математическое и имитационное моделирование.

Эвристические методы разделяются на три класса:

1) методы как совокупность присущих человеку механизмов, с помощью которых порождаются процедуры, направленные на решение творческих задач (дедуктивные и индуктивные методы, метод аналогий, анализ и синтез) и относящиеся к общим методам научного познания;

2) методы, направленные на сокращение времени решения задач (процедура направленного перебора, матричные методы и др.);

3) методы экспертных оценок.

1. ФОРМАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Аналитические методы. Нахождение точных количественных связей между зависимыми факторами достигается аналитическими методами. Их особенность состоит в использовании детерминированной информации, строгой алгоритмизации действий и однозначности установленной функциональной зависимости. Аналитические методы находят широкое применение в разработке планов и проектов, в расчетных операциях по оценке производственной, экономической и финансовой деятельности, в расчете нормативов различного вида материальных, информационных и человеческих ресурсов, в параметрическом исследовании систем управления и других видах деятельности.

Аналитические методы основываются на фундаментальной теории математического анализа, функционального анализа, интегральных и дифференциальных исчислений, разработанной группой выдающихся отечественных ученых – А.Н. Колмогоровым, С.В. Фоминым, Л.С. Портнягиным, Л.В. Канторовичем и др.

Вероятностно-статистические методы. Все реальные системы и процессы относят к классу вероятностных систем. Анализ и оценка случайных переменных величин, отображающих функционирование систем и процессов, производятся с применением вероятностно-статистических методов. Эти методы предназначены для решения следующих задач:

- нахождение законов распределения случайных величин и определения характера случайных процессов (различая стационарные и нестационарные), исследуемых процессов и систем;
- разработка вероятностных (статистических) и экономико-статистических моделей случайных процессов и систем;
- оценки устойчивости, надежности и рисков функционирования системы.

В управлении и экономике вероятностно-статистические методы получили широкое распространение в таких видах деятельности, как стратегическое планирование, тестирование или экспериментирование системы, диагностика внутренней и внешней среды системы, прогнозирование, анализ и контроль.

Фундаментальная теория математической статистики и теории вероятностей в многочисленных классических трудах отечественных (А. Колмогоров, В. Немчинов, Е. Вентцель, Н. Смирнов, В. Пугачев и др.) и зарубежных (Б. Ван-дер-Варден, В. Феллер, А. Хальд и др.) ученых и служит эффективным инструментом в исследовании вероятностных систем и случайных процессов.

Методы исследования операций. Модельное исследование систем с целью оптимизации и функционирования осуществляется методами исследования операций. Цель исследования операций состоит в том, чтобы выявить способ достижения цели управления в условиях ограниченных ресурсов – технических, материальных, трудовых и финансовых.

Теория исследования операций зародилась в 1940-х гг. в связи с необходимостью решения военных стратегических и тактических задач, а также задач оптимального использования ресурсов. С ее развитием началось целенаправленное применение математических методов для решения задач управления. К ним относятся: методы математического программирования (линейное и нелинейное; целочисленное, динамическое и стохастическое программирование); аналитические и вероятностно-статистические методы; сетевые методы; методы теории массового обслуживания, теории игр (теории конфликтных ситуаций) и др.

Одним из достижений теории исследования операций считается типизация моделей управления и методов решения задач. Например, для решения транспортной задачи, в зависимости от ее размерности, разработаны типовые методы: метод Фогеля, метод потенциалов, симплекс-метод. Также при решении задачи управления запасами, в зависимости от ее постановки, могут использоваться аналитические и вероятностно-статистические методы, методы динамического и стохастического программирования.

В управлении особое значение придается сетевым методам планирования. Эти методы позволили найти новый и весьма удобный язык для описания, моделирования и анализа сложных многоэтапных работ и проектов. В исследовании операций значительное место отводится совершенствованию управления сложными системами с применением методов теории массового обслуживания и аппарата марковских процессов. С развитием вычислительных средств одним из распространенных методов принятия решений выступает деловая игра, представляющая собой численный эксперимент с активным участием человека. Существуют сотни деловых игр, которые применяются для изучения целого ряда проблем управления, экономики теории организации, психологии, финансов и торговли.

Начиная с 1940-х гг., созданы фундаментальные труды по исследованию операций. Это основополагающие работы отечественных ученых: Л.В. Канторовича (1945), Е.С. Вентцель (1964), В.Г. Болтянского (1966), Е.Г. Гольштейна и Д.Б. Юдина (1966), Е.Б. Гермейера (1967, 1971), Н.П. Бусленко и Ю.А. Шрейдер (1969) и многочисленных зарубежных ученых: Р.Д. Льюиса и Х. Райфа (1963), Д. Гейла (1963), С. Карлина (1964), А. Кофмина (1965), Дж. Фон Неймана и О. Моргенштерна (1970), Г. Вагнера (1972), Х. Таха (1982) и др. В последнее

десятилетие XX в. методы исследования операций вновь широко освещаются в публикациях по оптимизации управления, в частности в публикациях Р. Томаса (1999), В. Карманова и В Федорова (1996).

Методы теории выбора и принятия решений. Это класс методов формирования альтернатив и их оценки по критерию при активном участии лица, принимающего решение (эксперта, консультанта, исследователя, аналитика и т.д.). Элементами принятия решений являются множество вариантов и принцип оптимальности, т.е. имеем Ω , ОП, где Ω – множество вариантов, ОП – условие допустимости альтернатив (принцип оптимальности). Лицом, принимающим решение (ЛПР), называют человека, имеющего цель, которая служит мотивом постановки задачи и поиска ее решения.

Особенность методов теории выбора и принятия решений заключается в органическом сочетании в них формального и эвристического аппарата таких процедур, как обработка экспертной информации, формирование альтернатив. Они также широко применяются при решении многокритериальных задач, которые активно используются в исследовании проблем управления.

Методы математической логики. Эти методы представляют собой применение функций алгебры логики (конъюнкций, дизъюнкций, и вероятностных функций) и операций с ними для оценки сложной организационной структуры системы. Заслуживают внимания логико-статистические методы, позволяющие описать структуру любой сложности с помощью функций алгебры логики и создать для каждого элемента структуры вероятностную модель его функционирования.

Моделирование. Под моделированием понимается процесс описания системы (или процесса, объекта) комплексом математических и информационных моделей, которые характеризуют ее с определенной степенью детализации, и воспроизведение функционирования системы (или процесса, объекта) программными и вычислительными средствами. Моделирование с использованием математических моделей называется математическим моделированием, с использованием имитационных моделей – имитационным.

Моделирование – это всегда эксперимент с использованием моделей и вычислительных технологий, которые позволяют проанализировать возможные альтернативы, оценить их преимущества и недостатки. Наконец, моделирование – это эффективный и безрисковый подход к экспериментированию, который невозможен в реальной жизни.

Развитие вычислительной техники и программирования позволило создавать реалистические математические модели функционирования сложных систем. В этой связи понятие «имитационное моделирование» распространяется на моделирование функционирования систем независимо от класса модели, поэтому в общем случае под имитаци-

онным моделированием понимается численный метод проведения вычислительных экспериментов с имитационными и математическими моделями, описывающими поведение сложных систем в течение продолжительных периодов времени.

Сложность и трудоемкость моделирования компенсируется теми возможностями, которые открываются в исследовании сложных систем. Возможность учета динамики, нелинейности, вероятностной природы некоторых процессов и внешних факторов системы и исследования ее путем вычислительного эксперимента в «ускоренном» масштабе времени позволяет избежать существенных ошибок при создании и функционировании сложных экономических систем, отдельных технологических линий и процессов.

Теория математического и имитационного моделирования получила широкое развитие в 1970 – 1980-х гг. Это труды зарубежных ученых, таких как Т. Нейлор и его соавторы из Института социальных систем и компьютерных имитационных экспериментов США, Р. Шеннон, К. Эрроу, Л. Гурвиц и др., и отечественных ученых – Н. Моисеева, Н. Бусленко, Ю. Подляка, Д. Голенко, В. Кулешова и др.

2. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

Фундаментальные методы научного познания – дедукция и индукция, анализ и синтез, аналогия, типология, сравнение – являются по определению эвристическими методами, так как они основаны на логических правилах и приемах, генерируемых мышлением. Дадим им краткое определение.

Дедукция (от лат. deduction – выведение) обозначает процесс логического вывода, т.е. переход по тем или иным правилам логики от некоторых предложенных посылок к их следствиям. В качестве исходных посылок могут выступать установленные закономерности и законы. Для общего случая дедукция – метод исследования, когда на основе «общего взгляда» на явление или объект устанавливаются (прогнозируются) его основные характеристики и особенности.

Индукция (от лат. induction – введение, наведение) – обобщение, связанное с предвосхищением результатов наблюдений и экспериментов на основе данных опыта. В общем случае индукция – метод исследования, когда по частным данным и явлениям устанавливают общие принципы и законы.

Анализ (разложение, расчленение) – процедура мысленного и реального расчленения объекта, системы, явления на составные части, каждая из которых исследуется отдельно. Анализ входит органической частью во все научные исследования. Он основывается на таких правилах, как выделение ведущего звена для постановки цели, обеспечение сопоставимости вариантов анализа, оперативность и своевременность, количественная определенность.

Синтез (соединение, сочетание) – соединение различных элементов, сторон предмета в единое целое (систему), которое осуществляется как в практической деятельности, так и в процессе изучения. Синтез противоположен анализу и неразрывно связан с ним. Как познавательная операция синтез имеет множество различных форм. Так, эмпирические данные, полученные в результате эксперимента, синтезируются при их теоретическом обобщении. Для своевременной науки управления характерны процессы синтеза как внутри организации, так и между организациями, например, создание сетевых структур.

Аналогия – прием познания, при котором на основе сходства объектов в одних признаках делают заключение об их сходстве и в других признаках и о возможности переносить информацию об одном объекте (аналог) на другой объект (прототип). Основным принципом аналогии служит принцип эквивалентного преобразования. Эквивалентное

преобразование – это построение по заданным объектам эквивалентных в том или ином смысле объектов. Типичным примером объектов, к которым применяются эквивалентные преобразования, являются структуры, их модели, алгоритмы (к которым можно отнести «дерево целей», «дерево проблем») и др.

Типология – метод научного познания, в основе которого лежит расчленение систем объектов и их группирование с помощью обобщенной, идеализированной модели или типа. Проблемы типологии возникают во всех науках, которые имеют дело с крайне разнородными по составу множествами объектов (как правило, дискретных) и решают задачу упорядоченного описания и объяснения этих множеств. Типология опирается на выявление сходства и различия изучаемых объектов, на поиск надежных способов их идентификации, а в своей теоретической форме стремится отобразить строение исследуемой системы, выявить ее закономерности. В типологии объект понимается как система, что связано с вычленением системно образующих связей, построением представления о структуре объекта.

В исследовании систем применяются:

1) морфологическая типология, ориентирующаяся на поиск некоторого неизменного «архетипа», «плана строения»;

2) сравнительно-историческая типология, цель которой – отображение системы в ее развитии;

3) структурная типология;

4) метод идеальных типов, где тип – абстрактная конструкция, с которой сопоставляются изучаемые объекты;

5) метод конструированных типов, где тип – некий объект, выделяемый по ряду критериев из всего множества и рассматриваемый в качестве представителя этого множества.

Истолкование типа как методологического средства способствовало отказу от трактовки типологии в качестве полного и однозначного отображения системы и переходу к пониманию того, что множеству конкретных типологических процедур соответствует и множество различных типологий для данной системы. С позиции исследования систем управления заслуживают внимания метод идеальных типов, разработанный немецким социологом М. Вебером, и метод конструированных типов, разработанный американским социологом Х. Беккером.

Типология, по Веберу, заключается в создании некоторых идеальных типов (архетипов), абстрактных конструкций, которые заведомо представляют собой упрощение, предельные понятия, не имеющие прямого аналога в реальности, но способные отразить ее основные свойства. Произвольность и отрицание объективных критериев вычисления и разработки типов характерны и для метода конструирования типов. Исследователь вправе на основе какого-либо события или случая создать тип, предсказать существование новых объектов.

Сравнение – метод познания, лежащий в основе суждения о сходстве или различии объектов. С помощью сравнения выявляются количественные и качественные характеристики объектов, составляются их классификации и производится оценивание. Сравнить – это сопоставить одно с другим с целью выявления их возможных отношений. Сравнение имеет смысл только в совокупности однородных объектов, образующих класс. Простейший и важнейший тип отношений, выявленных путем сравнения, – это отношения тождества (равенства) и различия. Сравнение по этим отношениям в свою очередь приводит к представлению об универсальной сравнимости, т.е. о возможности всегда ответить на вопрос, тождественны предметы или различны. Познавательный аспект сравнения положен в основу развития сравнительно-исторического научного метода, предназначенного для выявления и сопоставления уровней развития изучаемого объекта, определения произошедших изменений и тенденций. Существуют различные варианты данного метода: сравнительно-сопоставительный метод, историко-типологическое сравнение, историко-генетическое сравнение.

Методы экспертных оценок в настоящее время получили достаточно широкое распространение и основаны на мобилизации знаний и профессионального опыта. Их «корни» – теория выбора и принятия решений. Проведение экспертного оценивания – это всегда эксперимент. Задачи экспертного оценивания возникают на различных этапах принятия решений, когда:

- отсутствуют статистические данные либо из недостаточно;
- не существует достаточно надежных статистических методов оценки событий на основе прошлого опыта;
- в развитии прогнозируемого процесса намечаются существенные изменения, характеристики которых мало известны или вовсе не известны.

Методы экспертных оценок базируются на гипотезе, что, используя мнение одного (индивидуальные оценки) или нескольких (коллективные оценки) специалистов-экспертов, удастся создать близкий к реальному образ будущего состояния объекта. Индивидуальные экспертные оценки – это результаты обработки данных анкетирования, интервью и тестирования, а также аналитические оценки. Из методов аналитического экспертного оценивания в управлении распространены *аналитические обзоры, морфологический анализ и метод сценариев*. Классификация эвристических методов исследования представлена на рис. 1.

Для получения коллективной экспертной оценки используются следующие методы: метод комиссии, или «круглого стола»; «мозговой штурм»; метод «Дельфи» («дельфийская методика»); метод построения «дерева целей» (ПАТТЕРН) и деловая игра (рис. 1).

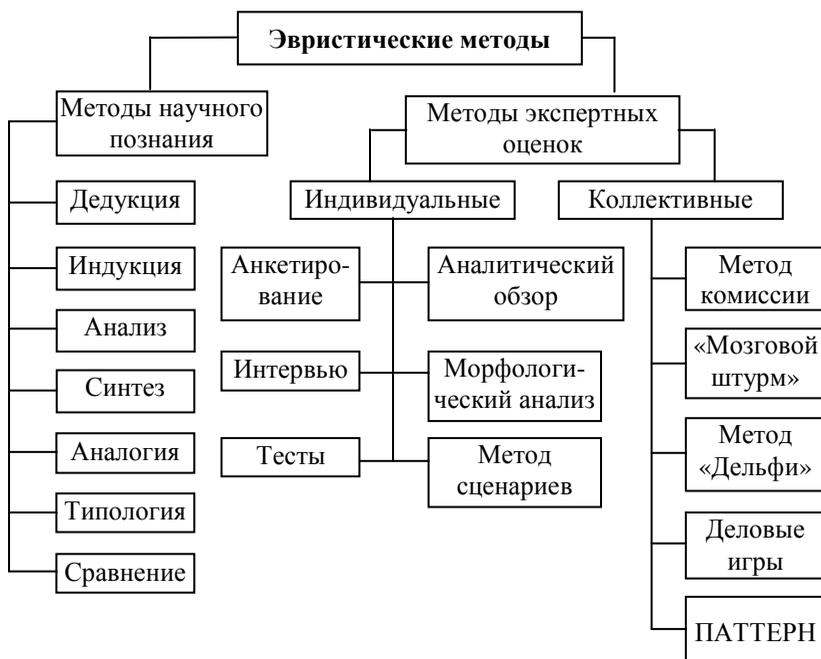


Рис. 1

Основное отличие между методами коллективной оценки состоит в организации работы экспертов. Метод комиссии предусматривает, что эксперты могут свободно обмениваться информацией друг с другом. При проведении «мозгового штурма» обмен информацией между экспертами открыт, но определенным образом регламентирован. Использование метода «Дельфи» предполагает, что эксперты изолированы друг от друга и оценки не подлежат открытому обсуждению, а для корректирования решений реализуется принцип обратной связи в экспертизе. Метод ПАТТЕРН – это построение каждым экспертом «дерева целей» в сочетании с качественным анализом, осуществляемым для принятия решений в конкретной области деятельности проблемы или задачи с последующим обсуждением результатов оценивания.

Остановимся на методах экспертных оценок с наиболее сложной методикой исполнения. Концепция *морфологического анализа* – это структурирование проблемы или объекта по элементам и составление по определенному алгоритму вариантов композиций из элементов, а также их оценка.

Метод сценариев – это подготовка и согласование о проблеме анализируемого объекта в письменном виде. Сценарием называется любой документ, содержащий анализ рассматриваемой проблемы и предложения по ее решению или развитию системы, независимо от того, в какой форме он представлен. Первоначально сценарии пишутся экспертами индивидуально, а затем формируется согласованный текст. На современном этапе разработке сценариев отводится значительная роль, особенно при составлении прогноза макроэкономических процессов. Изучение закономерностей функционирования экономических (производственных) систем и процессов, зависимости темпов и пропорций их развития от тех или иных решений, которые нельзя предвидеть однозначно, осуществляется на основе сценарных расчетов. С этой позиции под сценарием понимается исследование важной проблемы или совокупности гипотетических проблемных ситуаций путем проведения целенаправленных вариантов расчета с изменяющимися исходными условиями, переменными и параметрами.

Одним из основных методов коллективной экспертной оценки считается метод *«мозгового штурма»*, или *«мозговой атаки»*. Для проведения *«мозгового штурма»* комплектуется творческая группа из 6 – 10 специалистов. Сеанс проходит, как правило, в два этапа. На первом этапе допускается или даже поощряется выдвижение любых идей по принципу: чем больше идей, тем лучше, основываясь на гипотезе, что среди множества идей всегда есть одна полезная. Критика идей запрещается. На втором этапе все выдвинутые идеи изучаются и оцениваются экспертами по специальной шкале критериев. Идеи, в наибольшей степени отвечающие всем критериям, передаются на разработку, остальные отбрасываются.

Последовательность действий менеджера по организации *«мозгового штурма»* такова:

- 1) изложение проблемы: цель, ограничения, информация о том, что сделано в данной области;
- 2) предложение идей;
- 3) отбор идей менеджером;
- 4) углубленное развитие отобранных идей участниками *«мозгового штурма»*;
- 5) разработка конструктивных методов и предложений.

Метод *«Дельфи»*, или *«дельфийская методика»* (названный в честь дельфийского оракула храма Аполлона в Древней Греции), был предложен как итеративная процедура при проведении *«мозгового штурма»*. Но применение этого метода предполагает отказ от прямых кол-

лективных обсуждений. Дебаты заменяются разработанной программой последовательных индивидуальных опросов, проводимых обычно в форме заполнения анонимной специальной карточки или таблицы экспертной оценки. Ответы экспертов обобщаются и вместе с новой дополнительной информацией и аргументами передаются вновь в распоряжение экспертов, после чего они уточняют свои первоначальные ответы. Такая процедура повторяется несколько раз (обратная связь) до достижения приемлемой сходимости всех высказанных мнений.

3. ИГРА КАК МОДЕЛЬ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ

Ситуация считается конфликтной, если в ней сталкиваются интересы нескольких лиц, преследующих противоположные цели.

Автор первого трактата по теории игр – Джордж фон Нейман, который ориентировался на анализ конфликтной ситуации в вопросах экономики. При свободной конкуренции в составе борющихся сторон выступают промышленные предприятия и торговые фирмы. Интересными примерами конфликтных ситуаций являются спортивные состязания, арбитражные споры, аукционы и всевозможные выборы при наличии нескольких кандидатов на одно место.

Чтобы сделать возможным математический анализ конфликтной ситуации, ее надо упростить. Упрощенная формализованная модель конфликтной ситуации называется игрой, а конфликтующие стороны – игроками.

Элементами игры являются ходы. Правила игры предусматривают последовательность ходов и конкретно указывают характер каждого хода. В итоге, когда игра заканчивается, результатом является выигрыш или проигрыш каждого из игроков.

3.1. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

В производственно-хозяйственной деятельности человечество использует математику с момента своего зарождения. На протяжении тысячелетий арифметика и геометрия применялись для измерения и всевозможных вычислений. Математика активно воздействовала на развитие астрономии, физики и технических наук.

Например, применение дифференциального исчисления в теоретической механике в XVIII – XVIII вв. оказало большое влияние и на создание современной физики, т.е. теории относительности и квантовой механики.

Математические методы в экономике стали активно использоваться в последние 50 лет. Это связано с появлением ЭВМ.

Заглянем в историю математического моделирования.

Стремление использовать математику в качестве инструмента исследования привлекало родоначальников экономической науки. В. Петти (1623 – 1687) – основатель классической политической экономики – писал в предисловии к своей «Политической арифметике», что «...вместо того чтобы употреблять слова только в сравнительной и превосходной степени и прибегать к умозрительным аргументам, я вступил на путь выражения своих мнений на языке чисел, весов и

мер...». Главные преимущества математики как средства научного познания раскрываются при построении математических моделей, заменяющих в определенных отношениях исследуемые объекты. Первая в мире модель хозяйства была создана французским ученым Ф. Кенэ (1694 – 1774). В 1758 г. он опубликовал первый вариант своей знаменитой «Экономической таблицы», получившей название «зигзаг»; второй вариант – «арифметическая формула» – был опубликован в 1766 г.

3.2. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТАБЛИЦА Ф. КЕНЭ

«Экономическая таблица» Ф. Кенэ представляет собой графико-числовую модель процесса общественного воспроизводства. Она раскрывает основные стадии воспроизводства, т.е. производство, распределение, обращение, потребление и накопление.

Из модели Ф. Кенэ следует вывод, что нормальный ход общественного воспроизводства осуществляется только при соблюдении определенных стоимостных и материально-вещественных пропорций.

3.3. СТАТИСТИЧЕСКОЕ НАПРАВЛЕНИЕ

С точки зрения методологии исследования, т.е. соотношения абстрактно-теоретического и эмпирического анализа, а также дедуктивного и индуктивного методов, статистическое направление является противоположностью математической школе.

В рамках статистического направления разработано огромное количество математико-статистических моделей стандартных экономических явлений, используемых для краткосрочного прогнозирования и стратегического управления.

Типичным примером служит «Гарвардский барометр» – модель прогнозирования хозяйственной конъюнктуры, т.е. предсказания «экономической погоды», разработанная учеными-экономистами Гарвардского университета США под руководством У. Персона. «Гарвардский барометр» – это совокупность трех кривых: *A* – кривая фондового рынка, *B* – кривая товарного рынка и *C* – кривая денежного рынка. Крах на Нью-Йоркской бирже осенью 1929 г. показал неточные прогнозы статистического направления. Модели не показали глубинных факторов экономического развития и носили экстраполяционный характер.

Большой заслугой статистического направления была разработка методики обработки экономических показателей и статистических обобщений и анализа, т.е. выравнивание динамических рядов и их экстраполяция, выделение сезонных и циклических колебаний, а также факторный анализ, корреляционный и регрессионный анализ и проверка статистических гипотез.

3.4. ЭКОНОМЕТРИКА

Новое направление в экономической науке ввел норвежский ученый Р. Фриш (1895 – 1973), провозгласивший, что эконометрика – это синтез экономической теории, математики и статистики. Под эконометрикой в широком смысле этого слова понимается совокупность разного рода экономических исследований, проводимых с использованием математических методов.

Эконометрика в узком смысле этого слова занимается применением статистических методов в экономических исследованиях: построением математико-статистических моделей экономических явлений и оценкой параметров в моделях любого типа.

3.5. ПОНЯТИЯ «МОДЕЛЬ» И «МОДЕЛИРОВАНИЕ»

Модель – это такой материально или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

Под моделированием понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия и гипотеза. Главная особенность моделирования в том, что это метод опосредованного познания с помощью объектов-заместителей. Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты или проблемы непосредственно исследовать или невозможно, либо реально не существует.

Например, будущее состояние экономики или будущее моделирование включает три элемента:

- 1) субъект (исследователь);
- 2) объект исследования;
- 3) модель, определяющая отношение познающего субъекта и познаваемого объекта.

Сущность процесса моделирования показана на рис. 2.

На этапе процесса моделирования модель выступает как самостоятельный объект исследования. Формой такого исследования является проведение «модельных» экспериментов, при которых сознательно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные о ее «поведении». Конечным результатом является множество знаний о модели R .

Далее знания переносятся с модели на оригинал, т.е. происходит формирование множества знаний S . Если полученный результат модельного исследования связан с отличием модели от оригинала, то этот результат переносить нельзя.

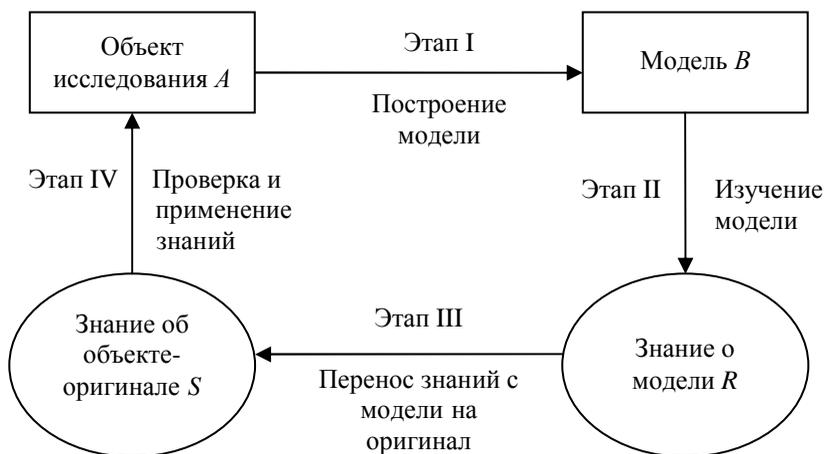


Рис. 2

Для понимания сущности моделирования важно не упустить из виду, что моделирование – это не единственный источник знаний об объекте. Процесс моделирования является более общим процессом познания. Моделирование – это циклический процесс, так что в процессе знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется и улучшается. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, исправляются на последующих циклах.

Все множество моделей делится на два больших класса: модели материальные или предметные и модели идеальные, т.е. мысленные.

В классе материальных моделей выделяются две группы:

- 1) модели физические;
- 2) модели предметно-математические.

Физические модели – это материальные объекты той же природы, что и объект-оригинал. Физическое моделирование более распространено в технических науках.

В экономике физическому моделированию соответствует понятие реального экономического эксперимента. Например, результаты эксперимента на одном предприятии по системам учета, планирования, хозрасчет или оплаты труда переносятся на всю отрасль. Но в экономике возможности физического моделирования или экспериментирования на реальных объектах ограничены. Это объясняется рядом причин: изучение отдельных частей производственно-хозяйственной деятельности не дает полного и правильного представления об экономической системе в целом, где трудно элиминировать внешние воздейст-

вия на экономический объект и учесть влияние таких субъективных факторов, как квалификация специалистов по управлению и отношения руководителей и подчиненных. Тем более, что проведение реальных экспериментов требует больших затрат ресурсов и времени, и связано с большим риском.

3.6. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Математическая модель любого процесса или явления включает три группы элементов.

1. Характеристика объекта, которую необходимо определить, – это вектор, $Y = (Y_i)$.

2. Характеристики внешних по отношению к моделируемому объекту изменяющихся условий – $X = (X_i)$.

3. Совокупность внутренних параметров объекта A .

Математическую модель интерпретируют как особый преобразователь внешних условий объекта, т.е. «входа» X в искомые характеристики объекта «выхода» Y .

По способам выражения соотношений между внешними условиями, внутренними параметрами и характеристиками математические модели делятся на два основных типа: структурные и функциональные.

Структурные модели отражают внутреннюю организацию объекта, т.е. его составные части – внутренние параметры, из связи с «входом» и «выходом».

Возможны три варианта структурной модели.

1. Все неизвестные параметры выражаются в виде явных функций от внешних и внутренних условий объекта:

$$Y_j = f_j(A, X). \quad (1)$$

2. Неизвестные параметры определяются совместно с системой известных соотношений i -го вида уравнений или неравенств:

$$\varphi_i(A, X, Y) = 0. \quad (2)$$

3. Модель включает соотношения типа (1), но конкретный вид этих соотношений неизвестен, т.е. модель не построена и определен только ее каркас. Эту модель обозначим (1.3).

Модели типа (1) и (2) вполне определенные математические задачи, которые решаются по формулам или численным алгоритмам. Модель (1) дает аналитическое решение задачи, т.е. практически имеют место расчеты по формулам.

Но для многих математических задач решения не могут быть выражены в формульном или аналитическом виде; такие как решения алгебраических уравнений пятой и более высоких степеней не выражаются формулой, так как дифференциальные уравнения не имеют решений,

которые выражаются в «конечном» виде через аналитические функции или алгебраические операции и операции интегрирования.

Для решения задачи (2), не сводящейся к задаче (1), требуется нахождение алгоритма. Вычисление по формуле представляет собой частный случай алгоритма в виде формул. Но не каждый алгоритм выражается в виде формулы. Однако анализ таких задач не только дает алгоритм для нахождения частных решений для заданной совокупности внешних и внутренних параметров, но и обнаружить общие качественные свойства решений, независимые от конкретных значений параметров.

Модели типа (1.3) не сводятся к четко определенным математическим задачам и требуют нахождения особых средств для решений. Такие модели возникают при попытках математического описания особо сложных систем. Для исследования этих систем используются новые математические дисциплины:

- теория случайных процессов;
- теория игр;
- статистических решений;
- теория автоматов;
- теория алгоритмических описаний функционирования сложных систем.

Главная роль в процессе моделирования принадлежит использованию ЭВМ.

Строится моделирующий алгоритм, имитирующий взаимодействие элементов процесса и позволяющий при заданных A и X определить Y .

Модель не дает отчетливого описания внутренней организационной структуры исследуемого объекта и поэтому занимает промежуточную функцию между структурными и функциональными моделями. Основная идея функциональных моделей – это познание сущности объекта через проявление деятельности, функционирования или поведения.

Внутренняя структура объекта не изучается, а вся информация о структуре не используется. Абстрактным проявлением объекта, изучаемого с использованием функциональной модели, является так называемый «черный ящик», т.е. объект, внутренняя структура которого совершенно не определена. Функциональная модель имитирует поведение объекта так, что, задавая значения «входа» X , можно получать значения «выхода» Y без участия информации об A :

$$Y = D(X). \quad (3)$$

Построить функциональную модель – это значит определить оператор D , связывающий X и Y .

Противопоставление структурных и функциональных моделей весьма относительно. Изучение структурных моделей дает ценную информацию о поведении объекта исследования, как он реагирует на изменение внешней среды. А при изучении функциональных моделей возникают гипотезы о внутренней структуре объекта как причины определенного поведения, поэтому открывается путь для структурного анализа.

3.7. ФОРМАЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ ИГРЫ

X и Y – это множество стратегий.

Величины $x \in X$ и $y \in Y$ означают конкретные стратегии первого и второго игроков.

Чтобы ввести в игру случайные ходы, необходимо считать, что в игре принимает участие третий игрок, который делает случайные ходы. Обозначим через H пространство стратегий третьего игрока.

Любая стратегия третьего игрока $h \in H$, представляющая собой конкретную последовательность всех случайных ходов, будет происходить с вероятностью $p(h)$, которую легко посчитать, зная вероятность каждого случайного хода в этой последовательности $p(h)$, представляет собой распределение вероятностей в пространстве и удовлетворяет условию

$$p(h) \geq 0, \quad \sum_{h \in H} p(h) = 1. \quad (4)$$

Обозначим через q некоторый вариант игры. Вариант определен, если выбраны стратегии игроков $[x]$ и $[y]$ и стратегия случайных ходов h :

$$q = (x, y, h). \quad (5)$$

Результатом является выигрыш или проигрыш каждого из игроков.

Рассмотрим одну конкретную ситуацию $q(x, y, h)$ и обозначим через $L_x(x, y, h)$ и $L_y(x, y, h)$ проигрыш или потери первого и второго игроков соответственно.

При этом выигрыши рассматриваем как отрицательные проигрыши. Общая сумма проигрышей обоих игроков равна

$$O_{\text{б.ш.}} = L_x(x, y, h) + L_y(x, y, h). \quad (6)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только игр с нулевой суммой, т.е. таких игр, в которых общая сумма проигрыша (6) равна нулю. В таких играх проигрыш одного игрока равен выигрышу другого игрока:

$$L_y(x, y, h) = -L_x(x, y, h) = L(x, y, h). \quad (7)$$

Поскольку стратегия h является случайной, то при выбранных стратегиях (x) и (y) потери $L(x, y, h)$ она будет случайной с распределе-

нием вероятностей $p(h)$ на пространстве H . Поэтому оценить выбранные стратегии (x) и (y) можно лишь путем усреднения потерь $L(x, y, h)$ по всему пространству H , т.е. введя понятие средних потерь $L(x, y)$, определяемых из соотношения

$$L_x(x, y) = \sum L(x, y, h)p(h). \quad (8)$$

Игра будет определена, если перечислены все возможные стратегии игроков, т.е. заданы пространства X и Y , и для любых $x \in X$ и $y \in Y$ определены потери $L(x, y)$.

Таким образом, приходим к следующему формальному определению игры. Игра G определяется тройкой

$$G = (X, Y, L), \quad (9)$$

где X и Y – некоторые пространства; L – ограниченная числовая функция, определенная на прямом произведении X и Y .

Точки $x \in X$ и $y \in Y$ называются *стратегиями первого и второго игроков*, а функция L называется *функцией потерь*.

Игры, в которых каждый игрок – конечное число стратегий, удобно задавать в виде матрицы потерь. Пусть $G = (X, Y, L)$ – конечная игра, в которой $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$.

Тогда матрица порядка $m \times n$:

$$Q = \|q_{ij}\| = \begin{vmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{m1} & \dots & q_{mn} \end{vmatrix}, \quad (10)$$

в которой $q_{ij} = L(x_i, y_j)$ называется *матрицей игры G* .

Для того чтобы описание игры было законченным, необходимо указать цели, которыми руководствуются игроки при выборе своих стратегий. Эти цели просты. Первый игрок стремится сделать себе наибольший выигрыш, т.е. максимизировать функцию $L(x, y)$, а второй игрок стремится сделать свой проигрыш наименьшим, т.е. минимизировать функцию $L(x, y)$.

Цели игроков оказываются прямо противоположными. Специфической трудностью при этом является то, что ни один из игроков не контролирует полностью значение $L(x, y)$, так как первый игрок распоряжается только значением (x) , а второй – только значением (y) . Преодоление этой трудности, т.е. определение наиболее рационального способа ведения игры каждым из игроков и представляет собой существо игр.

Другим вариантом игры является игра с ненулевой суммой. В такой игре выигрыши одних игроков получают не только за счет выигрышей других игроков, но и за счет каких-либо платежей, посту-

пающих извне. Эти платежи рассматриваются как проигрыши некоторого добавочного фиктивного игрока, что позволяет свести игру (n) лиц с ненулевой суммой к игре ($n + 1$) лиц с ненулевой суммой. Теория игр с (n) участникам для ($n > 2$) является сложной задачей, поэтому мы ограничимся рассмотрением только игры двух лиц с нулевой суммой.

Пример 1. Для пояснения введенных понятий рассмотрим игру, состоящую из четырех ходов. Первый ход – личный. Первый игрок выбирает одно из двух целых чисел 1, 2. Второй ход – случайный. Бросается монета и, если выпадает герб, то сообщается второму игроку о выборе первого игрока. Третий ход – личный. Второй игрок выбирает одно из двух целых чисел 3, 4. Четвертый ход – случайный. Выбирается случайным образом с вероятностью 0,4; 0,2; 0,4 одно из трех целых чисел 1, 2, 3.

Результат игры: числа, выбранные в первом, третьем и четвертом ходах, складываются, и полученная сумма уплачивается вторым игроком первому игроку, если она четная, и первым игроком второму игроку, если она нечетная.

При предварительном анализе игру удобно представить в виде дерева, на котором положения, возникающие в процессе игры, изображаются, а ходы – ветвями, соединяющими одну вершину с другой. Дерево игры приведено на рис. 3.

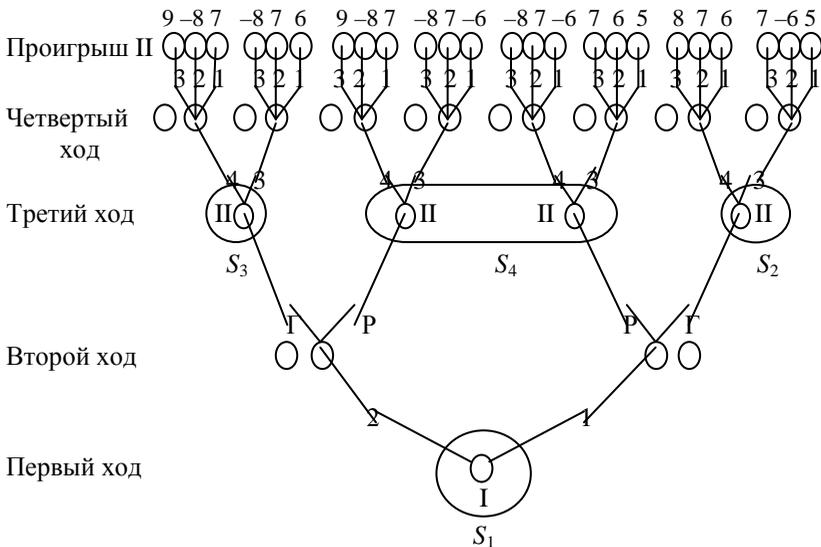


Рис. 3

Вершины, соответствующие личным ходам первого и второго игроков, обозначены соответственно 1 и 11. Вершины, соответствующие случайным ходам, обозначены 0. Конечные вершины, определяющие отдельные варианты игры, помечены цифрами, означающими проигрыши второго игрока.

В разных вершинах, соответствующих личным ходам, игрок обладает определенным видом информации о предыдущих ходах. Если в нескольких вершинах игроку доступна одна и та же информация, то эти вершины удобно объединить. Путем такого объединения получают группы вершин S_i , называемые классами информации. В рассматриваемом примере имеется четыре класса информации, содержание которых следующее:

1) S_1 – ходов еще не было, первый игрок должен сделать первый ход;

2) S_2 – первый игрок выбрал 1;

3) S_3 – первый игрок выбрал 2;

4) S_4 – неизвестно, что выбрал первый игрок.

При попадании на вершину, находящуюся в классе, второй игрок не имеет информации о выборе первого игрока. Такая игра называется игрой с неполной информацией. Если в классе информации входит только одна вершина, то игрок, попадающий на эту вершину, полностью осведомлен обо всех предыдущих ходах, т.е. имеет полную информацию об игре. Игры, в которых каждый класс информации содержит только одну вершину, называются играми с полной информацией.

Рассмотрим пространство стратегий игроков. Пространство стратегий первого игрока, состоящее всего из двух элементов, которым соответствует выбор 1 или 2, опишем в табл. 1, а. Стратегия второго игрока должна указывать его ход при любом возможном варианте игры. Вариант игры определяется классом информации игрока. Для второго игрока имеются три класса информации: S_2 , S_3 и S_4 . Следовательно

Таблица 1

| | |
|-------|-------|
| x_1 | x_2 |
| (1) | (2) |

а)

| | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| y_1 | y_2 | y_3 | y_4 | y_5 | y_6 | y_7 | y_8 |
| (333) | (334) | (343) | (344) | (433) | (434) | (443) | (444) |

б)

| | | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| h | (Г, 1) | (Г, 2) | (Г, 3) | (Р, 1) | (Р, 2) | (Р, 3) |
| $p(h)$ | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,2 | 0,1 | 0,2 |

в)

но, стратегия второго игрока состоит в указании, какое из двух чисел 3 или 4 он выбирает в каждом классе информации.

Стратегия в классе информации (4, 3, 3) означает, что второй игрок выбирает 4 в классе информации S_2 и S_3 в классах информации S_3 и S_4 . Пространство стратегий второго игрока приведено в табл. 1, б. Пространство стратегий третьего игрока представлено в табл. 1, в.

3.8. ПРОСТРАНСТВА СТРАТЕГИЙ ДЛЯ ИГРЫ В ПРИМЕРЕ 1

3.8.1. ПОИСК НА ИГРОВЫХ ДЕРЕВЬЯХ

Деревья игры. Поиск выигрышной стратегии.

Рассмотрим класс *игр двух лиц с полной информацией*. В таких играх участвуют два игрока, которые поочередно делают свои ходы. В любой момент игры каждому игроку известно все, что произошло в игре к этому моменту и что может быть сделано в настоящий момент. Игра заканчивается либо выигрышем одного игрока (и проигрышем другого), либо ничьей.

Таким образом, в рассматриваемый класс не попадают игры, исход которых зависит хотя бы частично от случая – большинство карточных игр, игральные кости, «морской бой» и пр. Тем не менее класс достаточно широк: в него входят такие игры, как шахматы, шашки, реверси, крестики-нолики и другие игры.

Для формализации и изучения игровых стратегий в классе игр с полной информацией может быть использован подход, основанный на редукции задач. Напомним, что при этом должны быть определены следующие составляющие: форма описания задач и подзадач; операторы, сводящие задачи к подзадачам; элементарные задачи, а также задано описание исходной задачи.

Наиболее интересной представляется задача поиска выигрышной стратегии для одного из игроков, отправляясь от некоторой конкретной конфигурации (позиции) игры (не обязательно начальной). При использовании подхода, основанного на редукции задач, выигрышная стратегия ищется в процессе доказательства того, что игра может быть выиграна. Аналогично, поиск ничейной стратегии, исходя из некоторой конкретной позиции, ведется в процессе доказательства того, что игра может быть сведена к ничьей.

Ясно, что описание решаемой задачи должно содержать описание конфигурации игры, для которой ищется нужная стратегия. Например, в шашках игровая позиция включает задание положений на доске всех шашек, в том числе дамоч. Обычно описание конфигурации содержит также указание, кому принадлежит следующий ход.

Пусть именами игроков будут ПЛЮС и МИНУС. Будем использовать следующие обозначения:

X^S или Y^S – некоторая конфигурация игры, причем индекс S принимает значения + или –, указывая тем самым, кому принадлежит следующий ход (т.е. в конфигурации X^+ следующий ход должен делать игрок ПЛЮС, а в X^- – игрок МИНУС);

$W(X^S)$ – задача доказательства того, что игрок ПЛЮС может выиграть, исходя из конфигурации X^S ;

$V(X^S)$ – задача доказательства того, что игрок МИНУС может выиграть, отправляясь от конфигурации X^S .

Рассмотрим сначала игровую задачу $W(X^S)$. Операторы сведения (редукции) этой задачи к подзадачам определяются исходя из ходов, допустимых в проводимой игре:

1. Если в некоторой конфигурации X^+ очередной ход делает игрок ПЛЮС и имеется N допустимых ходов, приводящих соответственно к конфигурациям $X_1^-, X_2^-, \dots, X_N^-$, то для решения задачи $W(X^+)$ необходимо решить по крайней мере одну из подзадач $W(X_i^-)$. Действительно, так как ход выбирает игрок ПЛЮС, то он выиграет игру, если хотя бы один из ходов ведет к выигрышу – см. рис. 2, а.

2. Если же в некоторой конфигурации Y^- ход должен сделать игрок МИНУС, и имеется K допустимых ходов, приводящих к конфигурациям $Y_1^+, Y_2^+, \dots, Y_K^+$, то для решения задачи $W(Y^-)$ требуется решить каждую из возникающих подзадач $W(Y_i^+)$. Действительно, поскольку ход выбирает МИНУС, то ПЛЮС выиграет игру, если выигрыш гарантирован ему после любого хода противника (см. рис. 4, б).

Последовательное применение данной схемы редукции к исходной конфигурации игры порождает И/ИЛИ-дерево (И/ИЛИ-граф), которое называют *деревом (графом) игры*. Дуги игрового дерева соответствуют ходам игроков, вершины – конфигурациям игры, причем листья дерева – это позиции, в которых игра завершается выигрышем, проигрышем или ничьей. Часть листьев являются заключительными вершинами, соответствующими элементарным задачам – позициям, выигрышным для игрока ПЛЮС. Заметим, что для конфигураций, где ход принадлежит ПЛЮСу, в игровом дереве получается ИЛИ-вершина, а для позиций, в которых ходит МИНУС, получается И-вершина.

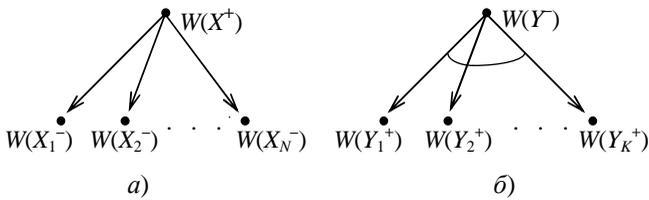


Рис. 4

Цель построения игрового дерева или графа – получение решающего поддерева для задачи $W(X^S)$, показывающего, как игрок ПЛЮС может выиграть игру из позиции X^S независимо от ответов противника. Для этого могут быть применены разные алгоритмы поиска на И/ИЛИ-графах. Решающее дерево заканчивается на позициях, выигрышных для ПЛЮСа, и содержит полную стратегию достижения им выигрыша: для каждого возможного продолжения игры, выбранного противником, в дереве есть ответный ход, приводящий к победе.

Для задачи $V(X^S)$ схема сведения игровых задач к подзадачам аналогична: ходам игрока ПЛЮС будут соответствовать И-вершины, а ходам МИНУСа – ИЛИ-вершины, заключительные же вершины будут соответствовать позициям, выигрышным для игрока МИНУС.

Конечно, подобная редукция задач применима и в случае, когда нужно доказать существование ничейной стратегии в игре. При этом определение элементарной задачи должно быть соответствующим образом изменено.

Рассмотрим в качестве иллюстрации простую игру, называемую «последний проигрывает». Два игрока поочередно берут по одной или две монеты из кучки, первоначально содержащей семь монет. Игрок, забирающий последнюю монету, проигрывает.

На рисунке 5 показан полный граф игры для задачи $V(7^+)$, жирными дугами на нем выделен решающий И/ИЛИ-граф, который доказывает, что второй игрок (т.е. игрок МИНУС, начинающий вторым), всегда может выиграть. Конфигурация игры описана как число оставшихся в текущий момент монет, также указание, кому принадлежит следующий ход. Заключительные вершины, соответствующие элементарной задаче $V(1^+)$, т.е. выигрышу игрока МИНУС, в графе подчеркнуты.

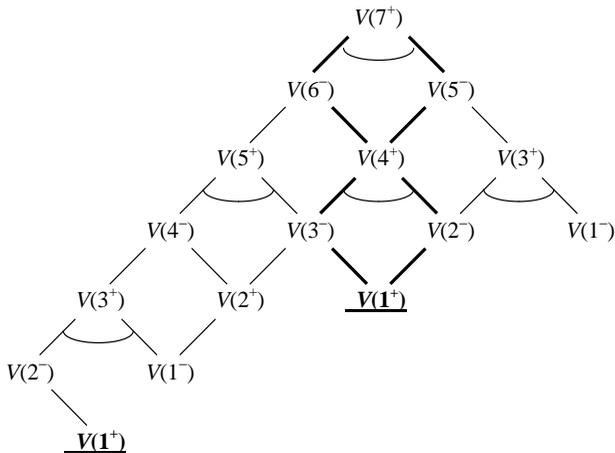


Рис. 5

Представленная в решающем графе выигрышная стратегия может быть сформулирована словесно так: если в очередном ходе игрок ПЛЮС берет одну монету, то в следующем ходе МИНУС должен взять две, а если ПЛЮС берет две монеты, то МИНУС должен забрать одну. Отметим, что для аналогичной задачи $W(7^+)$ решающий граф построить не удастся (начальная вершина неразрешима); таким образом, у игрока ПЛЮС нет выигрышной стратегии в этой игре.

В большинстве игр, представляющих интерес, таких как шашки и шахматы, построить полные решающие деревья и найти полные игровые стратегии не представляется возможным. Например, для шашек число вершин в полном игровом дереве оценивается величиной порядка 10^{40} , и просмотреть такое дерево практически нереально. Алгоритмы же упорядоченного перебора с применением эвристик не настолько уменьшают просматриваемую часть дерева игры, чтобы дать существенное, на несколько порядков, сокращение времени поиска.

Тем не менее для неполных игр в шашки и шахматы (например, для эндшпилей), так же как и для всех несложных игр, таких как «крестики-нолики» на фиксированном квадрате небольшого размера, можно успешно применять алгоритмы поиска на И/ИЛИ-графах, позволяющие обнаруживать выигрышные и ничейные игровые стратегии.

Рассмотрим, к примеру, игру «крестики-нолики» на квадрате 3×3 . Игрок ПЛЮС ходит первым и ставит крестики, а МИНУС – нолики. Игра заканчивается, когда составлена либо строка, либо столбец, либо диагональ из крестиков (в этом случае выигрывает ПЛЮС) или ноликов (выигрывает МИНУС). Оценим размер полного дерева игры: начальная вершина имеет 9 дочерних вершин, каждая из которых в свою очередь – 8 дочерних; каждая вершина глубины 2 имеет 7 дочерних и т.д. Таким образом, число концевых вершин в дереве игры равно $9! = 362\,880$, но многие пути в этом дереве обрываются раньше на заключительных вершинах. Значит, в этой игре возможен полный просмотр дерева и нахождение выигрышной стратегии. Однако ситуация изменится при существенном увеличении размеров квадрата или же в случае неограниченного поля игры.

В таких случаях, как и во всех сложных играх, вместо нереальной задачи поиска полной игровой стратегии решается, как правило, более простая задача – поиск для заданной позиции игры достаточно хорошего первого хода.

3.8.2. МИНИМАКСНАЯ ПРОЦЕДУРА

С целью поиска достаточно хорошего первого хода просматривается обычно часть игрового дерева, построенного от заданной конфигурации. Для этого применяется один из переборных алгоритмов (в глубину, в ширину или эвристический) и некоторое искусственное

окончание перебора вершин в игровом дереве: например, ограничивается время перебора или же глубина поиска.

В построенном таким образом частичном дереве игры оцениваются вершины, и по полученным оценкам определяется наилучший ход от заданной игровой конфигурации. При этом для оценивания концевых вершин (листьев) полученного дерева используется так называемая **статическая оценочная функция**, а для оценивания остальных вершин – корневой (начальной) и промежуточных между корневой и концевыми вершинами – используется так называемый **минимаксный принцип**.

Статическая оценочная функция, будучи применена к некоторой вершине-конфигурации игры, дает числовое значение, оценивающее различные достоинства этой игровой позиции. Например, для шашек могут учитываться такие (статические) элементы конфигурации игры, как продвинутость и подвижность шашек, количество дамк, контроль ими центра и пр. По сути, статическая функция вычисляет эвристическую оценку шансов на выигрыш одного из игроков. Для определенности будем рассматривать задачу выигрыша игрока ПЛЮС и соответственно поиска достаточно хорошего его первого хода от заданной конфигурации.

Будем придерживаться общепринятого соглашения, по которому значение статической оценочной функции тем больше, чем больше преимуществ имеет игрок ПЛЮС (над игроком МИНУС) в оцениваемой позиции. Очень часто оценочная функция выбирается следующим образом:

- статическая оценочная функция положительна в игровых конфигурациях, где игрок ПЛЮС имеет преимущества;
- статическая оценочная функция отрицательна в конфигурациях, где МИНУС имеет преимущества;
- статическая оценочная функция близка к нулю в позициях, не дающих преимущества ни одному из игроков.

Например, для шашек в качестве простейшей статической функции может быть взят перевес в количестве шашек (и дамк) у игрока ПЛЮС. Для игры «крестики-нолики» на фиксированном квадрате возможна такая статическая оценочная функция:

$$E(P) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } P \text{ - есть - позиция выигрыша игрока ПЛЮС;} \\ -\infty, & \text{если } P \text{ - есть - позиция выигрыша игрока МИНУС;} \\ \left(N_L^+ + N_C^+ + N_D^+\right) - \left(N_L^- + N_C^- + N_D^-\right) & \text{- в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $+\infty$ – очень большое положительное число; $-\infty$ – очень маленькое отрицательное число; N_L^+ , N_C^+ , N_D^+ – соответственно число строк,

столбцов и диагоналей, «открытых» для игрока ПЛЮС (т.е. где он еще может поставить три выигршных крестика подряд); N_L^-, N_C^-, N_D^- – аналогичные числа для игрока МИНУС.

На рисунке 6 приведены две игровые позиции (на квадрате 4×4) и соответствующие значения статической оценочной функции.

Подчеркнем, что с помощью статической оценочной функции оцениваются только концевые вершины дерева игры, для оценок же промежуточных вершин, как и начальной вершины, используется минимаксный принцип, основанный на следующей простой идее. Если бы игроку ПЛЮС пришлось бы выбирать один из нескольких возможных ходов, то он выбрал бы наиболее сильный ход, т.е. ход, приводящий к позиции с наибольшей оценкой. Аналогично, если бы игроку МИНУС пришлось бы выбирать ход, то он выбрал бы ход, приводящий к позиции с наименьшей оценкой.

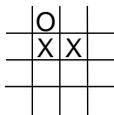
Сформулируем теперь сам **минимаксный принцип**:

- ИЛИ-вершине дерева игры приписывается оценка, равная максимуму оценок ее дочерних вершин;
- И-вершине игрового дерева приписывается оценка, равная минимуму оценок ее дочерних вершин.

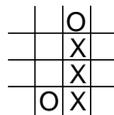
Минимаксный принцип положен в основу **минимаксной процедуры**, предназначенной для определения наилучшего (более точно, достаточно хорошего) хода игрока исходя из заданной конфигурации игры S при фиксированной глубине поиска N в игровом дереве. Предполагается, что игрок ПЛЮС ходит первым (т.е. начальная вершина есть ИЛИ-вершина). Основные этапы этой процедуры таковы.

1. Дерево игры строится (просматривается) одним из известных алгоритмов перебора (как правило, алгоритмом поиска вглубь) от исходной позиции S до глубины N .

2. Все концевые вершины полученного дерева, т.е. вершины, находящиеся на глубине N , оцениваются с помощью статической оценочной функции.



$$E(P) = 8 - 5 = 3$$



$$E(P) = 6 - 4 = 2$$

Рис. 6

3. В соответствии с минимаксным принципом вычисляются оценки всех остальных вершин: сначала вычисляются оценки вершин, родительских для концевых, затем родительских для этих родительских вершин и так далее; таким образом оценивание вершин происходит при движении снизу вверх по дереву поиска – до тех пор, пока не будут оценены вершины, дочерние для начальной вершины, т.е. для исходной конфигурации S .

Среди вершин, дочерних к начальной, выбирается вершина с наибольшей оценкой: ход, который к ней ведет, и есть искомым наилучший ход в игровой конфигурации S .

На рисунке 7 показано применение минимаксной процедуры для дерева игры, построенного до глубины ($N = 3$). Концевые вершины не имеют имен, они обозначены своими оценками – значениями статической оценочной функции. Числовые индексы имен остальных вершин показывают порядок, в котором эти вершины строились алгоритмом перебора вглубь. Рядом с этими вершинами находятся их минимаксные оценки, полученные при движении в обратном (по отношению к построению дерева) направлении. Таким образом, наилучший ход – первый из двух возможных.

На рассматриваемом игровом дереве выделена ветвь (последовательность ходов игроков), представляющая так называемую *минимаксно-оптимальную* игру, при которой каждый из игроков всегда выбирает наилучший для себя ход. Заметим, что оценки всех вершин этой ветви дерева совпадают, и оценка начальной вершины равна оценке концевой вершины этой ветви.

В принципе статическую оценочную функцию можно было бы применить и к промежуточным вершинам, и на основе этих оценок осуществить выбор наилучшего первого хода, например, сразу выбрать ход, максимизирующий значение статической оценочной функции среди вершин, дочерних к исходной. Однако считается, что оценки, полученные с помощью минимаксной процедуры, есть более на-

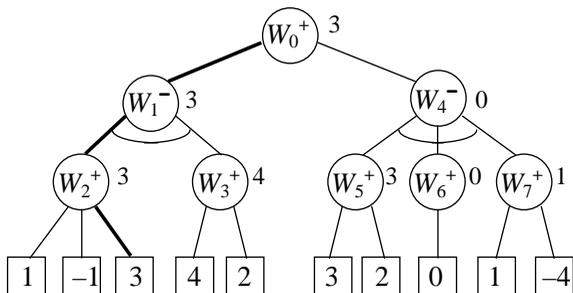


Рис. 7

дежные меры относительного достоинства промежуточных вершин, чем оценки, полученные прямым применением статической оценочной функции. Действительно, минимаксные оценки основаны на просмотре игры вперед и учитывают разные особенности, которые могут возникнуть в последующем, в то время как простое применение оценочной функции учитывает лишь свойства позиции как таковой. Это отличие статических и минимаксных оценок существенно для «активных», динамичных позиций игры (например, в шашках и шахматах к ним относятся конфигурации, в которых возникает угроза взятия одной или нескольких фигур). В случае же так называемых «пассивных», спокойных позиций статическая оценка может мало отличаться от оценки по минимаксному принципу.

3.8.3. АЛЬФА-БЕТА ПРОЦЕДУРА

Минимаксная процедура организована таким образом, что процесс построения частичного дерева игры отделен от процесса оценивания вершин. Такое разделение приводит к тому, что в целом минимаксная процедура – неэффективная стратегия поиска хорошего первого хода. Чтобы сделать процедуру более экономной, необходимо вычислять статические оценки конечных вершин и минимаксные оценки промежуточных вершин одновременно с построением игрового дерева. Этот путь приводит к так называемой *альфа-бета процедуре* поиска наилучшего первого хода от заданной позиции, при этом можно добиться существенного сокращения вычислительных затрат, прежде всего, времени вычисления статических оценок. В основе сокращения поиска лежит достаточно очевидное соображение: если есть два варианта хода одного игрока, то худший в ряде случаев можно сразу отбросить, не выясняя, насколько в точности он хуже.

Рассмотрим сначала идею работы альфа-бета процедуры на примере игрового дерева, приведенного на рис. 7. Дерево игры строится до глубины ($N = 3$) алгоритмом перебора вглубь. Причем сразу, как это становится возможным, вычисляются не только статические оценки конечных вершин, но и *предварительные* минимаксные оценки промежуточных вершин. Предварительная оценка определяется соответственно как минимум или максимум уже известных к настоящему моменту оценок дочерних вершин. В общем случае, эта оценка может быть получена при наличии оценки хотя бы одной дочерней вершины. В ходе дальнейшего построения дерева игры и получения новых оценок вершин предварительные оценки постепенно уточняются, опять же по минимаксному принципу.

Пусть таким образом построены вершины W_1^- , W_2^+ и первые три конечные вершины (листья) – см. рис. 8. Эти листья оценены статиче-

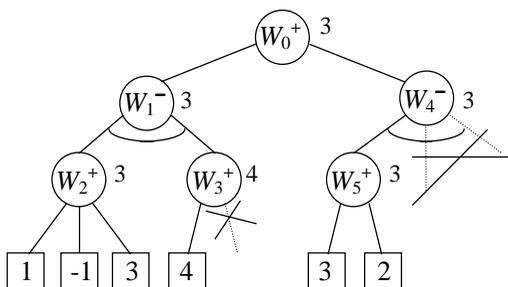


Рис. 8

ской функцией, и вершина W_2^+ получила точную минимаксную оценку 3, а вершина W_1^- – предварительную оценку 3. Далее при построении и раскрытии вершины W_3^+ статическая оценка первой ее дочерней вершины дает величину 4, которая становится предварительной оценкой самой вершины W_3^+ . Эта предварительная оценка будет потом, после построения второй ее дочерней вершины, пересчитана. Причем, согласно минимаксному принципу, оценка может только увеличиться (поскольку подсчитывается как максимум оценок дочерних вершин), но даже если она увеличится, это не повлияет на оценку вершины W_1^- , поскольку последняя при уточнении по минимаксному принципу может только уменьшаться (так как равна минимуму оценок дочерних вершин). Следовательно, можно пренебречь второй дочерней вершиной для W_3^+ , не строить и не оценивать ее, поскольку уточнение оценки вершины W_3^+ не повлияет на оценку вершины W_1^- . Такое сокращение поиска в игровом дереве называется *отсечением* ветвей.

Продолжим для нашего примера процесс поиска в глубину с одновременным вычислением предварительных (и точных, где это возможно) оценок вершин вплоть до момента, когда построены уже вершины W_4^- , W_5^+ и две дочерних последней, которые оцениваются статической функцией. Исходя из оценки первой дочерней вершины, начальная вершина W_0^+ , соответствующая исходной позиции игры, к этому моменту уже предварительно оценена величиной 3. Вершина W_5^+ получила точную минимаксную оценку 3, а ее родительская W_4^- получила пока только предварительную оценку 3. Эта предварительная оценка вершины W_4^- может быть уточнена в дальнейшем, и в соответствии с минимаксным принципом возможно только ее уменьше-

ние, но это уменьшение не повлияет на оценку вершины W_0^+ , поскольку последняя, опять же согласно минимаксному принципу, может только увеличиваться. Таким образом, построение дерева можно прервать ниже вершины W_4^- , отсекая целиком выходящие из нее вторую и третью ветви (и оставляя ее оценку предварительной).

На этом построение игрового дерева заканчивается, полученный результат – лучший первый ход – тот же самый, что и при минимаксной процедуре. У некоторых вершин дерева осталась не уточненная, предварительная оценка, однако этих приближенных оценок оказалось достаточно для того, чтобы определить точную минимаксную оценку начальной вершины и наилучший первый ход. В то же время произошло существенное сокращение поиска: вместо 17 вершин построено только 11, и вместо 10 обращений к статической оценочной функции понадобилось всего 6.

Обобщим рассмотренную идею сокращения перебора. Сформулируем сначала **правила вычисления оценок** вершин дерева игры, в том числе предварительных оценок промежуточных вершин, которые для удобства будем называть *альфа-* и *бета-величинами*:

- концевая вершина игрового дерева оценивается статической оценочной функцией сразу, как только она построена;

- промежуточная вершина предварительно оценивается по минимаксному принципу, как только стала известна оценка хотя бы одной из ее дочерних вершин; каждая предварительная оценка пересчитывается (уточняется) всякий раз, когда получена оценка еще одной дочерней вершины;

- предварительная оценка ИЛИ-вершины (альфа-величина) полагается равной наибольшей из вычисленных к текущему моменту оценок ее дочерних вершин;

- предварительная оценка И-вершины (бета-величина) полагается равной наименьшей из вычисленных к текущему моменту оценок ее дочерних вершин.

Укажем очевидное следствие этих правил вычисления: альфа-величины не могут уменьшаться, а бета-величины не могут увеличиваться.

Сформулируем теперь **правила прерывания перебора**, или отсечения ветвей игрового дерева.

А) Перебор можно прервать ниже любой И-вершины, бета-величина которой не больше, чем альфа-величина одной из предшествующих ей ИЛИ-вершин (включая корневую вершину дерева).

В) Перебор можно прервать ниже любой ИЛИ-вершины, альфа-величина которой не меньше, чем бета-величина одной из предшествующих ей И-вершин.

При этом в случае А говорят, что имеет место *альфа-отсечение*, поскольку отсекаются ветви дерева, начиная с ИЛИ-вершин, которым приписана альфа-величина, а в случае В – *бета-отсечение*, поскольку отсекаются ветви, начинающиеся с бета-величин.

Важно, что рассмотренные правила работают в ходе построения игрового дерева вглубь; это означает, что предварительные оценки промежуточных вершин появляются лишь по мере продвижения от концевых вершин дерева вверх к корню и реально отсечения могут начаться только после того, как получена хотя бы одна точная минимаксная оценка промежуточной вершины.

В рассмотренном примере на рис. 5 первое прерывание перебора было бета-отсечением, а второе – альфа-отсечением. Причем в обоих случаях отсечение было неглубоким, поскольку необходимая для соблюдения соответствующего правила отсечения альфа- или бета-величина находилась в непосредственно предшествующей к точке отсечения вершине. В общем же случае она может находиться существенно выше отсекаемой ветви – где-то на пути от вершины, ниже которой производится отсечение, к начальной вершине дерева, включая последнюю.

После прерывания перебора предварительные оценки вершин в точках отсечения остаются неуточненными, но, как уже отмечалось, это не препятствует правильному нахождению предварительных оценок всех предшествующих вершин, как и точной оценки корневой вершины и ее дочерних вершин, а значит и искомого наилучшего первого хода.

На приведенных выше правилах вычисления оценок вершин и выполнения отсечений (всюду, где это возможно) основана **альфа-бета процедура**, являющаяся более эффективной реализацией минимаксного принципа. В принципе, используя математическую индукцию и рассуждая аналогично рассмотренному примеру, несложно доказать следующее.

Утверждение. Альфа-бета процедура всегда приводит к тому же результату (наилучшему первому ходу), что и простая минимаксная процедура той же глубины.

Важным является вопрос, насколько в среднем альфа-бета процедура эффективнее обычной минимаксной процедуры. Нетрудно заметить, что количество отсечений в альфа-бета процедуре зависит от степени, в которой предварительные оценки (альфа- и бета-величины), полученные первыми, аппроксимируют окончательные минимаксные оценки: чем ближе эти оценки, тем больше отсечений и меньше пере-

бор. Это положение иллюстрирует пример на рис. 5, в котором ветвь дерева с мини-максно-оптимальной игрой строится практически в самом начале поиска.

Таким образом, эффективность альфа-бета процедуры зависит от порядка построения и раскрытия вершин в дереве игры. Возможен и неудачный порядок просмотра, при котором придется пройти без отсечений через все вершины дерева, и в этом, худшем случае, альфа-бета процедура не будет иметь никаких преимуществ против минимаксной процедуры.

Наилучший случай, т.е. наибольшее число отсечений, достигается, когда при переборе в глубину первой обнаруживается конечная вершина, статическая оценка которой станет впоследствии минимаксной оценкой начальной вершины. При максимальном числе отсечений строится и оценивается минимальное число концевых вершин. Показано, что в случае, когда самые сильные ходы всегда рассматриваются первыми, количество концевых вершин глубины N , которые будут построены и оценены альфа-бета процедурой, примерно, равно числу концевых вершин, которые были бы построены и оценены на глубине $N/2$ обычной минимаксной процедурой. Таким образом, при фиксированном времени и памяти альфа-бета процедура сможет пройти при поиске вдвое глубже по сравнению с обычной минимаксной процедурой.

В заключение отметим, что статическая оценочная функция и альфа-бета процедура – две неперенные составляющие почти всех компьютерных игровых программ (в том числе коммерческих). Часто используются также дополнительные эвристические приемы в самой альфа-бета процедуре:

- направленное (эвристическое) отсечение неперспективных ветвей: например, построение дерева игры обрывается на «пассивных» позициях, к которым применяется оценочная функция, для «активных» же позиций поиск продолжается дальше, до нужной глубины или даже глубже, поскольку на это можно использовать время, сэкономленное вследствие отсечения ветвей;

- последовательное углубление, при котором альфа-бета процедура применяется неоднократно: сначала до некоторой небольшой глубины (например, 2), а затем глубина увеличивается с каждой итерацией, причем после каждой итерации выполняется переупорядочение всех дочерних вершин – с тем, чтобы увеличить число отсечений в последующих итерациях;

- фиксированное упорядочение вершин при спуске-построении дерева вглубь, при котором в первую очередь строится и раскрывается дочерняя вершина, оцениваемая как более перспективная (эта оценка

может быть проведена как с помощью статической оценочной функции, так и более простой, хотя и менее надежной эвристической функции);

– динамическое упорядочение вершин, при котором каждый раз после уточнения минимаксных оценок и проведения отсечений производится переупорядочивание вершин во всем построенном к текущему моменту дереве (с помощью некоторой эвристической функции) и для дальнейшего раскрытия выбирается наиболее перспективная вершина (заметим, что по существу это означает переход от классического перебора вглубь к алгоритму упорядоченного перебора на И/ИЛИ-графах).

Для усиления игры могут быть также использованы библиотеки типовых игровых ситуаций.

3.8.4. ПЛЭНЕР-АЛГОРИТМ, РЕАЛИЗУЮЩИЙ МИНИМАКСНУЮ ПРОЦЕДУРУ

Рассмотрим сначала написанную на плэнере функцию MIN_MAX, реализующую минимаксную процедуру. Аргументы этой функции: Instate – исходная позиция игры, для которой ищется наилучший ход; N – глубина поиска, т.е. количество ходов вперед. Вырабатываемое функцией значение – это дочерняя для Instate позиция, соответствующая искомому наилучшему ходу:

```
[define MIN_MAX (lambda (Instate N)
  [SELECT_MAX [MM_EVALP .Instate 0 T]])]
```

Функция MIN_MAX использует две вспомогательные функции: SELECT_MAX и MM_EVALP. Первая функция, SELECT_MAX, выбирает из своего единственного аргумента-списка, состоящего из позиций и их оценок, позицию с наибольшей оценкой:

```
[define SELECT_MAX (lambda (List)
  [prog (Elem Max_elem)
    [fin Max_elem .List]
    SM [cond([fin Elem List] [return [2 .Max_elem]])
      ([gt [1 .Elem] [1 .Max_elem]]
        [set Max_elem .Elem]) ]
    [go SM]])]
```

Функция MM_EVALP с тремя аргументами является главной рекурсивной функцией, оценивающей вершины дерева игры по минимаксному принципу. На каждом шаге рекурсии она оценивает вершину-позицию Position, находящуюся на глубине Depth и имеющую тип Depthure: "ИЛИ" при Depthure=T и "И" при Depthure=(). Исходная позиция (корневая вершина дерева) имеет тип T и находится на глубине 0.

Значением функции MM_EVALP является либо вычисленная оценка вершины Position (при Depth>0) либо список дочерних для Position позиций с их числовыми оценками (при Depth=0).

При работе MM_EVALP используются вспомогательные функции, определение которых зависит от конкретной игры: OPENING, вычисляющая для заданной позиции игры список дочерних вершин-позиций, и STAT_EST – статическая оценочная функция.

```
[define MM_EVALP (lambda (Position Depth Deptype)
  [prog (D          % дочерняя позиция;
        (Movelist()) % список ходов-позиций;
        Pvalue Dvalue) % оценки текущей и дочерней позиций;
```

% 1: установка развилки, включающей все дочерние вершины текущей позиции (список () добавлен в развилку, чтобы «поймать» момент ее закрытия);

```
  [set D [among (<OPENING .Position> ())]]
```

% 2: если развилка закрыта – возврат функцией подсчитанной оценки;

```
  [cond ([empty .D]
        [return [cond ([eq .Depth 0] .Movelist)
                      (t .Pvalue)])]]
```

% 3: вычисление оценки очередной дочерней позиции: либо применение статической функции, либо рекурсивный спуск;

```
  [cond ([eq .Depth [- .N 1]]
        [set Dvalue [STAT_EST .D]])
    (t [set Dvalue [MM_EVALP .D
                      [+ 1 .Depth]
                      [not .Deptype]])]]
```

% 4: пересчет оценки текущей позиции по минимаксному принципу;

```
  [cond ([hasval Pvalue] [pset Pvalue
    [cond (.Deptype [max .Pvalue .Dvalue])
    (t [min .Pvalue .Dvalue])]])
    (t [pset Pvalue .Dvalue])]
```

% 5: при необходимости пересчет для исходной позиции списка ходов (дочерних позиций) с их оценками;

```
  [cond([eq .Depth 0]
    [pset Movelist(!.Movelist (.Dvalue .D)) ])]
```

% 6: возврат к другой альтернативе развилки;
[fail]])]

3.8.5. РЕДУКЦИЯ ЗАДАЧ

Кроме уже рассмотренного подхода – представления задач в пространстве состояний – для решения ряда задач возможен и другой, более сложный подход. При этом подходе производится анализ исходной задачи с целью выделения такого набора подзадач, решение которых означает решение исходной задачи. Каждая из выделенных подзадач в общем случае является более простой, чем исходная, и может быть решена каким-либо методом, в том числе – с использованием пространства состояний. Но можно продолжить процесс, выделяя последовательно из возникающих задач подзадачи – до тех пор, пока не получим *элементарные задачи*, решение которых уже известно. Такой путь называется подходом, основанным на *сведении задач к подзадачам*, или на *редукции задач*.

Для иллюстрации этого подхода рассмотрим один из вариантов известной головоломки – задачи о пирамидке, или ханойской башне. В ней используются три колышка (обозначим их буквами *A*, *B*, *C*) и три диска разного диаметра, которые можно нанизывать на колышки через отверстия в центре. В начале все диски расположены на колышке *A*, причем диски меньшего диаметра лежат на дисках большего диаметра – рис. 9 (диски занумерованы в порядке возрастания диаметра). Требуется переместить все диски на колышек *C*, двигая их по очереди и соблюдая следующие правила. Перемещать можно только самый верхний диск, и нельзя никакой диск класть на диск меньшего размера. На рисунке 9 показаны начальное и целевое состояния задачи о пирамидке.

Эта задача легко может быть формализована в пространстве состояний: состояние задачи задается списком из трех элементов, каждый из которых указывает местоположение соответствующего диска (первый элемент – первого диска, второй – второго, третий – третьего). Начальное состояние описывается списком (*AAA*), а целевое – (*CCC*). При этом предполагается, что если на одном колышке находится более одного диска, то любой больший диск расположен ниже любого меньшего.

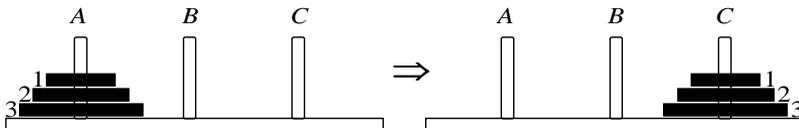


Рис. 9

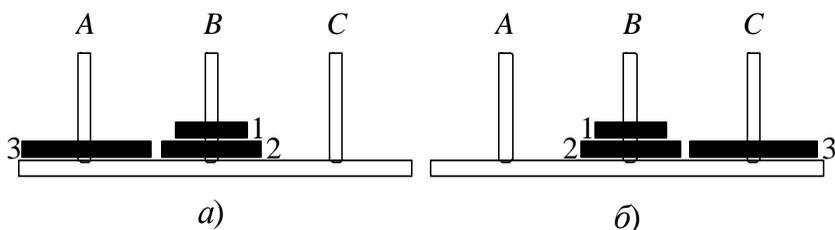


Рис. 10

Посмотрим, как можно решить эту задачу методом редукции задач. Ключевая идея редукции состоит в том, что для перемещения всей пирамидки необходимо переложить самый нижний диск 3, а это возможно, только если располагающаяся над ним пирамидка из двух меньших дисков 1 и 2 перенесена на колышек B (рис. 10, а). Таким образом, исходную задачу можно свести к следующим подзадачам:

- 1) переместить диски 1 и 2 с колышка A на колышек B ($1, 2 : A \rightarrow B$);
- 2) переместить диск 3 с колышка A на колышек C ($3 : A \rightarrow C$);
- 3) переместить диски 1 и 2 с колышка B на колышек C ($1, 2 : B \rightarrow C$).

На рисунке 10, б показано исходное состояние для третьей задачи.

Каждая из трех указанных задач проще исходной: действительно, в первой и в третьей задачах требуется переместить всего два диска, вторая же задача может рассматриваться как элементарная, так как ее решение состоит ровно из одного хода – перемещения диска. В первой и третьей задачах можно вновь применить метод редукции задач, и свести их к элементарным задачам. Весь процесс редукции можно схематически представить в виде дерева на рис. 11. Вершины дерева соответствуют решаемым задачам/подзадачам, причем листья дерева – элементарным задачам перемещения дисков, а дуги связывают редуцируемую задачу с ее подзадачами.

Заметим, что рассмотренная стратегия сведения задачи к совокупности подзадач может быть применена и в случае, когда начальная конфигурация задачи о пирамидке содержит не три, а большее число дисков. В любом случае существенным является порядок, в котором решаются результирующие задачи: например, вторая задача не может быть решена ранее первой.

Таким образом, в случае подхода, основанного на редукции задач, мы получаем также пространство, но состоящее не из состояний, а из задач/подзадач (точнее, их описаний). При этом роль, аналогичную операторам в пространстве состояний, играют операторы, сводящие задачи в подзадачи. Точнее, каждый *оператор редукции* преобразует описание задачи в описание множества результирующих подзадач, причем это множество таково, что решение всех подзадач обеспечивает решение редуцированной задачи.

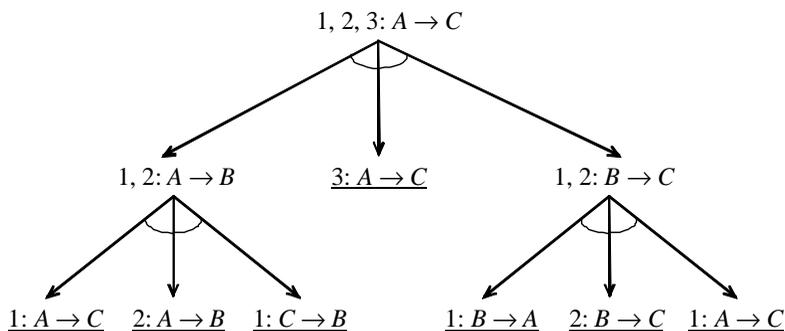


Рис. 11

При решении задач методом редукции, как и при решении в пространстве состояний, может возникнуть необходимость перебора. Действительно, на каждом этапе редукции может оказаться несколько применимых операторов (т.е. способов сведения задачи к подзадам) и, соответственно, несколько альтернативных множеств подзадач. Некоторые способы, возможно, не приведут к решению исходной задачи, поскольку обнаружатся неразрешимые подзадачи, другие же способы могут дать окончательное решение. В общем случае для полной редукции исходной задачи необходимо перепробовать несколько операторов. Процесс редукции продолжается, пока исходная задача не будет сведена к набору элементарных задач, решение которых известно.

Аналогично представлению в пространстве состояний, формализация задачи в рамках подхода, основанного на редукции задач, включает определение следующих составляющих:

- формы описания задач / подзадач и описание исходной задачи;
- множества операторов и их воздействий на описания задач;
- множества элементарных задач.

Эти составляющие задают неявно *пространство задач*, в котором требуется провести поиск решения задачи.

Что касается формы описания задач / подзадач, то часто их удобно описывать в терминах пространства состояний, т.е. задавая начальное состояние и множество операторов, а также целевое состояние или его свойства. В этом случае элементарными задачами могут быть, к примеру, задачи, решаемые за один шаг перебора в пространстве состояний.

В дополнение отметим, что подход с использованием пространства состояний можно рассматривать как вырожденный случай подхода, основанного на редукции задач, так как применение оператора в пространстве состояний сводит обычно исходную задачу к несколько

более простой задаче, т.е. редуцирует ее. При этом результирующее множество подзадач состоит только из одного элемента, т.е. имеем простейший случай замены редуцируемой задачи на ей эквивалентную.

3.8.6. И/ИЛИ-графы. РЕШАЮЩИЙ ГРАФ

Для изображения процесса редукции задач и получающихся при этом альтернативных множеств подзадач используются обычно графоподобные структуры, вершины которых представляют описания задач/подзадач, а дуги связывают любую пару вершин, соответствующих редуцируемой задаче и одной из результирующих подзадач, причем стрелки на дугах указывают направление редукции. Пример такой структуры приведен на рис. 12, а: задача G может быть решена путем решения либо задач D_1 и D_2 , либо E_1, E_2 и E_3 , либо задачи F . При этом ребра, относящиеся к одному и тому же множеству подзадач, связываются специальной дугой. Чтобы сделать такую структуру более наглядной, вводятся дополнительные промежуточные вершины, и каждое множество результирующих задач группируется под своей родительской вершиной. При этом структура на рис. 12, а преобразуется в структуру, изображенную на рис. 12, б: для двух из трех альтернативных множеств подзадач добавлены соответственно вершины D и E .

Если считать, что вершины D и E соответствуют описаниям альтернативных путей решения исходной задачи, то вершину G можно назвать **ИЛИ-вершиной**, так как задача G разрешима или способом D , или способом E , или способом F . Аналогично вершины D и E можно назвать **И-вершинами**, поскольку каждый из соответствующих им способов требует решения всех подчиненных задач, что и обозначается специальной дугой. По этой причине структуры, подобные структурам, изображенным на рис. 12, б, называются **И/ИЛИ-графами**.

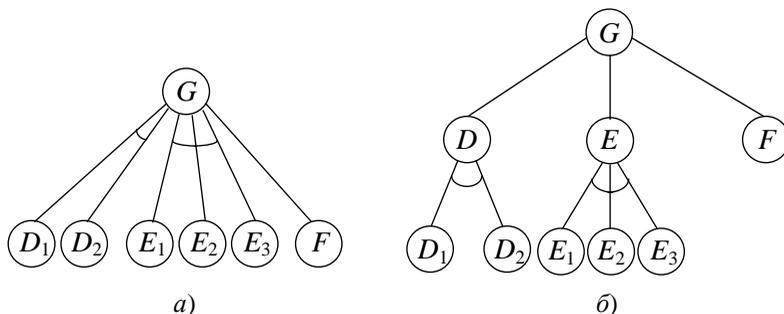


Рис. 12

Если некоторая вершина такого графа имеет непосредственно следующие за ней (дочерние) вершины, то либо все они являются И-вершинами, либо все они – ИЛИ-вершины. Заметим, что если у некоторой вершины И/ИЛИ-графа имеется ровно одна дочерняя вершина, то ее можно считать как И-вершиной, так и ИЛИ-вершиной – как, например, вершину F на рис. 9, б.

На языке И/ИЛИ-графов применение некоторого оператора редукции задачи означает, что сначала строится промежуточная И-вершина, а затем непосредственно следующие за ней ИЛИ-вершины подзадач. Исключение составляет случай, когда множество задач состоит только из одного элемента; в этом случае образовывается ровно одна вершина и будем для определенности считать ее ИЛИ-вершиной.

Вершину И/ИЛИ-графа, соответствующую описанию исходной задачи, назовем *начальной* вершиной. Вершины же, которые соответствуют описаниям элементарных задач, назовем *заключительными* вершинами. Поиск, осуществляемый путем перебора вершин графа, применим и в подходе, основанном на редукции задач. Цель поиска на И/ИЛИ-графе – показать, что *разрешима* исходная задача, т.е. начальная вершина. Разрешимость этой вершины зависит от разрешимости других вершин графа.

Сформулируем общее рекурсивное **определение разрешимости вершины в И/ИЛИ-графе**:

- заключительные вершины разрешимы, так как они соответствуют элементарным задачам;
- вершина, не являющаяся заключительной и имеющая дочерние И-вершины, разрешима тогда и только тогда, когда разрешима по крайней мере одна из ее дочерних вершин;
- вершина, не являющаяся заключительной и имеющая дочерние ИЛИ-вершины, разрешима тогда и только тогда, когда разрешима каждая из ее дочерних вершин.

Если в процессе поиска удалось показать, что начальная вершина разрешима, то это значит, что обнаружено решение исходной задачи, которое заключено в так называемом решающем графе. *Решающий граф* – это подграф И/ИЛИ-графа, состоящий только из разрешимых вершин и доказывающий разрешимость начальной вершины.

Пример. Задача символьного интегрирования.

В качестве примера применения метода редукции рассмотрим решение задачи символьного интегрирования, т.е. нахождения неопределенного интеграла $\int F(x)dx$. Обычно эта задача решается путем последовательного преобразования интеграла к выражению, содержащему известные табличные интегралы. Для этого используется

несколько правил интегрирования, в том числе: правило интегрирования суммы функций, правило интегрирования по частям, правило вынесения постоянного множителя за знак интегрирования, а также применение алгебраических и тригонометрических подстановок и использование различных алгебраических и тригонометрических тождеств.

Для формализации этой задачи в рамках подхода, основанного на редукции задач, необходимо определить форму описания задач/подзадач, операторы редукции и элементарные задачи. В качестве возможной формы описания задач может быть взята символьная строка, содержащая запись подынтегральной функции и переменной интегрирования (если последняя не фиксирована заранее). Операторы редукции будут основаны, очевидно, на упомянутых правилах интегрирования. Например, правило интегрирования по частям $\int u dv = u \int dv - \int v du$ сводит исходную задачу (неопределенный интеграл в левой части равенства) к двум подзадачам интегрирования (два соответствующих интеграла в правой части равенства).

Заметим, что часть получаемых таким образом операторов редукции (как, например, операторы, соответствующие правилу интегрирования по частям и правилу интегрирования суммы функций), действительно редуцируют исходную задачу и порождают И-вершину в И/ИЛИ-графе, в то время как алгебраические и тригонометрические подстановки и тождества (как, например, деление числителя на знаменатель или дополнение до полного квадрата) лишь заменяют одно подынтегральное выражение на другое, порождая, таким образом, ИЛИ-вершины.

Элементарные задачи интегрирования соответствуют табличным интегралам, к примеру, $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$. Отметим, что поскольку каждая из таких табличных формул содержит переменные, на самом деле она является схемой, задающей бесконечное множество элементарных задач.

На рисунке 12 показан решающий граф для одной задачи интегрирования. В вершинах графа указаны соответствующие задачи / подзадачи, заключительные вершины заключены в двойные рамки. Решение задачи может быть собрано из содержащейся в графе информации. Оно состоит из следующих шагов:

- 1) применения подстановки $z = \operatorname{tg}(x)$;
- 2) эквивалентного преобразования подынтегрального выражения;
- 3) применения правила интегрирования суммы функций.

При этом одна из трех результирующих подзадач оказывается элементарной, а две остальные решаются за один шаг (первая – путем

вынесения постоянного множителя за знак интеграла, вторая – применением подстановки $z = \operatorname{tg} w$).

Подход, основанный на редукции задач, применим и имеет преимущества по сравнению с подходом, использующем представление в пространстве состояний, когда получающиеся при редукции подзадачи можно решать независимо друг от друга, как в примере с интегрированием. Впрочем, это условие взаимной независимости результирующих задач можно несколько ослабить. Метод редукции применим также, если решения получающихся подзадач зависят друг от друга, но при этом существует такой порядок их редукции, при котором найденные решения одних, более ранних подзадач не разрушаются при решении других, более поздних – как в головоломке о ханойской башне, в которой важен лишь порядок решения выделяемых подзадач (рис. 13).

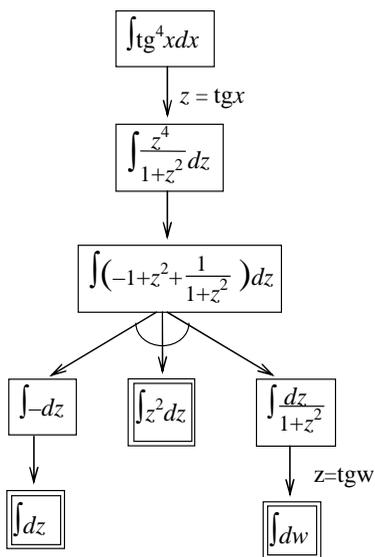


Рис. 13

3.8.7. РАЗЛИЧИЯ И КЛЮЧЕВЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В заключение целесообразно обсудить ряд общих идей, на которых может быть основана редукция задач. К их числу прежде всего относится идея выделения так называемых *ключевых операторов* и *различий* состояний. Будем далее предполагать, что задачи и подзадачи формулируются в пространстве состояний, т.е. как тройки вида

(S_I, O, S_G) , где S_I и S_G – соответственно начальное и целевое состояния, или же как двойки (S_I, S_G) , если предполагать неизменным при поиске множество O операторов преобразования состояний.

Часто при поиске в пространстве состояний нетрудно обнаружить один оператор, который обязательно должен входить в решение задачи (по сути, применение этого оператора есть необходимый шаг решения этой задачи). В графе-пространстве состояний этому оператору обычно соответствует дуга, связывающая две практически отдельные части графа. Такой оператор и называется ключевым оператором в пространстве состояний. К примеру, в задаче о пирамидке ключевым оператором был оператор переноса на нужный кольшечек самого большого диска 3.

Ключевой оператор может быть использован для следующего способа сведения исходной задачи к подзадачам. Пусть:

Op – найденный в пространстве состояний задачи ключевой оператор ($Op \in O$);

S_{Op} – множество состояний, к которым применим ключевой оператор Op ;

$Op(s)$ – состояние, полученное в результате применения ключевого оператора Op к состоянию s ($s \in S_{Op}$).

Тогда исходную задачу можно свести к трем подзадачам:

– первая задача (S_I, S_{Op}) состоит в поиске пути от начального состояния исходной задачи к одному из состояний, к которому применим ключевой оператор Op ;

– вторая задача является элементарной, она заключается в применении этого ключевого оператора;

– третья задача $(Op(s), S_G)$ состоит в поиске пути от состояния, полученного применением ключевого оператора, к целевому состоянию исходной задачи.

Порядок решения перечисленных задач существен (третья задача не может быть решена раньше первой и второй, также как вторая – раньше первой). Для решения первой и третьей задач может быть применен опять метод редукции с помощью ключевого оператора, или же их решение может быть найдено непосредственным поиском в пространстве состояний.

Для большинства задач не удастся всегда однозначно выделить ключевой оператор, гораздо чаще удастся найти множество *операторов-кандидатов* в ключевые (т.е. операторов, с большой вероятностью могущих стать ключевыми). Таким образом, в общем случае необходим процесс перебора операторов-кандидатов, каждый из которых

образует свое множество результирующих задач (этот перебор и означает поиск на И/ИЛИ-графе задачи).

Самый важный вопрос при таком способе редукции задач состоит в том, как найти кандидаты в ключевые операторы. Один из способов, предложенных и опробованных впервые в одной из наиболее известных систем искусственного интеллекта *GPS*, заключается в выявлении *различий* для начального и целевого состояний задачи.

Различие легче всего формализовать как несоответствие различных элементов описаний начального и целевого состояний. Если начальное состояние является целевым, то различий между ними нет, и задача решена.

К примеру, в задаче об обезьяне и банане различием можно считать неравенство соответствующих элементов списков, описывающих два состояния. Тогда при сравнении состояний (Т_О, П, Т_я, О) и (Т_я, П, Т_О, 1) выявляются три различия – соответственно в первых, третьих и четвертых элементах списков.

С каждым различием в системе *GPS* был связан один или несколько операторов, призванных устранять или уменьшать это различие. Эти операторы и являлись по сути кандидатами в ключевые. На каждом этапе работы система определяла различие между текущим состоянием (объектом) задачи и целевым состоянием (объектом), а затем выбирала и пыталась применить оператор для уменьшения найденного различия. В общем случае операторы включали в себя *предусловия* (условия применимости), выполнение которых было необходимо для их применения, тогда *GPS* сводила исходную задачу к задаче достижения нужного условия.

В задаче об обезьяне естественно связать различия и операторы-кандидаты в ключевые следующим образом:

- различие в первом элементе списка-описания состояния (положение обезьяны в плоскости пола) – операторы *Перейти* и *Передвинуть*;
- различие во втором элементе (положение обезьяны по вертикали) – оператор *Взобраться*;
- различие в третьем элементе (положение ящика) – оператор *Передвинуть*;
- различие в четвертом элементе (содержимое руки обезьяны) – оператор *Схватить*.

Ясно, что для реализации рассмотренных идей в виде алгоритма или программы должна быть, во-первых, специальная процедура сравнения описаний состояний и вычисления различий. Во-вторых, необ-

ходима процедура, связывающая ключевые операторы с возможными различиями (в *GPS* использовалась таблица связей различие – оператор). Последняя процедура должна также устанавливать порядок устраниения различий в случаях, когда выявлено несколько различий и возможно применение нескольких ключевых операторов. Различия должны быть упорядочены по степени их существенности, значимости для конечного решения исходной задачи. Система *GPS* начинала с попытки обработки более серьезных и трудно устранимых различий, переходя затем к более легким.

В задаче об обезьяне и банане приоритет (существенность) различий можно установить, например, следующим образом: различие в четвертом, затем во втором, затем в третьем и первом элементе описания состояния задачи. Такой же приоритет может быть и у операторов, уменьшающих эти различия.

Важно, что воплощаемая в указанных процедурах информация является специфической, зависящей от конкретной задачи, т.е. эвристической проблемно-ориентированной информацией. Одной из слабостей применяемого в системе *GPS* подхода было то, что процедуры определения различий и уменьшающих их операторов должны были быть отдельно реализованы для каждой конкретной задачи (или для очень узкой предметной области, включающей несколько видов задач), в противном случае снижалась эффективность решения задач.

Подчеркнем, что основной механизм системы *GPS* не был проблемно-ориентированным: он представлял собой реализацию универсального эвристического метода решения задач, часто применяемого человеком, и известного как *анализ целей и средств (means-ends analysis)*. Ключевая идея этой эвристики такова:

- поиск различий между тем, что дано в поставленной задаче, и тем, что надо получить;
- последовательное устранение найденных различий с помощью подходящих средств–операций.

Работая в соответствии с этой эвристикой, *GPS* применяла несколько схем редукции задач, и на основе выявления различий между объектами задачи и применения уменьшающих эти различия операторов рекурсивно формировала систему (дерево) задач-целей (подзадач).

3.8.8. ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ РОБОТЫ

Интеллектуальный робот (его следует отличать от также иногда называемых роботами технических систем, типа систем точечной сварки и т.п.) – программно-аппаратный комплекс, оснащенный ***акцепторами*** (датчиками о состоянии проблемной среды) и ***эффе-***

торами (средствами воздействия на эту среду, в частности, средствами передвижения), в состав которого входит система ИИ, способная к планированию действий робота в среде.

Часто требуется возможность автономного функционирования робота в проблемной среде (например, в среде агрессивной, в которой человек находиться не может).

Иногда предполагается возможность передачи роботу (человеком-оператором) управляющих команд.

В свое время (70-е гг. XX в.) задача создания интеллектуальных роботов рассматривалась как универсальная задача-рамка для исследований в области ИИ. Действительно, помимо таких проблем как представление знаний, планирование решения при создании роботов приходится ставить и решать задачи обработки изображений, управления эффекторами, не возникающие в случае более традиционных систем ИИ (решателей интеллектуальных задач).

В последние годы понятие *интеллектуальный робот* в известной степени вытеснено близким понятием *интеллектуальный агент*.

3.8.9. ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ АГЕНТЫ

Термин *интеллектуальный агент*, ставший популярным лет пять назад, понимается различными исследователями по-разному.

Общим для различных подходов (точек зрения) является следующая трактовка.

Интеллектуальный агент – некоторая программно-аппаратная сущность, способная действовать в интересах достижения целей, поставленных перед ним владельцем и/или пользователем (или даже от лица владельца и/или пользователя).

Обычно предполагается, что *интеллектуальный агент*:

- действует автономно или совместно с другими компьютерными/интеллектуальными системами;
- выполняет шаблонные предписанные действия и/или действия, требующие активности и учета состояния окружающей среды (reactivity);
- может генерировать цели и действовать рациональным образом для их достижения (activity / pro-activity);
- в той или иной степени способен к обучению, корпоративным действиям; мобилен.

В работах, посвященных *интеллектуальным агентам*, указываются, в частности, следующие сферы их применения (и соответствующие технологии):

– *агенты, поддерживающие интеллектуальный пользовательский интерфейс;*

– *мультиагентные системы* (и технологии «распределенного искусственного интеллекта»);

– *мобильные агенты* (в том числе реализованные программно), которые могут общаться между собой и перемещаться в своем специфическом окружении (в частности, в компьютерных сетях; они могут покидать клиентский компьютер и перемещаться на удаленный сервер для выполнения некоторых действий, после чего возвращаются обратно).

4. ЭКОНОМИЧЕСКАЯ КИБЕРНЕТИКА

Экономическая кибернетика – научное направление, занимающееся применением идей и методов кибернетики к экономическим системам. Экономическая кибернетика рассматривает экономику, а также ее структурные и функциональные звенья, как системы, в которых протекают процессы регулирования и управления, реализуемые движением и преобразованием информации. В расширенном и не совсем точном смысле часто экономическая кибернетика трактуется как собирательное понятие, охватывающее весь комплекс научных дисциплин, возникших на стыке математики и кибернетики с экономикой, включая математическое программирование и исследование операций, экономико-математические модели, эконометрию и математическую экономию.

Системный подход к экономике с выделением и совмещением в его рамках аспектов *регулирования, управления и информации* определяет внутреннее единство и характер исследований экономической кибернетики. Они способствуют комплексной разработке мероприятий по совершенствованию управления народным хозяйством и служат, в частности, теоретической основой создания *автоматизированных систем управления (АСУ) и систем обработки данных (СОД)* в народном хозяйстве. В ряде стран соответствующие исследования еще не выделены из проблематики системного анализа, исследования операций, науки управления – *management science* (в США и Англии) или информатики (во Франции). Экономическая кибернетика пока находится в стадии становления. Впервые термин «экономическая кибернетика» появился в начале 60-х гг. XX в. в трудах В.С. Немчинова, О. Ланге и Г. Грекевского (Польша), С. Вира (Англия). Они же наметили и основные направления развития этой новой науки, уделив особое внимание связи системного анализа экономики с теорией регулирования, логикой и теорией информации. Однако многие существенные положения экономической кибернетики были сформулированы значительно ранее: представление экономики как системы мы находим в «Экономической таблице» Ф. Кенэ (1758); оно было развернуто и научно обосновано в трудах К. Маркса. В 50- и 60-х гг. XX в. более широко разрабатывались прикладные вопросы создания СОД: обследование потоков данных и их рационализация, кодирование, организация обработки данных, что обеспечило эффективное использование ЭВМ в СОД (до этого они применялись для разовых расчетов и не работали в режиме управления). С другой стороны, создавались более или менее абстрактные схемы регулирования экономических систем к

иллюстрации теории автоматизированного регулирования. Все эти первоначально весьма слабо связанные линии исследований постепенно складывались в проблематику экономической кибернетики. Ее внутренняя общность вырисовывалась по мере перехода от сравнительно небольших СОД на образцовых предприятиях и фирмах к анализу и проектированию информационных систем отраслевого и народнохозяйственного уровня. Здесь потоки и обработка данных уже не могли рассматриваться обособленно от процессов планирования и управления социалистической экономикой в целом или процессов регулирования в капиталистической экономике. Особенно острым стал вопрос об информационном обеспечении крупных комплексов экономико-математических моделей. В качестве одной из центральных возникла проблема совмещения моделей управляемых объектов и моделей процессов управления как основы проектирования АСУ. От этого зависят возможности оптимизации системы управления, сочетающей разработку эффективных и оптимальных планов, обеспечение их реализации с удовлетворением определенных требований к затратам и быстродействию управляющего органа.

В настоящее время экономическая кибернетика развивается по трем основным направлениям, которые все более тесно увязываются друг с другом.

1. *Теория экономических систем и модели* является обобщающим разделом экономической кибернетики и разрабатывает: методологию системного анализа и моделирования экономики, отражения структуры и функционирования экономических систем в моделях; вопросы классификации и построения комплексов экономико-математических моделей, проблемы экономического регулирования, соотношения и взаимного согласования различных стимулов и воздействий в функционировании экономических систем; вопросы экономических интересов и хозяйственного поведения людей и коллективов. При исследовании этих проблем экономическая кибернетика прежде всего опирается на общую теорию систем, а также на социологию и теорию регулирования, обобщает результаты разработки экономико-математических методов и моделей.

2. *Теория экономической информации* рассматривает экономику как информационную систему. Она изучает: потоки информации, циркулирующие в народном хозяйстве как коммуникации между его элементами и подсистемами, характеристики информационных каналов и передаваемых по ним сообщений; экономические измерения и вообще знаковые системы в экономике, т.е. языки экономического управления, включая разработку комплексов хозяйственных показателей, правил их расчета (эти вопросы выделяются в экономическую семиотику); процессы принятия решения и обработки данных в ин-

формационных системах народного хозяйства на всех его уровнях и вопросы наилучшей организации этих процессов. Здесь экономическая кибернетика тесно соприкасается с теорией информации, исследованиями по определению полезности или ценности информации, семиотикой, теорией программирования, информатикой.

3. *Теория управляющих систем в экономике* конкретизирует и сводит воедино исследования остальных разделов экономической кибернетики. Она направлена на комплексное изучение и совершенствование системы управления народным хозяйством и отдельными хозяйственными объектами, а в конечном счете – на их оптимальное функционирование. Особое внимание уделяется: проблемам планирования, руководства реализацией планов, учета и контроля – методологии, технологии и организации этих функций управления, использованию комплексов экономико-математических моделей и других научных методов в практике управления; разработке внутренне согласованного комплекса экономических, административных, правовых и других стимулов и норм управления, распределению прав и ответственности, построению организационных структур органов управления; изучению и учету человеческого фактора в процессах хозяйственного управления, взаимодействию человека и машины в АСУ; проблемам проектирования и внедрения АСУ в целом. Экономическая кибернетика рассматривает АСУ не как «пристройку» к тем или иным органам управления для обработки данных, а как саму систему управления хозяйственным объектом, основанную на комплексном применении экономико-математических методов и моделей, современной информационно-вычислительной техники – с соответствующей технологией и организацией ее работы.

Наиболее крупными научными центрами экономической кибернетики являются Центральный экономико-математический институт, Институт экономики и организации промышленного производства. Развернута подготовка кадров на факультетах и отделениях экономической кибернетики в университетах и экономических институтах Москвы, Новосибирска и столиц союзных республик. Результаты исследований по экономической кибернетике публикуются в журналах: «Экономика и математические методы», «Кибернетика», «Экономика и организация промышленного производства», «Management Science» (США), «Management Technology» (США), «Operations Research» (США), «Metra» (Франция), «RIRO» (Франция).

В советской литературе обычно весь этот комплекс научных дисциплин, возникших на стыке математики и кибернетики с экономикой, определяется как *экономико-математические методы*, к которым относят и экономическую кибернетику.

Экономическая семиотика – наука о закономерностях построения и использования форм обмена информацией в системах экономического управления. Возникновение экономической семиотики связано с попытками использования в исследовании экономической информации комплекса представлений и подходов общей науки о знаках и знаковых системах – *семиотики*. Подобно тому, как общая семиотика обычно рассматривается в качестве составляющей части теоретической кибернетики, экономическую семиотику включают в комплекс дисциплин, образующих экономическую кибернетику. Изучая формы обмена информацией в экономических системах, экономическая семиотика служит инструментом исследования в теории экономической информации как в информационных системах органов управления хозяйственными объектами. Задача экономической семиотики – упрощение и устранение избыточности информации в документации; разработка эффективных форм обмена информацией между человеком и машиной в человеко-машинных системах управления; формализация языка документов в связи с созданием автоматизированных систем хранения и обработки экономической информации.

Объектом изучения экономической семиотики является *язык экономического управления*. Экономическая семиотика изучает язык экономического управления как систему, реализующую функцию обмена информацией, структурно состоящую из нескольких взаимосвязанных уровней: уровня букв и элементарных знаков; уровня слов, чисел, классификационных шифров; уровня высказывания (показателей и других единиц экономического языка, имеющих форму наименований некоторых величин и их значений) и уровня документов. Экономическая семиотика позволяет исследовать экономический язык как единый организм, где элементы каждого нижнего уровня служат для образования элементов высшего, что является необходимой предпосылкой обеспечения последовательности, точности и экономичности анализа и проектирования систем экономической документации.

Анализ экономического сообщения (документа, показателя, текста) может производиться на каждом из уровней или каждой паре уровней экономического языка, в одном из трех семиотических аспектов: синтаксическом, семантическом или прагматическом.

Синтаксический аспект рассмотрения экономических сообщений предполагает изучение последних с точки зрения их возможного комбинирования, сочетаемости, распределения как знаков языка. В тех случаях, когда анализ смысла сообщения или его полезности оказывается невозможным или затруднительным, обычно осуществляется

только синтаксический анализ, в котором в полной мере используется статистико-вероятностный аппарат теории информации.

Рассмотрение экономических сообщений в семантическом аспекте означает исследование закрепленных за каждым из них как за знаком соответствующих значений, что, в частности, предполагает понятийную классификацию объектов, отображаемых информационной системой, уточнение смысловых вариантов каждого из знаков языка в различных контекстах, слежение за модификацией этих значений по мере развития системы, фиксацию отнесенности знаков к различным функциональным подсистемам системы управления. Поскольку смысл сообщений зачастую трудно отделить от их значимости для системы, семантический подход к анализу информации в значительной степени пересекается с прагматическим.

Прагматический аспект анализа информации требует точной ориентации каждого сообщения на конкретную систему и на определенную задачу, решаемую в этой системе. Прагматический подход предполагает оценку значимости каждого из языковых знаков применительно к задачам, решаемым в системе, оценку стоимости получения информации, учет сведений о месте возникновения, обработки, трудоемкости получения и путях следования сообщений.

По характеру решаемых задач экономическая семиотика подразделяется на *аналитическую*, *описательную* и *конструктивную*.

Аналитическое направление связано с анализом экономической информации, изысканием количественных методов оценки полезности единиц информации в конкретных экономических системах, в частности, способом исчисления количества информации в экономических документах и текстах. Это открывает перспективу введения стоимостных оценок единиц и совокупностей информации, создания систем приоритета при передаче и обработке информации, рационализации экономических информационных систем по экономическим критериям.

Представители *описательного направления* разрабатывают методы формального описания знаковых подсистем экономического языка: классификаторов, комплексов показателей, документации, использования аппарата семиотики для различения, типизации и сопоставления экономических объектов, явлений и их моделей, унификации методов и языков для их фиксации.

Конструктивное направление связано с конструированием информационных языков для автоматизированных систем управления, оптимизацией существующих форм экономических документов, проектированием документационных систем для вновь создаваемых систем управления.

Проведение экономико-семиотических исследований является необходимым условием построения систем плановых расчетов, требующих точной интерпретации значений и установления формальных и смысловых взаимосвязей между показателями, синтеза наименований показателей на выходе системы и внедрения принципа интеграции в обработку экономической информации в целом.

Экономическая статистика. Под этим термином объединяется все статистическое изучение экономики в целом и ее отраслей. Соответственно этому различают общую часть экономической статистики и отраслевые ее части, охватывающие статистическое изучение отдельных отраслей хозяйства – промышленности (и далее ее отраслей), сельского хозяйства, строительства, транспорта (и его отраслей), торговли и т.д. В качестве учебной дисциплины экономическая статистика в одних случаях охватывает ту и другую часть, в других – только общую часть при выделении специальных в особые учебные дисциплины отраслевых статистик. Иногда под экономической статистикой понимают в сущности *социально-экономическую статистику*, включающую статистическое изучение не только экономических, но и всех других общественных явлений – развитие духовной культуры, явления, исследуемые «моральной» статистикой, здравоохранение и здоровье. Особое место принадлежит при этом *статистике населения (демографической статистике)*, поскольку ее объект – население, являясь носителем всех общественных явлений, в то же время играет роль существенного элемента в экономике, где оно не только образует важнейшую производительную силу, но также является субъектом всей экономической деятельности.

Структура экономической статистики определяется системой ее показателей. Важнейшую часть этой системы образуют показатели *баланса народного хозяйства*. Общая идея баланса народного хозяйства состоит в статистическом отображении воспроизводства в народном хозяйстве – по образцу марксовских схем воспроизводства, дополненных рядом абстрагированных в этих схемах, но практически важных моментов, и развитых с гораздо большей детализацией. Главные части баланса народного хозяйства: общественный продукт и его распределение, национальный доход, его распределение, перераспределение и использование, движение основных и оборотных средств, баланс труда. Сюда же при переходе от двух подразделений общественного воспроизводства к ряду отраслей и производств относится система показателей отчетного межотраслевого баланса. Баланс же труда примыкает ко всей системе показателей населения, его структуры и его движения, и является связующим звеном между нею и системой показателей

воспроизводства в экономике. Наконец, в качестве одной из главных выводных частей общей экономической статистики является статистика уровня жизни и народного благосостояния. Последняя складывается из статистики доходов населения, объема и структуры потребления, размера, структуры и использования общественных фондов (здравоохранения, просвещения и др.), статистики жилищных условий и коммунального обслуживания, санитарной статистики, статистики культуры и др.

В статистике производственных отраслей экономическая статистика изучает продукцию, движение и использование основных и оборотных средств (включая капитальные вложения и материально-техническое снабжение), труд, его использование и оплату в данной отрасли, финансы отрасли, характеризующие отрасль качественные показатели (производительность труда, себестоимость, удельные расходы, эффективность фондов).

Источником информации для экономической статистики служат *периодическая отчетность* хозяйств (промышленных предприятий, совхозов и колхозов, торговых предприятий и т.д.), *переписи* и разного рода специальные *обследования*. В настоящее время основная часть отчетности централизована в системе органов государственной статистики (Центральное статистическое управление СССР и республик, местные статистические органы). В некоторых отраслях отчетность децентрализована по ведомствам. Наиболее фундаментальной отчетностью являются годовые отчеты. Отчетность внутри года охватывает сравнительно небольшой круг показателей. Роль переписей в условиях советской экономики сравнительно невелика, поскольку необходимую информацию можно получить через отчетность, особенно годовую. В капиталистических странах, где такие возможности весьма ограничены, основные сведения для экономической статистики получают через переписи.

Среди показателей, используемых в экономической статистике, важно различать *натуральные* и *стоимостные*. К первым относятся показатели, представленные в естественной для данного объекта мере, — ткани в метрах, сталь в тоннах, тракторы в штуках (или приведенных мерах по мощности) и т.п. Вторые получаются путем денежной оценки, т.е. в рублях. Без такой оценки невозможно, в частности, получение сводных характеристик, охватывающих различные продукты, различные основные средства и т.д. Чтобы при этом устранить возможное влияние изменений цен во времени, наряду с оценкой в фактически действовавших ценах применяется оценка в неизменных («сопоставимых») ценах. Общие показатели баланса народного хозяйства (за ис-

ключением показателей баланса труда) могут быть получены только в стоимостном выражении.

Для экономической статистики большое значение имеют различные классификации: продукции, отраслей производства, фондов и др. В зависимости от способа классификации могут изменяться и показатели экономической статистики. Например, на соотношение промышленности и сельского хозяйства может повлиять различное решение вопроса о том, куда отнести первичную обработку продуктов сельского хозяйства. Без создания ряда номенклатур и четких классификаций экономическая статистика не могла бы решать свои задачи. В настоящее время в связи с внедрением электронной вычислительной техники ведется работа по составлению разного рода кодов, основанных на этих классификациях (продуктов, предприятий и т.д.).

Результаты экономической статистики обычно публикуются в виде различных статистических справочников. При налаженной системе экономической статистики они издаются периодически, причем наиболее фундаментальными являются ежегодники.

5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАЗВИТИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

Роль математического моделирования в развитии экономической теории очень велика. Существует две трактовки по этому вопросу: с одной стороны, это трактовка экономико-математического моделирования как единственно возможного способа создания и углубления экономической теории; с другой стороны, отрицание каких-либо возможностей математического моделирования в достижении новых теоретических результатов. Распространено мнение, что математика не может изучать качественную сторону явлений природы и общества. Предметом математики является количественный анализ отношений качества, так и качественный анализ количественных отношений. Эти черты современной математики находят отражение в построении и использовании экономико-математических моделей. Любая экономико-математическая модель характеризует не только количественную, но и качественную определенность процессов; она всегда представляет собой качественно-количественное построение.

Современная математика содержит такие области, которые занимаются в основном проблемами качественных отношений (теория множеств, алгебра, топология, математическая логика, теория алгоритмов и др.). Кроме того, проблемы качественного анализа присутствуют во всех традиционных «количественных» областях математики (проблемы разрешимости, поведения семейства решений, единственности и устойчивости.)

Важнейшей областью использования математического моделирования в экономических исследованиях является анализ структуры и закономерностей экономических процессов.

При этом выделяются два возможных методологических подхода.

1. Аналитическое исследование модели.
2. Обобщение численных экспериментов. Получаемые теоретические результаты выражаются в виде общих (качественных) свойств решений соответствующих моделей. Естественно степень общности этих теоретических результатов зависит от назначения и особенностей изучаемых моделей.

Без результатов, полученных на основе экономико-математического моделирования, невозможно себе представить современные концепции народнохозяйственного оптимума, измерения затрат и результатов, исследовать закономерные связи между этими понятиями. В экономическую науку органически вошли такие фундаментальные экономические понятия, как «функция», «множество», «информация»,

«вероятность». Ряд важных экономических показателей является результатом экономической интерпретации абстрактных математических понятий. Например, показатели эффективности производственных ресурсов и полезных эффектов потребительских благ опираются на понятие частных производных и множителей Лагранжа, коэффициенты полных затрат продукции соответствуют элементам обратной матрицы, определение траекторий максимально экономического роста связано с понятиями собственных значений и собственных векторов. Математический анализ моделей заставляет искать содержательные экономические аналогии тем или иным абстрактным математическим величинам и отношениям, привлекает внимание исследователя к таким особенностям реальных экономических процессов, которые открываются благодаря математической формализации.

5.1. МАССИВ ИНФОРМАЦИИ

Массив информации – информационная структура, образованная из одной или более записей таким образом, что записи описывают объекты, а массив – класс объектов. Несколько массивов составляют систему, или набор массивов. Записью называется точно установленный набор данных, характеризующих некоторый объект или процесс. Примерами записей могут служить товарные чеки, наряды на выполнение работ, накладные для получения материалов, анкеты или личные листки, статистические отчеты и т.п.

Элементами массива также могут быть *символы* (литеры), *инструкции*, *программы*, *документы* и т.п. В этом случае массив есть совокупность элементов, расположенных один за другим. В практике обработки экономической информации самостоятельные массивы формируют по предметным, алгоритмическим, семантическим и другим признакам. Свыше 80% информационных массивов промышленного предприятия составляет нормативно-справочная информация.

Математическая логика – раздел математики, объединяющий теорию алгоритмов, теорию множеств, теорию моделей и теорию доказательств.

Теория алгоритмов изучает математические модели механических работ, выполняемых математиками при решении массовых однотипных проблем, и свойства множеств, получаемых механическими процедурами, продолжаемыми потенциально бесконечно.

Теория множеств изучает гносеологические вопросы, связанные с понятиями множества и бесконечности, которые являются основными в математике.

Теория моделей возникла при применении методов математической логики в алгебре и превратилась в самостоятельную дисциплину

ну, изучающую математические модели естественнонаучных теорий, выявляющую законы, общие всем теориям, выраженным на определенном формализованном языке. Одним из основателей теории моделей был советский ученый А.И. Мальцев, которому принадлежат фундаментальные результаты в этой области.

Теория доказательства, составляющая основную часть математической логики, изучает математические модели процесса мышления, структуру мышления, рассуждений, применяемых в математике.

Всякий процесс мышления, в том числе и применяемый в математике, связан с четырьмя следующими объектами.

1. Язык \tilde{L} , на котором выражаются исходные посылки (данные) мышления, отдельные моменты мышления, наконец, результаты, полученные рассуждением. Обычно \tilde{L} есть язык одного народа (русский, французский), обогащенный терминами, понятиями, характерными для теории изучаемых объектов.

2. Класс \tilde{K} изучаемых объектов \tilde{N} .

3. Понятие истинности высказывания α языка \tilde{L} в изучаемом объекте \tilde{N} из \tilde{K} .

4. Процесс выработки высказывания, применяемый при рассуждении, заключающийся в переходе от одних высказываний, называемых *посылками*, к новому высказыванию, называемому *следствием исходных посылок*.

Поэтому математическая модель процесса мышления состоит из следующих моделей:

– формализованного языка L , являющегося математической моделью языка \tilde{L} ;

– математической модели N изучаемого объекта \tilde{N} ;

– точного определения понятия истинности высказывания α языка L в модели N изучаемого объекта \tilde{N} ;

– логического исчисления, являющегося математической моделью процесса перехода от посылок к следствиям, проводимого по определенным правилам вывода в процессе мышления, рассуждения.

Выбирая по-разному эти модели перечисленных объектов, получают разные направления в математической логике. В каждом направлении различают два отдела: *синтаксис* и *семантику*.

Синтаксис изучает процесс формального преобразования высказывания языка B , проводимого в процессе доказательства теорем.

Основные понятия синтаксиса:

1. Множество A высказываний языка L , называемое *логическими аксиомами исчисления*. Это множество, в свою очередь, является ма-

тематической моделью множества \tilde{A} высказываний языка \tilde{L} истинных во всех объектах \tilde{N} , в которых оно определено. Они истинны в силу своих структур, строения и не выражают каких-либо особых свойств объектов \tilde{N} .

2. *Системы операции*, ставящие некоторым последовательностям высказываний (посылкам) одно высказывание, называемое *непосредственным следствием посылок*. Эти операции называются *правилами вывода* и записываются в виде

$$\bar{R} = \frac{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}{\alpha},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – посылки; α – следствие.

3. *Выводимость*. Высказывание α *выводимо из множества B высказываний*, если α можно получить из множества $A \cup B$ с помощью конечного числа применения операции вывода. Высказывание α называется *доказуемым*, если оно выводимо из множества A *логических аксиом*.

В синтаксисе изучаются подалгебры частичной алгебры $A = (V, R_1, \dots, R_k)$, где K – множество высказываний языка L , а R_1, \dots, R_k – частичные операции, определенные на V и соответствующие правилам вывода $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_k$. Подалгебра $[A]$ алгебры A , порожденная системой логических аксиом A , есть множество всех *доказуемых формул*. Множество B высказываний называется *непротиворечивым*, если подалгебра $[A \cup B]$, порожденная множеством $A \cup B$ (или множество высказываний, выводимых из B), не совпадает с V , т.е. $V - [A \cup B] \neq \emptyset$. Множество B называется множеством *нелогических аксиом алгебры $[A \cup B]$* .

Семантика. Основное понятие семантики – *понятие истинности*. В языке L определяется множество $L(S)$ формул, называемых *высказываниями*, и задается множество $C, C\{0, 1\}$, называемое *множеством значений истинности*. Каждой паре (N, α) , где $N \in K$ (K – класс моделей N), $\alpha \in L(S)$ ставится определенным способом элемент из C , называемый *значением истинности высказывания α в модели N* . Этот элемент обозначим $i(N, \alpha)$. Высказывание α истинно в N , если $i(N, \alpha) = 1$, и ложно, если $i(N, \alpha) = 0$.

Каждой модели N соответствует множество $Th(N) = \{\alpha / i(N, \alpha) = 1, \alpha \in L(S)\}$ высказываний, истинных в N . Оно называется *теорией модели N* . Классу $K_1 \subset K$ моделей соответствует множество $Th(K_1) = \bigcap_{N \in K_1} Th(N)$ высказываний, истинных во всех моделях K_1 , называемое *теорией класса K_1* . В свою очередь, каждое высказывание α из

$L(S)$ определяет класс $K(\alpha) = \bigcap \{N/i(N/i, (N, \alpha) = 1, N \in K\}$ моделей, в которых α истинно. Множество Σ высказываний определяет класс $K(\Sigma) = \bigcap_{\alpha \in \Sigma} K(\alpha)$ всех моделей, в которых истинно каждое высказывание из Σ . Множество Σ называется *совместным*, если $K(\Sigma) \neq \emptyset$.

Классы моделей, определяемые в языке L , называются *аксиоматизируемыми в L* . Класс моделей, аксиоматизируемый в одном языке, может не быть таким в другом языке. В семантике изучаются выразительные возможности формализованных языков и структура аксиоматизируемых классов моделей.

Перечислим основные направления в математической логике.

1. **Классическая логика** – наиболее развитое направление, нашедшее применение во всех областях математики и в кибернетике, – изучает следующие модели.

1. *Модель языка* – язык L_ω первой ступени. Сигнатура языка состоит из набора σ символов отношений и операций; значков $\wedge, (\, (, \rightarrow, \forall, \exists$, обозначающих логические связки «и», «или», «не», «если..., то...», «для каждого x ...», «существует такой x , что ...», набора символов, называемых *предметными константами* и *предметными переменными*, а также скобок, запятой. При этом каждому символу отношения или операции вписывается натуральное число, называемое *местностью* этого символа. В число символов включается специальный символ $=$ для отношения равенства. Понятие термина и формулы определяется индуктивно. *Термами* являются предметные переменные. Если f – символ n -местной операции, а про t_1, \dots, t_n известно, что они термы, то $f(t_1, \dots, t_n)$ тоже терм.

Простейшими *формулами* являются выражения вида $P(t_1, \dots, t_n)$, где P – n -местный символ отношения, а t_1, \dots, t_n – термы. Более сложные формулы получаются из простейших с помощью конечного числа связываний их значками кванторов и логических связок. Символы предметных переменных, встречающимися в формуле, разделяются на *свободные* и *связанные*. Например в формуле $\forall x \exists y (f(x, y) = r \vee f(x, y) = u)$ свободным являются u, r , а x и y связаны кванторами. Формулы без свободных переменных называются *высказываниями*.

2. *Математические модели N объектов \tilde{N}* есть алгебраические системы сигнатуры σ . Под *алгебраической системой N сигнатуры σ* понимается непустое множество вместе с заданными на нем совокупностями отношений и пропорций, соответствующих символам из сигнатуры σ . При этом местность операции и отношений равна местности соответствующего символа. Например, множество натуральных чисел с операциями $+$, $-$ есть алгебраическая система. Класс K всех алгебр систем есть *модель* класса \tilde{K} .

3. *Определение истинности.* Каждая формула, свободными переменными которой являются x_1, \dots, x_n , определяет на каждой N из K n -местное отношение. Например, формула $\forall x \forall y \forall x_1 \times x \forall y_1 (x \times y_1 = u \wedge x \times y_1 \neq x = 1)$ определяет на натуральных числах отношение взаимной простоты.

Для простейших формул соответствующее отношение определяется самой системой N . Для более сложных формул соответствующее отношение определяется путем интерпретации кванторов, логических связок. $(\Phi_1 \wedge \Phi_2)$ интерпретируется как « Φ_1 и Φ_2 », $\Phi_1 \cup \Phi_2$ – как « Φ_1 или Φ_2 », $(\Phi_1 -$ как «неверно, что Φ », $\forall x \Phi_1$ – как «для всех x справедливо Φ_1 », $\exists x \Phi_1$ – как «существует x , для которого справедливо Φ_1 ». Согласно этому определению каждое высказывание в каждой алгебраической системе либо ложно, либо истинно.

4. *Логическое исчисление.* Множество A логических аксиом получается из следующих пяти схем заменой букв A, B, C формулами языка L_σ :

$$A \rightarrow (B \rightarrow A); \quad (1)$$

$$(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)); \quad (2)$$

$$((B \rightarrow A) \rightarrow ((B \rightarrow A) \rightarrow B); \quad (3)$$

$$\forall x A(x) \rightarrow A(t), \text{ где } t \text{ есть терм}; \quad (4)$$

$$\forall x(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B), \text{ если } A \text{ не содержит свободного вхождения } x. \quad (5)$$

Правила вывода:

(i) правило вывода: из A и $A \rightarrow B$ следует B ;

(ii) правило сообщения: из A следует $\forall x B$.

Синтаксис. Система Σ высказывания непротиворечива тогда и только тогда, когда из Σ невыводима формула вида $A \neg A$. Множество Σ называется *синтаксически полным*, если для любого высказывания α имеет место: из Σ выводимо высказывание α или из Σ выводимо высказывание (α) . Всякое непротиворечивое множество Σ можно расширить до полного множества. Первостепенное значение имеет *теорема Геделя* о неполноте арифметики, утверждающая несовместимость требований полноты с требованием непротиворечивости для весьма широкого класса исчислений. Согласно этой теореме даже такая, сравнительно элементарная часть математики, как арифметика натуральных чисел, не может быть полностью охвачена одной дедуктивной теорией.

Семантика. Множество $Th(K)$ высказываний языка L , истинных в каждой модели N из K , называется *элементарной теорией* K . Фунда-

ментальное значение имеет теорема А.И. Мальцева, утверждающая, что система Σ совместна тогда и только тогда, когда каждая ее конечная часть совместна. Почти все результаты семантики являются следствием этой теоремы. Они устанавливают связь между синтаксическими и семантическими свойствами множества высказываний. Например, система Σ непротиворечива тогда и только тогда, когда она совместна; высказывание α выводимо из Σ тогда и только тогда, когда истинно во всех моделях системы Σ и т.д. Высказывание α называется *тождественно истинным*, если оно истинно во всех алгебраических системах, и *логически истинным (доказуемым)*, если оно выводимо из системы аксиом (1) – (5). Высказывание тождественно-истинно тогда и только тогда, когда оно доказуемо. Значение языка $L_{\omega\omega}^1$ объясняется тем, что большинство объектов, изучаемых в математике, являются аксиоматизируемыми на языке $L_{\omega\omega}^1$. Например, теория множеств, арифметика натуральных чисел (без аксиомы полной индукции), поле вещественных чисел, поле комплексных чисел, группы, кольца, поля, решетки, *алгебры Буля* и др. Если класс K не определяется в $L_{\omega\omega}^1$, то большая часть теории класса K описывается на языке $L_{\omega\omega}^1$, и эту часть называем *элементарной теорией класса K* . Таким образом, классическая логика языка первого порядка охватывает (моделирует) большую часть рассуждений, применяемых в математике.

II. Интуиционистская логика получается из классической логики, если придерживаться принципов конструктивизма (отказ от требования, что всякое высказывание либо истинно, либо ложно, отказ от актуальной бесконечности и допущение только потенциально бесконечных множеств, требование конструктивности всех операций, применяемых в математике (понятие конструктивности понимается по-разному в разных школах)). Принципы конструктивизма сильнее всего отражаются в определении истинности высказывания.

III. Конструктивная логика создана советским математиком А.А. Марковым (допущение принципа потенциальной бесконечности). Язык здесь такой же, как в классической логике, но потенциально обогащается переменными, кванторными знаками. Модели конструктивные, истинность также определяется конструктивно.

IV. Логика второй ступени.

Язык $L_{\omega\omega}^1$ получается из $L_{\omega\omega}^1$ добавлением переменных для предикатов и разрешением навешивания на них кванторов.

Модели $N = \langle A, \sigma, F_1, F_2, \dots \rangle$ получаются из алгебраических систем $N^* = \langle A, \sigma \rangle$ сигнатуры σ обогащением множествами F_n для всех n -местных отношений, определенных на A .

Понятие истинности высказывания определяется индукцией по длине формул.

Исчисление получается из исчисления классической логики добавлением новых правил для предикатных переменных.

Язык $L_{\omega\omega}^1$ очень богат. В нем можно одной формулой описать арифметику натуральных чисел.

V. Логика языков бесконечно длинных, формул моделирует рассуждения, в которых допускаются пересечение, сумма бесконечно-го числа множеств. Поэтому в языке допускаются бесконечно длинные формулы, содержащие конъюнкцию (дизъюнкцию) бесконечного множества формул мощности $\leq \alpha$, и разрешается навешивать кванторы по переменным из множества переменных мощности $\leq \alpha$.

VI. Многозначная логика. Во всех предыдущих направлениях, заменяя множество $C = \{0, 1\}$ другим множеством $C\{0, 1\}$ и определяя логические связки и кванторы (понимаемые как бесконечно местные операции) языка L , получаем многозначную логику. Наиболее плодотворной оказалась логика, когда C_I – компактное хаусдорфово пространство или C_1 – полная булева алгебра. Логика с конечным или счетным C_1 находит применение в кибернетике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математическое моделирование обогащает и делает более интенсивным процесс экономического исследования. Расширяются границы мысленного эксперимента, появляется возможность исследовать на ПЭВМ различные теоретические гипотезы, изучая последствия их практического применения (например, разные принципы ценообразования, финансирования, распределение доходов). Математический анализ моделей становится одной из важных форм экономического исследования. Поэтому более правильно говорить не просто о применении математики в экономической науке, а о процессе взаимодействия экономической и математической наук, поднимающих экономическую теорию на качественно новый уровень.

Математика воздействует на экономическую науку и общей логикой своих научных построений. Это выражается прежде всего в распространении принципов математических доказательств на исследование экономических процессов.

Известно, что основным методом математического исследования является *аксиоматический метод*. Суть его состоит в следующем. На первой стадии исследования формулируется система аксиом – исходных положений, принимаемых без доказательств. Далее на основе аксиом проводится математическое рассуждение. И если система аксиом непротиворечива и достаточно полна, то можно получить некоторые выводы (например, в виде теорем), заключающие в себе новые знания. Ценность математического исследования заключается как раз в том, чтобы из небольшого числа аксиом получить возможно больше следствий. Этим же аксиоматический метод привлекателен для всех естественных и общественных наук.

Аксиоматические построения экономической теории обязательно должны найти подтверждение в экономической практике. Если какие-либо исходные предпосылки экономико-математической модели неверны, то безупречное математическое доказательство все равно даст ложные результаты. Не менее важно правильно интерпретировать результаты, полученные посредством математических доказательств. Большую опасность представляют попытки использовать строгие результаты за рамками тех предпосылок, при которых результаты доказательны.

Таким образом, начальный и конечный пункты экономико-математического моделирования лежат вне математики. Поэтому необходимы другие средства познания, обеспечивающие выбор правильных предпосылок и правильную экономическую интерпретацию формальных результатов.

Математическое моделирование экономических процессов – комплексный метод исследования, не ограничивающийся только применением математики. Но и он не может претендовать на роль единственного научного метода развития экономической теории, так как, во-первых, не все стороны экономической жизни полностью формализуемы; во-вторых, при достигнутом уровне знания, математическое моделирование далеко не всегда является лучшим из возможных методов исследований.

В последние годы интенсивно разрабатываются комплексные методологические подходы к планированию и управлению сложными системами: *системный анализ, имитационное моделирование, программно-целевое планирование*. Важной особенностью этих подходов является использование математического моделирования как составной части более общей методологии решения проблем планирования и управления.

Чтобы поднять плановое управление на качественно более высокий уровень, недостаточно только создания хороших моделей экономических объектов. Необходима глубокая перестройка всей системы планирования и управления, включая ее методические, информационные, технические, кадровые, организационно-правовые аспекты. Это вызывает необходимость моделирования самой сферы планирования и управления. Разрабатываемые модели процесса планирования отображают организационную структуру планирования, процесс сбора, хранения и передачи информации, последовательность плановых задач, этапы принятия плановых решений и контроля за их выполнением.

По классификации американских ученых Г. Саймона и А. Ньюлла, все множество проблем, требующих принятия решений, делится на четыре группы: 1) стандартные; 2) хорошо структурированные; 3) плохо структурированные; 4) неструктурированные. Проблемы первой группы, отличающиеся наибольшей ясностью, решаются посредством стандартных примеров и алгоритмов (примером могут служить задачи «прямого счета»). Вторая группа проблем в настоящее время является основным объектом применения экономико-математического моделирования. Решение третьей группы проблем возможно путем сочетания формализованных и неформализованных методов и процедур (системный анализ, имитационное моделирование). Наконец, четвертая группа проблем непосредственно не поддается научному строгому анализу; это – область применения эмпирических и эвристических приемов. Развитие знаний изменяет распределение проблем между указанными группами. Неструктурированные проблемы могут превращаться в слабо структурированные, а те – в хорошо структурированные. По мере развития этого процесса возможности применения математического моделирования расширяются.

ГЛОССАРИЙ

А

Аванс – деньги, материальные и иные ценности, выделяемые в счет предстоящих платежей.

Аккредитация – аттестация признанным органом мощностей, возможностей, объективности, компетентности и целостности организации, службы, операционного подразделения или физического лица на предмет предоставления конкретных требуемых услуг или выполнения конкретных требуемых операций.

Актив баланса – часть бухгалтерского баланса, отражающая на определенную дату денежные средства и другие активы предприятия, их состав и размещение; сторона баланса; статья в классификации активов.

Активы – экономические ресурсы, задействованные в хозяйственных операциях предприятия, от которых ожидается полезный эффект; статьи баланса, относящиеся к активам и удовлетворяющие следующим требованиям:

- 1) быть контролируруемыми, т.е. находиться в собственности или в хозяйственном ведении;
- 2) представлять ценность, товары, не имеющие спроса, не являются активами;
- 3) иметь объективно измеряемую стоимость, например, гудвилл не является активом, а купленный торговый знак – актив.

Активы ликвидные – деньги и другие активы, которые могут быть легко превращены в наличность.

Активы материальные – физические объекты, материальные факторы производства, материалы; включают акции, аренду, лизинг и т.д.

Активы нематериальные – капитализированное право, репутация фирмы, привилегии, патенты, ноу-хау и т.д.

Акцепт – одна из форм безналичного расчета между юридическими лицами, согласие плательщика на оплату; согласие на заключение договора на условиях оферты.

Акционерный капитал – капитал компании в форме акций лиц, являющихся собственниками-акционерами.

Анализ риска – систематическое использование информации для определения источников и количественной оценки риска

Аннуитет – серия равновеликих платежей, вносимых или получаемых через равные промежутки времени в течение определенного периода.

Апорт – имущество, переданное акционерному обществу в счет уплаты за акции; операция, связанная с движением активов.

Аудитор – лицо, обладающее компетентностью для проведения аудита (проверки).

Аутсорсинг – способ оптимизации деятельности предприятий за счет сосредоточения на основном предмете и передачи непрофильных функций и корпоративных ролей внешним специализированным компаниям.

Б

Баланс бухгалтерский – сводная ведомость, отражающая в денежном измерении состояние средств предприятия как по их составу и размещению (актив), так и по источникам, целевому назначению и срокам возврата (пассив).

Балансовая прибыль – прибыль до вычетов и отчислений.

Банкрот – несостоятельный должник, разорившийся собственник и признавший себя несостоятельным.

Банкротство – неспособность осуществлять платежи по долговым обязательствам, удостоверенная судом.

Бартер – обмен одного товара на другой товар в натуральном выражении.

Безналичные деньги – записи на счетах в банках.

Бизнес – экономическая деятельность субъекта в условиях рыночной экономики, нацеленная на получение прибыли путем создания и реализации определенной продукции или услуги.

Бизнесмен – инициативный деловой человек, готовый идти на риск ради получения прибыли.

Бизнес-план – развернутая программа осуществления проекта с расчетами показателей деятельности, включая оценку ожидаемых расходов и доходов. Обязательный документ для обоснованного привлечения внешних финансовых средств.

Бизнес-проект – проект развития отрасли предприятия, региона или производства, ориентированный на получение прибыли или решение социальной проблемы.

Богатство – все, что ценится людьми.

Бумажные активы – активы в виде ценных бумаг – акций, облигаций и др.

Бухгалтерская прибыль – разность между валовой выручкой и издержками предприятия.

Бюджет – метод распределения ресурсов, охарактеризованных в количественной форме, для достижения целей, также представленных количественно.

В

Валюта – денежная единица государства.

Валютный курс – цена (котировка) денежной единицы одной страны в денежной единице – валюте другой страны.

Венчурная фирма – коммерческая организация с рисковым вкладом капитала, специализирующаяся на разработке и внедрении новых технологий и продукции с неопределенным заранее доходом.

Венчурный капитал на первой стадии проекта – первоначальный капитал, необходимый для финансирования подготовительных работ в новой сфере бизнеса, до учреждения новой компании. Капитал, необходимый для начала и завершения первой стадии проекта.

Владелец – лицо, осуществляющее законное физическое или экономическое владение имуществом.

Вмененные издержки – альтернативные издержки использования собственных ресурсов фирмы; затраты на использование фактора производства, измеренные с точки зрения наилучшего их альтернативного использования; упущенная выгода.

Внутренняя норма окупаемости (доходности) – коэффициент дисконтирования, при котором текущая величина поступлений по проекту равна текущей сумме инвестиций, а чистый текущий доход обращается в нуль; показатель эффективности инвестиционного проекта.

Восстановительная стоимость – затраты на воспроизводство точной копии имущества или предприятия.

Выбор рынка – исследование, оценка и выделение из всей совокупности рынка определенного сектора, а затем и сегмента для освоения на основе анализа спроса и предложения.

Г

Гарант – лицо, выдавшее гарантию выплаты долга другого лица.

Гибкость – способность к адаптации и модернизации.

Государственное предприятие – унитарное (казенное) предприятие, принадлежащее государству.

Государственное регулирование экономики – система законодательных, исполнительных и контролирующих мер, осуществляемых правомочными органами государства в целях адаптации хозяйствующих субъектов к изменяющимся условиям.

Гудвилл – престиж, деловая репутация предприятия, его контакты в деловых кругах, клиенты и т.д.

Д

Дезинвестиции – сокращение объема инвестиций в проект, достаточное для возмещения истощимых активов; новые инвестиции меньше износа и выбытия основных средств предприятия.

Демпинг – бросовый экспорт, вывоз товаров из одной страны в другую по ценам более низким, чем внутри страны или на мировом рынке.

Диверсификация – расширение сферы производственно-хозяйственной деятельности предприятия; увеличение перечня услуг, товаров.

Дисконт – уценка; учетный процент, взимаемый банками при учете векселей; скидка с цены товара.

Дисконтирование – приведение разновременных затрат и результатов к начальному или наперед заданному моменту времени; процесс, обратный начислению сложного процента.

Дочерняя компания – самостоятельное хозяйственное общество, в котором основное (материнское) общество имеет преобладающую долю в уставном капитале или иным образом может определять принимаемые им решения.

Доходы – средства, поступающие в распоряжение людей от общества. Располагаемые денежные доходы – денежные доходы за вычетом обязательных платежей и взносов. Дифференциация доходов – степень неравномерности распределения национального дохода, получаемого разными группами населения.

Е

Емкость рынка – совокупный платежеспособный спрос покупателей, возможный годовой объем продаж определенного вида товара при сложившемся уровне цен. Зависит от степени освоения данного рынка, эластичности спроса, от изменения экономической конъюнктуры, уровня цен, качества товара и затрат на рекламу.

И

Идентификация риска – процесс нахождения, составления перечня и описания элементов риска.

Издержки – расходы, затраты, связанные с владением, производством, торговлей, транспортировкой и хранением товаров.

Инвестирование – процесс осуществления инвестиций в объект, проект на определенных условиях.

Инвестирование на предприятии – процесс простого или расширенного воспроизводства средств производства.

Инвестиции – совокупность финансовых, имущественных, технологических и интеллектуальных ценностей, вкладываемых в объекты предпринимательства с целью получения прибыли или социального эффекта; долгосрочное вложение капитала в различные сферы экономики; капиталовложения.

Инвестиционный проект – план вложения капитала в организацию или реконструкцию предприятия.

Инжиниринг – обособленный в самостоятельную сферу деятельности комплекс инженерно-консультационных услуг коммерческого характера по технико-экономическому обоснованию создания новых предприятий, по обслуживанию строительства и эксплуатации производства и др. Объектов, по обеспечению процесса производства и др.

Инновации – новые исследования и разработки, имеющие прикладное значение, как форма проявления научно-технического прогресса.

Интеллект – это общая способность к познанию и решению проблем, которая объединяет все познавательные способности индивидуума: ощущение, восприятие, память, представление, мышление, воображение. Это способность из минимума информации выводить максимум заключения, при прочих равных – в кратчайшее время и простейшим анализом. Также интеллект может рассматриваться как мера комплекса успешной ориентировки в окружающей действительности. Он определяется способностями индивидуума использовать данный комплекс для качественного достижения поставленной задачи.

Интеллектуальная собственность – собственность, выраженная в неосязаемых активах в виде прав на производство, научные открытия и др.

К

Капитал – стоимость, актив, фактор производства, приносящий доход; производственные элементы для создания товаров и услуг.

Капитализация – превращение прибыли в капитал, стоимость которого возрастает; передача капитала другой компании; увеличение стоимости активов.

Капитальный проект – форма планирования и реализации инвестиций.

Ключ – информация, используемая алгоритмом для преобразования сообщения при шифровании или расшифровке данных.

Количественная оценка риска – процесс присвоения значений вероятности и последствий риска.

Комбинаторность – потенциал, ресурс возможных способов соединения.

Компетентность – выраженная способность применять свои знания и умение.

Критерии риска – правила, по которым оценивают значимость риска. Критерии риска могут включать в себя сопутствующие стоимость и выгоды, законодательные и обязательные требования, социально-экономические и экологические аспекты, озабоченность причастных сторон, приоритеты и другие затраты на оценку.

М

Макросреда – составляющая маркетинговой среды фирмы, представлена силами более широкого социального плана, которые оказывают влияние на микросреду, такими как факторы демографического, экономического, природного, технического, политического и культурного характера.

Маржинальные издержки – увеличение или уменьшение полных издержек производства при увеличении или уменьшении объема производства на одну единицу продукта.

Мастер-план – план технического обеспечения в соответствии с требованиями технологии производства определенного вида продукции.

Менеджмент риска – скоординированные действия по руководству и управлению организацией в отношении риска. Обычно менеджмент риска включает в себя оценку риска, обработку риска, принятие риска и коммуникацию риска.

Метод «мозговой атаки» – методика, используемая группой специалистов для выработки идей по конкретной проблеме. От каждого члена группы требуется творческое осмысление данной проблемы и фиксирование как можно большего количества идей. Идеи не подлежат обсуждению или анализу до завершения «мозговой атаки».

Н

Ноу-хау – полностью или частично конфиденциальные знания технического, экономического, административного, управленческого, финансового или иного характера, дающие их владельцу определенные преимущества перед конкурентом.

О

Обработка риска – процесс выбора и осуществления мер по модификации риска. Термин «обработка риска» иногда используют для обозначения самих мер. Меры по обработке риска могут включать в себя избежание, оптимизацию, перенос или сохранение риска.

Оценка проекта – установление стоимостной характеристики проекта, исходя из стоимости проектирования и реализации проекта строительства, закупки техники, сырья и эксплуатации предприятия.

П

Планирование – определение целей и путей их достижения. В условиях рыночной экономики резко возрастает сложность и ответственность самого процесса планирования, который осуществляется по таким направлениям, как сбыт, финансы, производство и закупки

Планирование сбыта – производится на основе анализа внутри фирменных данных, т.е. оборота продаж (количества), стоимости (оборота), цен, прошлых прогнозов сбыта и его колебаний; анализа данных о рынке, т.е. структуры населения, доходов, потребностей; специальных исследований рынка; планирования рекламы. План сбыта является основой разработки всех остальных планов и всегда включает в себя: количественный план; стоимостной план; информацию о скидках, сроках и условиях платежа.

Поведение – способность изменять свои действия под влиянием внутренних и внешних факторов, характерная черта живого типа организации. Поведение имеет огромное приспособительное значение, позволяя животным избегать негативных факторов окружающей среды.

Поправка – значение величины, вводимое в неисправленный результат измерения с целью исключения составляющих систематической погрешности.

Правила – указания, что следует делать в конкретной ситуации.

Предельные издержки – прирост издержек, связанный с выпуском дополнительной единицы продукции.

Предотвращение риска – решение не быть вовлеченным в рискованную ситуацию или действие, предупреждающее вовлечение в нее. Решение может быть принято на основе результатов оценивания риска.

Предприниматель – лицо или группа лиц, осуществляющих предпринимательскую деятельность.

Предпринимательство (предпринимательская деятельность) – это инициативная, самостоятельная деятельность граждан, направленная на получение прибыли или личного дохода, осуществляемая от своего имени, на свой риск и под свою имущественную ответственность или от имени и под имущественную ответственность юридического лица-предприятия.

Предупреждающее действие – действие, предпринятое для устранения причины потенциального несоответствия или другой потенциально нежелательной ситуации.

Предупреждение ошибок – использование особенностей процесса или проекта для предотвращения приемки или последующей обработки несоответствующей продукции.

Признание – достижение поставленных целей в задуманном деле, положительный результат чего-либо, общественное признание чего-либо или кого-либо.

Проблема – (древне-греческое – *πρόβλημα*) – в широком смысле сложный теоретический или практический вопрос, требующий изучения, разрешения; в науке – противоречивая ситуация, выступающая в виде противоположных позиций в объяснении каких-либо явлений, объектов, процессов и требующая адекватной теории для ее разрешения. Важной предпосылкой успешного решения проблемы служит ее правильная постановка. Неверно поставленная проблема или псевдопроблема уведат в сторону от разрешения подлинных проблем.

Проект – программа деятельности по созданию (совершенствованию) какой-либо системы в соответствии с намеченными целями – концепция проекта; документ, пакет документов; замысел, предполагающий обоснование и реализацию.

Проектирование – процесс разработки полного комплекта проектной документации, необходимой и достаточной для принятия проекта заказчиком: от разработки концепции проекта до управления приемкой-сдачей-пуском объекта, закрытия контракта и сдачи его в архив.

Процесс принятия решений – последовательная реализация этапов: диагноз проблемы; формулировка ограничений и критериев для принятия решения; выявление альтернатив; оценка альтернатив; окончательный выбор.

Р

Решение, основанное на суждении – выбор, обусловленный знаниями или накопленным опытом. Человек использует знание о том, что случилось в сходных ситуациях ранее, чтобы спрогнозировать результат альтернативных вариантов выбора в существующей ситуации. Опираясь на здравый смысл, он выбирает альтернативу, которая принесла успех в прошлом. Такие решения иногда кажутся интуитивными, поскольку логика их не очевидна.

Риск – сочетание вероятности события и его последствий.

С

Самооценка – совокупность операций, осуществляемых в зависимости от видения предприятия и включающих набор номенклатуры показателей качества, определение численных значений этих показателей по сравнению с базовыми (стандартными, конкурентными, эталонными и т.п.). Для проведения процедуры самооценки используется единая мера, или шкала, в которой соизмеряются различные сочетания показателей.

Сегментация рынка – разделение рынка на отдельные сегменты по какому-либо признаку (тип валюты, страна, регион, отрасль, однородные группы потребителей, группы индивидуальных потребителей, выделенных по социальным признакам, платежеспособности, мотивам, культуре, религиозным традициям).

Случайность – объективная, как правило, сложная по своей внешней природе, маловероятная связь.

Событие – возникновение специфического набора обстоятельств, при которых происходит явление. Событие может быть определенным или неопределенным. Событие может быть единичным или многократным. Вероятность, связанная с событием, может быть оценена для данного интервала времени.

Способность – это индивидуальные свойства личности, являющиеся субъективными условиями успешного осуществления определенного рода деятельности. Способности не сводятся к имеющимся у индивидуума знаниям, умениям, навыкам. Они обнаруживаются в быстроте, глубине и прочности овладения способами и приемами некоторой деятельности и являются внутренними психическими регулятивами, обуславливающими возможность их приобретения.

Т

Тендер – предложение на разработку какого-либо проекта, продукции, на поставку товаров, оказание услуг, строительство объекта при проведении торгов. Условия разрабатываются организаторами торгов и направляются вероятным участникам. Предприятия, согласные участвовать в торгах и получившие форму тендера, заполняют ее, указывая свои цены, и направляют его вместе с другими требующимися документами организаторам торгов. После тщательной проверки и сопоставления условий поступивших тендеров какой-то из них принимается и соответствующему поставщику (оференту) направляется извещение.

У

Успех – достижение поставленных целей в задуманном деле, положительный результат чего-либо, общественное признание чего-либо или кого-либо.

Учет – упорядоченная система сбора, регистрации и обобщения информации, в денежном выражении о состоянии имущества, обязательств организации и их изменениях (движении денежных средств) путем сплошного, непрерывного и документального учета всех хозяйственных операций.

Ф

Формализация – выделение и позиционирование элементов и связей.

Ц

Целенаправленность – ориентация организации на цель. Цель – субъективное, желаемое, достижимое, необходимое состояние процесса или системы.

Цели – конкретные конечные состояния или желаемый результат, которого стремится добиться группа, работая вместе.

Э

Эффективность принятия решения – 1) мера полезности, относительный результат цены экономического риска от выбранного варианта решения маркетинговой задачи из множества рассматриваемых (возможных) альтернатив; 2) способность выбранного варианта решения маркетинговой задачи приносить экономический эффект.

Эффективный – термин, используемый для описания процесса, который функционирует результативно, потребляя в то же время минимальное количество ресурсов (таких, как рабочая сила и время). Отношение выхода к совокупному входу процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Красс, М.С. Математика в экономике. Основы математики : учебник / М.С. Красс. – М. : БФК-ПРЕСС, 2005. – 472 с.
2. Гранберг, А.Г. Математические модели экономики (Общие принципы моделирования и статические модели народного хозяйства) / А.Г. Гранберг. – М. : Экономика, 1989. – 351 с.
3. Романов, А.П. Стратегическое управление промышленным предприятием : учебное пособие / А.П. Романов, И.А. Жариков, В.А. Каряев. – Тамбов, 2008. – 167 с.
4. Как создаются коммерчески успешные товары и услуги: маркетинг и нововведение / Д.И. Баркан, С.В. Валдайцев, В.А. Долбежкин и др. – Л. : Аквилон, 1991.
5. Беренс, В. Руководство по оценке эффективности инвестиций / В. Беренс, П.М. Хавранек. – М. : Интерэксперт, 1995.
6. Завлин, П.Я. Инновационная деятельность в условиях рынка / П.Я. Завлин, А.А. Ипатов, А.С. Кулагин. – СПб. : Наука, 1994.
7. Карганов, С.А. Создание и внедрение научно-технической продукции / С.А. Карганов. – СПб. : Наука, 1999.
8. Новицкий, Н.И. Организация производства на предприятиях / Н.И. Новицкий. – М. : Финансы и статистика, 2002.
9. Солдак, Ю.М. Производственные системы: организация и перспективы развития / Ю.М. Солдак. – М. : Машиностроение, 1993.
10. Экономика и бизнес (теория и практика предпринимательства) / под ред. В.Д. Камаева. – М. : Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. – 463 с.
11. Зайцев, Н.Л. Экономика, организация и управление предприятием : учебное пособие / Н.Л. Зайцев. – М. : ИНФРА-М, 2005. – 491 с.
12. Романов, А.П. Стратегический менеджмент : учебное пособие / А.П. Романов, И.А. Жариков. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006.
13. Автоматизированные информационные технологии в экономике / под ред. проф. Г.А. Титоренко. – М. : ЮНИТИ, 1998.
14. Автоматизированные информационные технологии в экономике / под ред. И.Т. Трубилина. – М. : Финансы и статистика, 1999.
15. Информационные технологии в маркетинге : учебник / под ред. проф. Г.А. Титоренко. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000.
16. Карминский, А.М. Информатизация бизнеса / А.М. Карминский, П.В. Нестеров. – М. : Финансы и статистика, 1997.

17. Корнеев, И.К. Информационные технологии в управлении / И.К. Корнеев, Т.А. Година. – М. : Финстагинформ, 1999.

18. Основы инновационного менеджмента. Теория и практика : учебник / Л.С. Барютин и др. ; под ред. А.К. Казанцева, Л.Э. Миндели. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Экономика, 2004. – 518 с.

Журналы (2002 –2012)

19. Вестник молодых ученых.
20. Вопросы экономики.
21. Деньги и кредит.
22. Информационные ресурсы России.
23. Менеджмент в России и за рубежом.
24. Методы менеджмента качества.
25. Проблемы теории и практики управления.
26. Российский экономический журнал.
27. Вестник Тамбовского государственного технического университета.
28. Финансы.
29. Экономист.

Учебное издание

**ЖАРИКОВ Игорь Алексеевич,
ЖАРИКОВ Илья Игоревич,
ЕВСЕЙЧЕВ Анатолий Игоревич**

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИГР

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Компьютерное макетирование М.А. Евсейчевой

Подписано в печать 12.07.2012.
Формат 60 × 84 / 16. 4,65 усл. печ. л. Заказ № 402

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14

Учебное издание

**ЖАРИКОВ Игорь Алексеевич,
ЖАРИКОВ Илья Игоревич,
ЕВСЕЙЧЕВ Анатолий Игоревич**

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИГР

Учебное пособие

Редактор З.Г. Чернова
Компьютерное макетирование М.А. Евсейчевой

Подписано в печать 12.07.2012.
Формат 60 × 84 / 16. 4,65 усл. печ. л. Заказ № 402

Издательско-полиграфический центр
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14