

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Тамбовский государственный технический университет»

Д.Ю. Муромцев, Ю.Т. Зырянов, П.А. Федюнин,  
О.А. Белоусов, А.В. Рябов, Е.В. Головченко

# ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

*Рекомендовано Учебно-методическим объединением по образованию  
в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и  
автоматизации в качестве учебного пособия*



---

Тамбов  
Издательство ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
2012

УДК 537.8 (075.8)

ББК 3841я73

Э455

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор кафедры «Радиотехнические системы  
(и обеспечение полетов)» ВУНЦ ВВС Военно-воздушной академии  
им. проф. Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина

*И.В. Милосердов*

Доктор технических наук, профессор кафедры «Радиотехника»  
ФГБОУ ВПО «ТГТУ»

*А.В. Иванов*

Авторский коллектив:

*Д.Ю. Муромцев, Ю.Т. Зырянов, П.А. Федюнин,*

*О.А. Белоусов, А.В. Рябов, Е.В. Головченко*

Э455 Электродинамика и распространение радиоволн : учебное пособие / Д.Ю. Муромцев, Ю.Т. Зырянов, П.А. Федюнин и др. – Тамбов : Изд-во ФГБОУ ВПО «ТГТУ», 2012. – 200 с. – 100 экз. – ISBN 978-5-8256-1146-6.

Рассмотрены основные уравнения и положения электродинамики, возбуждаемые электромагнитные волны в неограниченном пространстве, их характеристики и параметры, рассматриваются вопросы теории направляемых электромагнитных волн и особенности построения и практического применения фидерных трактов и колебательных СВЧ-устройств различных типов в существующих и перспективных образцах радиотехнических систем, рассмотрены вопросы теории распространения радиоволн в свободном пространстве.

Предназначено для бакалавров, специалистов, магистрантов, обучающихся по направлениям 210400 «Радиотехника», 211000 «Конструирование и технология электронных средств», 210700 «Инфокоммуникационные технологии и системы связи», 210201 «Проектирование и технология радиоэлектронных средств» очной и заочной форм обучения.

УДК 537.8 (075.8)

ББК 3841я73

**ISBN 978-5-8256-1146-6**

© Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Тамбовский государственный технический университет» (ФГБОУ ВПО «ТГТУ»), 2012

## ВВЕДЕНИЕ

---

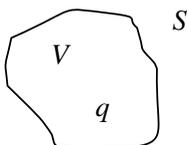
---

В радиотехнике, радиолокации, связи и многих других областях современной техники используются электромагнитные явления и процессы, а также устройства, в которых эти процессы и явления играют существенную роль: передающие и приемные антенны, различные линии передачи электромагнитной энергии, объемные резонаторы и фильтры, делители мощности и т.д. В курсе «Электродинамика и распространение радиоволн» изучаются теоретические основы электромагнетизма: основные уравнения, описывающие электромагнитные явления, процессы излучения и распространения электромагнитных волн в различных средах и направляющих системах. Вторая часть курса посвящена вопросам, связанным с распространением радиоволн по естественным трассам. Рассматривается влияние Земли, тропосферы и ионосферы на распространение радиоволн. По существу, данный курс является базовым при изучении специальных дисциплин программы подготовки специалистов, бакалавров, магистров в области радиотехники, радиофизики, современных телекоммуникационных систем.

# 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

## 1.1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

### 1.1.1. Электростатическое поле заряда. Закон Кулона



**Рис. 1.1.1. Определение электростатического поля заряда**

Пусть в некотором объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ , сосредоточен совокупный электрический заряд  $q$ , так как диаметр электрона как элементарного отрицательного заряда составляет порядка  $5,6 \cdot 10^{-13}$  см, то даже в самом малом объеме, который доступен наблюдателю, содержится большое число элементарных зарядов (рис. 1.1.1). Можно считать, что в рассматриваемом объеме  $V$  элементарные заряды распределены не дискретно, а непрерывно с **объемной плотностью**

$$\rho = \frac{dq}{dV}, \text{ [Кл/м}^3\text{]}. \quad (1.1.1)$$

Если совокупный заряд  $q$  распределен по поверхности  $S$ , то говорят о **поверхностной плотности** зарядов

$$\sigma = \frac{dq}{dS}, \text{ [Кл/м}^2\text{]}. \quad (1.1.2)$$

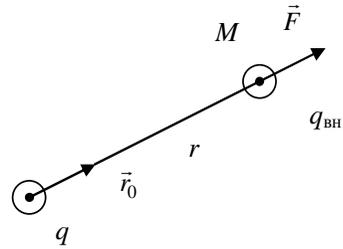
Иногда бывают заданы законы распределения величин  $\rho$  и  $\sigma$ , тогда совокупный заряд  $q$  определяется как

$$q = \int_V \rho dV, \text{ [Кл]}; \quad (1.1.3)$$

$$q = \int_S \sigma dV, \text{ [Кл]}. \quad (1.1.4)$$

В самом простом случае совокупный заряд  $q$  характеризуется постоянством во времени, т.е.  $dq/dt = 0$  и неподвижностью в пространстве  $v = 0$ , где  $v$  – скорость перемещения совокупного заряда  $q$ . Такой заряд создает так называемое **электростатическое поле**. Рассмотрим его.

**Закон Кулона.** Пусть два неподвижных, постоянных во времени точечных заряда разнесены в пространстве (в вакууме) на расстояние  $r$  (рис. 1.1.2). Понятие «точечный заряд» условно. Говоря о точечных зарядах предполагают, что размеры тел, на которых распределены заряды  $q$  и  $q_{\text{вн}}$ , значительно меньше расстояния  $r$ . Взаимодействие между зарядами характеризуется законом Ш. Кулона (1785 г.) в вакууме

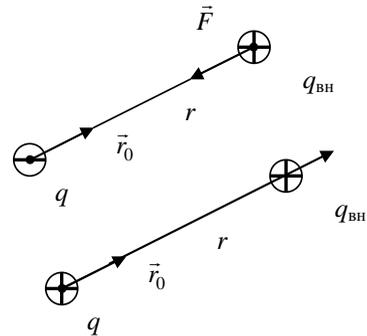


**Рис. 1.1.2. Силовые линии точечного заряда**

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot q_{\text{вн}}}{r^2} \vec{r}_0, \text{ [Н] или [Кл}\cdot\text{В/М]}, \quad (1.1.5)$$

где  $\epsilon_0 = 1/36\pi \cdot 10^{-9}$  [Ф/М] – электрическая постоянная.

Единичный вектор  $\vec{r}_0$  ориентирован от источника силового поля  $\vec{F}$ , т.е. заряда  $q$  к точке наблюдения  $M$ , (заряду  $q_{\text{вн}}$ ). Если заряд  $q$  и  $q_{\text{вн}}$  одного знака, то сила  $\vec{F}$ , действующая на заряд  $q_{\text{вн}}$ , будет совпадать с вектором  $\vec{r}_0$ , т.е. будет наблюдаться отталкивание зарядов. Если заряды разного знака, они будут притягиваться (рис. 1.1.3).



**Рис. 1.1.3. Силовые линии точечных зарядов разных зарядов**

### 1.1.2. Напряженность электрического поля. Потенциал

Для характеристики силового воздействия поля заряда  $q$  вводится понятие напряженности электростатического поля как силы, действующей на единичный положительный заряд  $q_{\text{вн}}$

$$\vec{E} = \vec{F} / q_{\text{вн}}, \text{ [В/М]} \quad (1.1.6)$$

или с учетом выражения (1.1.5)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{r}_0, \text{ [В/М]}. \quad (1.1.7)$$

Учитывая сказанное выше, можно показать, что вектор  $\vec{E}$  всегда направлен от положительного заряда к отрицательному заряду или в бесконечность.

Электрическое поле, созданное зарядом  $q$  в окружающем пространстве, имеет силовую и энергетическую характеристики (напряженность поля  $\vec{E}$  и потенциал  $\varphi$ ).

Это основной параметр, описывающий электромагнитное поле в точке, где находится приемник. От величины напряженности электрического поля полезного сигнала в точке приема зависит работоспособность радиотехнических средств.

**Свойства поля точечного заряда.** Сначала вспомним некоторые разделы математики, которые потребуются нам в будущем.

1. *Градиент* скалярной функции  $\varphi(r)$  – векторная величина, определяемая как

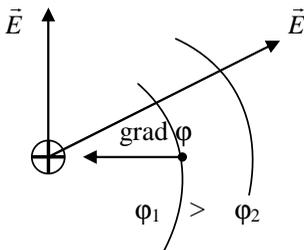
$$\text{grad } \varphi(r) = \nabla \varphi = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}, \quad (1.1.8)$$

где  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$  – оператор  $\nabla$  (набла) в прямоугольной системе координат.

Другими словами, градиент скалярной функции  $\varphi(r)$  в любой точке  $M(r)$  есть вектор, нормальный к поверхности уровня в данной точке и направленный в сторону наибольшего возрастания функции (рис. 1.1.4), численно равный ее производной по нормали к поверхности, т.е.

$$\text{grad } \varphi(r) = \frac{\partial}{\partial n} \vec{n}_0.$$

Иными словами это вектор, показывающий направление и величину наибольшего возрастания функции.



**Рис. 1.1.4.** Градиент скалярной функции

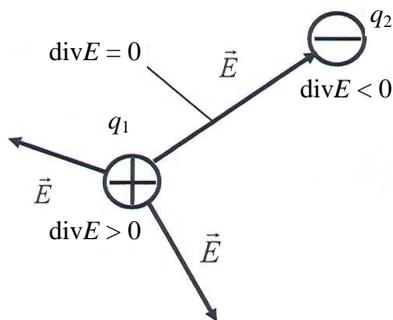
2. *Дивергенция* векторной функции  $\vec{E}(r)$  – скалярная величина, определяемая как

$$\text{div } \vec{E} = \nabla \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}. \quad (1.1.9)$$

Геометрический смысл дивергенции заключается в том, что дивергенция (расходимость) поля есть предел отношения потока векторного поля через замкну-

тую поверхность, окружающую данную точку  $M$ , к объему  $V$ , ограниченному этой поверхностью, когда она стягивается к точке. Таким образом, *дивергенция* векторной функции  $\vec{E}(r)$  – скаляр (число), описывающий источники и стоки поля.

Если дивергенция отлична от нуля, то физически это значит, что в рассматриваемой точке имеются источники поля ( $\text{div}\vec{E} > 0$ ) или его стоки ( $\text{div}\vec{E} < 0$ ). Если  $\text{div}\vec{E} = 0$ , то в рассматриваемой точке поля отсутствуют источники и стоки поля (рис. 1.1.5).



**Рис. 1.1.5. Дивергенция векторной функции**

3. *Ротор (вихрь)* векторной функции  $\vec{E}(r)$  есть векторная величина, определяемая как

$$\text{rot}\vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix}. \quad (1.1.10)$$

*Ротор характеризует степень завихренности векторного поля в точке  $M(r)$ .*

Вихревые линии любого векторного поля обладают тем свойством, что они нигде не начинаются и нигде не кончаются, так как

$$\text{div}\text{rot}\vec{E} = 0.$$

Чтобы определить свойства электростатического поля, описываемого равенством (1.1.7), необходимо определить дифференциальные характеристики поля в точке:  $\text{rot}\vec{E}$ ,  $\text{div}\vec{E}$ . Если в каждой точке поля:

$$\text{rot}\vec{E} \begin{cases} = 0 - \text{поле потенциальное} \\ \neq 0 - \text{поле вихревое.} \end{cases}$$

Если в каждой точке поля:

$$\text{div}\vec{E} \begin{cases} = 0 - \text{поле соленоидальное, т.е. замкнутое} \\ \neq 0 - \text{поле не соленоидальное.} \end{cases}$$

Для получения  $\text{rot}\vec{E}$  и  $\text{div}\vec{E}$  представим выражение (1.1.7) в виде

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r} = f(r)\vec{r}, \quad (1.1.11)$$

где  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .

После соответствующих вычислений получим, что для электростатического поля одиночного заряда вне его

$$\text{rot}\vec{E} = 0, \quad \text{div}\vec{E} = 0. \quad (1.1.12)$$

Это означает:

1. Из первого равенства следует, что поле потенциальное, вектор  $\vec{E}$  является градиентом скалярного поля, называемого *потенциалом*  $\phi$  электростатического поля, т.е.

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi. \quad (1.1.13)$$

2. В потенциальном поле работа сил поля по перемещению вносимого заряда определяется только разностью потенциалов исходной и конечной точек, и не зависит от формы пути.

3. Поле соленоидальное, т.е. в точках, не принадлежащих области  $V$  линии напряженности электростатического поля непрерывны, а это значит, что в этих точках источники поля отсутствуют.

Теперь остановимся более подробно на равенстве (1.1.13).

**Потенциал электростатического поля.** Установлено, что в электростатическом поле имеет место равенство (1.1.13). Определим выражение для  $\phi$ . Так как  $\vec{E} = f(r)$ , то предположим, что  $\phi = f(r)$ , тогда

$$\text{grad} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} \vec{k} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{r}, \quad (1.1.14)$$

где  $r_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Поскольку выражение для  $\vec{E}$  известно, приравнявая выражения (1.1.7) и (1.1.14) и найдя первообразную, определим  $\phi$  как

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad [\text{В}]. \quad (1.1.15)$$

Знак «-» в выражении (1.1.13) учитывает, что вектор  $\vec{E}$  направлен от «+» к «-», а  $\text{grad } \varphi$  направлен в сторону увеличения потенциала. Линии равных потенциалов (эквипотенциали) образуют своеобразные энергетические уровни.

### 1.1.3. Поле системы зарядов. Электрический диполь

Пусть имеется система, состоящая из  $N$  зарядов. Поле в точке  $M$  будет определяться как векторная сумма полей каждого из зарядов

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^N \vec{E}_n, \quad (1.1.16)$$

а потенциал, соответственно,

$$\varphi = \sum_{n=1}^N \varphi_n. \quad (1.1.17)$$

Рассмотрим простейший случай системы зарядов. Электрически нейтральный атом и молекула при появлении электрического поля поляризуется, т.е. происходит смещение отрицательно заряженных частиц (электронов) против внешнего поля, а положительно заряженных ядер – вдоль, т.е. электрически нейтральная частица становится диполем (рис. 1.1.6).

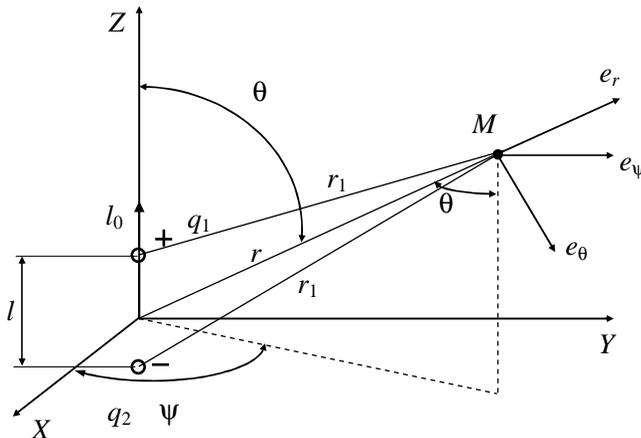


Рис. 1.1.6. Система зарядов

В сферической системе координат рассмотрим систему, состоящую из двух различных зарядов, отстоящих на расстоянии  $l$  друг от друга.

В соответствии с выражением (1.1.17), определим потенциал в точке  $M$ . Запишем

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (1.1.18)$$

Оговоримся, что  $M$  удалена от частицы на расстояние  $r \gg l$ , тогда лучи  $r_1, r_2, r$  можно считать параллельными, а это значит, что

$$r_2 = r - l/2 \cos\theta, \quad r_1 = r + l/2 \cos\theta. \quad (1.1.19)$$

Подставляя выражение в (1.1.18), и считая, что  $(l/2 \cos\theta)^2 \ll r^2$ , получим,

$$\varphi = \frac{ql \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \quad (1.1.20)$$

Произведение  $q$  на  $l$  определяет модуль электрического момента диполя и является величиной векторной, направленной от « $-q$ » к « $+q$ »:

$$\vec{P} = ql\vec{l}_0, \quad (1.1.21)$$

где  $\vec{l}_0$  – единичный вектор. Для того, чтобы записать выражение для вектора  $\vec{E}$  в сферической системе координат, вспомним, что

$$\text{grad } \varphi = \frac{d\varphi}{dr} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{d\theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{d\varphi}{d\psi} \vec{e}_\psi,$$

и учитывая, что  $\varphi = f(\theta, r)$  запишем

$$\vec{E} = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta), \quad [\text{В/м}]. \quad (1.1.22)$$

#### 1.1.4. Теорема Остроградского–Гаусса, материальные уравнения

Пусть заряды расположены в некотором объеме не дискретно, как было в предыдущем случае, а непрерывно с объемной плотностью  $\rho$ . В этом случае потенциал в точке  $M$ , если использовать выражения (1.1.3) и (1.1.15), запишется

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho}{r} dV, \quad (1.1.23)$$

а  $\vec{E} = -\text{grad}\phi$ ,  $\text{rot}\vec{E} = 0$ ,  $\text{div}\vec{E} = 0$  для точек поля, не принадлежащих области  $V$ .

Во всех предыдущих случаях мы рассматривали ситуацию, когда по известному распределению заряда определялось поле – так называемая прямая задача. Иногда необходимо решать обратную задачу – найти закон распределения заряда по заданному полю.

**Поле объемных зарядов.** Пусть в объеме  $V$  распределен электрический заряд  $q$  с объемной плотностью  $\rho$ . Известно электростатическое поле, создаваемое этим зарядом. Определить закон распределения заряда в области  $V$ . Окружим  $V$  замкнутой поверхностью  $S$ . Для этого обратимся к **закону Гаусса**

$$\oint_S \vec{E} dS = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (1.1.24)$$

согласно которому **поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность  $S$ , охватывающую совокупный заряд  $q$ , пропорционален величине этого заряда.**

С учетом соотношения (1.3)  $q = \int_V \rho dV$  закон Гаусса можно записать

$$\oint_S \vec{E} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV. \quad (1.1.25)$$

Обратимся к **теореме Остроградского–Гаусса**, которая непосредственно вытекает из определения дивергенции и согласно которой

$$\oint_S \vec{E} dS = \int_V \text{div}\vec{E} dV \quad (1.1.26)$$

**поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность, ограничивающую объем  $V$ , равен расхождению поля из этого объема.**

Приравниваем левые части равенств (1.1.24) и (1.1.25)

$$\int_V \text{div}\vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV, \quad (1.1.27)$$

откуда

$$\text{div}\vec{E} = \rho / \epsilon_0. \quad (1.1.28)$$

Данное уравнение дает возможность решать обратную задачу. Если известен закон изменения потенциала  $\phi$ , уравнение (1.1.28) принимает вид:

$$\operatorname{div}(-\operatorname{grad}\phi) = \rho / \epsilon_0, \text{ – уравнение Пуассона,} \quad (1.1.29)$$

иначе записывается

$$\nabla^2\phi = -\rho / \epsilon_0, \text{ или } \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\rho / \epsilon_0.$$

При нулевой правой части, т.е. для точек вне рассматриваемого объема уравнение приобретает вид уравнения Лапласа. Решение уравнения (1.1.29) имеет вид (1.1.23).

**Электростатическое поле в диэлектрике.** (Электрическая индукция). Материальные уравнения.

Все предыдущие рассуждения проводились для случая, когда заряд находится в вакууме. Рассмотрим реальный случай, когда окружающая среда – *диэлектрик*.

При внесении в электростатическое поле с вектором напряженности  $\vec{E}$  диэлектрика, в последнем наблюдается явление поляризации. Физическая сторона этого явления следующая: диэлектрик содержит в себе «связанные» заряды, т.е. связанные с данным веществом молекулярными силами и неотделимые от него.

При воздействии внешнего поля связанные заряды диэлектрика перемещаются так, что их собственное поле  $\vec{E}_{CB}$  компенсирует действие внешнего поля  $\vec{E}'$ . Результирующее поле

$$\vec{E} = \vec{E}' + \vec{E}_{CB}. \quad (1.1.30)$$

Поскольку поле связанных зарядов вызвано потенциальным полем, то и оно, и результирующее поле, потенциальны, т.е.

$$\operatorname{rot}\vec{E}' = 0; \quad \operatorname{rot}\vec{E}_{CB} = 0; \quad \operatorname{rot}\vec{E} = 0;$$

$$\operatorname{div}\vec{E}' = \rho / \epsilon_0; \quad \operatorname{div}\vec{E}_{CB} = \rho_{CB} / \epsilon_0 = -\frac{1}{\epsilon_0} \operatorname{div}\vec{P},$$

где  $\vec{P}$  – вектор электрической поляризации или поляризованность единицы объема вещества.

Выясним, чему равно расхождение вектора (электрические заряды не только создают электростатическое поле в окружающем их пространстве, но и поляризуют его).

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E}' + \operatorname{div} \vec{E}_{CB} = \rho / \epsilon_0 - \operatorname{div} \vec{P} / \epsilon_0 \quad \text{или} \quad \operatorname{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho. \quad (1.1.31)$$

Выражение  $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \vec{D}$  – вектор электрической индукции или вектор электрического смещения.

Таким образом

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho. \quad (1.1.32)$$

Для линейных (*линейной* называется среда, свойства которой не зависят от величины напряженности поля (воздух, фторопласт), *однородная* – параметры среды  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  одинаковы во всех ее точках, *изотропная* – физические свойства ее одинаковы по всем направлениям в каждой точке) однородных изотропных сред справедливо

$$\vec{P} = k_{\text{э}} \epsilon_0 \vec{E}, \quad (1.1.33)$$

где  $k_{\text{э}}$  – диэлектрическая восприимчивость вещества;  $k_{\text{э}} \epsilon_0$  – абсолютная восприимчивость.

Подставляя (1.1.32) в выражение для  $\vec{D}$ , получим

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + k_{\text{э}}) \vec{E}, \quad (1.1.34)$$

где  $1 + k_{\text{э}} = \epsilon$  – относительная диэлектрическая проницаемость среды;  $\epsilon \epsilon_0 = \epsilon_a$  – абсолютная диэлектрическая проницаемость среды.

Тогда

$$\vec{D} = \epsilon_a \vec{E}, \quad [\text{Кл/м}^2]. \quad (1.1.35)$$

Уравнения (1.1.34), (1.1.35) называются материальными уравнениями. Они описывают макроскопические свойства веществ при воздействии на них электромагнитных полей.

### 1.1.5. Энергия электростатического поля

Электростатическое поле зарядов, распределенных с объемной плотностью  $\rho$  в объеме  $V$ , обладает запасом энергии

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV, \quad [\text{Дж}] \quad (1.1.36)$$

или

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \int_V \vec{E} \vec{D} dV, \quad [\text{Дж}]. \quad (1.1.37)$$

Последнее выражение показывает, что энергия электростатического поля распределена в пространстве, окружающем объем  $V$ , причем объемная плотность энергии равна

$$w_{\text{э}} = \frac{dW_{\text{э}}}{dV} = \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D}, \text{ [Дж/м}^3\text{]} \quad (1.1.38)$$

для изотропной среды

$$w_{\text{э}} = \varepsilon_a E^2 / 2, \text{ [Дж/м}^3\text{]}. \quad (1.1.39)$$

## 1.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

### 1.2.1. Постоянный электрический ток. Вектор плотности тока

*Постоянный электрический ток* – упорядоченное движение электрически заряженных частиц.

Рассмотрим некоторый проводник и выделим в нем объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Если величина заряда внутри этого объема  $q$  меняется во времени, то согласно закону сохранения заряда это может происходить за счет того, что заряженные частицы пересекают поверхность  $S$ , т.е. через границу  $S$  течет ток.

*Сила тока* – скорость изменения заряда  $q$  в объеме  $V$  со временем, взятая с обратным знаком

$$I = - \frac{dq}{dt}. \quad (1.2.1)$$

Знак « $\rightarrow$ » означает, что ток направлен против движения электронов.

**Вектор плотности тока.** Так как сила тока  $I$  – скаляр, она не дает исчерпывающей информации об электрическом токе. Введем понятие вектора плотности электрического тока проводимости  $\vec{j}$  или плотности

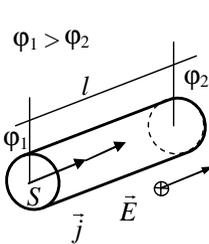


Рис. 1.2.1. К определению плотности тока

тока  $\vec{j} = \frac{dI}{dS}$ .

1. Ориентация  $\vec{j}$  совпадает с направлением движения положительных зарядов, т.е. совпадает с вектором  $\vec{E}$  внешнего поля.

2. Модуль  $\vec{j}$  равен силе тока положительных зарядов, пересекающих единичную поверхность, перпендикулярную направлению их движения (рис. 1.2.1).

### 1.2.2. Закон Ома в дифференциальной форме. Уравнение непрерывности

#### Закон Ома в дифференциальной форме для участка цепи.

Определим связь между вектором плотности  $\vec{j}$  и вектором напряженности  $\vec{E}$  в точке. Рассмотрим прямолинейный участок внешней электрической цепи в виде однородного проводника постоянного сечения. Модуль  $\vec{j}$  равен  $j = I/S$ , откуда

$$I = jS. \quad (1.2.2)$$

Сопrotивление проводника  $R$  равно  $R = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S}$ , где  $\gamma$  – удельная проводимость [См/м]. Тогда

$$I = \frac{U}{R} = (\varphi_1 - \varphi_2) / R. \quad (1.2.3)$$

Но  $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_j \vec{E} dl = El$ , откуда  $I = \frac{El\gamma S}{l} = E\gamma S$ . Тогда (1.2.3)

можно записать в виде  $jS = El\gamma S / l$ , или

$$j = \gamma E; \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}. \quad (1.2.4)$$

Эти выражения – **закон Ома** в дифференциальной форме для участка внешней цепи.

**Закон Ома для полной цепи.** Если рассматривать всю замкнутую цепь, ток направлен от отрицательного электрода к положительному, против электрического поля, т.е. в пространстве между этими электродами закон Ома (1.2.4) не выполняется. Это может иметь место только в том случае, если имеется какая-либо дополнительная сторонняя причина, заставляющая двигаться частицы в сторону, противоположную действию электрического поля. Такой причиной является стороннее электрическое поле  $\vec{E}^{\text{стор}}$ , которое обусловлено действием внешних причин, не связанных с электрическими зарядами. Эти причины могут быть механического, химического, теплового или иного происхождения. В этом случае **закон Ома** запишется

$$\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стор}}). \quad (1.2.5)$$

Выясним характер стороннего поля  $\vec{E}^{\text{стор}}$ , для чего рассмотрим циркуляцию векторов плотности тока проводимости по контуру  $l$ , включающему внутренние и внешние цепи. Проинтегрируем (1.2.5) по « $dl$ ».

$$\frac{1}{\gamma} \int_l \vec{j} dl = \int_l (\vec{E} + \vec{E}^{\text{стор}}) dl. \quad (1.2.6)$$

Так как поле  $\vec{E}$  постоянного тока потенциально, т.е.  $\text{rot} \vec{E} = 0$ ,  $E = -\text{grad} \phi$ , то первый член в правой части этого равенства (1.2.6) равен нулю. Учтем, что полное сопротивление контура  $R = R_{\text{вн}} + R_{\text{внеш}}$ . Тогда

$$\frac{1}{\gamma} j l = \frac{I}{\gamma S} l = IR = I(R_{\text{вн}} + R_{\text{внеш}}) = \varepsilon$$

и

$$\int_l \vec{E}^{\text{стор}} dl = \varepsilon [\mathbf{B}]. \quad (1.2.7)$$

Этот результат показывает, что циркуляция вектора напряженности стороннего электрического поля по замкнутому контуру отлична от нуля, из чего следует вывод, что это поле не может быть потенциальным и является вихревым, т.е.  $\text{rot} \vec{E}^{\text{стор}} \neq 0$ .

Уравнение  $\varepsilon = \int_l \vec{E}^{\text{стор}} dl = I(R_{\text{вн}} + R_{\text{внеш}})$  представляет собой **закон**

**Ома для полной цепи** (закон Ома в интегральной форме).

**Уравнение непрерывности.** (Закон сохранения заряда в дифференциальной форме).

Изменение заряда в объеме  $V$ , ограниченного поверхностью  $S$ , определяется силой тока  $I$

$$I = -\frac{\partial q}{\partial t} \quad \text{или} \quad I = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (1.2.8)$$

Данное выражение устанавливает связь между интегральными характеристиками – силой тока и совокупным электрическим зарядом  $q$  в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ .

Установим подобную связь в дифференциальной форме, т.е. в точке – связь между плотностью тока  $\vec{j}$  и объемной плотностью заряда  $\rho$ .

Исходя из определения плотности тока проводимости  $\vec{j}$ , можно записать  $I = \int_S \vec{j} dS$ , или согласно теореме Гаусса–Остроградского

$$I = \int_S \vec{j} dS = \int_V \text{div} \vec{j} dV. \quad (1.2.9)$$

Приравняем правые части (1.2.8) и (1.2.9) и получим

$$\int_V \operatorname{div} \vec{j} dV = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV, \quad (1.2.10)$$

$$\operatorname{div} \vec{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Это дифференциальное уравнение в частных производных называется **уравнением непрерывности** и может рассматриваться как математическая формулировка закона *сохранения заряда* для бесконечно малого объема. В общем случае это уравнение показывает, что расхождение вектора плотности тока проводимости отлично от нуля только там, где имеется изменяющийся во времени заряд, который определяется объемной плотностью  $\rho$ .

Так для постоянного тока  $\rho = \operatorname{const}$   $\operatorname{div} \vec{j} = 0$ , что говорит о том, что линии постоянного тока замкнуты. Из этого выражения может быть получен 1-й закон Кирхгофа, согласно которому сумма токов в проводниках, сходящихся к разветвлению, равна нулю.

### 1.2.3. Закон Ампера. Магнитная индукция

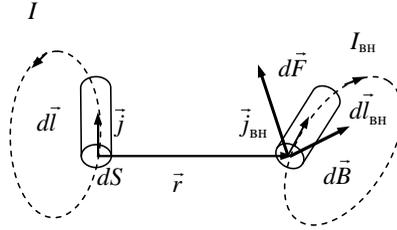
Подобно тому, как вокруг неподвижных зарядов существует электрическое поле, вокруг проводников с током или движущихся зарядов существует магнитное поле.

Свойства магнитного поля рассмотрим для случая постоянного тока.

Пусть в вакууме расположены два элемента тока  $d\vec{l}$ . Под элементом тока понимают тонкий отрезок проводника с током, длина которого значительно меньше расстояния до точки наблюдения, а направление совпадает с направлением вектора плотности тока. Все обозначения известны, кроме  $d\vec{l}$  – вектора элемента тока, совпадающего с направлением вектора плотности тока  $\vec{j}$  (рис. 1.2.2). Согласно *закону Ампера* первый элемент тока будет действовать на внешний элемент тока с силой

$$d\vec{F} = I_{\text{вн}} d\vec{l}_{\text{вн}} \times \left[ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \right], \quad [\text{Н}], \quad (1.2.11)$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  [Гн/м] – магнитная проницаемость среды (вакуума).



**Рис. 1.2.2. Взаимное влияние двух элементов**

Выражение в квадратных скобках характеризует силовое действие элемента тока  $d\vec{l}$  на единичный вносимый элемент тока  $d\vec{l}_{BH}$  и определяет, согласно закону Био-Савара-Лапласа, вектор магнитной индукции

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad [\text{Вб/м}^2]. \quad (1.2.12)$$

Для контура постоянного тока длиной  $L$  и сечением  $S$  вектор магнитной индукции в любой точке пространства определяется

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV. \quad (1.2.13)$$

Можно показать, что

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}, \quad (1.2.14)$$

где  $\vec{A}$  – векторный потенциал магнитного поля, равный

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}}{r} dV; \quad (1.2.15)$$

аналогично тому, как было показано для скалярного потенциала электростатического поля, для вектора  $\vec{A}$  справедливо

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}, \quad (1.2.16)$$

т.е.  $\vec{A}$  удовлетворяет уравнению Пуассона.

Выясним характер стационарного магнитного поля. Из векторного анализа известно, что

$$\text{div} \text{rot} \vec{A} = 0, \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad (1.2.17)$$

магнитное поле постоянного тока соленоидально – т.е. магнитные силовые линии всегда замкнуты, источников магнитного поля, на кото-

рые они замыкаются, в пространстве нет. Силовые линии электрического поля начинаются и оканчиваются на электрических зарядах.

Определим значение  $\text{rot}\vec{B}$  :

$$\text{rot}\vec{B} = \text{rot rot}\vec{A} = \text{grad div}\vec{A} - \nabla^2\vec{A}.$$

Для постоянного тока  $\text{div}\vec{A} = 0$ ,  $\nabla^2\vec{A} = -\mu_0\vec{j}$ . Тогда

$$\text{rot}\vec{B} = +\mu_0\vec{j} \quad (1.2.18)$$

магнитное поле постоянного тока вне проводника ( $\vec{j} = 0$ ) потенциально, так как

$$\text{rot}\vec{B} = 0. \quad (1.2.19)$$

#### 1.2.4. Напряженность магнитного поля

При отсутствии магнитного поля стороннего источника в намагниченных средах магнитное поле создается только молекулярными токами. При этом молекула в целом остается электрически нейтральной. При введении в среду внешнего магнитного поля  $\vec{B}'$  создается результирующее поле

$$\vec{B} = \vec{B}' + \vec{B}_M. \quad (1.2.20)$$

Поскольку вакуумное магнитное поле молекулярных токов  $\vec{B}_M$  вызвано соленоидальным полем, то и оно и результирующее поле соленоидально, т.е.

$$\text{div}\vec{B}' = 0, \text{div}\vec{B}_M = 0, \text{div}\vec{B} = 0.$$

Кроме того,  $\text{rot}\vec{B}' = +\mu_0\vec{j}$ ,  $\text{rot}\vec{B}_M = +\mu_0\vec{j}_M$ , где  $\vec{j}_M$  – вектор плотности молекулярных токов (или вектор плотности магнитных токов), определяемый как  $\vec{j}_M = \text{rot}\vec{J}$ ,  $\vec{J}$  – вектор намагниченности или намагниченность единицы объема вещества.

Выясним, чему равна циркуляция вектора  $\vec{B}$  :

$$\text{rot}\vec{B} = \text{rot}\vec{B}' + \text{rot}\vec{B}_M = \mu_0\vec{j} + \mu_0\vec{j}_M = \mu_0\vec{j} + \mu_0\text{rot}\vec{J}$$

или

$$\text{rot}\left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}\right] = \vec{j}. \quad (1.2.21)$$

Выражение, стоящее под знаком ротора  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j}$  – вектор на-

пряженности магнитного поля.

Таким образом,

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{j}. \quad (1.2.22)$$

Для изотропных сред справедливо

$$\vec{j} = k_m \vec{H}, \quad (1.2.23)$$

где  $k_m$  – магнитная восприимчивость вещества.

Подставляя (1.2.23) в выражение для  $\vec{H}$ , получаем

$$\vec{B} = \mu_0(1 + k_m)\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H} = \mu_a\vec{H}, \quad (1.2.24)$$

где  $1 + k_m = \mu$  – относительная магнитная проницаемость среды;

$\mu\mu_0 = \mu_a$  – абсолютная магнитная проницаемость среды.

Уравнение (1.2.24) также называется материальным по аналогии с электростатическим полем, так как описывает макроскопические свойства вещества в магнитном поле.

Тогда

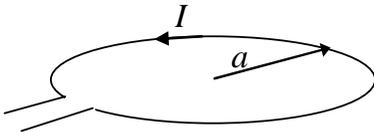
$$\vec{B} = \mu_a\vec{H}. \quad (1.2.25)$$

Уравнения (1.2.24), (1.2.25) также называются материальными по аналогии с электростатическим полем, так как описывает макроскопические свойства вещества в магнитном поле.

### 1.2.5. Магнитное поле рамки с постоянным током

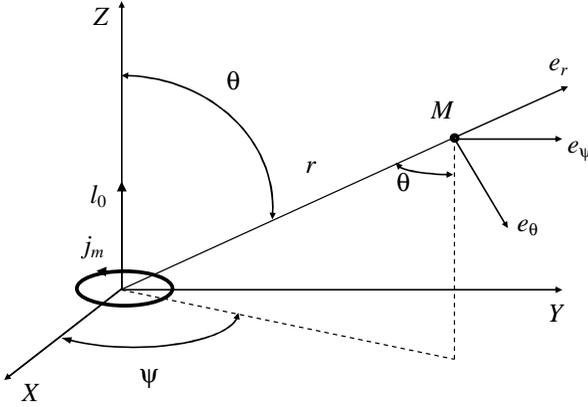
Простейшим источником МП постоянного тока в природе является электрон, вращающийся с постоянной скоростью вокруг ядра. Орбита электрона образует элементарную рамку.

*Элементарная рамка* – плоский замкнутый контур, выполненный из тонкого проводника длиной, много меньшей расстояния до точки наблюдения, с постоянным током (рис. 1.2.3).



**Рис. 1.2.3.** Элементарная магнитная рамка

Поместим рамку в сферическую систему координат подобно тому, как это было сделано при рассмотрении диполя (рис. 1.2.4).



**Рис. 1.2.4. Магнитная рамка в сферической системе координат**

Магнитное поле в точке  $M$  ( $r \gg 2\pi a$ ) определится как

$$\vec{H} = \frac{I\pi a^2}{4\pi r^2} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta), \quad [\text{А/м}]. \quad (1.2.26)$$

Данное выражение имеет ту же структуру, что и для электрического диполя, поэтому элементарную рамку еще называют магнитным диполем. По аналогии с диполем здесь вводится понятие магнитного момента

$$\vec{m} = I\pi a^2 \vec{n} = IS\vec{n}, \quad (1.2.27)$$

где  $\vec{n}$  – вектор нормали к плоскости рамки, направление которого определяется как  $\vec{a} \times \vec{j}$  (правило буравчика).

### 1.2.6. Энергия магнитного поля

Магнитное поле обладает запасом энергии

$$W_M = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{H} \cdot \vec{B} dV, \quad [\text{Дж}] \quad (1.2.28)$$

распределенной с плотностью

$$w_M = \frac{dW_M}{dV} = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}, \quad [\text{Дж/м}^3]. \quad (1.2.29)$$

Для изотропных сред

$$w_M = \frac{\mu_a H^2}{2}, \quad [\text{Дж/м}^3]. \quad (1.2.30)$$

## 1.3. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА И ИХ РЕШЕНИЕ

### 1.3.1. Полная система уравнений Максвелла.

#### Их физическое содержание.

#### Интегральная форма уравнений Максвелла

ЭМП – это вид материи, оказывающей силовое воздействие на заряженные частицы, характеризуемый неразрывно связанными друг с другом и меняющимися во времени электрическим и магнитным полями. Используя знания основных уравнений электрического стационарного поля и магнитного поля постоянного тока, получим полную систему уравнений Максвелла.

Уравнения Максвелла – основа описания любых электромагнитных полей во всевозможных устройствах средств связи и РТО, поэтому знание этих уравнений – фундамент для грамотной эксплуатации радиоэлектронных средств

Рассмотренные нами поля:

– электростатическое, создаваемое неподвижными и неизменными во времени зарядами ( $v = 0, \partial \rho / \partial t = 0$ );

– стационарное магнитное поле (МП) постоянного тока ( $v = \text{const}$ ), являются частными случаями электромагнитного поля (ЭМП) (рис. 1.3.1).

Ясно, что уравнения для электростатического поля  $\text{rot} \vec{E} = 0$ ;  $\text{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_a$  и уравнения для стационарного МП  $\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ ;  $\text{div} \vec{H} = 0$  должны вытекать из некоторых обобщенных уравнений, справедливых для ЭМП в целом. Следовательно, необходимо получить систему уравнений, описывающих ЭМП заряженных частиц, состояние которых характеризуется скоростью их движения  $v$  и величиной заряда, являющегося функцией времени, т.е.  $v = f(t), d\rho / dt(t)$ .

Заметим сразу, что полный вывод уравнений Максвелла мы опускаем. Оставим только отправные точки и конечный результат.

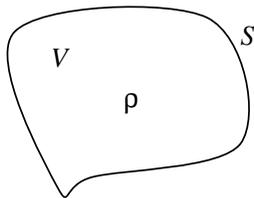


Рис. 1.3.1. К выводу уравнений Максвелла

Исходя из уравнения непрерывности  $\text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ , и учитывая, что, например, в диэлектрике помимо тока проводимости присутствует также ток смещения, можно получить **первое уравнение Максвелла** (I УМ)

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}},$$

устанавливающее связь между переменным во времени электрическим полем и возникающим вокруг него магнитным полем.

Физический смысл: *МП возникает не только при движении зарядов, когда имеет место ток проводимости, но и при наличии изменяющегося во времени электрического поля.*

**Второе уравнение Максвелла** (II УМ) вытекает из закона ЭМ индукции Фарадея (1831)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

согласно которому, если через поверхность, ограниченную проводящим контуром, проходит меняющийся во времени магнитный поток  $\Phi$ , то в контуре возникает ЭДС индукции. II УМ имеет вид:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}}.$$

Физический смысл: *В ЭМП электрическое поле является вихревым. Причиной ЭП, помимо электрических зарядов, является изменяющееся во времени МП.*

Итак, **полная** система дифференциальных уравнений, описывающих ЭМП, включает в себя следующие уравнения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (\text{I УМ}) \\ \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \quad (\text{II УМ}) \\ \operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_a}; \quad (\text{III УМ}) \\ \operatorname{div}\vec{H} = 0. \quad (\text{IV УМ}) \end{array} \right.$$

Вспомогательные уравнения:  $\vec{D} = \varepsilon_a \vec{E}$ ;  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ .

**Интегральная форма уравнений Максвелла.** Интегральным аналогом первого уравнения Максвелла является так называемый **закон полного тока** или теорема циркуляции: **циркуляция вектора по замкнутому контуру интегрирования равна полному току, протекающему через площадь, охваченную контуром интегрирования.**

$$\boxed{\int_l \vec{H} dl = I_n = I + I_{\text{смещ}}}. \quad (\text{I УМ})$$

Физический смысл: Токи смещения наравне с токами проводимости образуют магнитное поле. Закон изменения ЭП во времени определяет закон распределения МП в пространстве.

Интегральным аналогом второго уравнения Максвелла является закон электромагнитной индукции

$$\boxed{\int_l \vec{E} dl = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}}. \quad (\text{II УМ})$$

Физический смысл: Переменное магнитное поле образует вихревое электрическое поле. Закон изменения МП во времени определяет закон распределения ЭП в пространстве.

Интегрируя 3-е уравнение Максвелла по объему и применяя формулу Остроградского-Гаусса, получим:

$$\boxed{\int_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV = q}. \quad (\text{III УМ})$$

Это равенство называется **теоремой Гаусса**: поток вектора электрической индукции через произвольную замкнутую поверхность определяется электрическим зарядом  $q$ , содержащимся в объеме  $V$ , ограниченном поверхностью  $S$ .

Подобным образом получим интегральную запись последнего уравнения Максвелла

$$\boxed{\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0}, \quad (\text{IV УМ})$$

выражающую непрерывность линий магнитной индукции. Итак, полная система уравнений Максвелла в интегральной форме имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_L \vec{H} d\vec{l} = I_n = I + I_{\text{смещ}}, \\ \int_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}, \\ \int_S \vec{D} d\vec{S} = q, \\ \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0. \end{array} \right.$$

Отметим, что уравнения Максвелла в дифференциальной форме справедливы лишь тогда, когда параметры среды либо не зависят от координат, либо являются их непрерывными функциями. Уравнения Максвелла в интегральной форме применимы во всех случаях, включая и те, когда параметры среды, или хотя бы один из них, изменяются скачками.

### 1.3.2. Решение уравнений Максвелла, волновых уравнений. Теорема запаздывающих электродинамических потенциалов

Впервые предположение о том, что электромагнитные возмущения носят волновой характер было высказано Фарадеем в 1832 г. Теоретическим подтверждением предположения Фарадея о существовании ЭМВ послужила система уравнений Максвелла. В настоящее время известно, что если какое-либо явление описывается волновым уравнением Даламбера

$$\nabla^2 \bar{\Phi}(r, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \bar{\Phi}(r, t)}{\partial t^2} = f, \quad (1.3.1)$$

то его решение

$$\bar{\Phi}(r, t) = \bar{\Phi}_1 \left( t - \frac{r}{v} \right) + \bar{\Phi}_2 \left( t + \frac{r}{v} \right) \quad (1.3.2)$$

представляет собой пару бегущих волн, распространяющихся, соответственно, вдоль и против  $\vec{r}$  с постоянной скоростью  $v$ . Физический смысл имеет только первое слагаемое, т.е.

$$\bar{\Phi}(r, t) = \bar{\Phi}_1 \left( t - \frac{r}{v} \right). \quad (1.3.3)$$

Это уравнение описывает функцию, изменение которой происходит не моментально, а через время задержки  $t_3 = r/v$ . Эта функция является **запаздывающей**. Распространение электромагнитного поля происходит не моментально, а с задержкой. Эти положения теории дальнего действия на основе ограничений Зоммерфельда получили название **теоремы запаздывающих электродинамических потенциалов**.

Рассмотрим первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме. Применив операцию rot к обеим частям этого уравнения, используя формулы векторного анализа и принимая во внимание II УМ и IV УМ уравнения Максвелла, получим

$$\nabla^2 \vec{H} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\text{rot} \vec{j}. \quad (1.3.4)$$

Аналогично можно показать, что (из II УМ)

$$\nabla^2 \vec{E} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad} \frac{\rho}{\epsilon_a} + \mu_a \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \quad (1.3.5)$$

Для пространства, свободного от зарядов и токов ( $\rho = 0, j = 0$ ), эти уравнения преобразуются к виду

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{H} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \\ \nabla^2 \vec{E} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (1.3.6)$$

т.е. переходят в однородные **волновые** уравнения.

Уравнения (1.3.4) – (1.3.6) имеют вид (1.3.2) и носят волновой характер. Сравнивая (1.3.4) – (1.3.6) с 1.3.1 можно записать, что

$$\frac{1}{v^2} = \epsilon_a \mu_a = 1 / \left( \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \right)^2.$$

С этого момента мы имеем право говорить об ЭМВ, которые распространяются в пространстве со скоростью  $v = 1 / \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ .

Рассмотрим **основную задачу электродинамики**.

Пусть в некотором объеме задано распределение токов и зарядов, и необходимо определить ЭМП, создаваемое ими. Для этого необходимо решить систему уравнений Максвелла относительно  $H$  и  $E$ , или, что то же самое, векторные волновые уравнения (1.3.3, 1.3.4) или (1.3.5, 1.3.6). Каждое из этих уравнений распадается на систему из трех скалярных, поэтому общий объем требуемых рассуждений и выкладок оказывается довольно громоздким. Более просто определить  $H$  и  $E$  с помощью так называемых электродинамических потенциалов  $\phi$  и  $\vec{A}$ .

Известно, что для электростатического поля

$$\vec{E} = \text{grad} \phi, \quad (1.3.7)$$

а для магнитного поля постоянного тока

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (1.3.8)$$

Очевидно, для ЭМП эти соотношения видоизменяются. Определим их. Учитывая (1.3.8), второе УМ можно записать

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},$$

или

$$\operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Тогда по аналогии с тем, как мы поступили при рассмотрении свойств электростатического поля, и учитывая, что ЭЛСТ поле – частный случай ЭМП, можно записать

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi, \quad (1.3.9)$$

откуда

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

аналогично  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \vec{A}$ .

Из этого равенства следует, что электрическая составляющая ЭМП одновременно связана со скалярным  $\varphi$  и векторным  $\vec{A}$  потенциалами, т.е. зная  $\varphi$  и  $\vec{A}$ , можно определить  $E$  и  $H$  в соответствии с выражениями (1.3.8) и (1.3.9).

К дальнейшему упрощению приводит введение потенциала Герца на основе уравнений связи  $\varphi = -\operatorname{div} \vec{\Gamma}$ ;  $\vec{A} = \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial t}$ .

Вектор Герца также удовлетворяет векторному волновому уравнению

$$\nabla^2 \vec{\Gamma} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Gamma}}{\partial t^2} = \begin{cases} 0, & \text{источников поля нет,} \\ -\frac{1}{\epsilon_a} \int \vec{j} dt, & \text{источники поля есть.} \end{cases}$$

Если вектор Герца найден, то  $E$  и  $H$  определяются

$$\vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Gamma} - \epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{\Gamma}}{\partial t^2}, \quad \vec{H} = \epsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{\Gamma}),$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{A} = \epsilon_a \mu_a \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial t}, \quad \varphi = -\operatorname{div} \vec{\Gamma}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \vec{A}.$$

Потенциалы  $\varphi$  и  $A$ , входящие в решение, удовлетворяют уравнению (1.3.3), поэтому называются **запаздывающими потенциалами**.

Таким образом, можно решить основную задачу электродинамики, зная скалярный и векторный потенциалы и вводя вспомогательный вектор Герца.

### 1.3.3. Уравнения Максвелла в комплексной форме

Будем рассматривать гармонические ЭМП, создаваемые гармоническими токами и зарядами. В средствах радиосвязи используются узкополосные радиосигналы, модели которых в радиотехнике принято считать квазигармоническими узкополосными сигналами. Их записывают в гармонической форме.

$$\vec{I} = \vec{I}_m \cos(\omega t - \varphi); \quad \vec{j} = \vec{j}_m \cos(\omega t - \varphi),$$

$$\vec{E} = \vec{E}_m \cos(\omega t - \varphi); \quad \vec{H} = \vec{H}_m \cos(\omega t - \varphi).$$

Для анализа таких колебаний удобно воспользоваться символическим методом. Согласно этому методу, гармоническая функция  $a = A_m \cos(\omega t - \varphi)$ , где  $a$  – мгновенное значение функций;  $A_m$  – амплитуда;  $\omega$  – угловая частота;  $\varphi$  – начальная фаза, может быть заменена комплексной

$$\dot{a} = A_m e^{i(\omega t - \varphi)} = A_m e^{i\omega_e t} = \dot{A}_m e^{i\omega t},$$

где  $\dot{A}_m$  – комплексная амплитуда.

Запишем мгновенное значение для векторов в комплексной форме

$$\dot{\vec{j}} = \dot{j}_m e^{i\omega t}; \quad \dot{\vec{E}} = \dot{E}_m e^{i\omega t}; \quad \dot{\vec{H}} = \dot{H}_m e^{i\omega t}.$$

Подставим их в уравнения Максвелла

$$\text{rot} \dot{\vec{H}} = \dot{\vec{j}} + \epsilon_a \frac{\partial \dot{\vec{E}}}{\partial t},$$

$$\text{rot} \dot{\vec{H}}_m e^{i\omega t} = \dot{j}_m e^{i\omega t} + i\omega \epsilon_a \dot{E}_m e^{i\omega t},$$

получим **I УМ** в комплексных амплитудах

$$\boxed{\text{rot} \dot{\vec{H}}_m = \dot{j}_m + i\omega \epsilon_a \dot{E}_m}.$$

Аналогично можно получить **П УМ** в комплексных амплитудах

$$\boxed{\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -i\omega\mu_a \dot{\vec{H}}_m.}$$

Однородные волновые уравнения

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0,$$

$$\nabla^2 \dot{\vec{H}}_m + k^2 \dot{\vec{H}}_m = 0,$$

где  $k = \omega/v = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$  – коэффициент распространения (волновое число).

### 1.3.4. Граничные условия для векторов электромагнитного поля

До сих пор мы вели речь о неограниченной среде. Необходимо рассмотреть условия и особенности распространения ЭМВ на границе сред с различными параметрами.

В каждой из сред справедливы уравнения Максвелла. Однако скорости распространения ЭМВ в различных средах различны. Это приводит к появлению некоторых особенностей, которые нам следует установить (рис. 1.3.2).

На рисунке 1.3.2 изображена граница раздела двух сред с различными электрическими параметрами. Для примера показано разложение вектора напряженности электрического поля на тангенциальную (касательную к границе раздела) и нормальную (перпендикулярную к границе раздела) составляющие.

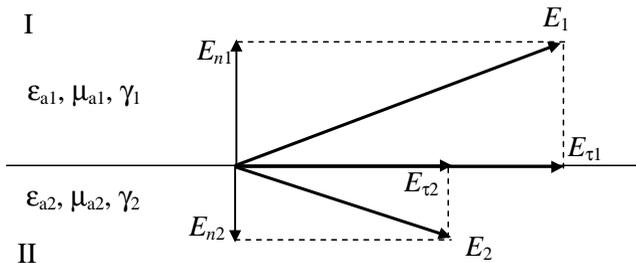


Рис. 1.3.2. Вектора электрического поля на границе раздела двух сред

**Теорема о тангенциальных составляющих векторов  $E$  и  $D$ .**

На границе раздела двух сред тангенциальные составляющие векторов напряженности электрического поля непрерывны  $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$ , а тангенциальные составляющие векторов электрической индукции претерпевают скачок, определяемый отношением диэлектрических проницаемостей среды

$$D_{\tau 1} = \frac{\varepsilon_{a1}}{\varepsilon_{a2}} D_{\tau 2}.$$

**Теорема о нормальных составляющих векторов  $E$  и  $D$ .** На границе раздела двух сред нормальные составляющие векторов электрического смещения непрерывны  $D_{n1} = D_{n2}$ , а нормальные составляющие векторов электрического поля претерпевают скачок, определяемый отношением диэлектрических проницаемостей сред

$$E_{n1} = \frac{\varepsilon_{a2}}{\varepsilon_{a1}} E_{n2}.$$

**Теорема о тангенциальных составляющих векторов  $H$  и  $B$ .**

На границе раздела двух сред тангенциальные составляющие векторов напряженности МП непрерывны  $H_{\tau 1} = H_{\tau 2}$ , а тангенциальные составляющие векторов магнитной индукции претерпевают скачок, определяемый отношением магнитных проницаемостей сред.

$$B_{\tau 1} = \frac{\mu_{a1}}{\mu_{a2}} B_{\tau 2}.$$

**Теорема для нормальных составляющих векторов  $H$  и  $B$ :**

$$B_{1n} = B_{2n},$$

$$H_{1n} = \frac{\mu_{a2}}{\mu_{a1}} H_{2n}.$$

**Граничные условия для векторов ЭМП при наличии на поверхности свободных зарядов.** Если по поверхности равномерно распределены заряды с поверхностной плотностью  $\sigma_s$ , то

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma_s.$$

Наличие поверхностного тока, вызванного свободными зарядами, величина которого  $j_s$ , вызывает скачок

$$H_{\tau 1} - H_{\tau 2} = j_s.$$



**Рис. 1.3.3.** Силовые линии у поверхности идеального проводника

На поверхности идеального проводника ( $\gamma = \infty$ )

$$E_{\tau} = 0, \quad H_n = 0;$$

$$E_n \neq 0, \quad H_{\tau} \neq 0.$$

Тогда поведение силовых линий у поверхности идеального проводника показано на рис. 1.3.3.

У поверхности идеального проводника силовые линии напряженности электрического поля нормальны поверхности проводника. Силовые линии напряженности магнитного поля касательны к поверхности идеального проводника.

### 1.3.5. Теорема Умова–Поинтинга.

#### Энергия электромагнитного поля. Теорема подобия.

#### Граничные задачи электродинамики

Пусть задан источник ЭМ излучения, характеризуемый мощностью  $P$  (или сторонней ЭДС  $E_{\text{стор}}$ ). Окружим его поверхностью, ограничивающей объем  $V$ . ЭМП источника, как и любой другой вид материи, обладает энергией. Определим, на что она расходуется. С излучением электрического и магнитного полей со временем плотность электрической энергии  $w_e = 1/2\epsilon_a E^2$  и плотность магнитной энергии  $w_m = 1/2\mu_a H^2$  меняется. Выясним, что происходит с общим запасом энергии ЭМП, сосредоточенном в объеме с течением времени:

$$W = \int_V w dV, \quad (1.3.10)$$

где  $W$  – энергия ЭМП;  $w$  – объемная плотность энергии ЭМП

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_a E^2 + \frac{1}{2}\mu_a H^2. \quad (1.3.11)$$

Для решения поставленной задачи продифференцируем (1.3.10) по времени

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_V \frac{\partial w}{\partial t} dV ;$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \epsilon_a \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_a \vec{H} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} . \quad (1.3.12)$$

Тогда  $\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div} [\vec{E} \times \vec{H}] - \frac{j^2}{\gamma} + \vec{E}_{\text{стоп}} \cdot \vec{j}$ .

Подставим это выражение под знак интеграла

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int_V \operatorname{div} [\vec{E} \times \vec{H}] - \int_V \frac{j^2}{\gamma} dV + \int_V \vec{E}_{\text{стоп}} \cdot \vec{j} dV . \quad (1.3.13)$$

Рассмотрим, что из себя представляет каждый член выражения (1.3.13).

1. Для первого из них справедлива **теорема Остроградского–Гаусса**

$$\int_V \operatorname{div} [\vec{E} \times \vec{H}] dV = \int_S [\vec{E} \times \vec{H}] dS . \quad (1.3.14)$$

Правая часть (1.3.13) представляет собой энергию, проходящую через поверхность в единицу времени, т.е. излучающую энергию. Векторное произведение  $\vec{E} \times \vec{H}$  определяет количество энергии, протекающей в единицу времени через единичную площадку, нормальную к вектору, а направление характеризует направление переноса ЭМ энергии. Это векторное произведение обозначают  $\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}] \left[ \text{Вт/м}^2 \right]$  и называют **вектором Умова–Пойнтинга** (вектор плотности потока мощности).

2. Второй интеграл равенства (1.3.13) представляет собой мощность потерь на нагревание среды с проводимостью  $\gamma$  и обозначается  $P_n$ .

3. Последнее слагаемое (1.3.13) характеризует мощность стороннего источника  $P$ , создающего ЭМП в объеме  $V$ . Таким образом

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int_S \vec{\Pi} dS - P_n + P , \text{ или } P - \frac{\partial W}{\partial t} = \int_S \vec{\Pi} dS + P_n .$$

Это уравнение называют теоремой Умова–Пойнтинга. Итак, развиваемая источником стороннего ЭМП мощность расходуется на:

- увеличение запаса энергии ЭМП внутри объема  $V$ ;
- потери, связанные с нагревом среды;

– излучение, связанное с распространением ЭМ энергии за пределы  $V$ , и характеризуемое вектором Пойнтинга. В частности, если мощность, развиваемая источником, компенсирует потери, то запас энергии в объеме остается постоянным, и излучаемая мощность определяется по формуле  $P_{\Sigma} = \int_S \vec{P} dS$ . Теорема Умова–Пойнтинга также

называется уравнением баланса мощностей.

**Теорема подобия.** В простейшем виде она формулируется следующим образом. Конкретного типа излучатель, рассчитанный на работу с колебаниями частоты  $f_1$  и обладающий определенными параметрами, не изменит их, если при переходе на новую частоту колебаний  $f_2 = nf_1$ , где  $n$  – действительное число, в  $n$  раз изменить его геометрические размеры, удельную проводимость материала при сохранении электрической и магнитной проницаемости материала излучателя и среды.

Это означает, что при  $n > 1$ , размеры излучателя необходимо уменьшить, а удельную проводимость материала, из которого он изготовлен, увеличить в  $n$  раз. Действительное число  $n$  называют **коэффициентом масштабного пересчета**.

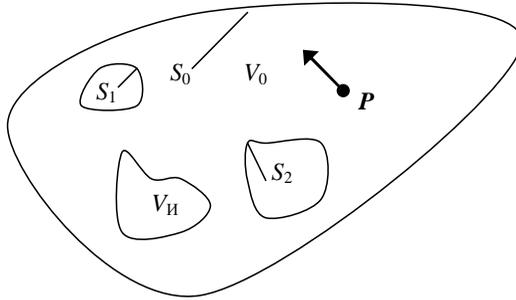
На основании теоремы подобия производится моделирование антенных устройств. Следует учитывать, что требование изменения удельной проводимости материала часто невозможно реализовать, поэтому необходимо изменение тех параметров, которые не связаны с удельной проводимостью.

Теорема подобия (принцип электродинамического подобия), являющаяся следствием линейности уравнения Максвелла, позволяет широко использовать моделирование реальных систем в лабораторных условиях.

**Граничные задачи электродинамики.** Граничная задача – некоторая основная задача электродинамики (нахождение поля по заданным источникам), при которой известны граничные условия и то, что поле удовлетворяет уравнениям Максвелла.

Для внутренней и внешней граничных задач можно показать для монохроматического поля, что двух или более различных решений, каждое из которых удовлетворяет уравнениям Максвелла и граничным условиям, быть не может – существует только единственное решение (теорема единственности решений уравнений Максвелла).

Пусть имеем объем  $V_0$ , ограниченный поверхностью  $S$ , состоящей из поверхностей  $S_0, S_1, S_2$  (рис. 1.3.4). Среда в объеме – линейна, неоднородна и изотропна. В области  $V_{in}$ , находящейся в объеме  $V_0$ , заданы сторонние токи частотой  $\omega$ , возбуждающие поле. На поверхности  $S$



**Рис. 1.3.4.** К решению задачи электродинамики

заданы граничные условия, причем на части поверхности (например, на  $S_0$ ) заданы граничные условия для  $E\tau$ , а на оставшейся части поверхности, например для  $S_1$  и  $S_2$  – только для  $H\tau$ ;  $p \in V_0$ .

Доказательство теоремы проведем от противного. Предположим, что существуют два решения поставленной задачи:  $E_1, H_1$  и  $E_2, H_2$ . Они удовлетворяют уравнениям Максвелла при одинаковых сторонних токах и одним и тем же граничным условиям. Тогда разность этих решений  $E' = E_1 - E_2$  и  $H' = H_1 - H_2$  удовлетворяет однородным уравнениям Максвелла  $\text{rot}H' = i\omega\epsilon_a E'$ ;  $\text{rot}E' = -i\omega\mu_a H'$  и однородным граничным условиям на поверхности  $S$ :  $H'\tau = 0$   $E'\tau = 0$ .

Для внутренней граничной задачи объем  $V_0$  конечен. Если в среде есть потери  $\gamma \neq 0$ , решение будет единственным. В противном случае решений бесконечно много.

Для внешней задачи объем  $V_0$  бесконечен. Эта задача описывает излучение энергии заданным источником. Решение – расходящиеся от источника волны (при выполнении условия А. Зоммерфельда).

Таким образом, уравнения Максвелла полностью описывают ЭМП и позволяют решить задачу по определению составляющих поля. Граничные условия позволяют находить компоненты ЭМП в разных граничащих средах, зная параметры среды. Основные теоремы электродинамики позволяют определить расход энергии на распространение радиоволн и возможность проведения экспериментов с моделями, а не с реальными объектами.

## 2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПАРАМЕТРЫ

---

---

### 2.1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

#### 2.1.1. Понятие волнового процесса

Слова «волна» и «волновой процесс», употребляемые в радиотехнике, получили широкое распространение ввиду наглядности их образа – всем знакомых волн на поверхности воды. Под распространением волны понимается постепенное вовлечение среды в некоторый физический процесс, приводящее к передаче энергии в пространстве.

Предположим, что в пространстве существует некоторый физический процесс, и для простоты рассмотрим зависимость его только от одной координаты  $z$ . Функция, описывающая волновой процесс:

$$U(t, Z) = U(t - Z / v),$$

где  $v$  – скорость распространения процесса в среде.

В общем случае электромагнитное поле  $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$  и  $\vec{H} = \vec{H}(x, y, z, t)$ , удовлетворяющее уравнениям Максвелла, называется волной, если  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  можно представить как функцию времени  $t$  и некоторого пространственного аргумента  $\xi = \xi(x, y, z)$ . Если положить  $\xi = \xi_0 = \text{const}$ , то уравнение

$$\xi(x, y, z) = \xi_0$$

определяет в пространстве некоторую поверхность, которая применительно к электромагнитному полю может быть названа поверхностью равных фаз. Если эта поверхность представляет собой в пространстве плоскость, то такая электромагнитная волна называется плоской. Если поверхность  $\xi = \xi_0$  представляет собой сферу или цилиндр, то волны могут быть названы сферическими или цилиндрическими.

#### 2.1.2. Плоские электромагнитные волны

Фазовый фронт ЭМВ различных излучающих устройств (систем) в зависимости от конструкции антенных систем может иметь различные формы. На расстояниях от источника, значительно больших длинны волны излучаемых колебаний и линейных размеров источника,

считают сферическим, а сам источник – точечным. В этом случае на приемной стороне, в пределах линейных размеров приемных устройств (антенн) фронт волны будет плоским (рис. 2.1.1).

Электромагнитная волна с плоским фазовым фронтом называется плоской ЭМВ.

Рассмотрим свойства плоской ЭМВ. Введем прямоугольную систему координат и рассмотрим в ней участок плоской поверхности фазового фронта ЭМВ (рис. 2.1.2).

Уравнение плоскости имеет вид:

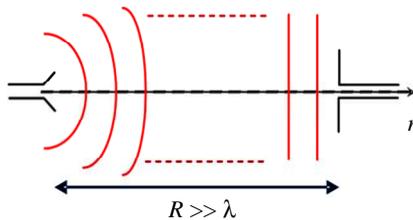
$$\xi = \vec{n} \cdot \vec{r} = n_x x + n_y y + n_z z. \quad (2.1.1)$$

Если учесть, что

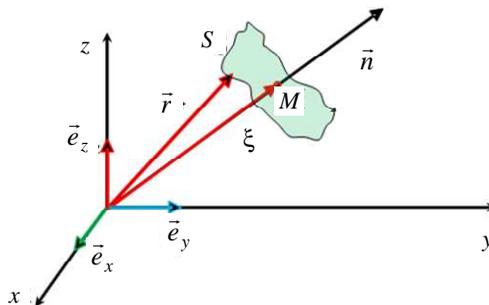
$$\vec{n} = n_x \cdot \vec{e}_x + n_y \cdot \vec{e}_y + n_z \cdot \vec{e}_z, \quad (2.1.2)$$

то

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z. \quad (2.1.3)$$



**Рис. 2.1.1. Фазовый фронт ЭМВ на приемной стороне на расстояниях больше длины волны**



**Рис. 2.1.2. Прямоугольная система**

Известно, что нормаль к фазовому фронту определяет направление распространения ЭМВ, поэтому вектор нормали  $\vec{n}$  совпадает с направлением распространения плоской волны. Проекции вектора  $\vec{n}$  удовлетворяют условию  $n_x, n_y, n_z = \text{const}$ .

Источником плоской ЭМВ может быть излучатель с параллельными лучами, излучающий гармонические колебания

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m(\xi)e^{i\omega t}. \quad (2.1.4)$$

Для точки  $M$  неограниченного однородного пространства должно быть справедливо однородное волновое уравнение

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m + k^2 \dot{\vec{E}}_m = 0, \quad (2.1.5)$$

где  $k = \omega \sqrt{\epsilon_d \mu_d} = \omega / v$ . Уравнение (2.1.5) предполагает, что  $\dot{\vec{E}}_m = f(r)$ . В нашем случае  $\dot{\vec{E}}_m = f(\xi)$ .

Определим однородное волновое уравнение, которому удовлетворяет плоская ЭМВ

$$\nabla^2 \dot{\vec{E}}_m(\xi) = \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_m(\xi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_m(\xi)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_m(\xi)}{\partial z^2}. \quad (2.1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_m(\xi)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \dot{\vec{E}}_m(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial \dot{\vec{E}}_m(\xi)}{\partial \xi} \cdot n_x \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \\ &= \left( \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_m(\xi)}{\partial \xi^2} \cdot n_x + \frac{\partial \dot{\vec{E}}_m(\xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial n_x}{\partial \xi} \right) n_x = \frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_m(\xi)}{\partial \xi^2} \cdot n_x^2. \end{aligned}$$

Рассматривая аналогично другие слагаемые равенства (2.1.6) и учитывая, что модуль единичного вектора нормали  $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$ , получим

$$\frac{\partial^2 \dot{\vec{E}}_m(\xi)}{\partial x^2} + k^2 \dot{\vec{E}}_m(\xi) = 0. \quad (2.1.7)$$

Уравнение (2.1.7) – однородное волновое уравнение, и его решение, с учетом отсутствия отраженных волн, имеет вид

$$\dot{\vec{E}}_m(\xi) = \dot{\vec{E}}_m e^{-ik\xi}. \quad (2.1.8)$$

Итак, для плоской электромагнитной волны получено решение волнового уравнения, имеющее огромное практическое значение для всех областей радиотехники, занимающихся распространением радиоволн в различных средах.

### 2.1.3. Ортогональность векторов электрического и магнитного полей

Определим пространственную ориентацию векторов  $\vec{H}_m(\xi)$ ,  $\vec{E}_m(\xi)$ ,  $\vec{H}_m(\xi)$  для плоской волны. Для этого установим связь между векторами векторного произведения

$$\vec{H}_m = \vec{E}_m \times \vec{H}_m. \quad (2.1.9)$$

1. Найдем связь между векторами  $E$  и  $H$ . Обратимся к 2-му уравнению Максвелла для плоской ЭМВ и используем общее выражение решения волнового уравнения для плоской ЭМВ

$$\text{rot} \vec{E}(\xi) = -i\omega \mu_a \vec{H}_m(\xi). \quad (2.1.10)$$

Раскроем левую часть этого равенства, используя справочные формулы для преобразований векторной алгебры

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E}(\xi) &= \text{rot}(\vec{E}_m e^{-ik\xi}) = (\{\text{rot} \vec{a} b = b \text{rot} \vec{a} + \text{grad} b \times \vec{a}\}) = \\ &= e^{-ik\xi} \text{rot} \vec{E}_m + \text{grad} e^{-ik\xi} \cdot \vec{E}_m. \end{aligned}$$

$\text{rot} \vec{E}_m = 0$ , поэтому первое слагаемое обращается в ноль.

$$\text{grad} e^{-ik\xi} = -ike^{-ik\xi} \text{grad} \xi = -ike^{-ik\xi} \vec{n}.$$

Тогда

$$\text{rot} \vec{E}(\xi) = e^{-ik\xi} \vec{n} \cdot \vec{E}_m = -i\omega \mu_a \vec{H}_m e^{-ik\xi}.$$

Откуда

$$\vec{H}_m = \frac{k}{\omega \mu_a} \vec{n} \times \vec{E}_m \quad \text{и} \quad \begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{H}_m &= 0 \\ \vec{E}_m \cdot \vec{H}_m &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Это равенство справедливо и для комплексных амплитуд, для мгновенных значений и говорит о взаимной перпендикулярности векторов электрического и магнитного полей.

Амплитудная связь имеет вид

$$H_m = \frac{k}{\omega \mu_a} \vec{E}_m, \quad (2.1.12)$$

где  $\omega \mu_a / k = \frac{\omega \mu_a}{\omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} = Z$  – волновое сопротивление, которое

для свободного пространства равно  $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 120\pi \approx 377$  [Ом].

**Волновое (характеристическое) сопротивление** – коэффициент, связывающий амплитуды напряженности электрического и магнитного полей через электрические параметры сред.

2. Определим векторное произведение (2.1.9)

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_m &= \vec{E}_m \times \vec{H}_m = \vec{E}_m \times \left[ \vec{n} \times \vec{E}_m \right] \frac{1}{Z} = \vec{a} \times \left[ \vec{b} \times \vec{c} \right] = \vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b}) = \\ &= \frac{1}{Z} \left[ \vec{n} \left( \dot{\vec{E}}_m \cdot \dot{\vec{E}}_m \right) - \dot{\vec{E}}_m \left( \vec{n} \cdot \dot{\vec{E}}_m \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Выясним, чему равно скалярное произведение  $\vec{n} \cdot \dot{\vec{E}}_m$ , для чего определим дивергенцию вектора  $\dot{\vec{E}}_m(\xi)$  в точке, свободной от источников электромагнитного поля:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \dot{\vec{E}}(\xi) &= \operatorname{div} \left( \vec{E}_m e^{-ik\xi} \right) = \operatorname{div} (\vec{a}b) = b \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \operatorname{grad} b = \\ &= e^{-ik\xi} \operatorname{div} \vec{E}_m + \vec{E}_m \operatorname{grad} e^{-ik\xi} = -ike^{-ik\xi} \vec{E}_m \cdot \vec{n} = 0 \rightarrow \vec{E}_m \cdot \vec{n} = 0. \end{aligned}$$

Это соотношение будет выполняться, если

$$\vec{E}_m \cdot \vec{n} = 0, \quad (2.1.14)$$

т.е. эти вектора перпендикулярны. С учетом (2.1.14) выражение (2.1.13) запишется

$$\vec{\Pi}_m = \vec{n} \vec{E}_m^2 / Z, \quad (2.1.15)$$

т.е. вектор Умова–Пойнтинга совпадает с направлением вектора распространения ЭМВ, а вектора электрического и магнитного полей лежат в фазовой плоскости и взаимно перпендикулярны (рис. 2.1.3).

Так как вектора лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, то говорят, что волна – поперечная.

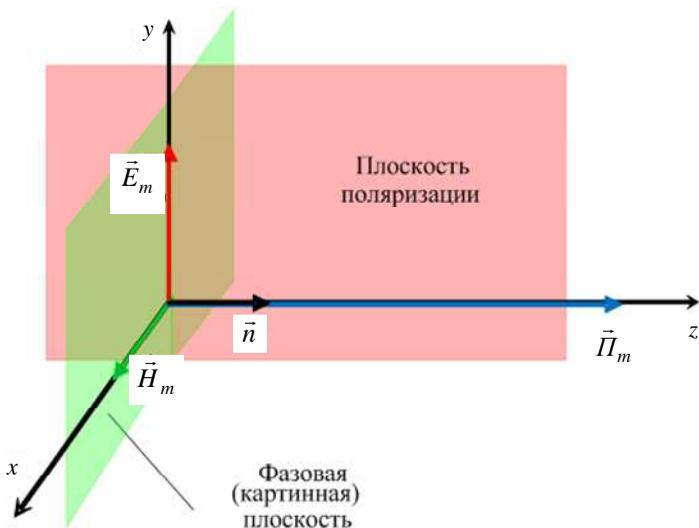


Рис. 2.1.3. Ортогональность векторов электрического и магнитного полей

### 2.1.4. Цилиндрические и сферические волны

Наряду с плоской ЭМВ в теории антенн рассматриваются цилиндрические волны, созданные некоторыми типами излучателей (например, бесконечно тонкой нитью, т.е. проводом тока) (рис. 2.1.4).

В этом случае однородное волновое уравнение  $\nabla_{\text{цил}}^2 \dot{E}(\xi, t) + k^2 \dot{E}(\xi, t) = 0$  аналогично уравнению (2.1.5), но используя оператор «набла квадрат» в цилиндрических координатах.

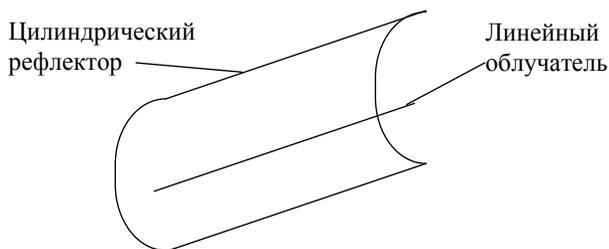


Рис. 2.1.4. К определению цилиндрической волны

Раскрывая его, можно получить дифференциальное уравнение 2-го порядка – так называемое цилиндрическое уравнение Бесселя, решение которого при отсутствии отраженной волны записывается в виде

$$\dot{\vec{E}}_m(\xi) = \vec{E}_m J_n(\xi),$$

где  $J_n(\xi)$  – цилиндрическая функция Бесселя 1-го рода  $n$ -го порядка.

В некоторых радионавигационных системах используются фазовые методы определения координат объектов. При этом в состав таких систем должны входить антенны, имеющие так называемый фазовый центр. Установлено, что для этого ЭМВ, излучаемая такой антенной, должна быть сферической. Примером такой антенны является симметричный вибратор, или зеркальная сферическая антенна с точечным облучателем.

В этом случае однородное волновое уравнение будет иметь вид:

$$\nabla_{\text{сфер}}^2 \dot{\vec{E}}(\xi, t) + k^2 \dot{\vec{E}}(\xi, t) = 0$$

также аналогичный уравнению (2.1.5), но используя оператор в сферических координатах. Раскрывая его, можно получить дифференциальное уравнение 2-го порядка, так называемое сферическое уравнение Бесселя, решение которого при отсутствии отраженной волны записывается в виде

$$\dot{\vec{E}}_m(\xi) = \vec{E}_m J_{n+1/2}(\xi),$$

где  $J_{n+1/2}(\xi)$  – сферическая функция Бесселя 1-го рода  $(n + 1/2)$ -го порядка. Она выражается через так называемую сферическую присоединительную функцию Лежандра.

### 2.1.5. Поляризация электромагнитных волн

Электромагнитные волны, как и любой колебательный процесс, характеризуется амплитудой, фазой и частотой. Однако, для полного описания этих трех параметров оказывается недостаточно. Существенным параметром для волнового процесса является поляризация электромагнитных волн.

Под поляризациями понимают закон изменения направления и величины вектора  $E$  за период колебаний.

Рассмотрим виды поляризации, для чего введем понятие плоскости поляризации. Плоскостью поляризации называется плоскость, проведенная через вектор  $E$  и направление распространения волны (вектор Пойнтинга).

Если при распространении плоской волны изменение во времени вектора  $E$  по величине и направлению не приводит к изменению ориентации плоскости поляризации в пространстве, то волна называется линейно-поляризованной. При этом поляризация называется вертикальной, если плоскость поляризации перпендикулярна плоскости  $XOY$ . Поляризация называется горизонтальной, если плоскость поляризации параллельна плоскости  $XOY$ . Другие случаи линейной поляризации описывают наклонную поляризацию. Она характеризуется углом наклона относительно плоскости  $XOY$  (рис. 2.1.5, *a*).

В тех случаях, когда пространственное положение плоскости поляризации изменяется, поляризация называется вращающейся.

Если вектор  $E$  остается постоянным по величине, но вращается с угловой скоростью в картинной плоскости (перпендикулярной направлению распространения волны), то поляризация называется круговой. При этом волна считается правого вращения, если, смотря по направлению распространения волны вектор  $E$  поворачивается по часовой стрелке. В другом случае (вращение против часовой стрелки), волна левой поляризации (рис. 2.1.5, *б*).

Если вектор  $E$  за период изменяет свою амплитуду совместно с поворотом плоскости поляризации, волна называется эллиптически поляризованной (рис. 2.1.5, *в*).

На рисунке 2.1.5 показаны также годографы вектора напряженности электрического поля. Для создания волн с вращающейся поляризацией часто используют сумму двух ортогональных линейно поляризованных волн с одинаковыми частотами:

$$E_x = E_{mx} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_x),$$

$$E_y = E_{my} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_y).$$

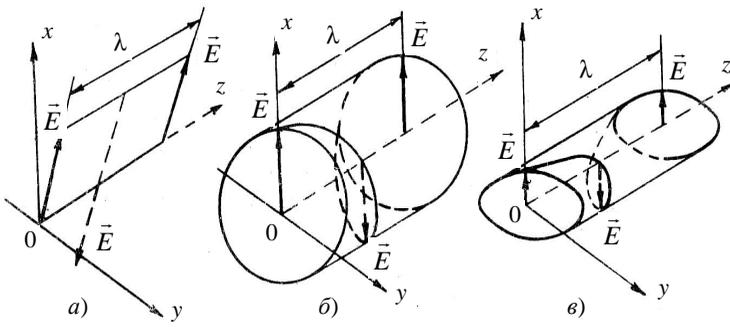


Рис. 2.1.5. Виды поляризации ЭМВ

Обозначим  $\varphi = \varphi_x - \varphi_y$ , тогда суммируя эти два колебания, возведя в квадрат левую и правую части, получим

$$\left(\frac{E_y}{E_{my}}\right)^2 - 2\left(\frac{E_y}{E_{my}}\right)\left(\frac{E_x}{E_{mx}}\right)\cos\varphi + \left(\frac{E_x}{E_{mx}}\right)^2 - e^{-2\alpha z}\sin\varphi = 0.$$

Это уравнение кривой второго порядка.

При этом, если сдвиг фаз  $\varphi = \varphi_x - \varphi_y = \pi/2$  и амплитуды колебаний равны между собой  $E_{mx} = E_{my} = E_m$ , то получим уравнение окружности

$$E_x^2 + E_y^2 = E_m^2 e^{-2\alpha z},$$

т.е. для создания волны с круговой поляризацией можно использовать сумму двух линейно поляризованных колебаний равных амплитуд со сдвигом фаз  $\pi/2$ .

Если взять два колебания с разными амплитудами и фазовым сдвигом  $\pi/2$ , получим уравнение эллипса. Аналогично уравнение эллипса получается, если суммировать два линейно поляризованных колебания с одинаковыми амплитудами и фазовым сдвигом  $0 < \varphi < \pi/2$ .

### 3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

---

---

#### 3.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭМВ В ИДЕАЛЬНОМ ДИЭЛЕКТРИКЕ

##### 3.1.1. Классификация сред по их электрическим свойствам, граничная частота

Имея представление о параметрах распространения ЭМВ в неограниченных средах, опишем их применительно к простейшему случаю – идеальному диэлектрику. Однако, вначале введем это понятие и ряд новых определений, касающихся свойств сред и основных параметров ЭМВ в них.

По своим электрическим свойствам среды характеризуются первичными электрическими параметрами. В зависимости от соотношений этих величин среды делят на: диэлектрики; полупроводники; проводники.

Известно, что характеристикой среды с проводимостью является комплексная проводимость  $\hat{\epsilon}_a = \epsilon_a(1 - \gamma/\omega\epsilon_a)$ , и для классификации сред надо учитывать соотношение величин  $\gamma$  и  $\omega\epsilon_a$ . Так при  $\gamma \geq 10 \omega\epsilon_a$  – проводник, при  $\gamma \leq 0,1 \omega\epsilon_a$  – диэлектрик, при  $0,1\omega\epsilon_a \leq \gamma \leq 10\omega\epsilon_a$  – полупроводник. Отношение проводимости среды  $\gamma$  к величине  $\omega\epsilon_a$  называется *тангенсом угла потерь*  $\text{tg}\Delta = \frac{\gamma}{\omega\epsilon_a}$ .

Поэтому класс среды может быть определен по тангенсу угла потерь: при  $\text{tg}\Delta > 10$  – проводник, при  $\text{tg}\Delta < 0,1$  – диэлектрик, при  $0,1 < \text{tg}\Delta < 10$  – полупроводник. На большое число материалов, применяющихся при изготовлении радиокомпонентов, величины тангенса угла потери приведены в справочной литературе.

Отсюда видно, что класс среды определяется не только первичными электрическими параметрами, но и частотой ЭМВ. Одна и та же среда при различных частотах может проходить весь диапазон классов.

Иногда вводят понятие граничной частоты, т.е. частоты, при которой токи проводимости и смещения равны:

$$|j_{\text{пр}}| = |j_{\text{см}}|,$$

$$|\gamma \dot{E}_m| = \left| \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_m}{\partial t} \right| = |\omega \varepsilon_a \dot{E}_m| \Rightarrow \gamma = \omega \varepsilon_a \Rightarrow \omega_{\text{сп}} = \gamma / \varepsilon_a,$$

при  $\omega > \omega_{\text{гр}}$  – диэлектрик ( $\omega \geq 10\omega_{\text{гр}}$ );

при  $\omega \approx \omega_{\text{гр}}$  – полупроводник ( $0,1\omega_{\text{гр}} \leq \omega \leq 10\omega_{\text{гр}}$ );

при  $\omega < \omega_{\text{гр}}$  – проводник ( $\omega \leq 0,1\omega_{\text{гр}}$ ).

*Граничная частота позволяет определить класс среды по частоте ЭМВ.*

Коэффициент распространения в средах с проводимостью становится комплексной величиной и может быть представлен в алгебраической  $\dot{k} = \beta - i\alpha$  и показательной  $\dot{k} = |\dot{k}| e^{-i\psi}$  формах, причем

$$|\dot{k}| = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}, \quad \psi = \text{arctg} \frac{\alpha}{\beta},$$

поэтому представляется необходимым выразить коэффициент фазы  $\beta$  и коэффициент затухания  $\alpha$  через параметры среды  $\varepsilon_a, \mu_a, \gamma$ .

Для коэффициентов затухания и фазы имеют место следующие выражения:

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2} + 1 \right]}, \quad (3.1.1a)$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu_a \varepsilon_a}{2} \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2} - 1 \right]}. \quad (3.1.1б)$$

В идеальном диэлектрике ( $\gamma = 0$ )  $\alpha = 0, \beta = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = k$ .

Среды с потерями ( $\gamma \neq 0$ ), в свою очередь, распределяются на диэлектрические, проводящие и среды, занимающие промежуточное положение. В диэлектрических средах  $\text{tg} \Delta = \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \ll 1$  и тем более

$\left( \frac{\gamma}{\omega \varepsilon_a} \right)^2 \ll 1$ , поэтому (3.1.1a) можно упростить, пренебрегая величи-

ной  $\frac{\gamma}{\omega \epsilon_a}$ . В этом случае коэффициент фазы будет определяться выражением

$$\beta \cong \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}. \quad (3.1.2)$$

Однако такое же упрощение для  $\alpha$  неприемлемо, так как обращает его в нуль, т.е. исключается возможность учета потерь на протяженных линиях радиосвязи. Более строгим подходом к реальному учету потерь в распространяющихся волнах будет использование разложения

$\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \epsilon_a}\right)^2}$  в степенной ряд, в котором достаточно ограничиться первыми двумя членами разложения

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{\omega \epsilon_a}\right)^2} \cong 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\omega \epsilon_a}\right)^2 + \dots \quad (3.1.3)$$

С учетом (3.1.3) формула (3.1.1б) приобретает вид

$$\alpha \cong \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (3.1.4)$$

Величина фазового сдвига соответственно будет определяться выражением

$$\psi = \arctg \frac{\alpha}{\beta} = \arctg \frac{\gamma}{2\omega \epsilon_a} \cong \frac{\gamma}{2\omega \epsilon_a}. \quad (3.1.5)$$

В проводящих средах  $\operatorname{tg} \Delta = \frac{\gamma}{\omega \epsilon_a} \gg 1$ ,  $\left(\frac{\gamma}{\omega \epsilon_a}\right)^2 \gg 1$ , и «единицами» в формулах (3.1.1) можно пренебречь, поэтому формулы (3.1.1а) и (3.1.1б) приобретают вид:

$$\alpha \cong \beta = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \gamma}{2}}, \quad (3.1.6а)$$

$$|k| \cong \sqrt{\omega \mu_a \gamma}, \quad (3.1.6б)$$

$$\psi = \arctg \frac{\alpha}{\beta} \cong \arctg 1 \cong \frac{\pi}{4}. \quad (3.1.6в)$$

В средах, занимающих промежуточное положение между проводниками и диэлектриками, коэффициенты фазы и затухания определяются по полным формулам (3.1.2).

Таким образом, при рассмотрении распространения электромагнитных волн в конкретной среде необходимо определить класс среды (диэлектрик, проводник или среда, занимающая промежуточное положение) по величине  $\operatorname{tg}\Delta = \frac{\gamma}{\omega\epsilon_a}$ , так как одна и та же среда с потерями

может относиться к разным классам для электромагнитных волн разных частот.

В средах с потерями волновое сопротивление становится комплексной величиной

$$\dot{Z} = \frac{\omega\mu_a}{\dot{k}} = \frac{\omega\mu_a}{|\dot{k}|} e^{i\psi}, \quad (3.1.7)$$

и, соответственно, формулы поля плоской электромагнитной волны должны быть записаны с учетом этого.

### 3.1.2. Распространение плоских ЭМВ в идеальном диэлектрике

Идеальный диэлектрик характеризуется определенными диэлектрической ( $\epsilon_a$ ) и магнитной ( $\mu_a$ ) проницаемостями и  $\gamma = 0$ . В этом случае  $\epsilon_a$  является величиной вещественной и, следовательно, коэффициент распространения  $k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$  действителен.

Пусть в идеальном диэлектрике распространяется плоская ЭМВ (рис. 3.1.1).

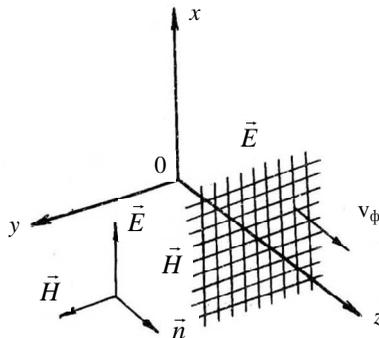


Рис. 3.1.1. Плоская ЭМВ

Выражения для составляющих ЭМП имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}} &= \dot{\vec{E}}_m(\xi)e^{i\omega t} = \bar{\vec{E}}_m e^{-ik\xi} e^{i\omega t} = \bar{\vec{E}}_m e^{i(\omega t - k\xi)} \\ \dot{\vec{H}} &= \frac{k}{\omega\mu_a} \left[ \vec{n} \cdot \dot{\vec{E}} \right] e^{i\omega t} = \dot{\vec{H}}_m(\xi)e^{i\omega t} = \bar{\vec{H}}_m(\xi)e^{-ik\xi} e^{i\omega t} = \bar{\vec{H}}_m e^{i(\omega t - k\xi)}.\end{aligned}$$

Или в действительных амплитудах:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \bar{\vec{E}}_m \cos(\omega t - k\xi), \\ \vec{H} &= \bar{\vec{H}}_m \cos(\omega t - k\xi).\end{aligned}$$

Экспоненциальный множитель характеризует фазовый набег, который приобретают составляющие плоской ЭМВ при распространении. Так как фазовые набег электрической и магнитной составляющих равны, то можно сделать следующие выводы:

1. В идеальном диэлектрике вектора  $E$  и  $H$  синфазны.

2. Скорость распространения фазового фронта постоянна и определяется свойствами среды, т.е.  $v = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ . В вакууме фазовая скорость равна скорости света  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 3 \cdot 10^8$  [м/с].

3. ЭМВ в пространстве характеризуется длиной волны. Длина волны – кратчайшее расстояние между двумя точками в пространстве, на котором фаза меняется на  $2\pi$ . Постоянная распространения характеризует набег фазы на единицу расстояния.

Длина волны – расстояние, на которое распространяется ЭМВ за период колебаний. Так как период колебаний не зависит от свойств среды, а скорость зависит, фазовый множитель имеет вид  $e^{-ik\xi}$ , то при  $\xi_2 > \xi_1$ ,  $\varphi_1 > \varphi_2$  длина волны будет различна для различных сред (с различными первичными электрическими параметрами).

4. Коэффициент распространения для идеального диэлектрика называют волновым числом.

5. Волновое сопротивление в идеальном диэлектрике веществом  $z = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}$ . В идеальном диэлектрике ( $\gamma = 0$ )  $\alpha = 0$ ,  $\beta = \omega\sqrt{\epsilon_a \mu_a} = k$ , т.е. затухания волны по мере ее распространения вглубь идеального диэлектрика не происходит.

Таким образом, полученные результаты позволяют перейти к изучению основных параметров радиоволн в различных средах.

## 3.2. ПЛОСКИЕ ЭМВ В СРЕДАХ С ПОТЕРЯМИ

### 3.2.1. Распространение плоских ЭМВ в среде с потерями

Как ранее было отмечено, коэффициент распространения в средах с проводимостью становится комплексной величиной и может быть представлен в алгебраической  $\dot{k} = \beta - i\alpha$  и показательной формах

$$\dot{k} = |\dot{k}| e^{-i\psi}, \quad (3.2.1)$$

причем

$$|\dot{k}| = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}, \quad (3.2.2)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta}. \quad (3.2.3)$$

Среды с потерями ( $\gamma \neq 0$ ), в свою очередь, распределяются на диэлектрические, проводящие и среды, занимающие промежуточное положение. В диэлектрических средах  $\operatorname{tg}\Delta = \frac{\gamma}{\omega\epsilon_a} \ll 1$  и тем более

$\left(\frac{\gamma}{\omega\epsilon_a}\right)^2 \ll 1$ , поэтому можно пренебречь величиной  $\frac{\gamma}{\omega\epsilon_a}$ . В этом случае коэффициент фазы будет определяться выражением

$$\beta \cong \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}. \quad (3.2.4)$$

Однако такое же упрощение для  $\alpha$  неприемлемо, так как обращает его в нуль, т.е. исключается возможность учета потерь на протяженных линиях радиосвязи. Из материала прошлой лекции:

$$\alpha \cong \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (3.2.5)$$

Величина фазового сдвига соответственно будет определяться выражением

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \operatorname{arctg} \frac{\gamma}{2\omega\epsilon_a} \cong \frac{\gamma}{2\omega\epsilon_a}. \quad (3.2.6)$$

В проводящих средах:

$$\alpha \cong \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu_a\gamma}{2}}, \quad (3.2.7)$$

$$|\dot{k}| \cong \sqrt{\omega\mu_a\gamma}, \quad (3.2.8)$$

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} \cong \operatorname{arctg} 1 \cong \frac{\pi}{4}. \quad (3.2.9)$$

В средах, занимающих промежуточное положение между проводниками и диэлектриками, коэффициенты фазы и затухания определяются по полным формулам.

В средах с потерями волновое сопротивление становится комплексной величиной

$$\dot{Z} = \frac{\omega\mu_a}{\dot{k}} = \frac{\omega\mu_a}{|\dot{k}|} e^{i\psi}. \quad (3.2.10)$$

Для диэлектрических сред:  $Z \approx \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}$ ; для проводящих сред:

$Z \approx \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{\gamma}}$ , и, соответственно, формулы поля плоской электромагнитной волны с учетом выражения для волнового сопротивления могут быть представлены в виде:

в показательной форме комплексного изображения

$$\dot{\vec{E}} = \dot{\vec{E}}_m(\xi) e^{i\omega t} = \vec{E}_m e^{-ik\xi} e^{i\omega t} = \vec{E}_m e^{-\alpha\xi} e^{i(\omega t - \beta\xi)}, \quad (3.2.11a)$$

$$\dot{\vec{H}} = \frac{1}{Z} \left[ \vec{n} \times \dot{\vec{E}}_m(\xi) \right] e^{i\omega t} = \frac{|\dot{k}|}{\omega\mu_a} \left( \vec{n} \times \dot{\vec{E}}_m \right) e^{-\alpha\xi} e^{i(\omega t - \beta\xi - \psi)}, \quad (3.2.11b)$$

в тригонометрической форме

$$\vec{E} = \vec{E}_m e^{-\alpha\xi} \cos(\omega t - \beta\xi), \quad (3.2.12a)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_m e^{-\alpha\xi} \cos(\omega t - \beta\xi - \psi) = \frac{|\dot{k}|}{\omega\mu_a} (\vec{n} \times \vec{E}_m) e^{-\alpha\xi} \cos(\omega t - \beta\xi - \psi). \quad (3.2.12b)$$

Из (3.2.11) и (3.2.12) следует, что поле плоской волны в среде с потерями обладает следующими свойствами:

1) векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  перпендикулярны друг другу и направлению распространения  $\vec{n}$  волны, т.е. волна является поперечной, но между

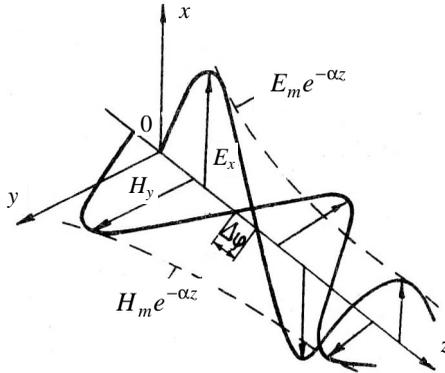


Рис. 3.2.1. Плоская ЭМВ в среде с потерями

$E$  и  $H$  появляется фазовый сдвиг  $\psi = \text{arctg} \frac{\alpha}{\beta}$ , который тем меньше,

чем меньше коэффициент затухания  $\alpha$ ;

2) амплитуды векторов  $E$  и  $H$  убывают по экспоненциальному закону с увеличением расстояния  $\xi$ ;

3) поверхности равных амплитуд совпадают с поверхностями равных фаз, поэтому они, как и волны в среде без потерь, являются однородными волнами (рис. 3.2.1).

Вектор Пойнтинга и средний за период вектор Пойнтинга будут определяться выражениями:

$$\vec{P} = \frac{|k|}{2\omega\mu_a} E_m^2 e^{-2\alpha\xi} \left[ \cos\psi + \cos 2\left(\omega t - \beta\xi - \frac{\psi}{2}\right) \right] \vec{n}; \quad (3.2.13a)$$

$$\vec{P}_{\text{cp}} = \frac{|k|}{2\omega\mu_a} E_m^2 e^{-2\alpha\xi} \cos\psi \vec{n}, \quad (3.2.13б)$$

из которых видно, что в среде с потерями вектор Пойнтинга может иметь направление, противоположное направлению распространения волны, в то время как средний за период вектор Пойнтинга всегда совпадает с направлением распространения плоской волны. Ослабление или затухание плотности потока мощности происходит как мгновенного значения  $P$ , так и среднего за период  $\bar{P}$ , происходит вдвое быстрее, чем амплитуд составляющих.

Затухание измеряется в децибелах

$$N_{[\text{дБ}]} = 10 \lg \frac{P_{\text{ср}}(\xi)}{P_{\text{ср}}(\xi + \Delta\xi)} = 20 \lg \frac{E_m(\xi)}{E_m(\xi + \Delta\xi)}. \quad (3.2.14)$$

Подставляя, получим

$$N_{[\text{дБ}]} = 8,686\alpha\Delta\xi = \alpha_{[\text{дБ/м}]} \Delta\xi, \quad (3.2.15)$$

где  $\alpha_{[\text{дБ/м}]}$  – погонное затухание (затухание на единицу длины в дБ/м).

Из (3.2.5) погонное затухание в дБ/м определяется как

$$\alpha_{[\text{дБ/м}]} = 8,686\alpha. \quad (3.2.16)$$

### 3.2.2. Фазовая и групповая скорости ЭМВ, явление дисперсии и ее виды

Фазовая скорость плоской электромагнитной волны в средах с потерями

$$v = \frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega}{\beta} \quad (3.2.17)$$

определяется коэффициентом фазы и зависит от частоты электромагнитных колебаний. Зависимость фазовой скорости гармонических волн от их частоты называется дисперсией, поэтому в средах с потерями имеет место дисперсия.

Скорость распространения энергии

$$v_g = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (3.2.18)$$

Таким образом, подтверждается естественный вывод о том, что энергия гармонической волны переносится полем волны и распространяется с фазовой скоростью электромагнитной волны. Этот вывод справедлив для любых однородных изотропных сред.

В средах с потерями или в других условиях, например, в волноводных линиях передачи, фазовая скорость зависит от частоты электромагнитных колебаний, т.е. имеет место дисперсия. Проходя один и тот же путь, гармонические волны, составляющие единый пакет волн реального сигнала, получают различные фазовые сдвиги, что ведет к искажению формы самого сигнала. Очевидно, чем уже спектр сигнала, тем меньше разница между фазовыми скоростями гармонических составляющих сигнала, тем меньше его искажение.

Для характеристики перемещения энергии какого-либо сигнала, относящегося к узкополосным сигналам, вводят понятие **групповой скорости** сигнала, т.е. скорости перемещения максимума огибающей этого сигнала. В общем случае любой реальный сигнал может быть представлен в виде бесконечной суммы гармонических волн, которую на примере напряженности электрического поля электромагнитной волны сигнала можем записать в виде интеграла Фурье

$$\dot{E}(t, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} A_m(\omega) e^{i[\omega t - \beta(\omega)\xi]} d\omega, \quad (3.2.19)$$

где  $A_m(\omega)$  – амплитуда каждой из гармонических волн;  $\beta(\omega)$  – коэффициент фазы каждой из этих волн.

Если спектр сигнала достаточно узкий ( $2\Delta\omega \ll \omega_0$ ), т.е. заключен в интервале частот  $-\omega_0 - \Delta\omega \ll \omega_0 + \Delta\omega$ , где  $\omega_0$  – центральная частота спектра сигнала,  $2\Delta\omega$  – активная ширина спектра сигнала, то вне этого интервала  $A_m(\omega) \equiv 0$ , поэтому (3.2.18) представим в виде

$$\dot{E}(t, \xi) = \int_{\omega_0 - \Delta\omega}^{\omega_0 + \Delta\omega} A_m(\omega) e^{i[\omega t - \beta(\omega)\xi]} d\omega. \quad (3.2.20)$$

Коэффициент фазы можно представить рядом Тейлора в окрестности  $\omega_0$

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \beta'(\omega_0)(\omega - \omega_0) + \beta''(\omega_0) \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2!} + \dots \quad (3.2.21)$$

и для узкополосного сигнала ограничиться лишь первыми двумя членами. Это позволяет перейти к новой переменной  $\Omega = \omega - \omega_0$  для рассмотрения сигнала в пределах спектра и получить

$$\begin{aligned} \dot{E}(t, \xi) &\cong \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} A_m(\omega_0 + \Omega) e^{i[\omega_0 t + \Omega t - \beta(\omega_0)\xi - \beta'(\omega_0)\Omega\xi]} d\Omega = \\ &= \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} A_m(\omega_0 + \Omega) e^{i\Omega[t - \beta'(\omega_0)\xi]} d\Omega e^{i[\omega_0 t - \beta(\omega_0)\xi]}. \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Теперь (3.2.22) можем представить в виде

$$\dot{E}(t, \xi) \cong \dot{E}_m [t - \beta'(\omega_0)\xi] e^{i[\omega_0 t - \beta(\omega_0)\xi]}, \quad (3.2.23)$$

из которого видно, что аргумент  $t - \beta'(\omega_0)\xi$  амплитудного множителя  $\dot{E}_m[t - \beta'(\omega_0)\xi]$  отличается от аргумента, определяющего распространение центральной части спектра. Именно аргумент амплитудного множителя характеризует распространение всех составляющих спектра в целом, т.е. распространение пакета (группы) волн сигнала, его энергии.

При  $t - \beta'(\omega_0)\xi = \text{const}$  с непрерывно меняющимся временем пакет волн будет перемещаться в пространстве со скоростью

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\beta'(\omega_0)} = \frac{1}{\left(\frac{d\beta}{d\omega}\right)_{\omega=\omega_0}}, \quad (3.2.24)$$

называемой групповой скоростью или скоростью распространения энергии сигнала. Индекс  $\omega = \omega_0$  в (3.2.24) можно опустить ввиду произвольности выбора центральной частоты.

Условием применимости (3.2.24) является малая скорость изменения коэффициента фазы вблизи частоты и узость спектра сигнала, так как в разложении (3.2.21) отброшены члены порядка выше первого. При невыполнении этих условий влияние дисперсии становится весьма заметным и сигнал в процессе распространения так сильно меняет свою форму, что само понятие групповой скорости теряет смысл.

В средах без потерь ( $\gamma = 0$ )  $\beta = k = \omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a}$ , поэтому групповая скорость совпадает с фазовой

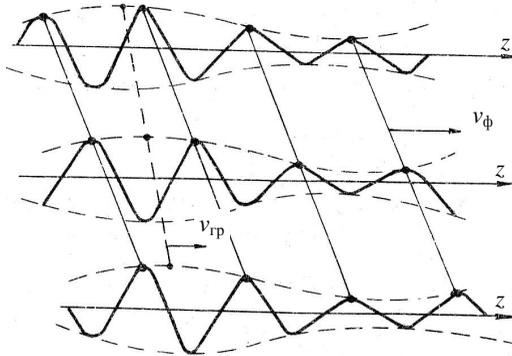
$$v_{\text{гр}} = \frac{1}{\beta'} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a\mu_a}}. \quad (3.2.25)$$

В средах с потерями фазовая и групповая скорости не совпадают, но связаны между собой (рис. 3.2.2). Для установки этой связи продифференцируем выражение (3.2.17) по частоте

$$\beta \frac{dv}{d\omega} + v \frac{d\beta}{d\omega} = 1, \quad (3.2.26)$$

из которого получим

$$v_{\text{гр}} = \frac{v}{1 - \beta \frac{dv}{d\omega}}. \quad (3.2.27)$$



**Рис. 3.2.2.** К понятиям «фазовая» и «групповая» скорости

Соотношение (3.2.27) показывает, что в средах с аномальной дисперсией  $\left(\frac{dv}{d\omega} > 0\right)$ , к которым относятся однородные изотропные среды с потерями, групповая скорость больше фазовой, в то время как в средах или в условиях с нормальной дисперсией  $\left(\frac{dv}{d\omega} < 0\right)$  она меньше фазовой скорости электромагнитных колебаний в них.

### 3.2.3. Поверхностный эффект

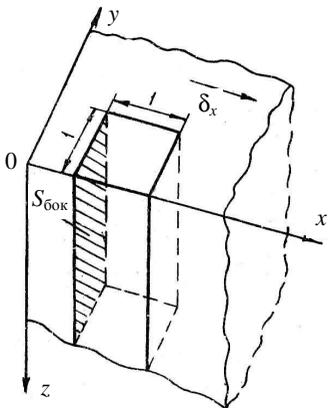
Явление концентрации электромагнитного поля и вызванного им высокочастотного тока у поверхности проводника получило название **поверхностного эффекта**.

Полезным проявлением этого эффекта является возможность применения проводников для экранирования различных радиоустройств и защиты человека от электромагнитных излучений. Однако поверхностный эффект приводит к возрастанию активного сопротивления проводника при протекании высокочастотного тока в нем.

При этом речь ведут о глубине проникновения  $\delta$  ЭМВ в материал, который определяется как глубина проводника, на которой уровень напряженности поля уменьшается в  $e$  раз от исходного, тогда

$$\delta = 1 / \alpha. \quad (3.2.28)$$

Рассмотрим явление поверхностного эффекта и учет его на примере шлифа проводника с размерами, во много раз меньшими длины волны, падающей на поверхность шлифа (рис. 3.2.3).



**Рис. 3.2.3. К пояснению поверхностного эффекта**

электромагнитной волной в проводнике и определяемого как поток плотности тока через поверхность  $S = l\xi$ ,

$$\dot{I}_m = \frac{rE_m}{\delta(1+l)}l. \quad (3.2.30)$$

Ток  $\dot{I}_m$  (3.2.23) можно считать током, вызванным высокочастотным напряжением с известной амплитудой  $\dot{U}_m$  на поверхности  $\xi = 0$ .

Поверхностное сопротивление

$$\dot{Z}_s = \frac{E_m}{j_{sm}} = \frac{\alpha}{\gamma} + i \frac{\alpha}{\gamma} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} + i \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} = R_s + iX_s. \quad (3.2.31)$$

Понятие поверхностного сопротивления определяет волновое сопротивление электромагнитной волны в проводящей среде. Поверхностное сопротивление (3.2.31), а значит и сопротивление проводника, является активно-индуктивным, поэтому потери энергии на нагрев проводника определяются его активной частью

$$R_{np} = R_s \frac{L}{l} = \sqrt{\frac{\omega\mu_a}{2\gamma}} \frac{L}{l}. \quad (3.2.32)$$

Очевидно, что сравнивать потери в проводнике при протекании в нем токов высокой частоты и постоянного тока можно только по вели-

Под действием электрического поля волны в проводнике протекает ток проводимости, причем амплитуда его плотности и амплитуда электрического поля волны убывает по экспоненциальному закону с увеличением расстояния вглубь проводника, в котором  $\beta \cong \alpha$ :

$$\dot{j}_m \cong \gamma \bar{E}_m e^{-\alpha(1+i)\xi}, \quad (3.2.29)$$

где  $E_m$  – амплитуда поля на поверхности шлифа.

Теоретически поле плоской электромагнитной волны проникает в проводник на бесконечно большое расстояние, поэтому комплексная амплитуда тока проводимости, вызванного

чинам погонных сопротивлений для высокочастотных токов и постоянного тока.

Погонное сопротивление постоянному току определяется по формуле:

$$R_{\text{оп}} = \frac{1}{\gamma S}, \quad (3.2.33)$$

в которой применительно к рис. 3.2.3. неизвестна только площадь поперечного сечения  $S = l\xi$  из-за неопределенности расстояния. Но эта неопределенность легко устраняется, если ограничиться слоем  $\xi = 3\delta = \frac{3}{\alpha}$ , в котором концентрируется 99% энергии волны в проводнике, поэтому

$$R_{\text{оп}} \cong \frac{1}{\gamma l 3\delta}. \quad (3.2.34)$$

В то же время активное погонное сопротивление проводника при протекании в нем высокочастотных токов

$$R_f = \frac{R_s}{1} = \frac{\sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\gamma}}}{1}, \quad (3.2.35)$$

поэтому  $\frac{R_f}{R_{\text{оп}}} = 3$ , т.е. погонное сопротивление проводника при высокочастотных токах практически в три раза превосходит погонное сопротивление того же проводника при постоянном токе.

Для уменьшения погонного сопротивления проводников, применяемых для монтажа радиоаппаратуры, используются высокопроводящие металлы, из которых наиболее употребительна медь. Кроме того, применяются все меры к увеличению поперечного размера  $l$  путем изготовления и применения многожильных проводов, нанесения сравнительно широких, но тонких полос проводника на диэлектрическую основу плат.

Вредное воздействие электромагнитного поля оценивается энергией нагрева. Поэтому более вредное воздействие оказывают ЭМП более высоких частот. Для защиты организма от вредного воздействия такого поля применяют специальные экранирующие костюмы из медной проволоки. Необходимо помнить, что энергия ЭМП сильно убывает с расстоянием.

## 4. ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

### 4.1. ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭМВ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

#### 4.1.1. Основные соотношения, описывающие падение плоской ЭМВ на границу раздела двух сред

В реальных условиях ЭМВ всегда встречают на своем пути препятствия, оказывающие влияние на их распространение. Рассмотрим случай, когда препятствием является среда, ограниченная бесконечно плоской границей. Будем считать, что плоскость раздела есть граница раздела двух однородных изотропных сред с параметрами  $\epsilon_{a1}, \mu_{a1}, \gamma_1$  и  $\epsilon_{a2}, \mu_{a2}, \gamma_2$ . Единичный вектор нормали  $\vec{n}_0$  к плоскости  $S$  направлен из второй среды в первую. Положение каждой точки пространства будем определять радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведенным из точки  $O$ , расположенной на плоскости  $S$  (рис. 4.1.1).

Плоскостью падения называется плоскость, содержащая вектор нормали и вектор падающей волны  $n_1$ .

Пусть на границу раздела двух сред падает плоская волна  $E_1$ , распространяющаяся в среде I. Для удовлетворения граничных условий в

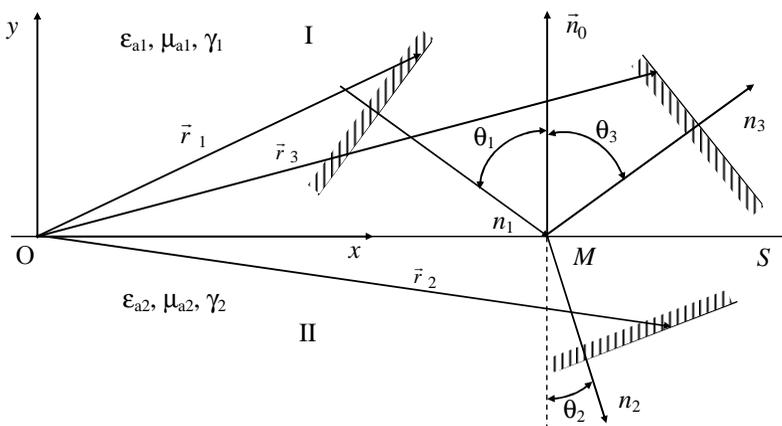


Рис. 4.1.1. Падение плоской волны на границу раздела двух сред

точке  $M$  необходимо предположить, что существуют волны: преломленная  $E_2$  и отраженная  $E_3$ . Направление движения волн будем характеризовать углами: падения –  $\theta_1$ , отражения –  $\theta_3$ , преломления –  $\theta_2$ .

Необходимо определить соотношения между:

- 1) частотами волн;
- 2) направлениями распространения;
- 3) амплитудами.

Предположим, что все волны плоские, тогда справедлива запись:

– падающая волна  $\dot{\vec{E}}_1 = \vec{E}_{m1} e^{i(\omega t - k_1 \xi)}$ . Учитывая, что уравнение плоскости в этом случае имеет вид  $\xi = \vec{n}_1 \cdot \vec{r}$ , запишем

$$\dot{\vec{E}}_1 = \vec{E}_{m1} e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})};$$

– отраженная волна (рассуждения аналогичные)

$$\dot{\vec{E}}_3 = \vec{E}_{m3} e^{i(\omega_3 t - \vec{k}_3 \vec{r})};$$

– преломленная волна  $\dot{\vec{E}}_2 = \vec{E}_{m2} e^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r})}$ .

В этих выражениях под  $\vec{k}$  понимается волновой вектор, имеющий длину, равную волновому числу и направление, совпадающее с направлением распространения волны, т.е. с вектором  $\vec{n}$ .

На границе раздела в точке  $M$  должно выполняться граничное условие для тангенциальных компонент напряженности электрического поля (их непрерывность):

$$\left( \dot{\vec{E}}_1 + \dot{\vec{E}}_3 \right) \times \vec{n}_0 = \dot{\vec{E}}_2 \times \vec{n}_0,$$

или в развернутом виде

$$\left[ \dot{\vec{E}}_1 e^{i(\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r})} + \dot{\vec{E}}_3 e^{i(\omega_3 t - \vec{k}_3 \vec{r})} \right] \times \vec{n}_0 = \dot{\vec{E}}_2 e^{i(\omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r})} \times \vec{n}_0. \quad (4.1.1)$$

Можно показать, что одним из условий выполнения равенства (4.1.1) в любой момент времени для любой точки пространства

$$\omega_1 t - \vec{k}_1 \vec{r} = \omega_2 t - \vec{k}_2 \vec{r} = \omega_3 t - \vec{k}_3 \vec{r}, \quad (4.1.2)$$

а это возможно при

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3, \quad (4.1.3)$$

$$\vec{k}_1 \vec{r} = \vec{k}_2 \vec{r} = \vec{k}_3 \vec{r}, \quad (4.1.4)$$

так как сумма двух гармонических функций будет гармонической функцией только при равенстве частот.

Итак, соотношение между частотами установлено – они равны.

Установим теперь связь между направлениями распространения, т.е. между углами  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ .

Из равенства (4.1.4) запишем:  $\vec{k}_1 \vec{r} = \vec{k}_3 \vec{r} = (\vec{k}_1 - \vec{k}_3) \vec{r} = 0$ .

Так как для точки  $M$  вектор  $\vec{r}$  лежит в плоскости  $S$ , то  $(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) \perp \vec{r}$ , и, следовательно, параллелен вектору нормали  $\vec{n}_0$ .

Тогда справедливо  $(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) \times \vec{n}_0 = 0$ .

Раскрывая векторное произведение, получим  $k_1 \sin \theta_1 = k_3 \sin \theta_3$ , но рассматриваемые векторы находятся в I среде, поэтому

$$\sin \theta_1 = \sin \theta_3, \Rightarrow \theta_1 = \theta_3. \quad (4.1.5)$$

Это равенство получило название **1-го закона Снеллиуса** – угол падения равен углу отражения, векторы падающей и отраженной волн лежат в плоскости падения.

Рассуждая аналогично для равенства  $\vec{k}_1 \vec{r} = \vec{k}_2 \vec{r}$ , получим

$$k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2,$$

или

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{k_2}{k_1}. \quad (4.1.6)$$

Это – **второй закон Снеллиуса**, или закон синусов. Отношение синусов углов падения и преломления есть величина постоянная, равная обратному отношению коэффициентов распространения граничащих сред.

Введем понятие показателя преломления  $N$ , как отношения скорости распространения ЭМВ в свободном пространстве к скорости распространения в среде, для которой определяется  $N$ .

Для идеальных диэлектриков  $k_1 = \omega \sqrt{\epsilon_{a1} \mu_{a1}}$ ,  $k_2 = \omega \sqrt{\epsilon_{a2} \mu_{a2}}$ , кроме того, для большинства диэлектриков можно считать  $\mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_0$ , т.е.

$$N = \frac{c}{v} = \frac{\sqrt{\epsilon_a \mu_0}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon}. \quad (4.1.7)$$

Для идеальных диэлектриков можно записать волновое сопротивление

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}}. \quad (4.1.7a)$$

Учитывая (4.1.7) и (4.1.7а), можно показать, что

$$\frac{k_2}{k_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad \text{и} \quad \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{Z_1}{Z_2}. \quad (4.1.8)$$

Таким образом, с помощью законов Снеллиуса по известному углу падения определяются углы отражения и преломления. Выражение (4.1.8) может быть записано и через коэффициенты преломления и через волновые сопротивления сред.

#### 4.1.2. Коэффициенты Френеля для волн различной поляризации

Перейдем к следующей поставленной нами задаче – определению напряженности полей преломленной и отраженной волн. Используем введенное понятие плоскости падения как плоскости, в которой лежат вектора  $n_0$  и  $k_1$ . В общем случае направление вектора  $\dot{E}_1$  падающей волны может быть произвольным, но он всегда может быть разложен на составляющую, лежащую в плоскости падения, и составляющую, перпендикулярную ей (или составляющую, лежащую в плоскости  $S$ ).

Рассмотрим первый случай:

1. Вектор  $\dot{E}_1$  (см. рис. 4.1.2) лежит в плоскости падения (считаем волну вертикально поляризованной). Вектор  $\dot{H}_1$  соответственно перпендикулярен  $\dot{E}_1$  и, значит, параллелен  $S$ .

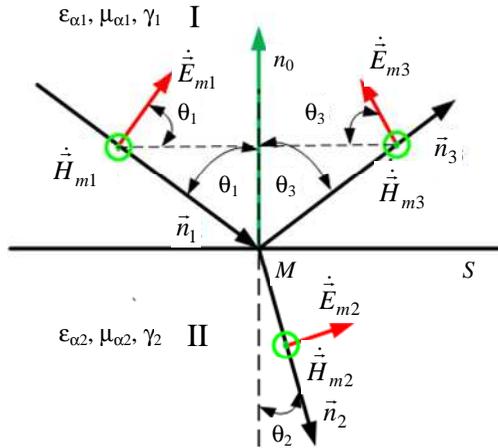


Рис. 4.1.2. Падение вертикально поляризованной волны на границу раздела двух сред

Связь будем искать в виде

$$E_{m2} = T_{\parallel} E_{m1}; \quad E_{m3} = R_{\parallel} E_{m1},$$

где  $R_{\parallel}$  и  $T_{\parallel}$  – коэффициенты Френеля для вертикально поляризованной отраженной и преломленной волн соответственно.

Таким образом, в этом случае векторы  $\dot{\vec{E}}_1, \dot{\vec{E}}_2, \dot{\vec{E}}_3$ , лежат в плоскости падения, а векторы  $\dot{\vec{H}}_1, \dot{\vec{H}}_2, \dot{\vec{H}}_3$  перпендикулярны ей и параллельны плоскости раздела сред  $S$ , причем  $\dot{\vec{H}}_1 \cdot \vec{n}_0 = \dot{\vec{H}}_2 \cdot \vec{n}_0 = \dot{\vec{H}}_3 \cdot \vec{n}_0 = 0$ .

Коэффициенты Френеля для вертикально (параллельно) поляризованной волны имеют вид:

$$T_{\parallel} = \frac{2N_1 \cos \theta_1}{N_2 \cos \theta_1 + N_1 \cos \theta_2}; \quad R_{\parallel} = \frac{N_2 \cos \theta_1 - N_1 \cos \theta_2}{N_2 \cos \theta_1 + N_1 \cos \theta_2}; \quad (4.1.9)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}; \quad R_{\parallel} = \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_1 + Z_2 \cos \theta_2}. \quad (4.1.9a)$$

2. Во втором случае вектор  $\dot{\vec{E}}_1$  лежит в плоскости, перпендикулярной плоскости падения (рис. 4.1.3).

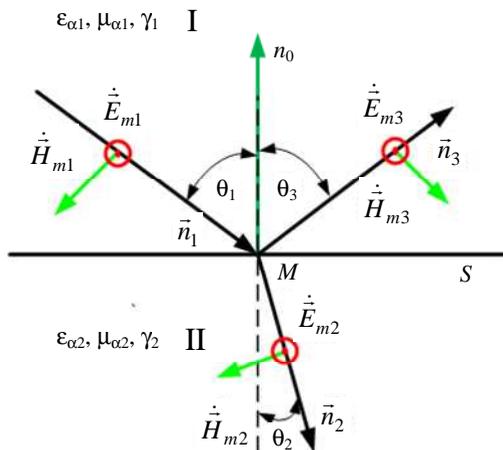


Рис. 4.1.3. Падение горизонтально поляризованной волны на границу раздела двух сред

Амплитудную связь будем искать в том же виде

$$\dot{\vec{E}}_{m2} = T_{\perp} \dot{\vec{E}}_{m1}; \quad \dot{\vec{E}}_{m3} = R_{\perp} \dot{\vec{E}}_{m1},$$

где  $R_{\perp}$  и  $T_{\perp}$  – коэффициенты Френеля отраженной и преломленной волн соответственно для случая горизонтальной (перпендикулярной) поляризации вектора  $E$ .

Векторы  $\dot{\vec{E}}_1, \dot{\vec{E}}_2, \dot{\vec{E}}_3$  лежат в плоскости  $S$ , причем  $\dot{\vec{E}}_1 \cdot \vec{n}_0 = \dot{\vec{E}}_2 \cdot \vec{n}_0 = \dot{\vec{E}}_3 \cdot \vec{n}_0$ .

Вектора  $\dot{\vec{H}}_1, \dot{\vec{H}}_2, \dot{\vec{H}}_3$  лежат в плоскости падения. Коэффициенты Френеля в этом случае имеют вид

$$T_{\perp} = \frac{2N_1 \cos \theta_1}{N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2}; \quad R_{\perp} = \frac{N_1 \cos \theta_1 - N_2 \cos \theta_2}{N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2}, \quad (4.1.10)$$

$$T_{\perp} = \frac{2Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2}; \quad R_{\perp} = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_1 + Z_1 \cos \theta_2}. \quad (4.1.10 \text{ a})$$

Иначе коэффициенты Френеля еще называют коэффициентами отражения и преломления (прохождения). Иногда интересуются не амплитудными соотношениями между отраженными, преломленными и падающими волнами, а энергетическими. Если среднее за период значение мощности падающей волны обозначим  $\Pi_{\text{ср1}}$ , отраженной –  $\Pi_{\text{ср3}}$  и преломленной  $\Pi_{\text{ср2}}$ , то в соответствии с законом сохранения энергии запишем

$$\Pi_{\text{ср1}} = \Pi_{\text{ср2}} + \Pi_{\text{ср3}}. \quad (4.1.11)$$

Пронормируем это выражение

$$\frac{\Pi_{\text{ср2}}}{\Pi_{\text{ср1}}} + \frac{\Pi_{\text{ср3}}}{\Pi_{\text{ср1}}} = 1. \quad (4.1.12)$$

Первый член равенства (4.1.12) есть коэффициент прохождения  $T$ , а второй – коэффициент отражения  $R$ . Они определяются из соотношений через коэффициенты Френеля. В общем случае коэффициенты Френеля являются комплексными, поэтому запишем коэффициент отражения через комплексный и комплексно сопряженный коэффициенты Френеля:  $T = 1 - R$ ;  $R = \dot{R}_{\parallel} \dot{R}_{\parallel}^*$ , или для перпендикулярной поляризации  $R = \dot{R}_{\perp} \dot{R}_{\perp}^*$ .

Для идеальных диэлектриков  $R = R_{\parallel}^2$ ,  $R = R_{\perp}^2$ .

### 4.1.3. Нормальное падение плоской ЭМВ на границу раздела двух сред

В этом случае  $\theta_1 = 0$ . Углы отражения и преломления из законов Снеллиуса также равны нулю. Векторы  $\dot{E}_1$  и  $\dot{H}_1$  лежат в плоскости  $S$ .

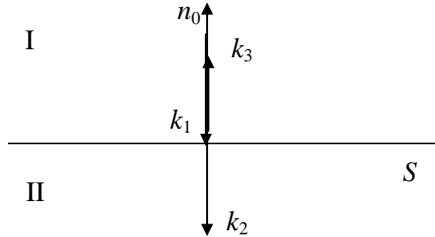


Рис. 4.1.4. Нормальное падение ЭМВ на границу раздела двух сред

Подставляя  $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = 0$  в (4.1.10), (4.1.11), получим  $T_{\parallel} = T_{\perp} = \frac{2N_1}{N_1 + N_2}$ ;  $-R_{\parallel} = R_{\perp} = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}$ . Учитывая связь между показателями преломления и волновым сопротивлением сред  $N_2 / N_1 = Z_1 / Z_2$ , можно записать  $T_{\perp} = -T_{\parallel} = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$ ;  $R_{\perp} = -R_{\parallel} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$ . При  $Z_2 = Z_1$  отсутствует отражение, т.е. имеет место так называемый «режим согласования сред».

## 4.2. НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЭМВ НА ГРАНИЦУ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД

### 4.2.1. Наклонное падение плоской ЭМВ на границу раздела двух идеальных диэлектриков

Наклонное падение ПЭМВ на плоскую границу раздела двух сред определяется углом падения  $0 < \theta_1 < \pi/2$ . Среда, в которой распространяется падающая волна, по отношению к граничащей с ней может быть оптически менее плотной ( $N_1 < N_2$ ) или более плотной ( $N_1 > N_2$ ). Кроме того, падающая волна может быть поляризована различно.

Все это определяет особенности отражения и преломления ЭМВ при наклонном падении.

Будем полагать, что граничащие среды – идеальные диэлектрики ( $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 0$ ), для которых практически всегда можно считать  $\mu_{a2} = \mu_{a1} = \mu_0$ . Коэффициенты Френеля для вертикально и горизонтально поляризованных волн имеют вид:

$$R_{\parallel} = \frac{N_2 \cos \theta_1 - N_1 \cos \theta_2}{N_2 \cos \theta_1 + N_1 \cos \theta_2}; T_{\parallel} = \frac{2N_1 \cos \theta_1}{N_2 \cos \theta_1 + N_1 \cos \theta_2};$$

$$R_{\perp} = \frac{N_1 \cos \theta_1 - N_2 \cos \theta_2}{N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2}; T_{\perp} = \frac{2N_1 \cos \theta_1}{N_1 \cos \theta_1 + N_2 \cos \theta_2}.$$

Целесообразно рассмотреть два случая:  $N_1 < N_2$  и  $N_1 > N_2$ .

В зависимости от этих соотношений коэффициенты Френеля ведут себя по разному, при этом возникают различные явления, которые рассмотрим далее.

#### 4.2.2. Явление полного преломления, угол Брюстера

1. Наклонное падение,  $N_1 < N_2$ .

Так как  $v_{\phi i} \sim N_i$ , то фазовые скорости волн в среде будут неодинаковы. В результате происходит преломление плоской ЭМВ на границе.

При определенных условиях может наблюдаться явление полного преломления.

**Условия полного преломления.** В случае полного преломления (т.е. нет отражения)  $R_{\parallel}$  и  $R_{\perp}$  должны быть равны нулю, или

$$N_2 \cos \theta_1 - N_1 \cos \theta_2 = 0, \quad (4.2.1a)$$

$$N_1 \cos \theta_1 - N_2 \cos \theta_2 = 0. \quad (4.2.1b)$$

Одновременно эти равенства удовлетворяться не могут. Значит, явление полного преломления может наблюдаться либо при горизонтальной, либо при вертикальной поляризации. Но при условии  $N_1 < N_2$  должно быть  $\sin \theta_2 < \sin \theta_1$  (из 2-го закона Снеллиуса), поэтому будет выполняться только первое из двух равенств. Следовательно, явление полного преломления существует лишь при вертикальной поляризации падающей волны.

Угол падения  $\theta_1 = \theta_0$ , при котором наблюдается это явление, называется углом Брюстера.

Учитывая равенство (4.2.1a) и закон синусов  $N_1 \sin \theta_0 = N_2 \sin \theta_2$ , получим  $\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{N_2}{N_1}$ .

В оптике этот угол называют углом полной поляризации на том основании, что если на границу раздела падает произвольно поляризованная волна под углом, то отраженная волна будет горизонтально поляризованной, так как вертикально поляризованная компонента поля падающей волны полностью проходит во вторую среду.

Физическое объяснение представлено на рис. 4.2.1.

Из выражения (4.2.1a):

$$\cos \theta_2 = \cos \theta_0 N_2 / N_1 = \cos \theta_0 \operatorname{tg} \theta_0 = \sin \theta_0.$$

Согласно формулам приведения, это может быть, если  $\theta_0 + \theta_2 = \pi / 2$ .

Тогда, из рисунка видно, что  $\theta_0 + \theta_2 = \pi / 2 = \alpha$ .

Это позволяет дать простое физическое объяснение. Под действием электрического поля преломленной волны молекулы диэлектрика 2-й среды становятся источником вторичных ЭМВ., т.е. каждая из молекул представляет собой элементарный электрический диполь (вibrator), момент которого направлен вдоль  $k_2$ , а ось вибратора будет направлена вдоль  $k_3$ . Однако известно (рассмотрим в теории излучения более подробно), что вдоль своей оси элементарный вибратор (диполь) не излучает.

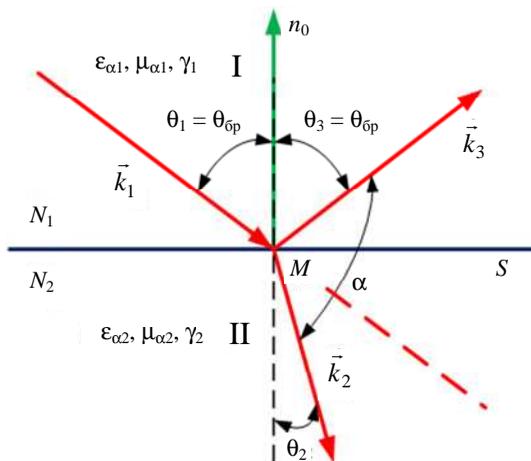


Рис. 4.2.1. Явление полного преломления

При горизонтальной поляризации падающей волны, как видно из (4.2.1б) при любом  $\theta_1 - N_2 \cos \theta_2 > N_1 \cos \theta_1$ ,  $R_{\perp} < 0$ .

Вообще говоря, при возникновении преломленной и отраженной волн последние могут приобретать некоторый фазовый сдвиг относительно падающей ЭМВ. Поэтому в общем виде коэффициенты Френеля носят комплексный характер и имеют вид

$$\dot{a} = |\dot{a}| \exp(-i\psi) \quad (-).$$

Параллельно поляризованная волна при переходе через угол Брюстера меняет фазу на  $\pi$ . При этом модуль коэффициента Френеля меняется скачком. Перпендикулярно поляризованная волна во всем диапазоне углов падения фазы не меняет. Модуль коэффициента Френеля для отраженной волны плавно возрастает. Фаза коэффициента Френеля при этом составляет  $\pi$ . Графики зависимостей  $|\dot{R}|$  и  $\psi$  от угла падения  $\theta_1$  представлены на рис. 4.2.2.

Поэтому волна с горизонтальной поляризацией чаще используется в тех случаях, когда возможны отражения от поверхности в широком диапазоне углов падения.

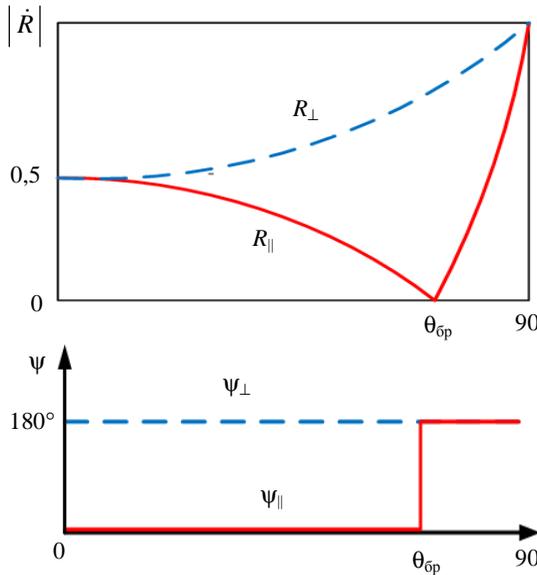


Рис. 4.2.2. Модуль и фаза коэффициентов Френеля

### 4.2.3. Явление полного внутреннего отражения, критический угол

Рассмотрим второй случай, когда  $N_1 > N_2$ . К рассмотрению этого вопроса подойдем несколько иначе, чем в предыдущем случае (рис. 4.2.3).

Обратимся ко 2-му закону Снеллиуса

$$\sin \theta_2 = \frac{N_1}{N_2} \sin \theta_1 .$$

Вводим  $\theta_{\text{кр}} = \theta_1$ , при котором  $\theta_2 = \pi/2$ . Угол преломления будет больше, так как  $N_1 > N_2$ , поэтому при некотором  $\theta_1 = \theta_{\text{кр}}$  угол станет равным  $\pi/2$ , т.е. преломленная волна будет скользить вдоль поверхности раздела. Это – явление поверхностного отражения. Однако при этом  $T_{\parallel} \neq 0$  и  $T_{\perp} \neq 0$ .

При дальнейшем увеличении угла синус угла преломления должен быть больше единицы, т.е. мы переходим в область комплексных значений коэффициента Френеля. Определим выражения для коэффициентов Френеля

$$\cos \theta_2 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1} = i \sqrt{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1} = ig .$$

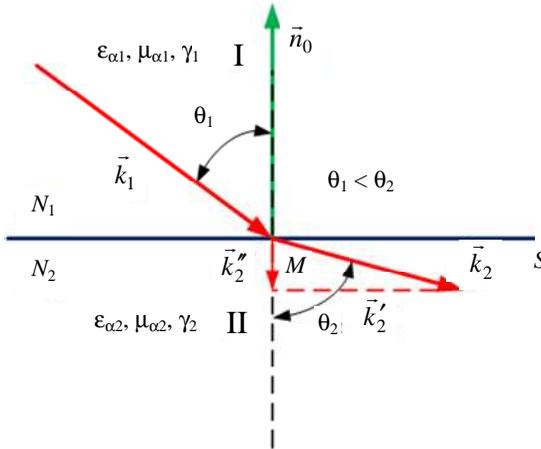


Рис. 4.2.3. К объяснению явления полного внутреннего отражения

Подставляя это значение в (4.1.10), (4.1.10а), получим выражение для коэффициентов Френеля в комплексной форме.

Чтобы выяснить суть происходящего физического явления, рассмотрим поле во второй среде. Преломленную волну будем характеризовать комплексным волновым вектором (рис. 4.2.4)

$$\dot{\vec{k}}_2 = \vec{k}'_2 - i\vec{k}''_2. \quad (4.2.2)$$

Выясним физический смысл коэффициентов  $\vec{k}'_2$  и  $\vec{k}''_2$ .

Учитывая (4.2.2), запишем фазовый множитель преломленной волны  $e^{i(\omega t - \vec{k}_2 \vec{z})} = e^{-\vec{k}''_2 \vec{z}} e^{i(\omega t - \vec{k}'_2 \vec{z})}$ , из которого следует:

–  $\vec{k}''_2$  характеризует направление распространения и степень затухания в этом направлении преломленной волны;

–  $\vec{k}'_2$  – фазовый вектор, характеризует направление и скорость распространения преломленной волны во второй среде.

Определим эти векторы.

Так как вторая среда – идеальный диэлектрик, то  $k_2^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a$  или, раскрывая  $\dot{\vec{k}}_2$ ,  $\dot{\vec{k}}_2^2 = (\vec{k}'_2)^2 - (\vec{k}''_2)^2 - 2i\vec{k}'_2 \vec{k}''_2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a$  и приравнявая действительные и мнимые части, получим

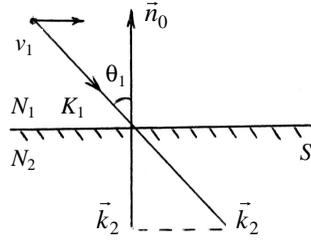
$$(k'_2)^2 - (k''_2)^2 = \omega^2 \epsilon_a \mu_a, \quad \vec{k}'_2 \cdot \vec{k}''_2 = 0. \quad (4.2.2a)$$

1. Векторы  $\vec{k}'_2$  и  $\vec{k}''_2$  ортогональны. Определим их. Известно, что  $(\dot{\vec{k}}_2 - \dot{\vec{k}}_1) \cdot \vec{n}_0 = 0$ . Раскроем  $\dot{\vec{k}}_2$

$$\vec{k}'_2 \times \vec{n}_0 - i\vec{k}''_2 \times \vec{n}_0 - \vec{k}_1 \times \vec{n}_0 = 0, \quad (4.2.3)$$

откуда получаем  $\vec{k}''_2 \times \vec{n}_0 = 0$ .

2. Вектор  $\vec{k}''_2$  перпендикулярен плоскости и направлен во вторую среду от граничной поверхности вдоль вектора  $\vec{n}_0$ , а вектор  $\vec{k}'_2$  перпендикулярен ему. Во второй среде при  $\theta_1 \geq \theta_{кр}$  волна распространяется вдоль границы раздела двух сред. По мере удаления от границы раздела во вторую среду поле убывает по экспоненциальному закону –



**Рис. 4.2.4. К определению комплексного волнового вектора**

концентрируется у поверхности раздела. Такая волна называется поверхностной. Определим амплитудные значения векторов  $\vec{k}_2'$  и  $\vec{k}_2''$ .

Из равенства (4.2.3) видно, что  $\vec{k}_2' \times \vec{n}_0 - \vec{k}_1 \times \vec{n}_0 = 0$ , т.е.  $k_2' = k_1 \sin \theta_1$ .

Так как волновое число характеризует еще и скорость распространения поверхностной волны, то определим и ее

$$v_{2s} = \frac{\omega}{k_2'} = \frac{\omega}{k_1 \sin \theta_1} = \frac{v}{\sin \theta_1}.$$

Значения  $\vec{k}_2''$  определим из первого соотношения (4.2.2a):

$$k_2'' = \sqrt{(k_1 \sin \theta_1)^2 - (k_2)^2} = k_2 \sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1} = k_2 \sqrt{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1},$$

т.е. ( $N_1 > N_2$ ) при  $\sin \theta_1 \leq N_2 / N_1$  коэффициент  $k_2''$  – мнимая величина, в этом случае затухания нет, волна распространяется во второй среде.

При  $\sin \theta_1 > N_2 / N_1$  коэффициент  $k_2''$  – действителен и характеризует затухание во второй среде.

Итак, при  $N_1 > N_2$  и  $\sin \theta_1 > N_2 / N_1$  во второй среде вдоль границы раздела распространяется ЭМВ, амплитуда которой убывает по мере удаления от поверхности. Степень убывания амплитуды пропорциональна величине  $k_2''$  и углу падения  $\theta_1$ .

Данное явление применяется в волоконно-оптических кабелях, в которых распространяется поверхностная волна с отражением от внешней границы волокна.

#### 4.2.4. Падение плоской ЭМВ на поверхность идеального проводника

В качестве первой среды может рассматриваться любой однородный изотропный высококачественный диэлектрик (радиофарфор, слюда, плавленый кварц, воздух и др.), но удобнее считать таким диэлектриком воздух, так как его параметры ( $\epsilon_1 = 1,0006$ ,  $\mu_1 = 1,0000038$ ,  $\gamma \cong 0$ ) близки к параметрам вакуума. Это значительно упрощает анализ рассматриваемого процесса и соответствует реальной картине распространения радиоволн. В качестве второй среды может рассматриваться любой однородный изотропный проводник с плоской поверхностью.

Фазовые скорости плоских электромагнитных волн одной частоты в таких разных по электрическим свойствам средах существенно различаются, причем всегда  $v_1 \gg v_2$ .

Комплексный коэффициент распространения в среде с потерями  $\vec{k}_2 = \beta_2 - i\alpha_2$  говорит о том, что свойства преломленной волны в нем могут и должны описываться также с помощью комплексного волнового вектора с условием

$$\vec{k}_2^2 = k_2^2, \quad (4.2.4)$$

позволяющим учесть граничные условия на поверхности проводника. На основании граничного условия для волновых векторов уравнение

$$(\vec{k}_2' - i\vec{k}_2'') \times \vec{n}_0 = \vec{k}_1 \times \vec{n}_0$$

в результате разделения действительных и мнимых частей распадается на уравнения

$$\vec{k}_2' \times \vec{n}_0 = \vec{k}_1 \times \vec{n}_0, \quad (4.2.5a)$$

$$\vec{k}_2'' \times \vec{n}_0 = 0. \quad (4.2.5b)$$

Из (4.2.5b) следует коллинеарность векторов  $\vec{k}_2''$ ,  $\vec{n}_0$ . Их взаимная противоположность следует из физического смысла, а именно из того, что источником отраженной и преломленной волн является падающая волна, поэтому вектор  $\vec{k}_2''$  характеризует ослабление преломленной волны только в направлении, противоположном направлению нормали  $\vec{n}_0$  к  $S$ .

Вектор  $\vec{k}_2'$  направлен под некоторым углом  $\theta_2$  по отношению к направлению  $\vec{k}_2''$ , причем угол  $\theta_2$  может быть определен как

$$\sin \theta_2 \cong \frac{v_2}{v} \sin \theta_1, \quad (4.2.6a)$$

$$\sin \theta_2 \cong \frac{1}{N} \sin \theta_1. \quad (4.2.6b)$$

Приближенные равенства (4.2.6) позволяют оценить величину угла преломления  $\theta_2$ . Так, при падении плоской волны под любым углом падения на проводник с параметрами  $\frac{f_{\text{гп}2}}{f} = 100$ ,  $\epsilon_2 \cong \epsilon_1$ , угол прелом-

ления  $\theta_2 < 8,2^\circ$ , а при падении на проводник с  $\frac{f_{\text{гп}2}}{f} = 1000$   $\theta_2 < 1^\circ$ ,



**Рис. 4.2.5. Ориентация силовых линий ЭМП на поверхности идеального проводника**

т.е. угол преломления в рассматриваемом случае очень мал. Практически можно считать, что единичный вектор  $\vec{n}_{02}$  (рис. 4.2.4.), определяющий направление преломленной волны в проводнике, противоположен вектору нормали  $\vec{n}_0$ , т.е.  $\vec{n}_{02} \cong -\vec{n}$  и, соответственно,  $\vec{k}'_2 = k'_2 \vec{n}_{02} \cong -k'_2 \vec{n}_0$ .

Таким образом, при падении плоской волны на плоскую границу раздела «идеальный диэлектрик-проводник» под любым углом  $\theta_1 < \frac{\pi}{2}$  практически можно считать, что фронт преломленной волны в проводнике параллелен граничной поверхности, т.е. поверхности проводника (рис. 4.2.5).

Это допущение является основой так называемых приближенных граничных условий Леонтовича-Щукина.

#### 4.2.5. Приближенные граничные условия Леонтовича–Щукина

Как известно, в идеальном проводнике электромагнитное поле не существует и в него не проникает, что математически описывается выражениями

$$\dot{\vec{E}}_{2\tau}^{\parallel} = 0, \quad (4.2.7a)$$

$$\dot{\vec{E}}_{2n}^{\parallel} = 0, \quad (4.2.7б)$$

$$\dot{\vec{H}}_2^{\parallel} = 0, \quad (4.2.7в)$$

Однако, при падении на поверхность идеального проводника плоской электромагнитной волны, за счет перегруппирования свободных зарядов, на ней возникают поверхностные токи и заряды с плотностями, обусловленными результирующим полем, т.е.

$$\dot{j}_s = \dot{\vec{H}}_1^{\parallel} + \dot{\vec{H}}_3^{\parallel}, \quad (4.2.8a)$$

$$\sigma = \varepsilon_{a1} (\dot{\vec{E}}_{1n} + \dot{\vec{E}}_{3n}). \quad (4.2.8б)$$

Граничное условие с учетом (4.2.7а) примет вид

$$\dot{E}_{3\tau}^{\parallel} = -\dot{E}_{1\tau}^{\parallel}, \quad (4.2.9)$$

из которого следует, что на поверхности идеального проводника тангенциальная составляющая электрического поля отраженной волны противоположно направлена тангенциальной составляющей падающей волны и равна ей по величине. Вертикальные составляющие электрического поля  $\dot{E}_{1n}^{\parallel}$  и  $\dot{E}_{3n}^{\parallel}$  на поверхности равны по величине и одинаково направлены, т.е. выполняется равенство

$$\dot{E}_{3n}^{\parallel} = \dot{E}_{1n}^{\parallel}. \quad (4.2.10)$$

Равенство (4.2.10) объясняется отсутствием потерь при отражении от поверхности идеального проводника, а одинаковая направленность векторов – выполнением закона отражения.

$$\dot{H}_{3\tau}^{\parallel} = \dot{H}_{1\tau}^{\parallel}. \quad (4.2.11)$$

На поверхности идеального проводника тангенциальные составляющие магнитного поля одинаково направлены и равны по величине.

В соответствии с (4.2.11) равенство (4.2.8а) в скалярном выражении примет вид

$$\dot{j}_s = 2\dot{H}_1, \quad (4.2.12)$$

из которого следует, что плотность поверхностного тока на поверхности идеального проводника определяется удвоенной величиной напряженности магнитного поля падающей параллельно поляризованной волны. При произвольной поляризации падающей волны определяется удвоенной величиной тангенциальной составляющей ее магнитного поля.

Таким образом, при падении плоской электромагнитной волны на поверхность идеального проводника величины всех одноименных составляющих отраженной и падающей волн не равны, а тангенциальная составляющая электрического и нормальная составляющая магнитного полей в отраженной волне меняют направление на противоположное соответствующим составляющим падающей волны или, как говорят, меняет фазу на  $180^\circ$ .

При падении плоской электромагнитной волны любой поляризации на поверхность реального проводника часть энергии падающей волны проникает в проводник, поэтому в общем случае в реальном

проводнике  $\dot{E}_{2\tau} \neq 0$ ,  $\dot{E}_{2n} \neq 0$ ,  $\dot{H}_{2\tau} \neq 0$ ,  $\dot{H}_{2n} \neq 0$ . Это означает, что составляющие электрического и магнитного полей в первой (диэлектрической) среде и, соответственно, в отраженной волне претерпевают изменение.

Можно считать, что преломленная волна  $\dot{E}_2$ ,  $\dot{H}_2$  определяется только тангенциальными составляющими электрического и магнитного полей на поверхности проводника, т.е.

$$\dot{E}_2 \approx \dot{E}_{2\tau}, \quad (4.2.13a)$$

$$\dot{H}_2 \approx \dot{H}_{2\tau}. \quad (4.2.13б)$$

Граничные условия для тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей в комплексном выражении примут вид

$$\dot{E}_2 \times \vec{n} = \dot{E}_1 \times \vec{n}, \quad (4.2.14a)$$

$$\vec{n} \times \dot{H}_2 = \vec{n} \times \dot{H}_1, \quad (4.2.14б)$$

где  $\dot{E}_2 \times \vec{n} = \dot{E}_{2\tau}$ ,  $\vec{n} \times \dot{H}_2 = \dot{H}_{2\tau}$ ,  $\dot{E}_1 \times \vec{n} = \dot{E}_{1\tau}$ ,  $\vec{n} \times \dot{H}_1 = \dot{H}_{1\tau}$  – тангенциальные составляющие векторов поля на границе раздела.

В свою очередь, напряженность электрического поля волны в проводнике:

$$\dot{E}_2 \approx \dot{Z}_2 \left( \vec{n} \times \dot{H}_2 \right). \quad (4.2.15)$$

Равенство (4.2.15) не изменится, если обе его части умножить на вектор  $\vec{n}$

$$\dot{E}_2 \times \vec{n} \approx \dot{Z}_2 \left( \vec{n} \times \dot{H}_2 \right) \times \vec{n}. \quad (4.2.16)$$

Подставляя (4.2.14а, б) в (4.2.16) получим

$$\dot{E}_1 \times \vec{n} \approx \dot{Z}_2 \left( \vec{n} \times \dot{H}_1 \right) \times \vec{n}. \quad (4.2.17)$$

Приближенное равенство (4.2.17) называют приближенным граничным условием Леонтовича–Щукина в векторной форме. Оно устанавливает связь между тангенциальными составляющими векторов напряженности электрического и магнитного полей в первой среде на

поверхности проводника через его параметры, входящие в  $\dot{Z}_2$ , т.е. через параметры проводника.

В скалярном выражении условие (4.2.17) приобретает вид

$$\dot{E}_{1\tau} \approx \dot{Z}_2 \dot{H}_{1\tau}, \quad (4.2.18)$$

$$\dot{E}_{1\tau} \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_0 a^2}{\gamma_2}} \dot{H}_{1\tau} e^{i\frac{\pi}{4}}. \quad (4.2.19)$$

Таким образом, приближенное граничное условие Леонтовича–Щукина в скалярном (4.2.19) выражении показывает, что на поверхности проводника тангенциальная составляющая напряженности электрического поля в первой среде опережает тангенциальную составляющую напряженности магнитного поля в ней на  $\frac{\pi}{4}$ , причем величина  $\dot{E}_{1\tau}$  тем меньше, чем меньше частота электромагнитных колебаний падающей волны и больше проводимость  $\gamma_2$  проводящей среды. Расчеты показывают, что при падении электромагнитной волны на хороший проводник  $\left(\frac{f_{\text{гп}}}{f} > 1000\right)$  величина  $\dot{E}_{1\tau}$  настолько мала, что тангенциальные составляющие падающей и отраженной волн практически равны, а значит можно пользоваться соотношениями для идеального проводника.

Приближенное граничное условие Леонтовича–Щукина играет существенную роль при необходимости учета потерь на нагрев проводящей среды, так как именно величина тангенциальной составляющей поля определяет величину мощности  $P_{\text{ср}}$ , проходящей по нормали вглубь проводника.

## 5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### 5.1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ВИБРАТОРА

#### 5.1.1. Физическая сущность процесса излучения ЭМВ в свободное пространство

Физическая сущность процесса излучения ЭМВ в свободное пространство вытекает из уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{E} = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}.$$

Сами уравнения подводят нас к пониманию того, что ток связанных зарядов может циркулировать в диэлектрике и свободном пространстве в виде тока смещения. При этом в отношении образования магнитного поля ток смещения играет такую же роль, что и ток проводимости. Это означает, что любой диэлектрик и свободное пространство можно условно считать проводником тока смещения.

Из большого разнообразия схем источников тока смещения рассмотрим самую простую, состоящую из конденсатора, питаемого источником переменной ЭДС (рис. 5.1.1, а). Электрическое поле, формируемое такой системой, изображено на рис. 5.1.1, б.

Считая источник (рис. 5.1.1), питающий конденсатор, переменным, можем сделать вывод, что и сформированное поле – переменное, которому соответствует ток смещения с плотностью  $\vec{j}_{\text{см}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

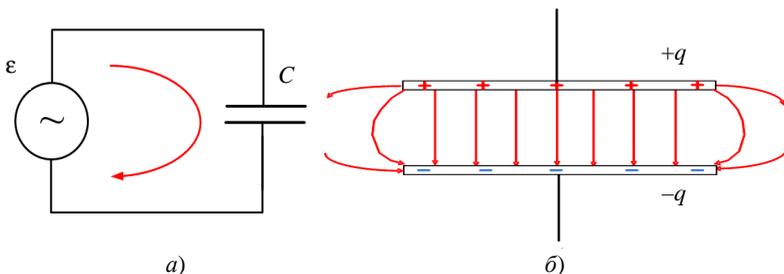
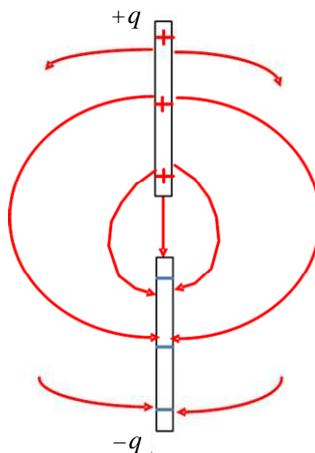


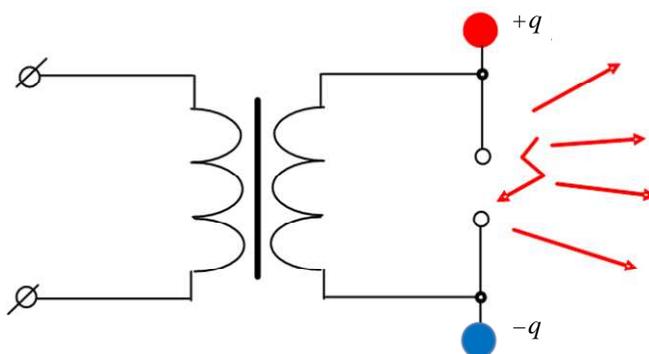
Рис. 5.1.1. Электрическое поле конденсатора

Пространство, окружающее конденсатор, обладает способностью проводить ток смещения, часть которого может ответвляться в окружающее пространство. Часть ответвляющегося тока остается связанной с конденсатором, а часть – отрывается от него и уходит в окружающее пространство, образуя свободно распространяющиеся токи смещения. Эти токи, которым соответствует переменное во времени электрическое поле и связанное с ним магнитное поле, формируют излучаемую радиоволну.

Примером излучателя, в котором свободная часть электромагнитного поля значительно больше связанной части, может являться устройство следующего вида: пластины рассмотренного конденсатора развернуты на  $90^\circ$  (рис. 5.1.2). Именно такая макроскопическая модель была рассмотрена Г. Герцем в 1888 г. как излучающая электромагнитные волны система (рис. 5.1.3).



**Рис. 5.1.2. Силовые линии поля пластин «развернутого» конденсатора**



**Рис. 5.1.3. Макроскопическая модель системы, излучающей электромагнитные волны**

### 5.1.2. Элементарные излучатели, их основные типы

До сих пор мы рассматривали только само ЭМП, не касаясь вопроса о его источниках, а точнее – об излучателях. Рассмотрим отрезок, вдоль которого течет ток  $\dot{I} = I_m e^{i\omega t}$ .

Известная существующая связь между токами и зарядами позволяет записать  $\dot{q} = q_m e^{i\omega t}$ , т.е., если по проводнику конечной длины течет ток  $I$ , то в соответствии с законом непрерывности (или законом сохранения заряда), этот ток порождает на концах проводника заряды  $q$ . Связь между  $I$  и  $q$  выглядит следующим образом

$$\dot{I} = -\frac{\partial \dot{q}}{\partial t}; I_m e^{i\omega t} = -i\omega q_m e^{i\omega t}; \rightarrow I_m = -i\omega q_m. \quad (5.1.1)$$

Это уравнение может быть записано иначе

$$q_m = \pm i \frac{I_m}{\omega}. \quad (5.1.2)$$

Почему « $\pm$ » мы выясним ниже. А пока отметим, что на всем отрезке, кроме его концов, заряды отсутствуют, на концах же сосредоточены равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку заряды.

Элементарный электрический вибратор – линейный бесконечно тонкий проводник с неизменным по длине переменным током, длина которого существенно меньше длины волны  $\lambda$  ( $1 \ll \lambda$ ) (рис. 5.1.4). На практике толщина проводника также должна быть во много раз меньше длины волны.

Обратимся к выражению (5.1.1). Можно записать его иначе

$$I_m = -i\omega q_m = \omega q_m e^{-i\frac{\pi}{2}},$$

т.е. фаза тока «отстает» от фазы изменения заряда на  $\pi/2$ .

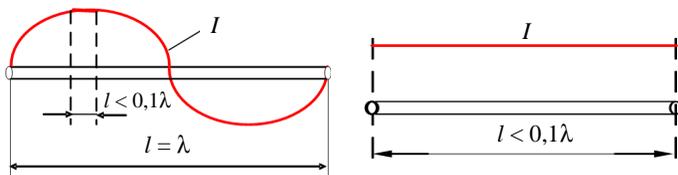


Рис. 5.1.4. К определению элементарного электрического вибратора

Элементарными излучателями являются также элементарная рамка (свернутый в кольцо вибратор) и поверхностный излучатель (элемент Гюйгенса). Их размеры по любой координате должны быть много меньше длины волны.

В теории антенн элементарный вибратор (ЭВ) представляет собой отрезок провода. Используя это понятие, можно описать большое количество типов антенн.

### 5.1.3. Электромагнитное поле элементарного вибратора

Пусть в свободное неограниченное однородное изотропное пространство помещен ЭВ.

Надо определить поле, которое создает ЭВ в точке наблюдения  $M$ , не содержащей токи и заряды.

Поместим ЭВ в прямоугольную систему координат (рис. 5.1.5).

Уравнения Максвелла для точки  $M$ , не содержащей токи и заряды:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{H}_m &= i\omega \epsilon_a \dot{E}_m \\ \operatorname{rot} \dot{E}_m &= -i\omega \mu_a \dot{H}_m. \end{aligned}$$

Проще всего для решения этой электродинамической задачи использовать понятие электродинамических потенциалов.

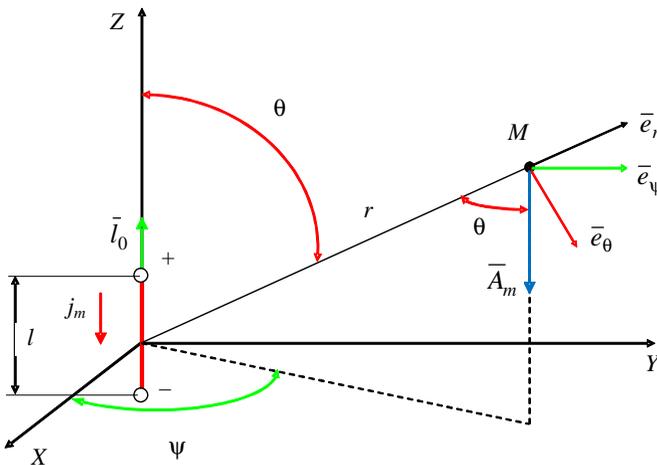


Рис. 5.1.5. Система координат для определения ЭМП ЭВ

План решения задачи:

1) Пусть векторный потенциал  $\dot{\vec{A}}$  известен, тогда:

$$\dot{\vec{H}}_m = \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \dot{\vec{A}}_m.$$

2)  $\dot{\vec{E}}_m$  можно найти, отыскав  $\text{rot} \dot{\vec{H}}_m$ .

Это и будет схемой решения задачи.

Для  $\dot{\vec{A}}$  существует связь с плотностью тока проводимости

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_v \frac{\vec{j}_m e^{i(\omega t - kr)}}{r} dv.$$

Вынесем постоянные величины из-под интеграла

$$\dot{\vec{A}} = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \int_l \int_s j_m(-\vec{l}_0) dS = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} I_m l(-\vec{l}_0).$$

Отсюда можно определить значение комплексной амплитуды  $\dot{\vec{A}}_m$ :

$$\dot{\vec{A}}_m = \frac{\mu_a}{4\pi} \frac{I_m l}{r} e^{-ikr} (-\vec{l}_0). \quad (5.1.3)$$

Это выражение нас и интересует для дальнейшего решения задачи. Поле ЭВ построим в сферической системе координат.

1. Выразим компоненты в сферической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_{mr} &= \dot{A}_m \vec{e}_r = -\dot{A}_m \cos \theta \\ \dot{A}_{m\theta} &= \dot{A}_m \vec{e}_\theta = \dot{A}_m \sin \theta \\ \dot{A}_{m\psi} &= 0 \end{aligned} \right\}. \quad (5.1.4)$$

Отметим, что частные производные от  $\dot{\vec{A}}$  по  $\psi$  равны нулю (от  $\psi$  не зависят).

2. Следуя плану решения задачи, надо взять  $\text{rot} \dot{\vec{A}}$  в сферической системе координат. Справочная формула для операции ротор в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \text{rot}\bar{A}_m &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_{m\psi} \sin \theta) - \frac{\partial A_{m\theta}}{\partial \psi} \right] \bar{e}_r + \\ &+ \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_{mr}}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_{m\psi}) \right] \bar{e}_\theta + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_{m\theta}) - \frac{\partial A_{mr}}{\partial \theta} \right] \bar{e}_\psi. \end{aligned}$$

Тогда, поскольку все производные по  $\psi$  равны нулю и проекции радиальной и азимутальной компонент векторного потенциала  $A_m$  на меридиональный орт  $\bar{e}_\psi$  также равна нулю, можно получить

$$\dot{H}_m = \frac{1}{\mu_a r} \left[ \frac{\partial (A_{m\theta} r)}{\partial r} - \frac{\partial A_{mr}}{\partial \theta} \right] \bar{e}_\psi.$$

С учетом (5.1.3) и (5.1.4) получим

$$\dot{H}_{m\psi} = -i \frac{I_m l k}{4\pi} \sin \theta \left( 1 - \frac{i}{kr} \right) \frac{e^{-ikr}}{r}. \quad (5.1.5)$$

Отметим, что в результате преобразований выражения  $\dot{H}_m$  при выбранных подстановках останется только компонента  $\dot{H}_{m\psi}$ , т.е. проекция на меридиональный единичный вектор.

Теперь в соответствии с ходом решения задачи следует взять  $\text{rot}\bar{H}$ .

В результате, используя выражение для ротора в сферических координатах, получим  $\dot{E} = \dot{E}_{mr} \bar{e}_r + \dot{E}_{m\theta} \bar{e}_\theta$ , где

$$\dot{E}_{m\theta} = -i \frac{I_m l k^2}{4\pi \epsilon_a \omega} \sin \theta \left( 1 - \frac{1}{k^2 r^2} - \frac{i}{kr} \right) \frac{e^{-ikr}}{r}; \quad (5.1.6)$$

$$\dot{E}_{mr} = \frac{I_m l k}{2\pi \epsilon_a \omega} \cos \theta \left( 1 + \frac{i}{kr} \right) \frac{e^{-ikr}}{r^2}. \quad (5.1.7)$$

Таким образом, зная ток и длину  $l$  вибратора, мы получили составляющие ЭМП в точке наблюдения  $M$ .

Выделим амплитудные и фазовые множители соотношений (5.1.5 – 5.1.7)

$$\begin{aligned}\dot{E}_{mr} &= \frac{I_m k l}{2\pi\epsilon_a \omega} \cos \theta \sqrt{1 + \frac{1}{k^2 r^2}} \frac{e^{-ikr+i\delta}}{r^2}, \\ \dot{E}_{m\theta} &= \frac{I_m k^2 l}{4\pi\epsilon_a \omega} \sin \theta \sqrt{1 + \frac{1}{k^4 r^4} - \frac{1}{k^2 r^2} + 1} \frac{e^{-ikr+i\gamma}}{r}, \\ \dot{H}_{m\varphi} &= \frac{I_m l k}{4\pi} \sin \theta \sqrt{1 + \frac{1}{k^2 r^2}} \frac{e^{-ikr+i\chi}}{r},\end{aligned}$$

где  $\delta = \arctg(kr)$ ;  $\gamma = \arctg \frac{kr}{1 - k^2 r^2}$ ;  $\chi = \arctg \left( -\frac{1}{kr} \right)$ .

Итак, в любой точке пространства вектор  $\vec{E}$  ЭМП, создаваемого ЭВ, находится в плоскости, проходящей через ось вибратора и точку наблюдения, вектор  $\vec{H}$  в плоскости, перпендикулярной оси вибратора.

Каждая из компонент электромагнитного поля содержит сумму нескольких слагаемых, определяющих характеристики ЭМП в точке наблюдения на различных расстояниях.

## 5.2. ЗОНЫ ПОЛЯ ЭЛЕМЕНТАРНОГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ВИБРАТОРА (ЭЭВ)

### 5.2.1. Структура поля в ближней и дальней зонах

В предыдущем разделе получены амплитудные и фазовые множители соотношений (5.1.5 – 5.1.7)

$$\begin{aligned}\dot{E}_{mr} &= \frac{I_m l k}{2\pi\epsilon_a \omega} \cos \theta \left( 1 + \frac{i}{kr} \right) \frac{e^{-ikr}}{r^2}; \\ \dot{E}_{m\theta} &= -i \frac{I_m l k^2}{4\pi\epsilon_a \omega} \sin \theta \left( 1 - \frac{l}{k^2 r^2} - \frac{i}{kr} \right) \frac{e^{-ikr}}{r}; \\ \dot{H}_{m\varphi} &= -i \frac{I_m l k}{4\pi} \sin \theta \left( 1 - \frac{i}{kr} \right) \frac{e^{-ikr}}{r}.\end{aligned} \quad (5.2.1)$$

Отметим, что при различных значениях параметра  $kr$  (т.е. на разных дальностях от ЭЭВ) структура поля в точке наблюдения будет различна. Поэтому принято делить ЭМП ЭВ на зоны:

**Ближняя зона:**  $kr \ll 1 \rightarrow r \leq (0,01...0,05)\lambda$ .

**Промежуточная зона:**  $kr \approx 1 \rightarrow r \approx (0,05...1,6)\lambda$ .

**Дальняя зона:**  $kr \gg 1 \rightarrow r \geq (1,6...2,5)\lambda$ .

Рассмотрим каждую из этих зон.

**Ближняя зона** (зона индукции) ( $kr \ll 1$ ). В этом случае слагаемые в скобках для компонент ЭМП существенно больше 1, т.е. единицей в скобках можно пренебречь:

$$\frac{l}{kr} \gg l; e^{-ikr} \rightarrow 1.$$

В результате из (5.2.1) получаем выражения для компонент ЭМП в ближней зоне

$$\begin{aligned} \dot{E}_{mr} &= i \frac{I_m l}{2\pi\epsilon_a \omega r^3} \cos \theta; \\ \dot{E}_{m\theta} &= i \frac{I_m l}{4\pi\epsilon_a \omega r^3} \sin \theta; \\ \dot{H}_{m\psi} &= \frac{I_m l}{4\pi r^2} \sin \theta. \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

**Выводы:**

1. Силовые линии электрического поля  $\vec{E}$  синфазны между собой (множитель « $i$ » эквивалентен начальной фазе  $\pi/2$ ).

2. Силовые линии магнитного поля  $\vec{H}$  имеют сдвиг по фазе на  $\pi/2$  относительно силовых линий электрического поля.

Модуль вектора Пойнтинга, пропорциональный произведению составляющих  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , колеблется с двойной частотой, а его среднее значение за период равно нулю. Это свидетельствует о том, что энергия в течение четверти периода колебания поля движется от вибратора в пространство, а в следующую четверть периода возвращается обратно, т.е. в ближней зоне ЭМП «привязано» к вибратору и быстро (пропорционально  $1/r^2$  и  $1/r^3$ ) убывает с увеличением расстояния.

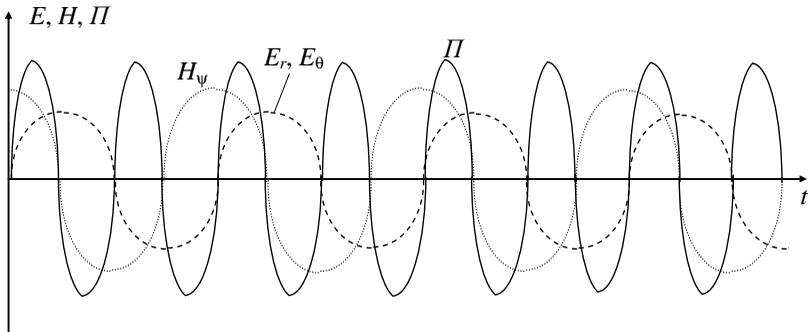


Рис. 5.2.1. Временная картина колебаний в ближней зоне

Можно считать (с учетом сделанных допущений), что энергия в этой зоне не переносится.

3. В ближней зоне наблюдается колебание энергии ЭМП (рис. 5.2.1).

Поскольку электрическое поле имеет радиальную и азимутальную компоненты, электрическое поле вибратора имеет силовые линии, вытянутые в форме окружностей (рис. 5.2.2).

Магнитное поле имеет только поперечную меридиональную компоненту. Поле такого вида называется электрическим или  $E$ -типа.

**Промежуточная зона** ( $kr \approx 1$ ). Заметим, что в этом случае формулы для составляющих ЭМП упростить нельзя. Все слагаемые компонент в этом случае существенны. ЭМП носит сложный характер. Современные математические методы не позволяют провести его анализ. В этой зоне переход энергии ЭМП из ближней в дальнюю. Это – зона отрыва энергии.

**Дальняя зона** (зона излучения) ( $kr \gg 1$ ). В этом случае не преобладают слагаемые, пропорциональные  $1/r^2$  или  $1/r$  ( $1 \gg 1/r$ ,  $1 \gg 1/r^2$ ). Компоненты ЭМП могут быть упрощены и представлены в следующем виде

$$\begin{aligned} \dot{E}_{mr} &= \frac{I_m l k}{2\pi\epsilon_a \omega} \cos\theta \frac{e^{-ikr}}{r^2}; \\ \dot{E}_{m\theta} &= -i \frac{I_m l k^2}{4\pi\epsilon_a \omega} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r}; \\ \dot{H}_{m\psi} &= -i \frac{I_m l k}{4\pi} \sin\theta \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

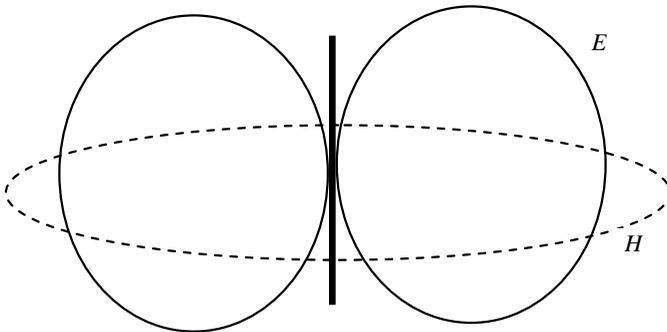


Рис. 5.2.2. Поле ЭЭВ в ближней зоне

**Выводы:**

1. Радиальная составляющая ЭМП  $\dot{E}_{mr}$  изменяется в пространстве в  $r$  раз быстрее по сравнению с другими составляющими ЭМП (убывает). Поэтому в дальней зоне ее можно считать равной нулю, остаются только составляющие  $\dot{H}_{m\psi}$  и  $\dot{E}_{m\theta}$ .
2. Силовые линии  $\dot{H}_{m\psi}$  и  $\dot{E}_{m\theta}$  в дальней зоне синфазны.
3. В дальней зоне осуществляется перенос ЭМЭ (рис. 5.2.3).
4. В дальней зоне существует вектор  $\vec{E}_m$ , лежащий в плоскости, образованной точкой наблюдения и осью вибратора (рис. 5.2.4).
5. В дальней зоне существует вектор  $\vec{H}_m$ , лежащий в плоскости, перпендикулярной оси вибратора.

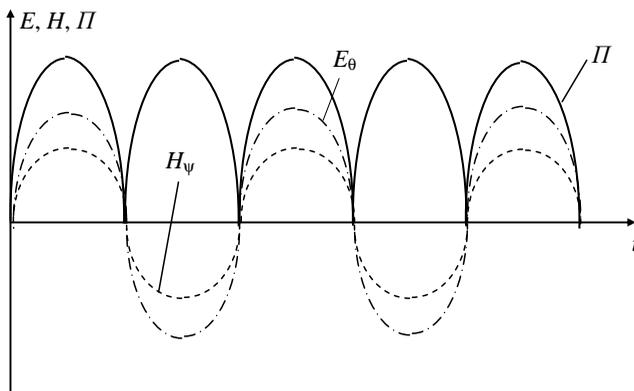


Рис. 5.2.3. Временная диаграмма поля ЭЭВ в дальней зоне

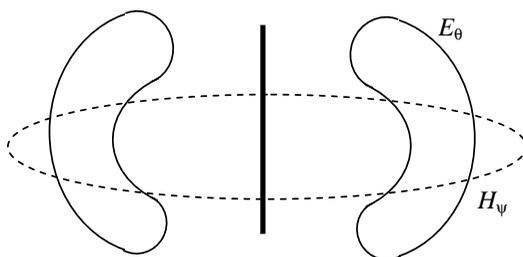


Рис. 5.2.4. Структура ЭМП ЭЭВ в дальней зоне

### 5.2.2. Энергетические параметры, мощность и сопротивление излучения

До сих пор мы рассматривали вопросы, связанные со структурой поля элементарного вибратора. Теперь перейдем к изучению основных энергетических соотношений в поле вибратора. Эти соотношения могут быть получены из рассмотрения вектора плотности потока электромагнитной энергии  $\vec{P}$ .

Известно, что

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{|\dot{E}_{m\theta}| |\dot{H}_{m\psi}|}{2} \vec{e}_r. \quad (5.2.4)$$

Подставим (5.2.3) в (5.2.4), проведем преобразования, получим

$$\vec{P} = \frac{I_m^2 l^2 k^3}{32\pi^2 \omega \epsilon_a r^2} \sin^2 \theta [1 + \cos(2\omega t - kr)] \vec{e}_r.$$

#### Выводы:

1. Вектор плотности ЭМЭ имеет только одну радиальную составляющую.

2. Радиальная составляющая вектора  $\vec{P}$  изменяется во времени с удвоенной частотой.

Можно определить среднее значение вектора плотности электромагнитной энергии по формуле

$$\vec{P}_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{P} dt = \frac{I_m^2 l^2 k^3}{32\pi^2 \omega \epsilon_a r^2} \sin^2 \theta \vec{e}_r. \quad (5.2.5)$$

#### Свойства:

1. Максимум  $\vec{P}_{cp}$  имеет место при  $\theta = \pi/2$ .

2.  $\vec{P}_{cp} \neq 0$  ни в какой момент времени, что свидетельствует о переносе ЭМЭ в пространстве.

**Характеристики ЭЭВ как излучателя ЭМВ.** Согласно теореме Умова-Пойнтинга, запасенная ЭЭВ энергия расходуется на мощность потерь ( $P_n$ ) и мощность излучения ( $P_\Sigma$ ):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = P_n + P_\Sigma.$$

Под мощностью излучения понимают количество энергии, которую уносит излученное поле в единицу времени

$$P_{\Sigma} = \oint \vec{P}_{\text{ср}} dS,$$

где  $dS$  – элемент поверхности, окружающей ЭЭВ.

И для мощности излучения справедливо

$$P_{\Sigma} = \frac{I_m^2 l^2 k^3}{12\pi\omega\epsilon_a}.$$

Итак,  $P_{\Sigma}$  зависит: от электрического момента  $I_m l / \omega$ ; от электрических параметров среды  $\epsilon_a$ ; от квадрата частоты  $\omega^2$ .

**Вывод:** Среднее количество энергии, пересекающее замкнутую поверхность вокруг вибратора в одну секунду, является величиной постоянной, определяемой только характеристиками вибратора.

**Сопrotивление излучения вибратора.** Выражение для мощности излучения можно представить в виде

$$P_{\Sigma} = R_{\Sigma} \frac{I_m^2}{2},$$

где  $R_{\Sigma} = \frac{l^2 k^3}{6\pi\omega\epsilon_a}$ ; такое активное (омическое) сопротивление, на котором при том же токе поглощается мощность, равная мощности излучения вибратора.

Для излучателя, находящегося в свободном пространстве,

$$R_{\Sigma} = 20(lk)^2,$$

где  $lk$  называется электрической длиной вибратора.

Понятие сопротивления излучения распространяется на любые устройства, излучающие ЭМВ. Зная сопротивление излучения и ток, можно найти мощность излучения, знание которой необходимо при расчетах линий радиосвязи и т.п.

### 5.2.3. Диаграмма направленности, коэффициент направленного действия

*Пространственное распределение ЭМП и плотности потока мощности в относительных единицах называется диаграммой направленности излучателя.*

Различают ДН по полю  $F(\theta, \psi)$  и по мощности  $F^2(\theta, \psi)$ . ДН бывают амплитудные и фазовые.

Амплитудные ДН определяются следующим образом

$$F(\theta, \psi) = \frac{|\dot{E}_m(\theta, \psi)|}{|\dot{E}_m(\theta, \psi)|_{\max}}; \quad F^2(\theta, \psi) = \frac{|\dot{E}_m^2(\theta, \psi)|}{|\dot{E}_m^2(\theta, \psi)|_{\max}}.$$

Само по себе построение ДН в пространстве является довольно сложной задачей. Поэтому обычно рассматривают сечение поверхности ДН в главных плоскостях.

Так для ЭВ (если обратиться к формулам для компонент ЭМП) вид сечения ДН в плоскостях будет следующим:

$$F(\theta, \psi)_{\psi=0} = F(\theta) = \sin \theta; \quad F^2(\theta, \psi)_{\psi=0} = F^2(\theta) = \sin^2 \theta.$$

В сферической системе координат эта функция «восьмерка», в прямоугольной – «синус» (рис. 5.2.5).

В плоскости, перпендикулярной оси вибратора ( $\theta = \pi/2$ ), ДН имеет вид окружности, радиус которой равен единице (рис. 5.2.6)

$$F(\theta, \psi)_{\theta=0} = F(\psi) = 1.$$

В результате общий вид ДН ЭВ имеет вид «бублика» (рис. 5.2.7).

**Ширина диаграммы направленности** определяет *угловой сектор, в котором концентрируется некоторая определенная часть излучаемой мощности.*

Обычно ширина ДН по мощности определяется по уровню 0,5, что соответствует угловому сектору, в котором сосредоточено 50% излучаемой мощности.

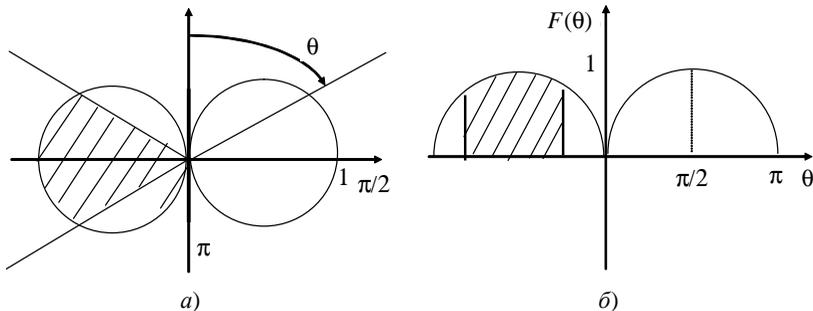


Рис. 5.2.5. ДН по  $\theta$  в полярных (а) и прямоугольных (б) координатах

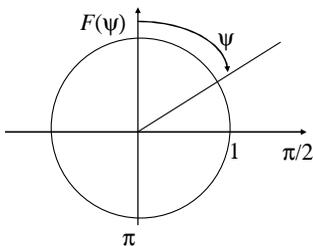


Рис. 5.2.6. ДН по  $\psi$

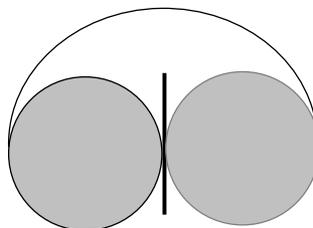


Рис. 5.2.7. Объемная ДН ЭЭВ

Уровень 0,5 по мощности соответствует уровню 0,707 по напряженности.

Обратимся к рис. 5.2.5, а и определим ширину ДН графически.

**Коэффициент направленного действия.** КНД в направлении  $\theta$  называется: отношение угловой плотности потока мощности  $P(\theta, \psi)$ , создаваемой в этом направлении данной антенной, к угловой плотности потока мощности  $P_0$ , создаваемой в этом же направлении эталонной антенной (ненаправленной) при условии равенства полных мощностей излучения антенн

$$D(\theta, \psi) = \frac{P(\theta, \psi)}{P_0}.$$

Когда сравнивают антенны, обычно берут  $D_0$  – КНД в направлении максимумов. Чем больше КНД, тем больше напряженность поля в направлении максимума излучения при заданной мощности излучения.

$$D_0 = \frac{4\pi}{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} F^2(\theta, \psi) \sin \theta d\psi d\theta} = 1,5.$$

ЭЭВ по сравнению с изотропным излучателем в полтора раза эффективней.

## 5.3. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ РАМКИ

### 5.3.1. Определение магнитной элементарной рамки

В качестве второго источника ЭМВ рассмотрим рамочную антенну. Она представляет собой виток провода той или иной формы, по которому течет переменный ток (рис. 5.3.1). В этом случае вокруг рамки образуется ЭМП, изучение которого и является конечной целью решения задачи.

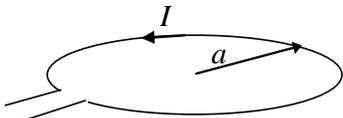


Рис. 5.3.1. Элементарная магнитная рамка

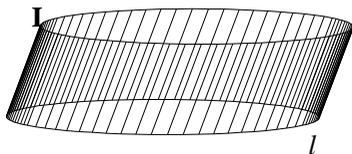


Рис. 5.3.2. Распределение тока по длине рамки

проведения громоздких преобразований, связанных с вычислением операции *rotor* в различных системах координат (чаще сферической) (рис. 5.3.3).

В дальнейшем для решения задачи нахождения ЭМП элементарной рамки удобно использовать принцип перестановочной двойственности. Рассмотрим его суть.

Для упрощения ее решения будем считать, что рамка является элементарной. Математически это означает, что толщина и длина витка рамки существенно меньше длины волны  $\lambda$ . Для рамки круглой формы

$$l = 2\pi a \ll \lambda \text{ или } l < 0,1\lambda.$$

В этом случае распределение переменного тока по длине рамки в фиксированный момент времени близко к равномерному (рис. 5.3.2).

Для нахождения поля элементарной рамки можно было воспользоваться тем же подходом, что и для ЭЭВ. Однако, это требует

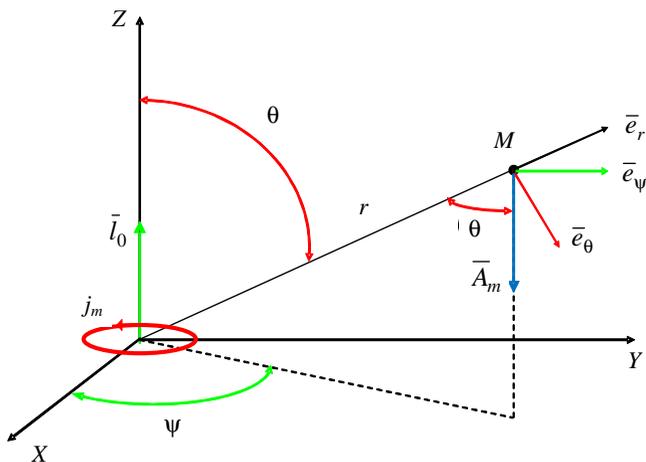


Рис. 5.3.3. Магнитная рамка в сферической системе координат

### 5.3.2. Принцип перестановочной двойственности и его применение для нахождения ЭМП элементарной рамки

Известно, что источниками электромагнитного поля являются электрические токи и заряды. Однако структура уравнений Максвелла, их симметричность приводит к мысли о существовании в природе магнитных зарядов и магнитных токов. История даже знает попытки их обнаружить опытным путем.

Несмотря на отсутствие магнитных зарядов и токов, их формальное введение во многих случаях оказывается полезным, позволяя упростить математические выводы по определению напряженности электромагнитного поля, т.е. решение какой-то электродинамической задачи может быть найдено не при помощи использования системы уравнений Максвелла, а путем введения формальных перестановок в решение какой-то известной задачи, симметричной в некотором смысле по отношению к первой.

Попытаемся найти обоснование такой симметрии.

Система уравнений Максвелла для комплексных амплитуд полей в изотропной среде без потерь имеет вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = \dot{\vec{j}}_m^{\text{Э}} + i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_m; \quad (5.3.1)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = -i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m. \quad (5.3.2)$$

Осуществим формальный переход и представим себе, что нет токов электрических, а есть только токи магнитные, которые наряду с переменным магнитным током  $(-j\omega\mu_a\vec{H})$  порождают электрическое поле. Тогда уравнения Максвелла для комплексных амплитуд принимают вид:

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{E}}_m = \dot{\vec{j}}_m^M - i\omega \mu_a \dot{\vec{H}}_m, \quad (5.3.3)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\vec{H}}_m = i\omega \epsilon_a \dot{\vec{E}}_m. \quad (5.3.4)$$

Здесь  $\dot{\vec{j}}_m^M$  – комплексная амплитуда вектора плотности стороннего магнитного тока, определяемая так же, как и в случае электрического тока.

Сравнивая системы уравнений (5.3.1–5.3.2) и (5.3.3–5.3.4), замечаем, что система (5.3.1–5.3.2) из системы (5.3.3–5.3.4) может быть получена путем введения следующих перестановок:

$$\vec{H} \rightarrow \vec{E}; \quad \vec{E} \rightarrow -\vec{H}; \quad \epsilon_a \leftrightarrow \mu_a; \quad \vec{j}^{\text{Э}} \rightarrow -\vec{j}^M. \quad (5.3.5)$$

Таким образом, сущность принципа перестановочной двойственности состоит в следующем: если известны решения системы уравнений Максвелла при заданных значениях сторонних электрических токов, то эти решения после проведения соответствующих перестановок будут справедливы и для системы уравнений при соответственно заданных значениях сторонних магнитных токов. Для перехода от одной системы решений к другой необходимо воспользоваться системой (5.3.5).

Используем этот принцип при расчете поля элементарной рамки.

**ЭМП элементарной рамки.** Ранее было получено поле элементарного электрического вибратора. Для определения ЭМП элементарного магнитного вибратора используем перестановки (5.3.5) в соответствии с принципом перестановочной двойственности.

Выпишем выражения для компонент электромагнитного поля элементарного электрического вибратора в дальней зоне:

$$\begin{aligned}\dot{H}_{m\psi} &= -i \frac{I_m l k}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}; \\ \dot{E}_{m\theta} &= -i \frac{I_m l k^2}{4\pi\epsilon_a \omega} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}.\end{aligned}\tag{5.3.6}$$

Теперь воспользуемся принципом перестановочной двойственности. В систему (5.3.6) подставим (5.3.5) и получим уравнения для ЭМП элементарной рамки, выраженные для фиктивного магнитного тока:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{m\psi} &= -i \frac{I_m^M l k}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}; \\ \dot{H}_{m\theta} &= +i \frac{I_m^M l k^2}{4\pi\omega\mu_a} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}.\end{aligned}\tag{5.3.7}$$

Теперь необходимо определить связь между реальным током проводимости  $I_m$  и фиктивным магнитным током  $I_m^M$ . Для этого заменим элементарную рамку эквивалентным магнитным диполем (так же формально), создающим в данной точке пространства ЭМП такой же величины, что и рамка с электрическим током. Эти два устройства в силу эквивалентности должны обладать одинаковыми магнитными моментами.

Магнитный момент элементарной рамки (модуль)

$$m_0 = \mu_a S I_m,$$

где  $S$  – площадь рамки, а магнитный момент магнитного диполя (для момента времени  $t_B$ )

$$m_0^M = 1g_m^M = -i \frac{I_m^M l}{\omega},$$

где  $q_m^M$  и  $I_m^M$  – фиктивные заряд и ток.

Следовательно, связь между  $I_m$  и  $I_m^M$  выглядит следующим образом

$$I_m S = -i \frac{I_m^M l}{\omega \mu_a},$$

тогда 
$$I_m^M = -i \frac{I_m S \omega \mu_a}{l}.$$

Теперь мы можем найти компоненты ЭМП, создаваемого элементарной рамкой в дальней зоне:

$$\begin{aligned} \dot{E}_{m\psi} &= -\frac{I_m S k}{4\pi} \omega \mu_a \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}; \\ \dot{H}_{m\theta} &= \frac{I_m S k^2}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-ikr}}{r}. \end{aligned}$$

### Выводы:

1. Электрическое и магнитное поля элементарной рамки в дальней зоне убывают пропорционально  $1/r$ , в пространстве взаимно перпендикулярны, изменяются противофазно. Вектор Пойнтинга за период не изменяет своего знака, следовательно, имеет место излучение (перенос) электромагнитной энергии (рис. 5.3.4).

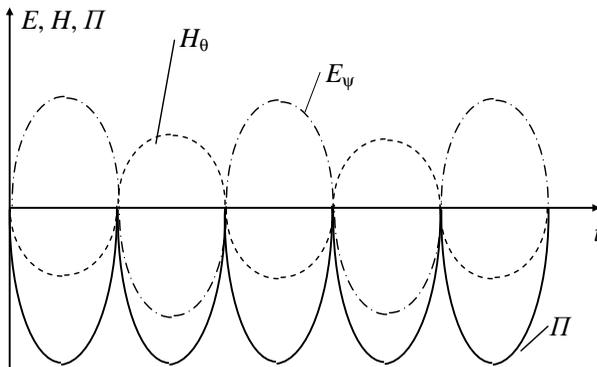
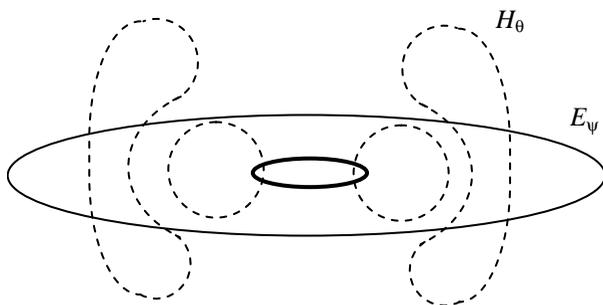


Рис. 5.3.4. Временная диаграмма поля элементарной магнитной рамки в дальней зоне



**Рис. 5.3.5.** Структура ЭМП элементарной рамки в дальней зоне

2. Силовые линии электрического поля лежат в плоскости, содержащей рамку.
3. Силовые линии магнитного поля лежат в плоскости, содержащей ось рамки и точку наблюдения (рис. 5.3.5).

### 5.3.3. Мощность и сопротивление излучения, диаграмма направленности элементарной рамки

Данные параметры находятся аналогично элементарному электрическому вибратору.

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \times \vec{H} = -E_{\psi} \vec{e}_{\psi} \times (\vec{H}_{\theta} \vec{e}_{\theta}) = E_{\psi} H_{\theta} \vec{e}_r = \Pi \vec{e}_r,$$

где  $\Pi = \frac{I_m^2 S^2 k^3}{32\pi^2 r^2} \omega \mu_a \sin^2 \theta [1 + \cos 2(\omega t - kr)]$ .

1. Вектор плотности ЭМЭ имеет только одну радиальную составляющую.
  2. Радиальная составляющая вектора  $\vec{\Pi}$  изменяется во времени с удвоенной частотой.
- Модуль среднего за период значения плотности потока мощности

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_T \vec{\Pi} dt = \frac{I_m^2 S^2 k^3}{32\pi^2 r^2} \omega \mu_a \sin^2 \theta.$$

#### Свойства:

1. Максимум  $\Pi_{\text{ср}}$  имеет место при  $\theta = \pi/2$ .
2.  $\Pi_{\text{ср}} \neq 0$  ни в какой момент времени, что свидетельствует о переносе ЭМЭ в пространстве.

**Мощность излучения.** Находится аналогично мощности излучения элементарного электрического вибратора.

$$F_{\Sigma} = \frac{\omega k^3 \mu_a m_m^2}{12\pi} = \frac{120\pi k^4}{12\pi} m_m^2 = 10k^4 I_m^2 S^2.$$

Подставляя  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , получим

$$F_{\Sigma} = 10I_m^2 \left( \frac{(2\pi)^2 S}{\lambda^2} \right)^2 \approx 400I_m^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^4.$$

**Сопротивление излучения**

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^4 \approx 800 \left( \frac{l}{\lambda} \right)^4.$$

Из-за элементарности рамки ( $l \ll \lambda$ ) ЭЭВ обладает лучшими излучающими свойствами, чем рамка. Из двух излучателей тот лучше, сопротивление излучения которого больше, так как при равных токах мощность излучения его выше. Поэтому рамочные антенны применяются в качестве приемных там, где на низких частотах нет возможности использовать громоздкие вибраторные антенны.

**Диаграмма направленности.** ДН ЭР имеет тот же вид, что и ДН ЭВ (рис. 5.3.6).

$$F(\theta, \psi) = \sin \theta,$$

$$F^2(\theta, \psi) = \sin^2 \theta.$$

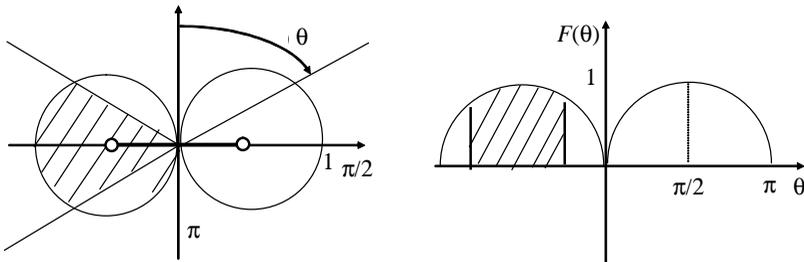


Рис. 5.3.6. Диаграмма направленности элементарной рамки

## 5.4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ ИСТОЧНИКА ГЮЙГЕНСА

### 5.4.1. Метод эквивалентных токов и его применение для решения задач электродинамики

При нахождении полей элементарных ЭЭВ и рамки была обнаружена связь их полей с токами. Для вычисления полей необходимо знать токи, протекающие в излучателях. На практике не всегда известны токи в конкретных излучателях, но известны поля на некоторой замкнутой поверхности, охватывающей излучатель.

На предыдущих лекциях излагался способ расчета ЭМП по заданным источникам в безграничной однородной изотропной среде. Ясно, что полученные соотношения не могут быть использованы непосредственно для случая неоднородных сред.

Установим общие принципы решения таких задач.

Пусть в области I с параметрами среды  $\epsilon_{a1}, \mu_{a1}, \gamma_1$  имеются источники поля, характеризующиеся совокупным зарядом  $q$  и плотностью тока  $j$ . Требуется определить ЭМП во внешнем пространстве (область II с параметрами среды  $\epsilon_{a2}, \mu_{a2}, \gamma_2$ ) (рис. 5.4.1).

Чтобы определить поле в области II, необходимо иметь, как утверждает теорема единственности решения УМ, касательные составляющие векторов  $E$  и  $H$  на граничной поверхности  $S$ .

Таким образом, исходная задача может быть приведена к задаче по определению ЭМП в области II по известным граничным значениям векторов  $E$  и  $H$  на поверхности  $S$ .

При этом полагается, что поля  $E$  и  $H$  на поверхности будут создавать поле в точке наблюдения такое же, как и поле, создаваемое эквивалентными электрическим  $j_S$  и магнитным  $j_M$  токами на поверхности  $S$ , вызванными действием полей  $E$  и  $H$ . Эквивалентные токи в этом случае определяются из формул для граничных условий

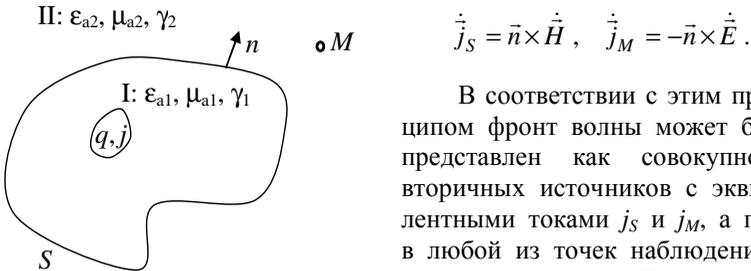


Рис. 5.4.1. К определению поля источника Гюйгенса

В соответствии с этим принципом фронт волны может быть представлен как совокупность вторичных источников с эквивалентными токами  $j_S$  и  $j_M$ , а поле в любой из точек наблюдения – суперпозиция полей этих источников (принцип Гюйгенса) (рис. 5.4.2).

Заменим реальные источники области I некоторыми фиктивными распределенными по поверхности эквивалентными источниками, поле которых в области I равно нулю

$$\dot{E}'_I = 0; \dot{H}'_I = 0,$$

а во внешнем пространстве совпадает с ЭМП реальных источников, т.е.

$$\dot{E}'_{II} = \dot{E}_{II}; \dot{H}'_{II} = \dot{H}_{II}.$$

Эти равенства выполнимы в том случае, если на границе раздела будут выполняться равенства (по теореме единственности решений)

$$\dot{E}'_{II} = \dot{E}_{II\tau}; \dot{H}'_{II} = \dot{H}_{II\tau}.$$

В области 1, как было определено,

$$\dot{E}'_{I\tau} = 0; \dot{H}'_{I\tau} = 0.$$

Следовательно, касательные к поверхности раздела  $S$  составляющие векторов  $E$  и  $H$  ЭМП фиктивных (эквивалентных) источников при переходе через  $S$  испытывают скачок.

Из граничных условий известно, что касательные составляющие вектора  $H$  имеют разрыв непрерывности на границе раздела, если по ней текут поверхностные токи, т.е.

$$\dot{H}_{II\tau} - \dot{H}_{I\tau} = \dot{j}_S,$$

или

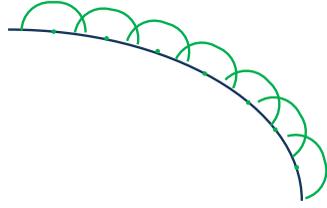
$$\vec{n} \times (\dot{H}_{II\tau} - \dot{H}_{I\tau}) = \dot{j}'_S.$$

Аналогично можно показать, что разрыв непрерывности касательной составляющей вектора  $E$  обусловлен поверхностными (фиктивными) магнитными токами на поверхности  $S$ :

$$\dot{E}_{II\tau} - \dot{E}_{I\tau} = -\dot{j}'_M, \quad -\vec{n} \times (\dot{E}_{II\tau} - \dot{E}_{I\tau}) = \dot{j}'_M.$$

Учитывая выше приведенные равенства, можно окончательно записать

$$\dot{j}'_S = \vec{n} \times \dot{H}'_{II}, \quad \dot{j}'_M = -\vec{n} \times \dot{E}'_{II}.$$



**Рис. 5.4.2.** К пояснению принципа Гюйгенса

Следовательно, можно считать, что источниками ЭМП в точке наблюдения  $M$  являются поверхностные электрические и магнитные токи, текущие по  $S$ . Таким образом, расчет ЭМП во внешнем пространстве  $\Pi$  сводится к определению поля эквивалентных источников в однородной среде. Изложенный метод носит название принципа эквивалентных токов. Он позволяет значительно упростить аналитический расчет полей в сложных случаях неоднородных сред.

#### 5.4.2. Электромагнитное поле источника Гюйгенса в дальней зоне

Простейшим или элементарным поверхностным излучателем (источником Гюйгенса) является плоский элемент фронта ЭМ волны. Согласно принципу эквивалентных токов, магнитная составляющая ЭМП  $H$  элемента волновой поверхности будет эквивалентна действию электрического тока  $j_S$ , а электрическая составляющая  $E$  – действию фиктивного магнитного тока  $j_M$ .

Таким образом, источник Гюйгенса можно рассматривать как элементарный излучатель площади, по поверхности которого текут электрический  $I$  и магнитный  $I_M$  токи (рис. 5.4.3).

Поместим источник Гюйгенса в начало сферической системы координат и вводим следующие обозначения.

Эквивалентные токи электрический и фиктивный магнитный, протекающие по поверхности, определяются

$$\dot{I} = j_S dx, \quad \dot{I}_M = j_M dy,$$

т.е. источник Гюйгенса может быть представлен в виде совокупности

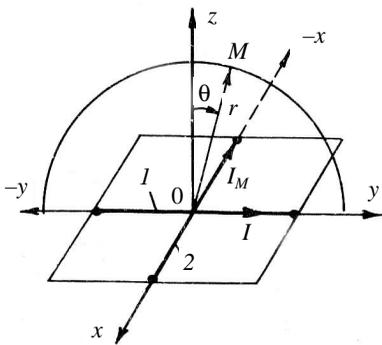


Рис. 5.4.3. К нахождению электромагнитного поля источника Гюйгенса в дальней зоне

двух взаимно перпендикулярных электрического элементарного вибратора длиной  $dx$  и током  $I$  и фиктивного магнитного вибратора длиной  $dy$  с током  $I_M$ .

Определим составляющие ЭМП, создаваемые источником Гюйгенса в дальней зоне. Разместим излучатель так, как показано на рис. 5.4.3. Поле источника Гюйгенса может быть получено в результате суперпозиции полей взаимно-перпендикулярно расположенных электрического и магнитного элементарных вибраторов.

Применительно к приведенной на рисунке ориентации электрического и магнитного вибраторов созданные ими напряженности электрического поля в плоскости  $ZOY$  определяются

$$\dot{E}_\theta^\Delta = \pm \frac{i\dot{d}yk^2}{4\pi\omega\epsilon_a} \cos\theta \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad \dot{E}_\theta^M = \pm \frac{i\dot{I}_M dxk}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Произведем в этих выражениях подстановки, вытекающие из граничных условий

$$\dot{I} = j_S dx = \dot{H}_\tau dx, \quad \dot{I}_M = j_M dy = -\dot{E}_\tau dy$$

и, учитывая, что  $k = \omega\epsilon_a z$ ,

$$\dot{H}_\tau = \frac{\dot{E}_\tau}{z} = \frac{\dot{E}_\tau \omega\epsilon_a}{k},$$

можно записать

$$\dot{E}_\theta^\Delta = \pm \frac{i\dot{E}_\tau ds k}{4\pi} \cos\theta \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad \dot{E}_\theta^M = \pm \frac{i\dot{E}_\tau ds k}{4\pi} \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Заметим, что знаки «+» и «-» определяют фазовые соотношения между составляющими в зависимости от углового положения точки наблюдения  $M$ .

Суммарное электрическое поле в плоскости  $ZOY$  находим путем сложения его составляющих

$$\dot{E}_\theta = \dot{E}_\theta^\Delta + \dot{E}_\theta^M = \pm \frac{i\dot{E}_\tau ds k}{4\pi} (1 + \cos\theta) \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Подобным образом можно показать, что в плоскости  $XOY$  суммарная составляющая электрического поля равна

$$\dot{E}_\psi = \dot{E}_\psi^\Delta + \dot{E}_\psi^M = \pm \frac{i\dot{E}_\tau ds k}{4\pi} (1 + \cos\theta) \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Для точки  $M$  с произвольными координатами составляющие вектора напряженности электрического поля источника Гюйгенса определяются:

$$\dot{E}_{m\theta} = \pm \frac{i\dot{E}_{m\tau} ds k}{4\pi} (1 + \cos\theta) \sin\psi \frac{e^{-ikr}}{r},$$

$$\dot{E}_{m\psi} = \pm \frac{i\dot{E}_{m\tau} ds k}{4\pi} (1 + \cos\theta) \cos\psi \frac{e^{-ikr}}{r}.$$

Составляющие магнитного поля определяются

$$\dot{H}_{m\theta} = -\frac{\dot{E}_{m\psi}}{z}; \quad \dot{H}_{m\psi} = \frac{\dot{E}_{m\theta}}{z}.$$

Таким образом, на основе полей элементарного электрического вибратора и принципа эквивалентных токов найдены компоненты поля элементарного поверхностного излучателя.

### 5.4.3. Диаграмма направленности, коэффициент направленного действия

Для описания диаграммы направленности источника Гюйгенса по напряженности электрического поля необходимо определить модуль вектора электрического поля, т.е.

$$|\dot{E}_m| = \sqrt{|\dot{E}_{m\theta}|^2 + |\dot{E}_{m\psi}|^2} = \frac{E_{m\tau} ds k}{4\pi r} (1 + \cos \theta).$$

Нормированная ДН имеет следующий вид

$$F(\theta) = \frac{|\dot{E}_m|}{|\dot{E}_m|_{\max}} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta).$$

Максимальное значение ДН достигается при  $\theta = 0$ . Изобразим на рис. 5.4.4 ДН источника Гюйгенса в полярных координатах. Она имеет вид кардиоиды.

Определим теперь, насколько элементарный поверхностный излучатель эффективней в направлении максимального излучения, чем

изотропный (ненаправленный), т.е. определим его коэффициент направленного действия (КНД). Выражение для КНД источника Гюйгенса имеет вид

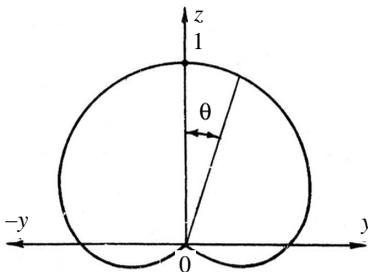


Рис. 5.4.4. Нормированная диаграмма направленности источника Гюйгенса

$$D_0 = \frac{4\pi}{\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} F^2(\theta, \psi) \sin \theta d\psi d\theta} = 3.$$

Таким образом, источник Гюйгенса в три раза более эффективен, чем изотропный излучатель.

## 5.5. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

### 5.5.1. Дифракционный метод Гюйгенса–Кирхгофа для монохроматической волны

Часто при решении электродинамических задач возникает необходимость определения поля волны в среде, которую нельзя считать вполне однородной и изотропной по своим электрическим свойствам. В большинстве случаев с этим приходится сталкиваться, когда рассматривается влияние какого-либо тела конечных размеров на структуру поля волны, если электрические параметры этого тела отличаются от параметров окружающего пространства. Задачи такого рода называют задачами дифракции. К решению этих задач прибегают при проектировании и анализе антенных устройств, в радиолокации, при исследовании распространения радиоволн в неоднородных средах и т.д.

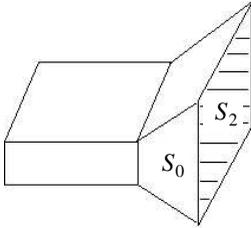
В большинстве случаев приходится решать задачи дифракции монохроматических электромагнитных волн на проводниках конечных размеров. При этом поле  $(\dot{E}_{\text{пад}} \text{ и } \dot{H}_{\text{пад}})$  падающей волны считается известным. Под действием поля этой волны на поверхности проводника возникают электрические токи, создающие вторичное поле  $(\dot{E} \text{ и } \dot{H})$ .

Главной трудностью в этом представлении или решении задачи является незнание  $\dot{E}$  и  $\dot{H}$ , а следовательно, и незнание суммарного поля в окружающем проводник пространстве

$$\dot{E}_{\Sigma} = \dot{E}_{\text{пад}} + \dot{E}, \quad \dot{H}_{\Sigma} = \dot{H}_{\text{пад}} + \dot{H}.$$

Поэтому задача сводится к определению именно вторичного поля, которое можно найти лишь на основе решения дифракционной задачи в целом. Это указывает на чрезвычайную сложность теории дифракции электромагнитных волн. Следует отметить, однако, что большинство важных в прикладном отношении задач не требуют использования при решении всеобъемлющей дифракционной теории. К настоящему времени для рассмотрения этих вопросов разработан ряд приемов и допущений, позволяющих существенно упростить само решение и дающих вполне удовлетворительные для практики результаты и выводы.

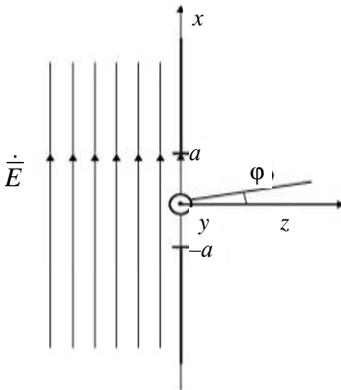
Основой приближенного инженерного анализа некоторых СВЧ-устройств (например, апертурных антенн) служит известный уже принцип Гюйгенса, в соответствии с которым каждая точка волнового фронта может рассматриваться как фиктивный источник сферической волны. Полное поле в области фронта перед волновым фронтом есть результат



**Рис. 5.5.1. Рупорная антенна**

па отметим, что именно принцип Гюйгенса–Кирхгофа в настоящее время широко используется при расчете излучающих систем СВЧ-диапазона. Основные типы антенн этого диапазона: щелевые, рупорные, зеркальные. Схематически любая из таких антенн может быть представлена в виде замкнутой поверхности (рис. 5.5.1), одна часть которой  $S_0$  – хороший проводник, а другая  $S_2$  – поверхность раскрыва (поверхность излучения энергии окружающее пространство). Поле на поверхности  $S_2$  считается известным, и его можно заменить совокупностью вторичных эквивалентных источников. Поверхность  $S_0$  считают идеально проводящей, из чего следует отсутствие каких бы то ни было токов на этой поверхности.

В таком приближении поле в дальней зоне определяется только эквивалентными источниками, распределенными на поверхности  $S_\Sigma$ .



**Рис. 5.5.2. Дифракция плоской волны на идеально проводящем экране**

интерференции сферических волн, излучаемых фиктивными вторичными источниками (рис. 5.4.2).

Недостатком изложенного принципа Гюйгенса является его описательный, качественный характер.

В работах Френеля, а затем – Кирхгофа принцип Гюйгенса получил дальнейшее развитие и более строгую формулировку.

Не вдаваясь в детали упомянутого принципа

При этом полагается, что геометрические размеры  $S_\Sigma$  существенно больше длины волны.

Приближение Гюйгенса–Кирхгофа часто называют методом физической оптики. Иллюстрацией этого метода является, например, задача о дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящем экране, в котором имеется щель шириной  $2a$ , бесконечная протяженность вдоль оси  $Y$  (рис. 5.5.2). Поляризация падающей волны такова, что в выбранной системе координат

$$\dot{\vec{E}} = E_m e^{-ikz} \vec{e}_x.$$

Требуется определить рассеянное (дифрагированное) поле в полупространстве  $Z > 0$ .

Из физических соображений ясно, что при  $Z > 0$  на достаточном удалении  $\dot{\vec{E}}$  будет иметь две отличные от нуля проекции  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$ , т.е. силовые линии электрического поля – дуги окружности с центром в точке  $(x = 0, y = 0)$ . Если же интересоваться полем вблизи оси  $Z$ , то можно предположить, что силовые линии электрического поля в полупространстве  $Z > 0$  имеют ту же ориентацию, что и силовые линии возмущающего поля в полупространстве  $Z < 0$ .

Это значит, что электрическое поле в полупространстве  $Z > 0$  имеет единственную составляющую  $\bar{E}_x(x, z)$ . Это позволяет перейти от векторного волнового уравнения вида  $\nabla^2 \dot{\vec{E}} + k^2 \dot{\vec{E}} = 0$  к более простому скалярному  $\frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_x}{\partial z^2} + k^2 \dot{E}_x = 0$  и существенно упрощает все дальнейшие выкладки.

В соответствии с принципом физической оптики следует предположить, что граничными условиями на плоскости  $Z = 0$  для искомого поля являются следующие

$$\dot{E}_x(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{при } x > a, \ x < -a, \\ E_m, & \text{при } -a \leq x \leq a. \end{cases}$$

Не рассматривая решение этой задачи, отметим следующее.

Некоторые из задач дифракции при разумной идеализации допускают скалярную постановку. Это возможно в том случае, если из физических соображений ясно, что одна из трех возможных проекций вектора поля существенно больше двух других, что было проиллюстрировано предыдущим примером.

**Формула Кирхгофа.** Рассмотрим произвольный объем  $V$  (рис. 5.5.4), ограниченный поверхностью  $S$ ,  $\bar{n}$  – единичный вектор нормали к внутренней поверхности.

Требуется найти функцию  $\dot{\psi}$ , удовлетворяющую однородному волновому уравнению

$$\nabla^2 \dot{\psi} + k^2 \dot{\psi} = 0$$

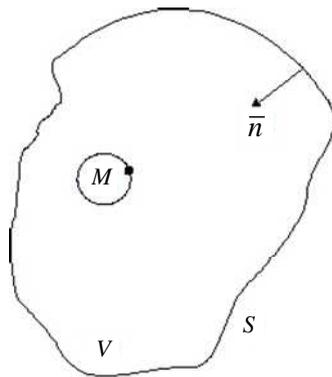


Рис. 5.5.4. Произвольный объем  $V$

при условии, что значения функции  $\psi$  и ее производной  $\partial\psi/\partial n$  на поверхности  $S$  заданы. Иными словами необходимо отыскать волновое поле, возбуждаемое заданными поверхностными источниками.

Решение этой задачи, полученное Кирхгофом, определяется следующей формулой

$$\psi(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] dS,$$

где  $r$  – расстояние между текущей точкой на поверхности  $S$  и точкой наблюдения  $M$ .

### 5.5.2. Дифракция Фраунгофера плоской волны на прямоугольном отверстии в проводящем экране

Предположим, что изображенное на рис. 5.5.5 прямоугольное отверстие в идеально проводящем экране возбуждается однородной плоской волной, движущейся вдоль оси  $Z$  и имеющей единственную составляющую вектора электрического поля  $\dot{E}_y$ .

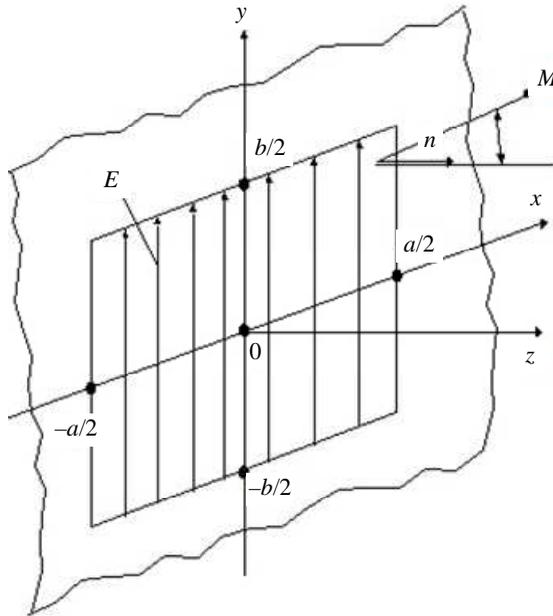


Рис. 5.5.5. К пояснению принципа дифракции Фраунгофера на прямоугольном отверстии в проводящем экране

Предположим также, что размеры отверстия достаточно велики по сравнению с длиной волны:  $a \gg \lambda$ ,  $b \gg \lambda$ .

В рамках рассмотренного выше метода физической оптики возбуждающее поле в пределах отверстия (т.е. при  $Z = 0$ ) совпадает с полем волны, распространяющейся в полупространстве  $Z < 0$ . Иными словами будем считать, что в плоскости отверстия, или при  $-a/2 \leq x \leq a/2$ ,  $-b/2 \leq y \leq b/2$ , поле волны может быть описано выражением  $\dot{E}_y = E_0 e^{-ikz}$ . Вне отверстия поле обращается в нуль. Видно, что  $\partial/\partial n = \partial/\partial z$ , откуда на основании формулы Кирхгофа в полупространстве  $Z > 0$

$$\dot{E}_y(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} - \dot{E}_y \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] dS,$$

где  $S$  – площадь, занятая отверстием; все производные вычисляются при  $Z = 0$ ; расстояние  $r$  между точкой в плоскости  $S$  с координатами  $x, y, 0$  и точкой наблюдения  $M_C$  с координатами  $x_1, y_1, z_1$  определяется по формуле

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + z_1^2}.$$

Далее

$$\left. \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial}{\partial z} (E_0 e^{-ikr}) \right|_{z=0} = -ikE_0;$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z} \right|_{z=0};$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{r}{z} = \cos \theta,$$

где  $\theta$  – угол между нормалью к поверхности  $S$  и направлением на точку  $M$ ,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-ikr}}{r} \right) = -\left( i \frac{k}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-ikr},$$

поэтому

$$\dot{E}_y(M) = \frac{E_0}{4\pi} \int_S \left[ ik \frac{e^{-ikr}}{r} (1 + \cos \theta) + \frac{\cos \theta}{r^2} e^{-ikr} \right] dS.$$

Полученное выражение представляет формальное решение поставленной задачи в рамках приближений физической оптики.

**Дифракция Фраунгофера.** Это дифракция в дальней зоне. Обращаясь к рассмотренной выше задаче, отметим, что наиболее типичным для радиотехники следует считать случай, когда точка наблюдения  $M$  находится на достаточном удалении от излучающего раскрыва антенны, т.е.

$$\frac{k}{r} \gg \frac{1}{r^2},$$

поэтому в окончательной формуле для  $\dot{E}_y(M)$  слагаемыми, содержащими  $1/r^2$  можно пренебречь. В этом случае

$$\dot{E}_y(M) = \frac{iE_0k}{4\pi} \int_S (1 + \cos\theta) \frac{e^{-ikr}}{r} dS.$$

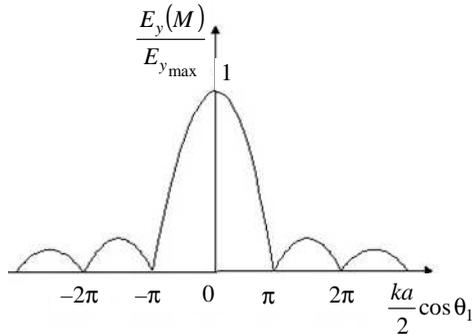
Как отмечалось ранее, особенно важным для практического анализа характеристик антенных систем следует считать случай, когда  $r \gg a$ ,  $r \gg \epsilon$ . При этом  $\theta$  можно с пренебрежимо малой погрешностью считать неизменным для любой точки раскрыва, а  $r = r_0$  – расстоянию от точки наблюдения до начала координат (рис. 5.5.5).

Введя обозначения:  $\theta_1$  – угол между  $r_0$  и осью  $X$ ;  $\theta_2$  – угол между  $r_0$  и осью  $Y$  – и опуская промежуточные выкладки, можно получить характеристику направленности антенны

$$F(\theta_1, \theta_2) = \frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \cos\theta_1\right) \sin\left(\frac{k\epsilon}{2} \cos\theta_2\right)}{\frac{ka}{2} \cos\theta_1 \frac{k\epsilon}{2} \cos\theta_2}.$$

Если положить  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ , т.е. точка наблюдения находится в плоскости  $XOZ$ , тогда нормированная характеристика направленности раскрыва, изображенного на рис. 5.5.5, запишется в виде

$$\frac{E_y(M)}{E_{y\max}} = \frac{\sin\left(\frac{ka}{2} \cos\theta_1\right)}{\frac{ka}{2} \cos\theta_1}.$$



**Рис. 5.5.6.** Диаграмма направленности  $E_y(M)/E_{\max}$

Вид диаграммы направленности, соответствующей характеристике  $E_y(M)/E_{\max}$ , показан на рис. 5.5.6.

Заметим, что ширина диаграммы направленности полностью определяется отношением геометрических размеров апертуры раскрыва к длине волны. Например, в соответствии с окончательной формулой  $E_y(M)/E_{y,\max}$ , при  $a/\lambda = 100$  получим, что первый ноль диаграммы направленности определяется равенством  $100\pi \cos \theta_1 = \pi$ , т.е. ширина основного лепестка диаграммы направленности, измеренная по нулям, составит  $2\Delta\theta_1 = 0,02$  рад =  $1,15^\circ$ .

### 5.5.3. Дифракция Френеля

Это дифракция в ближней зоне. Приближения, соответствующие дифракции Фраунгофера, предполагают, что точка наблюдения  $M$  настолько удалена от раскрыва  $S$  (рис. 5.5.2), что колебания, приходящие в точку  $M$  из точек  $A$  и  $O$  можно считать синфазными. На самом деле геометрическая разность хода этих лучей

$$\Delta = AM - OM = Z \sqrt{1 + \left(\frac{a}{2Z}\right)^2} - Z \approx \frac{a^2}{8Z}$$

соответствует фазовому сдвигу  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \frac{\pi a^2}{4\lambda Z}$ .

Граница ближней и дальней зон определена указанной величиной  $\Delta\varphi = \pi/8$  и является плоскостью с координатой  $Z_0 = 2a^2/\lambda$ .

Можно показать, что в пределах ближней зоны энергия поля волны локализована в пределах «лучевой трубки», поперечник которой примерно равен размерам излучающей апертуры.

Для вычисления дифракционного поля в ближней зоне вместо равенства  $r = r_0$ , справедливого для дальней зоны и принятого при дифракции Фраунгофера, необходимо использовать приближения, учитывающие наличие фазового сдвига  $\Delta\varphi$ , отмеченного ранее.

Не вдаваясь в детальное рассмотрение этого вопроса отметим, что расчеты показывают: при дифракции Френеля сохраняются многие черты чисто лучевой, т.е. геометрической оптики. Так значения  $x_1 = \pm a/2$  и  $y_1 = \pm b/2$  служат условными границами областей «света» и «тени». Поэтому область прикладной электродинамики, занимающаяся построением устройств, работающих на принципах дифракции Френеля, носит название квазиоптики.

К числу таких устройств можно отнести так называемые открытые резонаторы, открытые волноводы и др.

Однако применительно к настоящей радиотехнике квазиоптика используется мало. Тем не менее, при дальнейшем освоении миллиметрового и более коротковолновых диапазонов принцип дифракции Френеля становится единственно применимым.

## 6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

### 6.1. ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНИЙ ПЕРЕДАЧИ

#### 6.1.1. Назначение направляющих систем – линий передачи

Одной из важнейших задач техники сверхвысоких частот (СВЧ) является передача электромагнитных волн (ЭМВ) на некоторые расстояния. При изучении теории излучения электромагнитных волн было показано, что излучатели (антенны) могут обладать направленностью излучения энергии. Тем не менее направленность излучения антенн оказывается совершенно недостаточной, если необходимо передать энергию с высоким коэффициентом полезного действия  $\eta$  от генератора к потребителю, так как значительная часть энергии будет рассеяна в пространстве на других направлениях (рис. 6.1.1).

Для эффективной передачи энергии с высоким КПД необходимо, чтобы электромагнитная волна, переносящая энергию, не рассеивалась бы в пространстве, а концентрировалась вокруг заданного направления.

Электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль направляющей границы, называются **направляемыми**, а сама направляющая граница (линия) – **линией передачи (ЛП)** или **фидером**. КПД любых линий передачи не может равняться единице, так как в них наблюдается затухание направляемых волн вследствие потерь энергии из-за неидеальности ЛП. Потери энергии характеризуются **коэффициентом затухания  $\alpha$** .

Практически всегда для передачи энергии на небольшие расстояния внутри радиотехнического устройства используются различные виды ЛП. Например, с помощью ЛП осуществляется канализация энергии от передатчика (ПРД) к антенне или от антенны – к приемнику (ПРМ).

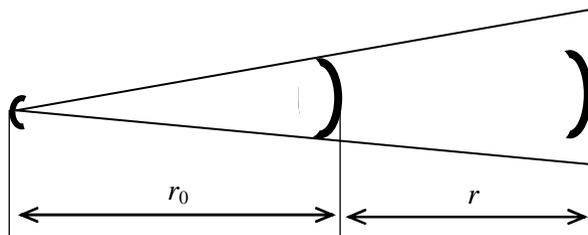


Рис. 6.1.1. Передача радиоволн антенной

### 6.1.2. Определение и классификация направляемых электромагнитных волн в линиях передачи, классификация линий передачи

Итак, электромагнитные волны, распространяющиеся вдоль направляющей границы, называются **направляемыми**, а сама направляющая граница (линия) – **линией передачи (ЛП)** или **фидером**.

В теории линий передачи направляемые ЭМВ классифицируются в зависимости от наличия или отсутствия в них **продольных составляющих электрического либо магнитного векторов**. При этом под продольным направлением подразумевается направление распространения ЭМВ (продольная ось линии передачи – ось  $Z$ ). Здесь могут быть четыре случая.

1. Оба вектора, электрический и магнитный, перпендикулярны оси ЛП и, следовательно, не имеют продольных составляющих (рис. 6.1.2), т.е.  $H_z = 0$ ,  $E_z = 0$ . Вектор Пойнтинга  $\Pi$  направлен вдоль оси  $Z$ . Такие волны носят название **поперечных** электромагнитных волн – волн **типа Т** или **ТЕМ** (Transverse Electromagnetic).

2. Электрический вектор имеет отличную от нуля продольную составляющую  $E_z \neq 0$ , в то время как магнитное поле волны поперечно, т.е.  $H_z = 0$  (рис. 6.1.3). Вектор Пойнтинга  $\Pi$  лежит в плоскости  $XOZ$  и направлен под углом  $\varphi$  относительно оси  $Z$ . Такие направляемые волны называются волнами **типа Е** (Electric).

3. Продольную составляющую имеет магнитный вектор ( $H_z \neq 0$ ), а электрическое поле поперечно ( $E_z = 0$ ). Вектор Пойнтинга  $\Pi$  лежит в плоскости  $YOZ$  и направлен под углом  $\varphi$  относительно оси  $Z$ . Такие направляемые волны называются волнами **типа Н** (рис. 6.1.4).

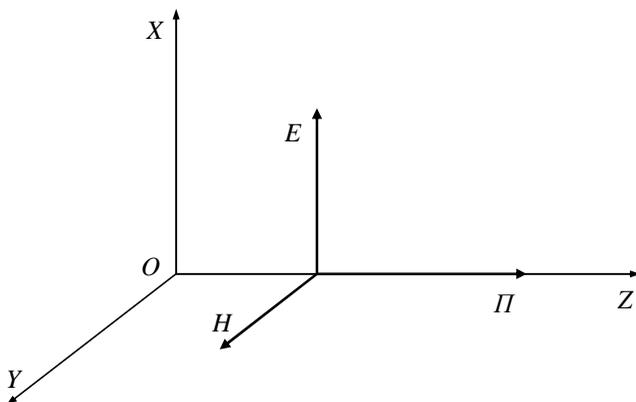


Рис. 6.1.2. Т-волна в ЛП

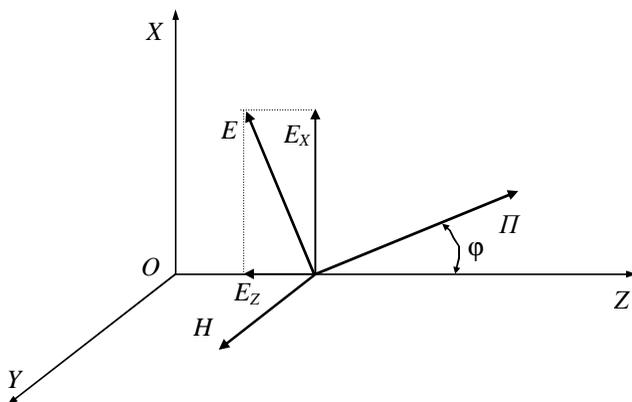


Рис. 6.1.3. *E*-волна в ЛП

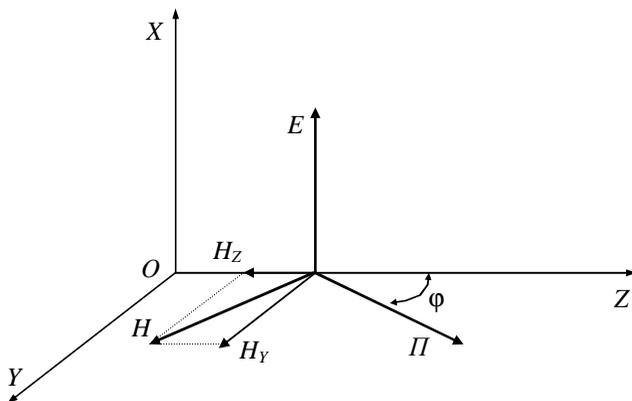


Рис. 6.1.4. *H*-волна в ЛП

4. В ЛП могут существовать волны, одновременно имеющие продольные составляющие электрического и магнитного полей ( $E_z \neq 0$ ,  $H_z \neq 0$ ). Вектор Пойнтинга  $\Pi$  не лежит в плоскости  $YOZ$  или  $XOZ$ . Такие волны получили название **смешанных** или **гибридных** (рис. 6.1.5).

На основе классификации ЭМВ в линиях передачи проводится классификация самих ЛП.

**Классификация линий передачи.** В настоящее время применяется большое количество различных типов ЛП. Общими требованиями к ним являются минимальные потери энергии, простота конструкции, высокая надежность, малые габариты и масса, низкая стоимость.

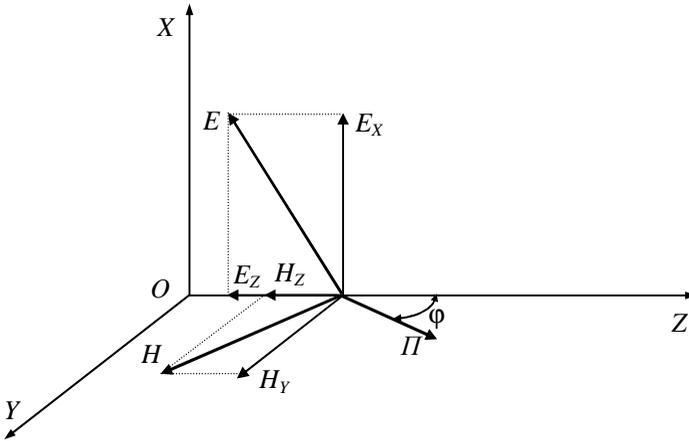


Рис. 6.1.5. Гибридная волна в ЛП

Классификация ЛП выполняется по различным признакам.

1. Если в направлении передачи энергии (вдоль оси  $Z$ ) ЛП имеет неизменные параметры внутреннего заполнения и геометрические размеры, линия передачи называется **регулярной (продольно однородной)**. В противном случае ЛП называются **нерегулярными (продольно неоднородными)**.

2. Линии передачи подразделяются на линии открытого и закрытого типов. В **открытых** ЛП энергия ЭМП сосредоточена в пространстве в непосредственной близости к ее поверхности. В линиях **закрытого** типа энергия ЭМП заключена в пространстве, ограниченном замкнутой металлической поверхностью, представляющей собой электромагнитный экран.

3. По режиму работы ЛП бывают с **бегущей** или **стоячей** волнами. Чтобы получить режим бегущей волны, надо сопротивление нагрузки и **волновое (характеристическое) сопротивление линии** сделать равными, т.е. надо согласовать линию с нагрузкой ( $R_H = Z_{л}$ ). На СВЧ режим чисто бегущей волны при коэффициенте бегущей волны (КБВ), равном единице, получить обычно невозможно. Практически очень хорошо, если  $КБВ = 0,8 \dots 0,9$ . Ухудшение работы линии при этом незначительно. Во многих случаях  $КБВ = 0,5 \dots 0,7$ .

4. По типу волны в ЛП различают линии с  $T$ -волной, ЛП с  $E$ - и  $H$ -волнами и линии с поверхностными (замедленными) волнами.

Конструктивное исполнение ЛП зависит прежде всего от типа ЭМВ в них.

### 6.1.3. Т-волна в коаксиальной линии передачи

**Коаксиальная ЛП** – два соосных проводника с заданными размерами, центрированные диэлектрическими шайбами или сплошным диэлектрическим заполнением. Одножильный или многожильный внутренний проводник окружен слоем высококачественного диэлектрика (полистирол, полиэтилен, фторопласт и т.д.), поверх которого располагается внешний проводник. Внешний проводник может быть выполнен в виде сплошной металлической трубы (рис. 6.1.6, а). Такая ЛП называется жестким коаксиальным фидером. При этом часто внутренний проводник центрируется диэлектрическими шайбами. В другом конструктивном исполнении внешний проводник выполняется в виде металлической сетки, для предохранения от внешних воздействий покрытой защитной диэлектрической оболочкой. Такой фидер становится гибким и называется коаксиальным кабелем. Внутреннее заполнение в этом случае выполняют сплошным из высококачественного диэлектрика.

Свойства и параметры коаксиального фидера определяются его геометрическими размерами  $D$  и  $d$  (рис. 6.1.6, а), электрическими параметрами диэлектрика внутреннего заполнения, внешнего и внутреннего проводников.

**Волновое сопротивление коаксиальной ЛП** определяется выражением:

$$Z_K = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_a}{\epsilon_a}} \ln \frac{D}{d} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{D}{d}, \quad (6.1.1)$$

где  $D$  – внутренний диаметр внешнего проводника;  $d$  – диаметр центрального проводника;  $\epsilon_a = \epsilon\epsilon_0$ ,  $\mu_a = \mu\mu_0$  – соответственно абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости диэлектрика внутреннего заполнения ЛП.

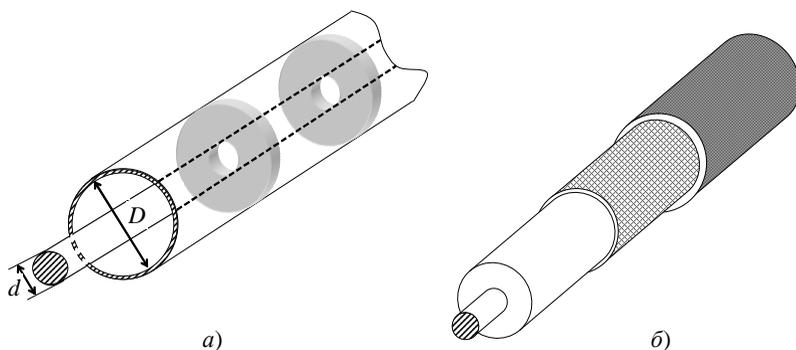


Рис. 6.1.6. Коаксиальная ЛП

Коаксиальным фидерам присваивается условное обозначение, состоящее из четырех позиций, поставленных через дефис: букв РК – радиочастотный кабель; величины волнового сопротивления в Омах; среднего диаметра диэлектрического заполнения в миллиметрах; двух цифр, одна из которых обозначает материал диэлектрика внутреннего заполнения (1 – полиэтилен, 2 – фторопласт), другая – порядковый номер разработки конкретной типоконструкции фидера.

В коаксиальной ЛП могут существовать ЭМВ различных типов:  $T$ ,  $E$ ,  $H$  и гибридные. Основной является  $T$ -волна, остальные считают паразитными.

Для того, чтобы в коаксиальной ЛП распространялась только поперечная волна, выбирают геометрические размеры фидера  $\pi(D+d) < \lambda$ .

Для предотвращения излучения геометрические размеры ЛП должны удовлетворять условию  $\pi(D-d) \ll \lambda$ .

Поэтому для передачи больших мощностей из-за опасности пробоя невозможно использовать коаксиальную ЛП в диапазоне частот короче дециметровых волн (ДМВ).

Структура поперечной волны показана на рис. 6.1.7.

Как следует из рисунка, электрическая составляющая ЭМП имеет только радиальную, а магнитная – только азимутальную компоненты в цилиндрической системе координат  $r, \varphi, z$ :

$$\dot{E}_r = -ik \frac{A}{r} e^{-ikz}, \quad (6.1.2)$$

$$\dot{H}_\varphi = -i\omega\epsilon_a \frac{A}{r} e^{-ikz}, \quad (6.1.3)$$

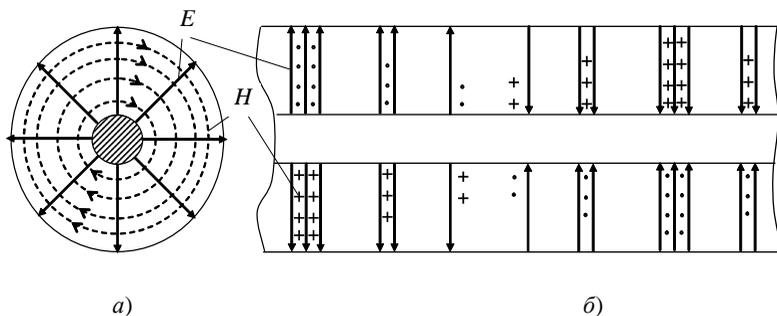


Рис. 6.1.7. Структура  $T$ -волны в поперечном (а) и продольном (б) сечениях коаксиальной ЛП

где  $A$  – некоторая произвольная постоянная, характеризующая амплитуду. Коаксиальные ЛП нашли самое широкое применение в технике связи и РТО для передачи СВЧ-энергии, построения элементов СВЧ-тракта в диапазонах длин волн от дециметровых до дециметровых.

#### 6.1.4. Полосковые линии передачи

Недостатки коаксиальной ЛП, связанные с высоким уровнем потерь на излучение, а также в диэлектриках внутреннего заполнения с ростом частоты, ограничивают их применение диапазоном дециметровых волн. На дециметровых, сантиметровых и миллиметровых волнах в последнее время значительное применение получили полосковые ЛП. В большинстве случаев их изготавливают путем нанесения металлических слоев на диэлектрик с малыми потерями (рис. 6.1.8). Эти линии являются практически единственно пригодными для применения в интегральных микросхемах (пленочных и полупроводниковых). В этом случае ЛП называют **микроросковыми**.

В несимметричной полосковой ЛП имеются два проводника, один из которых представляет собой металлическую полоску (полосок) постоянных размеров, другой – широкую металлическую пластину (подложку). В симметричной полосковой ЛП имеется три проводника. Полосок в большинстве случаев имеет сложную конфигурацию (топологию) и наносится напылением металла сквозь маски либо выполняется фотохимическим способом.

В полосковых ЛП толщина диэлектрика составляет  $h = 1,5 \dots 5$  мм. В большинстве случаев в качестве диэлектрика применяют фторопласт с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 2 \dots 7$  и тангенсом угла потерь  $\text{tg}\Delta = 10^{-3} \dots 10^{-4}$ . В микророскоковых ЛП используют более высококачественные твердые хрупкие диэлектрики (кварц, ситалл, кремний), для которых  $\epsilon = 2 \dots 7$ ,  $\text{tg}\Delta = 10^{-4}$ . Толщина диэлектрика в микророскоковых ЛП  $h = 0,5 \dots 1$  мм.

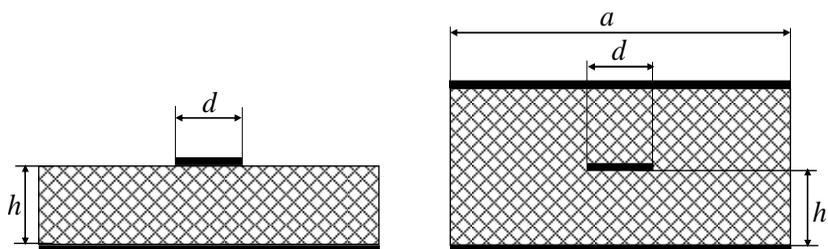
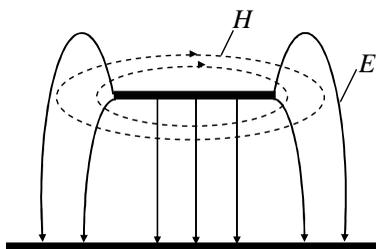


Рис. 6.1.8. Полосковые линии передачи



**Рис. 6.1.9. Структура поля в полосковой линии**

Полосковые ЛП в основном применяют не для передачи СВЧ-энергии, а для создания сложных разветвленных конструкций приемных, реже – передающих СВЧ-трактов. Так как толщина диэлектрика невелика, уровень мощности, передаваемый в полосковой ЛП, не может быть высоким из-за опасности пробоя диэлектрика.

Волновое сопротивление несимметричной ЛП определяется по формуле:  $Z_{\text{нн}} = 120\pi \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{h}{d}$ .

Полосковые линии передачи занимают промежуточное положение между двухпроводными ЛП и волноводами. Можно считать, что в полосковых ДП распространяется поперечная ЭМВ, хотя наличие твердого диэлектрика несколько искажает структуру поля. Такая ЭМВ называется **квазипоперечной**. Ее структура в поперечном сечении показана на рис. 6.1.9.

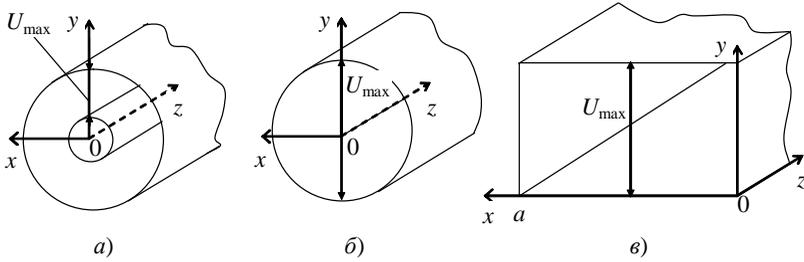
### 6.1.5. Волноводные линии передачи

Хотя коаксиальные линии передачи широко применяются на СВЧ, но все же они обладают существенными недостатками, особенно заметными в диапазоне сантиметровых волн.

Эти недостатки можно уменьшить применением **волноводов**, представляющих собой полые металлические трубы различных поперечных сечений, внутри которых распространяются электромагнитные волны.

Потери энергии в волноводе меньше, чем в коаксиальной ЛП, так как в нем нет внутреннего провода и изоляторов. Наибольшее напряжение в волноводе получается между противоположными стенками (при прямоугольном поперечном сечении) или диаметрально противоположными точками (если волновод имеет круглое сечение). Расстояние между этими точками больше, чем расстояние между внутренним и внешним проводниками коаксиальной ЛП, поэтому опасность пробоя значительно меньше (рис. 6.1.10).

Конструкция волноводов проще, чем коаксиальной ЛП. Исходя из уравнений Максвелла, можно показать, что в полном металлическом волноводе не может существовать *T*-волна.

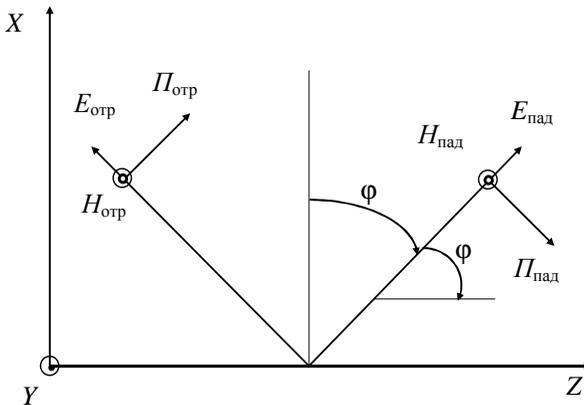


**Рис. 6.1.10. Наибольшие напряжения в коаксиальной ЛП (а), круглом (б) и прямоугольном (в) волноводах**

В идеальном случае волновод представляет собой полую трубу из хорошего (идеального) проводника. Будем полагать, что на идеально проводящую плоскость (одна из стенок волновода) под некоторым углом  $\varphi$  падает монохроматическая плоская волна (рис. 6.1.11). Предположим, что верхнее полупространство (внутреннее заполнение волновода) – идеальный диэлектрик с параметрами  $\epsilon_a, \mu_a$ .

Вектор суммарного поля будет обладать составляющими, равными суммам составляющих векторов падающей и отраженной волн. В частности, составляющая напряженности электрического поля вдоль оси  $z$ :

$$\dot{E}_z = (\dot{E}_{\text{пад}} - \dot{E}_{\text{отр}}) \cos \varphi = i2E_0 \cos \varphi e^{-ikz \sin \varphi} \sin(kx \cos \varphi). \quad (6.1.4)$$



**Рис. 6.1.11. Падение ЭМВ на стенку волновода**

Наличие второго множителя  $e^{-ikz \sin \varphi}$  показывает, что результирующее поле представляет собой волну, бегущую вдоль координаты  $z$  по направлению вдоль продольной оси волновода. Коэффициент распространения зависит от угла падения  $\varphi$ . Будем называть эту постоянную распространения **продольным волновым числом (продольным коэффициентом распространения)** и обозначать через  $h$ :

$$h = k \sin \varphi. \quad (6.1.5)$$

Третий множитель  $\sin(kx \cos \varphi)$  показывает, что поле вдоль поперечной координаты  $x$  изменяется по синусоидальному закону. Амплитуда поля в пределах волнового фронта  $z = \text{const}$  не постоянна, а образует стоячие волны. Скорость изменения амплитуды определяется коэффициентом

$$g = k \cos \varphi, \quad (6.1.6)$$

который будем называть **поперечным волновым числом (поперечным коэффициентом распространения)**.

Продольное и поперечное волновые числа связаны соотношением:

$$h^2 + g^2 = k^2. \quad (6.1.7)$$

Итак, важное свойство направляемых волн заключается в том, что данный волновой процесс является неоднородной волной, распространяющейся вдоль координаты  $z$ . При этом амплитуда поля вдоль поперечных координат изменяется по закону стоячей волны.

Если поперечную координату ограничить стенкой волновода, например  $x = a$  (рис. 6.1.10, в) то из (6.1.6) следует, что для ограничения стоячей волны стенками волновода необходимо выполнить условие:  $k a \cos \varphi = m \pi$ , где  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  – индекс **типа волны**, определяющий количество стоячих полуволн, укладываемых вдоль поперечной координаты  $x$ .

Используя выражение  $k = 2\pi/\lambda$ , получим:

$$\cos \varphi = m \lambda / 2a. \quad (6.1.8)$$

Действительно, для любого индекса  $m$  при заданном размере  $a$  всегда найдется такая длина волны генератора, называемая **критической длиной волны** данного типа и обозначаемая  $\lambda_{\text{кр}}$ , для которой выполнение условия (6.1.8) возможно лишь при максимальном значении  $\cos \varphi = 1$ , т.е.

$$\lambda_{\text{кр}} = 2a/m. \quad (6.1.9)$$

Если теперь выбрать значение  $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ , граничные условия на стенках волновода не могут быть выполнены для данного типа волны ни при каком значении угла падения  $\varphi$ . Физически это означает невозможность существования колебания данного типа в виде бегущей волны в ЛП.

Таким образом, каждый тип колебаний в волноводе может существовать как бегущая волна в области длин волн  $\lambda \leq \lambda_{\text{кр}}$ .

Волны более длинные, чем  $\lambda_{\text{кр}}$ , по волноводу на данном типе колебаний распространяться не могут. Иначе говоря, возможно распространение только тех волн, частота которых выше некоторого нижнего предела, называемого **критической частотой**  $f_{\text{кр}}$ .

На основе полученных выражений можно вывести основные соотношения для параметров распространения ЭМВ в волноводах.

Скорость перемещения поверхности равных фаз вдоль координаты  $z$  (**фазовая скорость ЭМВ в волноводе**) определяется продольным волновым числом  $h$  и равна

$$v_{\text{фв}} = \omega / h = \omega / k \sin\varphi = v_{\text{ф}} / \sin\varphi. \quad (6.1.10)$$

$$v_{\text{фв}} = \frac{v_{\text{ф}}}{\sin\varphi} = \frac{v_{\text{ф}}}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi}} = \frac{v_{\text{ф}}}{\sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{\text{кр}}\right)^2}}. \quad (6.1.11)$$

Фазовая скорость волны в волноводе зависит от частоты ЭМВ, т.е. волновод обладает дисперсией. Эта дисперсия является нормальной, так как с ростом частоты ЭМВ (уменьшением длины волны) фазовая скорость в волноводе уменьшается (рис. 6.2.3).

Аналогично находится **длина волны в волноводе**:

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{v_{\text{фв}}}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{\text{кр}}\right)^2}}. \quad (6.1.12)$$

Длина волны в волноводе превышает длину волны в свободном пространстве и зависит от типа волны, распространяющейся в волноводе.

**Групповая скорость узкополосного радиосигнала в волноводе** (скорость перемещения максимума огибающей), характеризующая скорость переноса энергии волны по волноводу, определяется:

$$v_{\text{гр. в}} = \frac{1}{\frac{dh}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega}} = v_{\text{ф}} \sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{\text{кр}}\right)^2}. \quad (6.1.13)$$

Важнейший параметр волноводной ЛП – **волновое (характеристическое) сопротивление**. Оно зависит от типа ЭМВ в волноводе и для волн  $H$ - и  $E$ -типов определяется соответственно:

$$Z_{вH} = \frac{Z_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}; \quad (6.1.14)$$

$$Z_{вE} = Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}, \quad (6.1.15)$$

где  $Z_c$  – волновое сопротивление среды, являющейся внутренним заполнением волновода.

Таким образом, в полом металлическом волноводе распространяются волны не любых частот, а только превышающих некоторую критическую. Это – основной недостаток волноводных ЛП.

## 6.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

### 6.2.1. $H$ -волны в прямоугольном волноводе

Наибольшее распространение на практике для передачи электромагнитной энергии в диапазоне сантиметровых и миллиметровых волн получили прямоугольные волноводы (рис. 6.2.1).

При решении уравнений, описывающих ЭМВ в прямоугольном волноводе считаем, что вдоль оси  $z$  волновод не ограничен по длине, удельная электрическая проводимость стенок  $\gamma = \infty$ . Среда, заполняю-

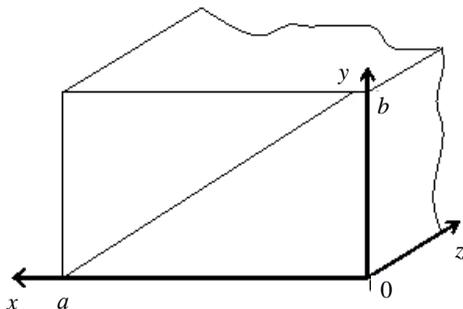


Рис. 6.2.1. Прямоугольный волновод

щая волновод – идеальный диэлектрик с параметрами  $\epsilon_a, \mu_a$ . В поперечном сечении геометрические размеры волновода ограничены: размер широкой стенки волновода обозначим  $a$ , узкой –  $b$ . Считаем, что внутри волновода отсутствуют источники поля ( $\rho = 0, j = 0$ ).

Задача нахождения электромагнитного поля в волноводе сводится к решению уравнений Максвелла в области, свободной от источников:

$$\begin{cases} \text{rot}\vec{H} = i\omega\epsilon_a\vec{E}, \\ \text{rot}\vec{E} = -i\omega\mu_a\vec{H} \end{cases} \quad (6.2.1)$$

при  $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$  при следующих граничных условиях:

$$E_\tau = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} x = 0, x = a, \\ y = 0, y = b. \end{cases} \quad (6.2.2)$$

Поскольку осью распространения является ось  $z$ , комплексная амплитуда любой составляющей электромагнитного поля может быть записана в виде:

$$\dot{A}(x, y, z) = A_0(x, y)e^{-ihz}, \quad (6.2.3)$$

т.е.  $\dot{E}(x, y, z) = E_0(x, y)e^{-ihz}$ ,  $\dot{H}(x, y, z) = H_0(x, y)e^{-ihz}$ . Здесь  $E_0(x, y)$ ,  $H_0(x, y)$  – вещественные функции, описывающие поле в поперечном сечении волновода.

Выполним операцию rot от первого уравнения (6.2.1).

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \\ &= \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Получим уравнения связи, образующие систему, в которой поперечные компоненты ЭМП в прямоугольном волноводе выражены через продольные:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{-i}{g^2} \left( h \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right), \\ \dot{E}_y &= \frac{-i}{g^2} \left( h \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right), \\ \dot{H}_x &= \frac{i}{g^2} \left( \omega \epsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - h \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right), \\ \dot{H}_y &= \frac{-i}{g^2} \left( \omega \epsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + h \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.2.4)$$

Для нахождения поперечных компонент ЭМП согласно (6.2.4) необходимо определить продольные компоненты  $\dot{E}_z, \dot{H}_z$ , удовлетворяющие уравнениям типа Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial y^2} + g^2 \dot{E}_z = 0, \quad \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{H}_z}{\partial y^2} + g^2 \dot{H}_z = 0. \quad (6.2.5)$$

Из (6.2.5) следует, что продольные составляющие электрического и магнитного полей не связаны между собой. Рассмотрим решения отдельно для магнитных ( $H$ ) и электрических ( $E$ ) волн.

Волна типа  $H$  характеризуется тем, что здесь магнитное поле имеет продольную составляющую  $\dot{H}_z$ , в то время как электрическое поле поперечно, т.е.  $\dot{E}_z = 0$ . Тогда из уравнений (6.2.4) все поперечные компоненты электромагнитного поля могут быть выражены через составляющую  $\dot{H}_z$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{-i\omega\mu_a}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}, \\ \dot{E}_y &= \frac{i\omega\mu_a}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, \\ \dot{H}_x &= \frac{-ih}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x}, \\ \dot{H}_y &= \frac{-ih}{g^2} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.6)$$

Для решения системы (6.2.6) необходимо решить волновое уравнение Гельмгольца для продольной компоненты магнитного поля (6.2.5).

Это уравнение должно быть дополнено граничными условиями (6.2.2), образуя **граничную (краевую) задачу**. Рассмотрим аналитический метод ее решения. Так как  $\dot{E}_z = 0$ , для записи граничных условий необходимо использовать компоненты  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$  следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{E}_y = 0 \text{ при } x = 0, x = a, \\ \dot{E}_x = 0 \text{ при } y = 0, y = b. \end{cases}$$

Формулы связи (6.2.6) позволяют записать данные условия через продольную компоненту  $\dot{H}_z$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = 0 \text{ при } x = 0, x = a, \\ \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = 0 \text{ при } y = 0, y = b. \end{cases} \quad (6.2.7)$$

Таким образом, исследование распространения волн  $H$ -типа в прямоугольном волноводе сводится к решению краевой задачи (6.2.5) – (6.2.7). Рассматриваемая задача решается **методом разделения переменных (метод Фурье)**. При этом методе решение краевой задачи ищется в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит лишь от одной из поперечных координат:

$$H_z(x, y) = X(x) Y(y). \quad (6.2.8)$$

Подставляя (6.2.8) в (6.2.5), будем иметь:

$$X''Y + XY'' + g^2XY = 0. \quad (6.2.9)$$

Здесь двумя штрихами обозначена операция взятия второй производной. Деля почленно (6.2.9) на правую часть (6.2.8), получаем:

$$X''/X + Y''/Y = -g^2. \quad (6.2.10)$$

В левой части равенства (6.2.10) стоят две функции, каждая из которых зависит только от координаты  $x$  или  $y$ . Для того, чтобы оно было тождеством при любых  $x$  и  $y$ , необходимо, чтобы каждое из слагаемых было также равно постоянной величине:

$$X''/X = -g_x^2, \quad (6.2.11)$$

$$Y''/Y = -g_y^2, \quad (6.2.12)$$

где  $g_x, g_y$  – неизвестные числа, удовлетворяющие соотношению

$$g_x^2 + g_y^2 = g^2. \quad (6.2.13)$$

В результате применения метода разделения переменных вместо одного дифференциального уравнения в частных производных получаются два уравнения в обыкновенных производных с постоянными коэффициентами, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$X'' + g_x^2 X = 0, \quad (6.2.14)$$

$$Y'' + g_y^2 Y = 0. \quad (6.2.15)$$

Общие решения уравнений (6.2.14), (6.2.15) известны из курса высшей математики и могут быть представлены в форме:

$$X(x) = A \sin(g_x x) + B \cos(g_x x), \quad (6.2.16)$$

$$Y(y) = C \sin(g_y y) + D \cos(g_y y), \quad (6.2.17)$$

откуда

$$\dot{H}_z = [A \sin(g_x x) + B \cos(g_x x)] [C \sin(g_y y) + D \cos(g_y y)] e^{-ihz}. \quad (6.2.18)$$

Граничные условия (6.2.7) выполняются в случае равенства нулю производных:

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = [A g_x \cos(g_x x) - B g_x \sin(g_x x)] [C \sin(g_y y) + D \cos(g_y y)] e^{-ihz},$$

$$\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} = [A \sin(g_x x) + B \cos(g_x x)] [C g_y \cos(g_y y) - D g_y \sin(g_y y)] e^{-ihz}.$$

Условия (6.2.7) при  $x = 0, y = 0$  могут быть выполнены, если  $A = 0, C = 0$ . При  $x = a, y = b$ :

$$B g_x \sin(g_x a) = 0, \quad D g_y \sin(g_y b) = 0.$$

Из первого условия:  $\sin(g_x a) = 0$ ; из второго условия:  $\sin(g_y b) = 0$ .

Отсюда можно найти постоянные  $g_x$  и  $g_y$ :

$$g_x = m\pi/a, \quad g_y = n\pi/b. \quad (6.2.19)$$

Здесь  $m$  и  $n$  – натуральные числа:  $m = 0, 1, 2, 3, \dots, N; n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$ .

Поперечное волновое число  $g$  найдем из (6.2.13):

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}. \quad (6.2.20)$$

Так как  $A = 0$ ,  $C = 0$ , обозначив  $BD = H_0$ , перепишем (6.2.18):

$$\dot{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}. \quad (6.2.21)$$

Имея решение волнового уравнения (6.2.21) для продольной компоненты магнитного поля, из системы уравнений (6.2.6) получим все компоненты электрического и магнитного полей для  $H$ -волн в прямоугольном волноводе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{i\omega\mu_a H_0}{g^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_y &= \frac{-i\omega\mu_a H_0}{g^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_x &= \frac{ihH_0}{g^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_y &= \frac{ihH_0}{g^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.22)$$

Анализ системы уравнений, описывающей мгновенные значения составляющих  $H$ -волн в прямоугольном волноводе позволяет сделать следующие выводы:

- наличие тригонометрических множителей говорит об образовании стоячих волн в плоскости поперечного сечения волновода. При этом число  $m$  равно числу полуволн, укладываемых вдоль широкой стенки волновода (по размеру  $a$ ),  $n$  – число полуволн, укладываемых вдоль узкой стенки волновода (по размеру  $b$ );

- так как  $m$  и  $n$  – любые целые положительные числа, то это означает, что в прямоугольном волноводе может существовать бесчисленное множество волн типа  $H$ , определяемых значениями  $m$  и  $n$  и обозначаемых символом  $H_{mn}$ . Числа  $m$  и  $n$  характеризуют степень сложности электромагнитного поля: чем больше  $m$  и  $n$ , тем сложнее поле в волноводе;

– из равенств (6.2.22) видно, что при одновременном обращении в нуль индексов  $m$  и  $n$  ( $m = 0, n = 0$ ) все поперечные составляющие оказываются равными нулю. Следовательно, волна  $H_{00}$  не существует. Если один из индексов  $m$  или  $n$  обращается в нуль, то только часть поперечных составляющих в (6.2.22) обращается в нуль. Низшими типами волн являются  $H_{10}$  и  $H_{01}$ ;

– множитель  $e^{-ihz}$  определяет изменение амплитуды и фазы волны при ее распространении вдоль волновода. Если  $h$  – величина мнимая, то функция  $e^{-ihz}$  убывающая, и, следовательно, волна не распространяется (затухает) вдоль оси  $z$ . Если  $h$  – величина действительная, то модуль функции  $e^{-ihz}$  равен единице и, следовательно, волна распространяется вдоль оси  $z$  волновода без затухания.

Рассмотренный метод решения краевой задачи относится к аналитическим и является достаточно сложным даже для волновода простейшего поперечного сечения. На практике широко применяют численные методы решения различных краевых задач, например для волноводов сложных ( $H$ -,  $T$ -образных, поперечных сечений), в основном с применением ЭВМ.

### 6.2.2. $E$ -волны в прямоугольном волноводе

Для электрических волн  $\dot{E}_z \neq 0, \dot{H}_z = 0$ . При этих условиях поперечные составляющие полей (6.2.4) будут иметь связь с продольной составляющей  $\dot{E}_z$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{-ih}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}, \\ \dot{E}_y &= \frac{-ih}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, \\ \dot{H}_x &= \frac{i\omega\epsilon_a}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y}, \\ \dot{H}_y &= \frac{-i\omega\epsilon_a}{g^2} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.23)$$

Поскольку  $\dot{E}_z \neq 0$ , можно использовать граничное условие для тангенциальной составляющей напряженности электрического поля:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{E}_z &= 0 \text{ при } x=0, x=a, \\ \dot{E}_z &= 0 \text{ при } y=0, y=b. \end{aligned} \right. \quad (6.2.24)$$

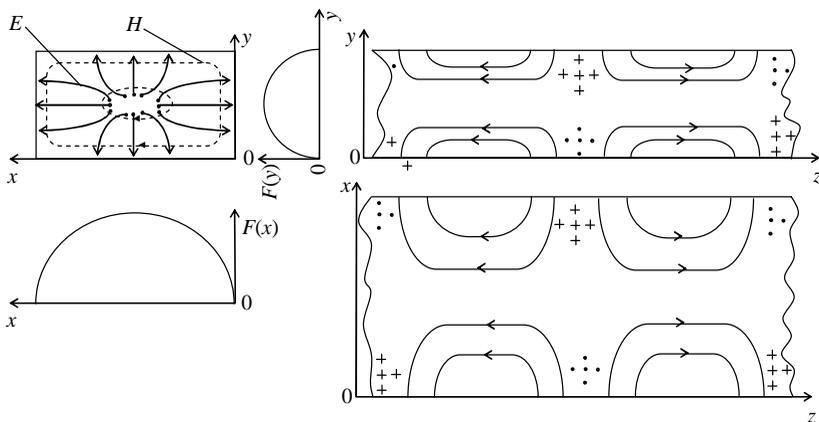


Рис. 6.2.2. Структура волны  $E_{11}$

Решение уравнений связи аналогично  $H$ -волнам.

Если хотя бы один из индексов  $m$  или  $n$  равен нулю, все поперечные компоненты напряженности электрического и магнитного полей обращаются в нуль. Иначе говоря, в прямоугольном волноводе не могут существовать волны типа  $E_{00}$ ,  $E_{m0}$ ,  $E_{0n}$ . Низшим типом  $E$ -волн в прямоугольном волноводе является волна  $E_{11}$ . Ее структуру изобразим на рис. 6.2.2.

Волны типа  $E$  в прямоугольных волноводах для передачи энергии практически не используются, они нашли применение в облучателях антенных систем.  $E$ -волны высших типов – это все типы волн, кроме  $E_{11}$ .

### 6.2.3. Критическая частота и критическая длина волны в прямоугольном волноводе

Так как  $h = \sqrt{k^2 - g^2}$ , то, подставив выражения для коэффициента распространения  $k$  и поперечного коэффициента распространения  $g$ , определяемого (6.2.20), получим

$$h = \sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - (m\pi/a)^2 - (n\pi/b)^2}.$$

Выражение для  $h$  может быть положительным при  $\omega^2 \epsilon_a \mu_a > [(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]$ . При  $h = 0$ ,  $\omega^2 \epsilon_a \mu_a = [(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2]$ , отсюда можно определить минимальную частоту ЭМВ, распространяющейся в волноводе, т.е. критическую частоту для прямоугольного волновода:

$$f_{\text{кр}} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}. \quad (6.2.25)$$

Критическая частота для прямоугольного волновода зависит от геометрических размеров волновода ( $a$  и  $b$ ), типа волны ( $m$  и  $n$ ) и параметров внутреннего заполнения волновода ( $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$ ). Условие прохождения волны в волноводе можно записать в виде  $f > f_{\text{кр}}$ .

Критическая длина волны определяется как

$$\lambda_{\text{кр}} = \frac{v_{\phi}}{f_{\text{кр}}} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}. \quad (6.2.26)$$

Тогда условием распространения волны в волноводе будет  $\lambda < \lambda_{\text{кр}}$ .

Таким образом, **в полном металлическом волноводе распространяются волны не любых частот, а только превышающих некоторую критическую.** Это – основной недостаток волноводных ЛП.

#### 6.2.4. Основные параметры распространения ЭМВ в прямоугольном волноводе

Скорость перемещения поверхности равных фаз вдоль координаты  $z$  (**фазовая скорость ЭМВ в волноводе**) определяется продольным волновым числом  $h$ .

Знание критической длины волны позволяет для конкретной длины волны генератора определить фазовую скорость на любом типе колебаний:

$$v_{\text{фв}} = \frac{v_{\phi}}{\sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{\text{кр}}\right)^2}}. \quad (6.2.27)$$

Фазовая скорость волны в волноводе зависит от частоты ЭМВ, т.е. волновод обладает дисперсией. Эта дисперсия является нормальной, так как с ростом частоты ЭМВ (уменьшением длины волны) фазовая скорость в волноводе уменьшается.

Аналогично находится **длина волны в волноводе**:

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{v_{\text{фв}}}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\lambda/\lambda_{\text{кр}}\right)^2}}. \quad (6.2.28)$$

Длина волны в волноводе превышает длину волны в свободном пространстве и зависит от типа волны, распространяющейся в волноводе.

**Групповая скорость узкополосного радиосигнала в волноводе** (скорость перемещения максимума огибающей), характеризующая скорость переноса энергии волны по волноводу, определяется по формуле:

$$v_{гpв} = \frac{d\omega}{dh} = 1 / \frac{dh}{d\omega}.$$

Используя  $h = \frac{2\pi}{\lambda_{в}} = \frac{2\pi\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{кр})^2}}{\lambda}$ , получим

$$v_{гpв} = \frac{1}{\frac{dh}{d\lambda} \frac{d\lambda}{d\omega}} = v_{\phi} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (6.2.29)$$

Согласно формуле (6.2.29) можно сделать следующие выводы: групповая скорость волн в волноводе всегда меньше фазовой скорости и меньше скорости света; фазовая и групповая скорости связаны соотношением  $v_{\phi} v_{гpв} = v_{\phi}^2$ ; групповая скорость сигналов, средняя частота которых стремится к критической частоте данного типа колебаний, стремится к нулю; при повышении средней частоты групповая скорость увеличивается, причем верхним пределом групповой скорости при  $\lambda \rightarrow 0$  является  $v_{гpв} = c$  (для вакуумного заполнения волновода).

Важнейший параметр волноводной ЛПП – **волновое (характеристическое) сопротивление**. Оно зависит от типа ЭМВ в волноводе и для волн *H*- и *E*-типов определяется соответственно:

$$Z_{вH} = \frac{Z_c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}}; \quad (6.2.30)$$

$$Z_{вE} = Z_c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}, \quad (6.2.31)$$

где  $Z_c$  – волновое сопротивление среды, являющейся внутренним заполнением волновода.

Таким образом, параметры распространения волн в волноводе зависят от геометрических размеров волновода, параметров его внутреннего заполнения и типа волны.

### 6.2.5. Волна $H_{10}$ в прямоугольном волноводе

**Основной волной** в волноводе является волна, имеющая наименьшую критическую частоту или наибольшую критическую длину волны. При фиксированной частоте электромагнитных колебаний и заданных параметрах внутреннего заполнения волновода основной тип волны требует для передачи волны волновода наименьшего поперечного сечения. Из выражений (6.2.25), (6.2.26) следует, что основной волной в прямоугольном волноводе является волна  $H_{10}$ .

Критическая длина волны основного типа в прямоугольном волноводе согласно выражению (6.2.26) составляет  $\lambda_{кр} = 2a$  и не зависит от высоты прямоугольного волновода.

Критическая частота (6.2.25) для волны  $H_{10}$  определяется как

$$f_{кр} = \frac{1}{2a\sqrt{\epsilon_a\mu_a}}.$$

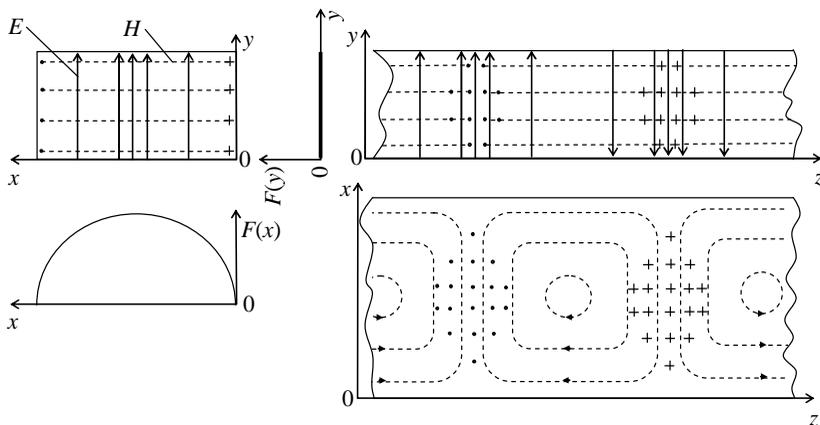
Подставляя в систему (6.2.22) индексы  $m = 1$  и  $n = 0$ , получим систему уравнений, описывающих составляющие поля волны  $H_{10}$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= 0, \\ \dot{E}_y &= \frac{-i\omega\mu_a H_0}{g^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_x &= \frac{ihH_0}{g^2} \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_y &= 0, \\ \dot{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-ihz}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.32)$$

На основе системы уравнений (6.3.32) можно построить мгновенную структуру поля в виде распределения силовых линий по сечениям волновода (рис. 6.2.3).

Графическое изображение структуры всех типов волн строится на основе:

- количества стоячих полуволн, укладываемых вдоль соответствующих координат;
- перпендикулярности силовых линий напряженности электрического и магнитного полей;



**Рис. 6.2.3.** Структура поля волны  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе

- граничных условий у поверхности идеального проводника для векторов напряженности электрического и магнитного полей;
- изменение направлений силовых линий электрического и магнитного полей через половину длины волны.

Анализ системы уравнений (6.2.32) и рис. 6.2.3 позволяет сделать следующие выводы:

- вдоль широкой стенки волновода укладывается одна стоячая полуволна электрического поля с максимумом при  $x = a/2$ ;
- вдоль узкой стенки волновода (по координате  $y$ ) изменений поля нет. Высота прямоугольного волновода не влияет на структуру поля волны  $H_{10}$ . Она выбирается исходя из требования распространения в волноводе только волны  $H_{10}$ , получения малых потерь в реальном волноводе, а также исключения электрического пробоя между его верхней и нижней стенками;

– замкнутые силовые линии магнитного поля лежат в плоскости  $XOZ$ , так как  $H_y = 0$ . Между составляющими  $H_x$  и  $H_z$  имеется сдвиг фаз на  $\pi/2$ . Иными словами, в сечении волновода, где  $H_x$  достигает максимума, проекция  $H_z$  в этот момент времени равна нулю. Составляющая  $H_x$  равна нулю на боковых стенках волновода ( $x = 0$  и  $x = a$ ) и достигает максимума при  $x = a/2$ . Составляющая  $H_z$  максимальна на боковых стенках волновода и равна нулю в середине волновода.

Изображенная картина поля волны в волноводе перемещается вдоль него с фазовой скоростью в волноводе. Волна  $H_{10}$  нашла широкое применение на практике для передачи электромагнитной энергии в сантиметровом диапазоне.

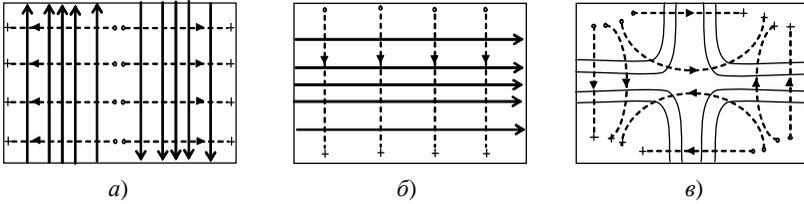


Рис. 6.2.5. Высшие типы волн в прямоугольном волноводе

**H-волны высших типов.** Все неосновные типы колебаний называются волнами высших типов. В случае передачи электромагнитной энергии в волноводе волной  $H_{10}$  они являются паразитными и принимаются специальные меры борьбы с ними.

В некоторых случаях высшие типы волн применяют в облучателях различных антенных систем техники связи и РТО для создания заданного распределения поля по раскрытию апертурной антенны. Из H-волн широкое применение нашли волны  $H_{20}$ ,  $H_{01}$  и  $H_{11}$ . Для получения уравнений, описывающих поле этих типов, необходимо в уравнения (6.2.22) подставить соответствующие индексы  $m$  и  $n$ . На рисунке 6.2.5, а, б, в приведены соответственно структуры полей  $H_{20}$ ,  $H_{01}$  и  $H_{11}$  в поперечном сечении.

Структура поля волны высшего типа в поперечном сечении волновода получается из основной путем  $m$ - и  $n$ -кратного повторения последней по соответствующей координате. При каждом очередном повторении направления силовых линий электрического и магнитного полей изменяются на обратные. Эти типы волн широко применяются в антенной технике (распределение поля в облучателях).

## 7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ

### 7.1. ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

#### 7.1.1. Общие сведения об объемных резонаторах

В радиотехнике самое широкое распространение нашел колебательный контур, состоящий из сосредоточенных индуктивности и емкости (рис. 7.1.1).

Резонансная частота определяется как

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (7.1.1)$$

Основным параметром колебательной системы является добротность. Добротность есть умноженное на  $2\pi$  отношение энергии, запасенной в резонаторе, к энергии, теряемой за период высокочастотных колебаний:

$$Q = 2\pi \frac{W_{\text{зап}}}{W_{\text{пот}}}. \quad (7.1.2)$$

Размеры колебательного контура с сосредоточенными параметрами значительно меньше длины волны. Для такой колебательной системы добротность определяется по формуле

$$Q = \frac{\sqrt{L/C}}{R} = \frac{\rho}{R}. \quad (7.1.3)$$

С повышением частоты активное сопротивление  $R$ , учитывающее все виды потерь, будет возрастать, а характеристическое сопротивление  $\rho$  станет уменьшаться. Снижение характеристического сопротивления объясняется тем, что для увеличения резонансной частоты необходимо уменьшать емкость контура  $C$ . Это уменьшение не может быть бесконечным, так как минимальное значение емкости определяется входными емкостями электронных приборов и емкостью монтажа. Дальнейшее повышение частоты может быть достигнуто только за счет снижения величины индуктивности  $L$ , что приводит к уменьшению характеристического сопротивления и добротности. В результате

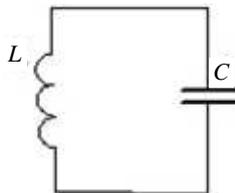


Рис. 7.1.1. Колебательный контур

этого в диапазоне дециметровых и более коротких волн обычный контур применяться не может. Здесь применяются колебательные системы с рассредоточенными параметрами на отрезках длинных линий.

При дальнейшем увеличении частоты и переходе к сантиметровым волнам колебательные свойства отрезков длинных линий сильно ухудшаются. Двухпроводные длинные линии имеют большие потери на излучение, коаксиальные должны иметь поперечные размеры много меньше длины волны. При этом внутренний объем колебательной системы резко сокращается, вместе с тем уменьшается и запасенная энергия при одновременном резком возрастании потерь. Добротность резко снижается, колебательная система становится непригодной. Для сантиметровых волн требуются колебательные системы другого типа.

Колебательную систему нового вида можно получить, видоизменяя обычный колебательный контур (рис. 7.1.2). Для получения высоких резонансных частот согласно (7.1.1) необходимо уменьшать индуктивность. Для диапазона метровых волн катушка индуктивности – один виток провода (рис. 7.1.2, *а*). При дальнейшем повышении частоты уменьшение индуктивности можно достичь параллельным включением витков (рис. 7.1.2, *б*). Одновременно поверхность токонесущих проводников увеличивается, что снижает потери на излучение и увеличивает добротность. Если частоту продолжать увеличивать, витки образуют сплошную поверхность, которая вместе с поверхностью пластин конденсатора полностью ограничивает диэлектрик внутри объема колебательной системы (рис. 7.1.2, *в*). Этот тип объемного резонатора (ОР) относится к резонаторам сложной формы.

Для дальнейшего увеличения частоты одновременно с увеличением числа витков будем раздвигать пластины конденсатора, чтобы уменьшить емкость. При этом витки вытянутся в прямолинейные проводники. В пределе получатся замкнутые металлические поверхности в форме цилиндра или параллелепипеда, ограничивающие диэлектрический объем (рис. 7.1.3).

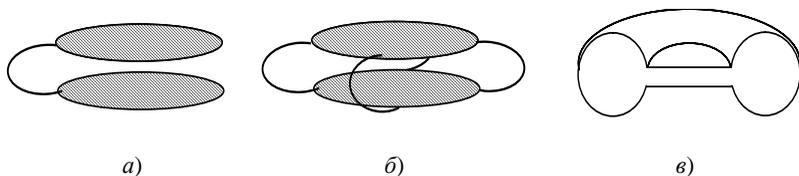
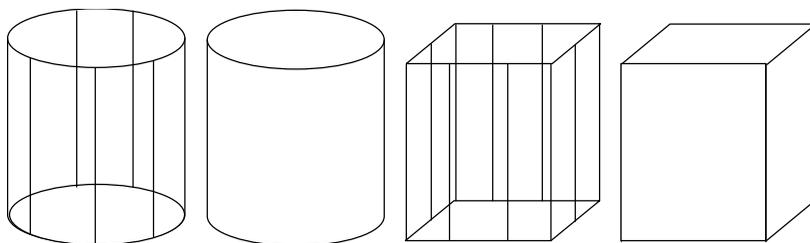


Рис. 7.1.2. Эволюция колебательной системы



**Рис. 7.1.3. Объемные резонаторы волноводных типов**

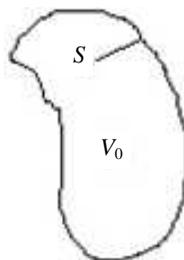
Конструктивно такие резонаторы выполняются из отрезков круглого или прямоугольного волновода, закрывая их с торцов металлическими стенками. Такие резонаторы называются резонаторами волноводных типов.

Колебательные системы, представляющие собой диэлектрический объем, ограниченный замкнутой металлической оболочкой, называются **объемными резонаторами**. Размеры объемного резонатора соизмеримы с длиной волны по всем измерениям, что дает возможность запасать энергию в больших количествах. Потери энергии на излучение в идеале отсутствуют. Если диэлектрик внутреннего заполнения высококачественный, потери в нем малы. Поглощение энергии стенками резонатора при высоком качестве металла и больших поверхностях также мало. Большая величина запасаемой энергии и малые потери согласно (7.1.2) обеспечивают высокую добротность объемных резонаторов.

### 7.1.2. Свободные электромагнитные колебания в объемных резонаторах

Не привязываясь к конкретной конструкции, предположим, что объемный резонатор представляет собой некоторую идеальную диэлектрическую область  $V_0$ , ограниченную идеальной проводящей поверхностью  $S$  (рис. 7.1.4).

Потери энергии на нагрев и излучение при этом отсутствуют. Определим основные свойства колебаний в объемном резонаторе без потерь на основе решения уравнений Максвелла вида



**Рис. 7.1.4. К определению поля объемного резонатора**

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{H} &= \epsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \quad (7.1.4)$$

для объема  $V_0$  для граничных условий на поверхности идеального проводника. Взяв ротор от левой и правой частей второго уравнения системы (7.1.4), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_a \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H},$$

или с учетом первого уравнения системы (7.1.4),

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\epsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{v_\Phi^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (7.1.5)$$

Так как вектор  $\vec{E}$  является функцией координат пространства  $(x, y, z)$  и времени  $(t)$   $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$ , то для решения уравнения (7.1.5) методом разделения переменных представим  $\vec{E}(x, y, z, t)$  в виде двух сомножителей:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = f(t) \vec{E}_i(x, y, z), \quad (7.1.6)$$

где  $f(t)$  – скалярный множитель, задающий закон изменения полей резонатора во времени;  $\vec{E}_i(x, y, z)$  – функция, определяющая пространственную структуру полей в резонаторе (в  $i$ -й точке пространства). Подставив (7.1.6) в (7.1.5), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\vec{E}_i \frac{1}{v_\Phi^2} \frac{f''(t)}{f(t)}. \quad (7.1.7)$$

Так как левая часть равенства (7.1.7) не зависит от времени, а только от пространственных координат, то и правая часть не должна зависеть от времени. Это возможно только в случае, когда отношение  $f''(t)/f(t)$  не зависит от времени, т.е. численно равно константе

$$\frac{f''(t)}{f(t)} = -\omega_i^2,$$

где  $\omega_i$  – константа разделения. Тогда

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \frac{\omega_i^2}{v_\Phi^2} \vec{E}_i \quad (7.1.8)$$

или имея в виду, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E}_i - \nabla^2 \vec{E}_i$$

и при отсутствии источников и стоков внутри резонатора  $\operatorname{div} \vec{E}_i = 0$ , выражение (7.1.8) можно записать в виде

$$\nabla^2 \vec{E}_i + k_i^2 \vec{E}_i = 0,$$

где  $k_i = \omega_i / v_\Phi$  – коэффициент распространения для  $i$ -го колебания. Таким образом, исходное уравнение (7.1.5) распалось на два эквивалентных ему уравнения:

$$\nabla^2 \vec{E}_i + k_i^2 \vec{E}_i = 0 \quad (7.1.9)$$

и

$$f''(t) + \omega_i^2 f(t) = 0. \quad (7.1.10)$$

Волновое уравнение (7.1.9) определяет пространственную структуру полей в резонаторе, а (7.1.10) дает зависимость полей во времени.

Решение уравнения (7.1.10) с точностью до постоянной интегрирования имеет вид  $f(t) = e^{i\omega_i t}$ , поэтому из (7.1.6) следует

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_i(x, y, z) e^{i\omega_i t}. \quad (7.1.11)$$

Постоянная разделения  $\omega_i$  является положительной вещественной величиной, следовательно, полученное решение (7.1.11) определяет гармонический закон изменения электрического поля во времени, а постоянная разделения  $\omega_i$  физически означает круговую частоту  $i$ -го свободного колебания, называемую **собственной частотой**. Решение для магнитного поля может быть получено, если (7.1.11) подставить во второе уравнение системы (7.1.4). Тогда получим

$$e^{i\omega_i t} \operatorname{rot} \vec{E}_i = -\mu_a \frac{\partial \vec{H}}{\partial t},$$

или

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \vec{E}_i e^{i\omega_i t}.$$

Интегрируя последнее равенство и принимая во внимание  $i = e^{i\pi/2}$ , имеем

$$\vec{H} = -\frac{1}{\omega_i \mu_a} \operatorname{rot} \vec{E}_i e^{i(\omega_i t + \pi/2)},$$

но  $\frac{1}{\omega_i \mu_a} \operatorname{rot} \vec{E}_i = \vec{H}_i$  из второго уравнения Максвелла, поэтому решение для магнитного поля имеет вид

$$\vec{H}(x, y, z, t) = \vec{H}_i(x, y, z) e^{i(\omega_i t + \pi/2)}. \quad (7.1.12)$$

Таким образом, магнитное поле в резонаторе так же, как и электрическое, изменяется по гармоническому закону и сдвинуто относительно него по фазе на  $90^\circ$ .

Уравнение (7.1.9) имеет бесконечное множество дискретных решений, каждому из которых соответствует свое значение постоянной  $k_i$ , а следовательно, и собственной круговой частоты  $\omega$ . Иными словами, колебания в объемном резонаторе характеризуются бесконечным дискретным спектром собственных частот. Если учесть, что контур с сосредоточенными параметрами резонирует на одной частоте, то объемный резонатор эквивалентен набору бесконечного множества контуров. Каждому собственному колебанию с частотой  $f_i$  соответствует определенная структура электромагнитного поля (см. рис. 7.1.5, а). Амплитуда всех спектральных составляющих одинакова. Спектр имеет линейчатую структуру.

### 7.1.3. Добротность, вынужденные колебания в объемных резонаторах

Выражение для добротности колебательной системы (7.1.2) часто записывают в виде

$$Q = \omega \frac{W_{\text{зап}}}{P_{\text{пот}}}, \quad (7.1.13)$$

где  $P_{\text{пот}}$  – средняя мощность потерь.

Рассмотренный нами идеальный объемный резонатор не встречается на практике. Реальные материалы вносят потери, вызванные тепловым нагревом в металле стенок объемного резонатора (мощность потерь  $P_v$ ) и в диэлектрике внутреннего заполнения (мощность потерь  $P_d$ ). Кроме этого, реальные резонаторы имеют устройства настройки, возбуждения и съема колебаний. В результате этого полная

замкнутость поверхности резонатора нарушается, через образующиеся отверстия часть энергии просачивается в окружающее пространство (мощность потерь  $P_{\Sigma}$ ). Таким образом, энергия потерь в (7.1.13) и мощность потерь в (7.1.13)  $P_{\text{пот}} = P_{\gamma} + P_{\text{д}} + P_{\Sigma}$  не равна нулю и добротность, соответственно, не бесконечно велика.

Выражая среднюю мощность потерь как скорость убывания запасенной энергии  $W_{\text{зап}}$  собственных колебаний

$$P_{\text{пот}} = -dW_{\text{зап}}/dt ,$$

приходим к дифференциальному уравнению

$$dW_{\text{зап}}/dt + W_{\text{зап}} \omega/Q = 0 ,$$

решение которого имеет вид

$$W_{\text{зап}} = W_{0\text{зап}} e^{-(\omega/Q)t} , \quad (7.1.14)$$

где  $W_{0\text{зап}}$  – начальный запас энергии в резонаторе.

Формула (7.1.14) показывает, что энергия электромагнитного поля, запасенная в ОР с потерями, с течением времени убывает по экспоненциальному закону. Так как запасенная энергия пропорциональна квадрату напряженности электрического поля  $i$ -го колебания, можно записать

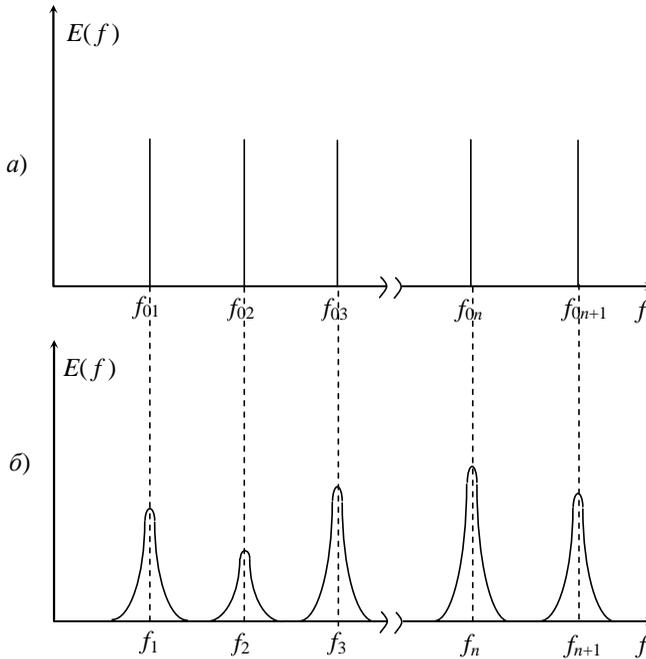
$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{-(\omega_i/2Q_i)t} ,$$

или, учитывая, что период  $i$ -го колебания  $T_i = 2\pi/\omega_i$ , амплитуду колебаний электрического поля выразить как

$$E_i = E_{0i} e^{-\frac{\pi}{Q_i T_i} t} . \quad (7.1.15)$$

Согласно (7.1.15) амплитуда напряженности электрического поля убывает по экспоненциальному закону тем сильнее, чем меньше добротность ОР. За время  $t = Q_i T_i$  амплитуда напряженности электрического поля составит от исходной  $e^{-\pi}$ , т.е. уменьшится в 23 раза. Иными словами, добротность  $Q_i$  равна числу периодов  $i$ -го собственного колебания, за которое амплитуда поля уменьшается примерно в 23 раза.

Кроме этого, выражение (7.1.15) свидетельствует, что в ОР с потерями возможно бесконечное дискретное множество свободных колебаний с собственными частотами  $f_i = 1/T_i$  и добротностями  $Q_i$ .



**Рис. 7.1.5. Спектры колебаний в объемных резонаторах**

Строгий расчет добротности ОР достаточно сложен из-за большого количества факторов, которые необходимо учесть. Как правило, его выполняют только для мощности потерь  $P_\gamma$ . Для приближенного расчета добротности ОР можно пользоваться формулой

$$Q_i \approx \frac{V_0}{\delta_i S}, \quad (7.1.16)$$

где  $\delta_i = \frac{1}{\alpha_i} = \sqrt{\frac{2}{\omega_i \mu_a \gamma}}$  – глубина проникновения для каждого  $i$ -го колебания.

Свободные колебания, вызванные кратковременным воздействием сигнала, быстро затухают и на практике не используются. При работе с ОР применяют вынужденные колебания. Они происходят под воздействием внешних источников электромагнитного поля, независимых от колебаний в ОР. Для вынужденных колебаний закон изменения напряженности электрического поля определяется равенством

$$E_i = \frac{E_{mi}}{\sqrt{1 + 4Q_i^2 \left(\frac{\Delta f_i}{f}\right)^2}} e^{-i\omega_i t}. \quad (7.1.17)$$

В формуле (7.1.17)  $\Delta f_i = f - f_i$ , где  $f$  – частота колебаний, поступающих от внешнего источника. Отсюда следует, что при совпадении частот  $f$  и  $f_i$  амплитуда вынужденных колебаний в резонаторе резко возрастает (см. рис. 7.1.5, б).

Спектр вынужденных колебаний в резонаторе с потерями, оставаясь дискретным, не является линейчатым. Каждая спектральная составляющая имеет форму резонансной кривой. Значения резонансных максимумов различны, что вызвано неодинаковой добротностью резонатора при различных частотах.

#### **7.1.4. Резонаторы сложной формы, коаксиальный объемный резонатор**

К объемным резонаторам сложной формы относят резонаторы неволноводного типа. Несмотря на большое разнообразие их конструкций, процессы, происходящие в них, подобны. Конструктивно в этих ОР имеются отдельные участки, играющие роль емкостей и индуктивностей. В резонаторах волноводного типа таких участков нет.

Из ОР сложной формы широкое применение нашли тороидальные, коаксиальные ОР и различные кольцевые многорезонаторные конструкции, используемые в генераторных приборах СВЧ (магнетрон, платинотрон, амплитрон и т.д.).

**Тороидальный ОР** (рис. 7.1.2, в) конструктивно входит в состав клистронов – специальных электронных приборов СВЧ типа О (отсутствует постоянное магнитное поле). Их работа основана на взаимодействии электронов с электрическим полем ОР. Кольцевой диск в его середине выполняет роль конденсатора. Конструктивно он выполнен сетчатым (рис. 7.1.6). Кольцевые области играют роль индуктивности в ОР. Если в ОР происходят колебания, между сетками существует переменное электрическое поле, который воздействует на электронный поток и модулирует (изменяет) его скорость. В результате электроны собираются в сгустки (модулируются по плотности). Эти сгустки взаимодействуют с полем ОР и способны усиливать мощность колебаний в десятки раз. Отражательные клистроны применяются в качестве автогенераторов гетеродинов посадочных радиолокаторов РСЦ-6М2 и РСЦ-10МН.

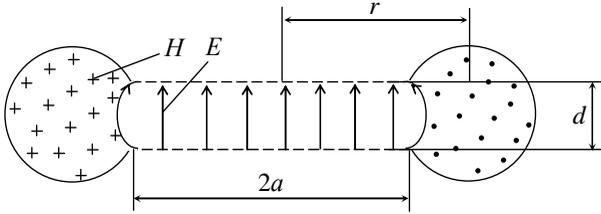


Рис. 7.1.6. Торoidalный ОР

Резонансную частоту данного ОР можно определить по формуле (7.1.16). Емкость  $C$ , образованная кольцевыми пластинами диаметром  $2a$  каждая, и с зазором  $d$  между ними, будет

$$C = \frac{\epsilon_a S}{d} = \frac{\epsilon_a \pi a^2}{d}. \quad (7.1.18)$$

Эквивалентную индуктивность  $L$  определим по формуле

$$L = \Phi / i,$$

где  $\Phi$  – магнитный поток в поперечном сечении резонатора;  $i$  – ток, протекающий по внутренней поверхности тороида.

Магнитный поток

$$\Phi = \mu_a \int_S H_n dS,$$

ток

$$i = \oint_l H_l dl.$$

Если предположить, что контур интегрирования  $l$  совпал с силовой магнитной линией среднего радиуса  $r$ , то

$$i = 2\pi r H_l.$$

Тогда получим

$$L = \frac{\mu_a \int_S H_n dS}{2\pi r H_l} \approx \frac{\mu_a}{2\pi} \int_S \frac{dS}{r}. \quad (7.1.19)$$

В формуле (7.1.19) учтено, что  $H_n \approx H_l \approx H \approx \text{const}$ . Подставляя (7.1.18) и (7.1.19) в формулу (7.1.1), можно рассчитать приближенную резонансную частоту тороидального ОР.

**Коаксиальный ОР.** В реальной технике связи и РТО часто применяется коаксиальные объемные резонаторы. Конструктивно он представляет собой отрезок коаксиального фидера, ограниченный двумя торцевыми стенками (рис. 7.1.7).

Поле поперечных колебаний в коаксиальном ОР находится на основе уравнений, описывающих ЭМВ в коаксиальном фидере:

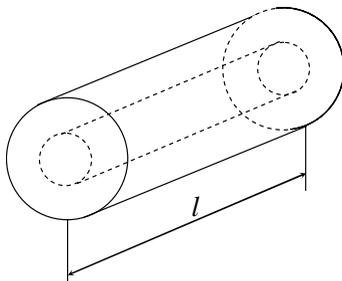


Рис. 7.1.7. Коаксиальный ОР

$$E_r = -k \frac{A}{r} \sin(kz);$$

$$\dot{H}_\phi = -i\omega\epsilon_a \frac{A}{r} \cos(kz). \quad (7.1.20)$$

Анализ выражений (7.1.20) показывает, что поле в коаксиальном ОР представляет собой стоячую волну. Если выбрать длину резонатора такой, что по длине его укладывается одна стоячая полуволна, электромагнитное поле показано на рис. 7.1.8.

Анализ (рис. 7.1.8) показывает наличие стоячей полуволны в коаксиальном ОР. При этом максимумы электрического и магнитного полей сдвинуты на четверть длины волны, тогда как в коаксиальном фидере они совпадали.

Резонансные частоты колебания типа  $T$ , как правило, определяют экспериментально с помощью генератора. Кроме поперечных колебаний, в коаксиальном ОР существуют  $H$ - и  $E$ -колебания.

ОР коаксиального типа применяется в качестве избирательной системы усилителя высокой частоты диспетчерского радиолокатора.

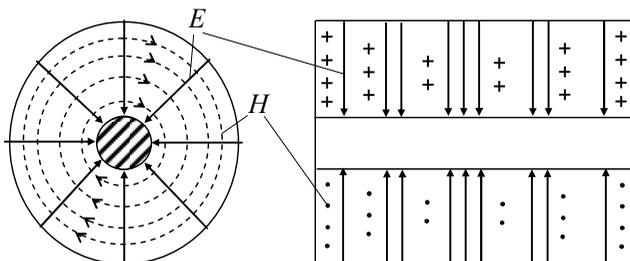


Рис. 7.1.8. Поле в коаксиальном ОР

**Сложные резонаторные системы.** Такие резонаторные системы применяются в приборах СВЧ типа М, для которых характерно наличие взаимно перпендикулярных постоянных электрического и магнитного полей. Передача энергии электронов полю СВЧ в этих приборах происходит за счет торможения электронов в поле СВЧ. Таким образом, резонаторная система одновременно играет роль замедляющей.

Первым в истории прибором типа М явился магнетрон. Он находит широкое применение в качестве мощных генераторов импульсных некогерентных сигналов в радиолокационных станциях различного назначения. Многорезонаторный магнетрон представляет собой диод с особой конструкцией анода, который выполнен в виде массивного медного блока кольцевой формы с полыми цилиндрическими резонаторами (рис. 7.1.9).

Эти резонаторы щелями соединены с пространством взаимодействия. Щель выполняет функцию конденсатора. Цилиндрическая поверхность служит индуктивностью (виток ленточного проводника). Вдоль оси магнетрона действует сильное постоянное магнитное поле, созданное магнитом, между полюсами которого расположен магнетрон. Катод выполнен обычно в виде цилиндра с дисками, которые препятствуют движению электронов вдоль оси магнетрона. Между катодом и анодом в пространстве взаимодействия создается ускоряющее поле большой интенсивности. Обычно анод заземляют, а на катод подают высокий отрицательный потенциал. В результате в магнетроне возникает вращающийся электронный объемный заряд, образованный

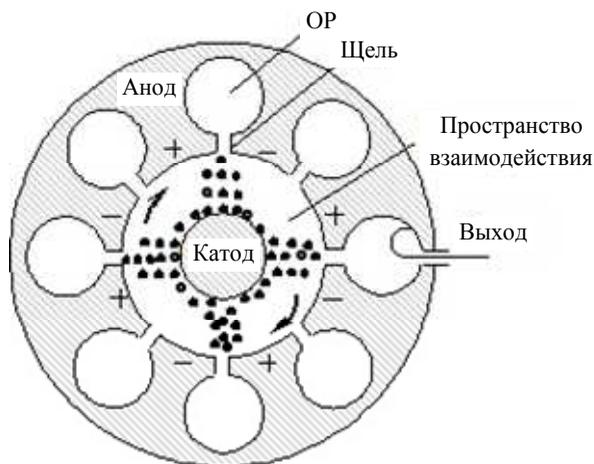


Рис. 7.1.9. Электронный поток в магнетроне

совместным действием постоянных электрического и магнитного полей, взаимодействующий с переменными электрическими полями резонаторов и поддерживающий в них колебания (рис. 7.1.9). Вращающийся электронный поток подвергается воздействию переменного электрического поля резонатора и за счет этого осуществляется модуляция скорости электронов. Это поле не однородно, как в тороидальном ОР клистрона, поэтому меняет не только скорость, но и траекторию движения электронов. Вращающееся электронное облако отдает энергию полю ОР через щели, и пополняет энергию от источника питания в промежутках между щелями, благодаря чему энергия колебаний сильно возрастает.

В дециметровом диапазоне магнетроны имеют импульсную мощность до десятков мегаватт, в сантиметровом – до единиц мегаватт. Анодный ток доходит до сотен ампер при анодном напряжении до десятков киловольт.

Конструкцию, аналогичную магнетрону, имеют и другие приборы СВЧ типа М. Они отличаются конструктивным выполнением многорезонаторной системы. Например, амплитрон, нашедший широкое применение для усиления мощных сигналов, имеет объемные резонаторы лопаточной формы.

## 7.2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ ВОЛНОВОДНЫХ ТИПОВ

### 7.2.1. Резонаторы волноводного типа

Отрезки волноводов с произвольной формой поперечного сечения, закрытые с двух сторон проводящими стенками, образуют замкнутые объемы, являющиеся **объемными резонаторами волноводного типа**. Примерами подобных ОР являются круглые (цилиндрические) и прямоугольные, которые можно рассматривать как закороченные отрезки волноводов соответствующего поперечного сечения.

Такие ОР нашли широкое применение на практике, поэтому необходимо определить электромагнитные поля, возможные в них. Это даст ответ на вопросы практического их применения:

- определения структуры поля (необходимо для правильного возбуждения колебаний в ОР и вывода энергии из них;
- расчета собственных резонансных частот колебаний;
- способов настройки и подстройки ОР.

ОР волноводного типа допускают строгое решение электродинамической задачи по определению полей в них. Однако, если известны поля в волноводах соответствующих поперечных сечений, нет необхо-

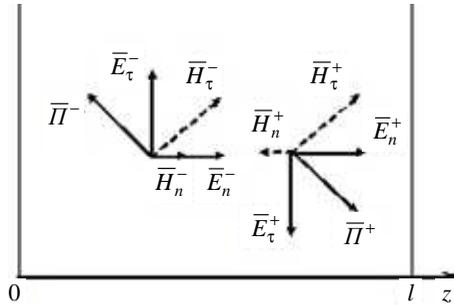


Рис. 7.2.1. Встречные ЭМВ в ОР

димости решать заново такую задачу. Поля колебаний в ОР могут быть найдены через волноводные поля соответствующих типов ( $H$  или  $E$ ).

Если в волноводе установить металлическую поперечную стенку перпендикулярно оси волновода в плоскости  $z = 0$  (рис. 7.2.1), то распространяющаяся в нем бегущая волна полностью отразится.

В результате сложения падающей и отраженной волн равных амплитуд в волноводе образуется стоячая волна, характеризующаяся неподвижными пучностями и узлами поля. Электромагнитное поле волны в ОР является суммой различных компонент, которые отражаются таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия для каждой компоненты. Согласно граничным условиям на поверхности идеального проводника тангенциальная составляющая электрического и нормальная составляющая магнитного полей на этой поверхности должны быть равны нулю. Это означает, что при отражении эти составляющие меняют знак на противоположный. Отражаясь в противофазе, они на перегородке образуют нули поперечного электрического и продольного магнитного полей. Нормальная (продольная) составляющая электрического и тангенциальная (поперечная) составляющая магнитного полей согласно тем же граничным условиям знака не меняют. Они отражаются в фазе и на перегородке образуют пучности продольного электрического и поперечного магнитного полей.

Получим поле поперечных составляющих напряженностей  $E$  и  $H$  в ОР. Падающие на поверхность  $z = 0$  поперечные компоненты имеют вид:

$$\dot{\vec{E}}_{m\tau}^- = \dot{\vec{E}}_{m0} e^{i(\omega t + hz)}, \quad \dot{\vec{H}}_{m\tau}^- = \dot{\vec{H}}_{m0} e^{i(\omega t + hz)}.$$

Отраженные волны с теми же амплитудами

$$\dot{\vec{E}}_{m\tau}^+ = -\dot{\vec{E}}_{m0} e^{i(\omega t - hz)}, \quad \dot{\vec{H}}_{m\tau}^+ = \dot{\vec{H}}_{m0} e^{i(\omega t - hz)}.$$

В результате стоячая волна имеет следующие поперечные компоненты:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_{m\tau} &= \dot{\vec{E}}_{m\tau}^- + \dot{\vec{E}}_{m\tau}^+ = \dot{\vec{E}}_{m0} \left( e^{ihz} - e^{-ihz} \right) e^{i\omega t} = i2\dot{\vec{E}}_{m0} \sin(hz) e^{i\omega t}; \\ \dot{\vec{H}}_{m\tau} &= \dot{\vec{H}}_{m\tau}^- + \dot{\vec{H}}_{m\tau}^+ = \dot{\vec{H}}_{m0} \left( e^{ihz} + e^{-ihz} \right) e^{i\omega t} = 2\dot{\vec{H}}_{m0} \cos(hz) e^{i\omega t}.\end{aligned}\quad (7.2.1)$$

Распределение поля в пространстве таково, что узлы электрического поля совпадают с пучностями магнитного и наоборот. Электрическое поле опережает магнитное на  $\pi/2$ .

Ограничить стоячую волну второй проводящей пластиной при  $z = l$  можно только в том случае, если тангенциальные составляющие электрического поля в (7.2.1) будут равны нулю. Это возможно, если  $\sin(hz) = 0$ , или

$$h = p\pi/l; \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (7.2.2)$$

Условие ограничения стоячей волны (7.2.2) выполняется при  $l = p(\lambda_g/2)$ , т.е. при длине отрезка волновода, кратном полуволне.

Определим резонансную частоту для волноводных резонаторов. Итак, отрезок волновода с замкнутыми концами является резонатором со стоячей волной. В этом случае как и в волноводе  $k^2 = g^2 + h^2$ . Тогда

$$\omega_0^2 \mu_a \varepsilon_a = g^2 + (p\pi/l)^2. \quad (7.2.3)$$

Выражение (7.2.3) позволяет определить резонансную частоту  $f_0$  для конкретного типа волноводного ОР. При этом конкретизируется выражение для  $g$ .

Таким образом, рекомендации для получения соотношений для составляющих ЭМП в ОР волноводного типа заключается в следующем.

1. В зависимости от типа колебаний в ОР определенного поперечного сечения выбрать формулы, описывающие составляющие полей  $E$  и  $H$  такого же типа в волноводе того же поперечного сечения.

2. Записать компоненты отраженных волн с учетом граничных условий на торцевых стенках ОР. Тангенциальные составляющие  $E$  и нормальные составляющие  $H$  (падающие волны) при отражении меняют знак на противоположный. Нормальные составляющие  $E$  и тангенциальные составляющие  $H$  при отражении знака не меняют. Кроме того, отраженная волна распространяется в направлении, противоположном падающей. Это необходимо учесть в фазовом множителе.

3. Так как в ОР в любой точке действует падающая и отраженная волны, для получения результирующего колебания (стоячей волны) необходимо произвести суммирование идентичных составляющих падающей и отраженной волн (7.2.1).

### 7.2.2. Колебания *H*- и *E*-типов в прямоугольном ОР, основные типы колебаний, структуры полей, резонансные частоты

Отрезок полого металлического волновода прямоугольного поперечного сечения образует прямоугольный параллелепипед со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $l$  по осям (рис. 7.2.2).

При этом как и в прямоугольном волноводе

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} = \sqrt{(m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2}.$$

Подставляя в (7.2.3) (7.2.2) и выражения для  $g$ , получим формулу для резонансной частоты прямоугольного ОР

$$f_{0mnp} = \frac{1}{2\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}, \quad (7.2.4)$$

которая показывает, что резонатор заданных размеров имеет бесконечное число резонансных частот, соответствующих возможным сочетаниям чисел  $m$ ,  $n$ ,  $p$ . Каждое из этих чисел определяет структуру поля в ОР с  $m$ ,  $n$  и  $p$  полуволнами, укладывающимися вдоль осей параллелепипеда. Волнам  $E_{mn}$ ,  $H_{mn}$  в волноводе соответствуют различные распределения полей в резонаторе, называемые колебаниями (модами) типов  $E_{mnp}$ ,  $H_{mnp}$  соответственно.

Длины волн собственных колебаний будут

$$\lambda_{0mnp} = \frac{v_\phi}{f_{0mnp}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}.$$

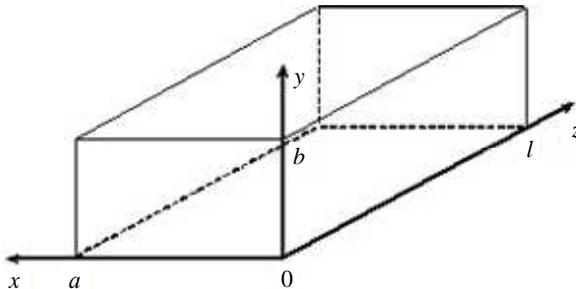


Рис. 7.2.2. Прямоугольный ОР

Чем выше тип колебаний, тем выше его резонансная частота и меньше длина волны собственных колебаний. Кроме этого, резонансная частота зависит от размеров резонатора и параметров  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  среды внутреннего заполнения.

Рассмотрим вначале  $H$ -колебания, воспользовавшись приведенными выше рекомендациями. Согласно первому правилу составляющие полей падающих волн имеют вид (6.2.22) раздела 6:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x^- &= \frac{i\omega\mu_a H_0}{g^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_y^- &= \frac{-i\omega\mu_a H_0}{g^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{E}_z^- &= 0, \\ \dot{H}_x^- &= \frac{ihH_0}{g^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_y^- &= \frac{ihH_0}{g^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}, \\ \dot{H}_z^- &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-ihz}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.5)$$

Тангенциальными к торцевым стенкам в (7.2.5) являются компоненты  $H_x$ ,  $H_y$ ,  $E_x$  и  $E_y$ , а нормальными –  $E_z$  и  $H_z$ . Согласно второму правилу получим систему уравнений для полей отраженных волн

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x^+ &= -\frac{i\omega\mu_a H_0}{g^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ihz}, \\ \dot{E}_y^+ &= \frac{i\omega\mu_a H_0}{g^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ihz}, \\ \dot{E}_z^+ &= 0, \\ \dot{H}_x^+ &= \frac{ihH_0}{g^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ihz}, \\ \dot{H}_y^+ &= \frac{ihH_0}{g^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ihz}, \\ \dot{H}_z^+ &= -H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{ihz}. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.6)$$

Согласно третьему правилу произведем алгебраическое суммирование падающих (7.2.5) и отраженных (7.2.6) волн, получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= \frac{i\omega\mu_a H_0}{g^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) (e^{-ihz} - e^{ihz}), \\ \dot{E}_y &= \frac{-i\omega\mu_a H_0}{g^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) (e^{-ihz} - e^{ihz}), \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_x &= \frac{ihH_0}{g^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) (e^{-ihz} + e^{ihz}), \\ \dot{H}_y &= \frac{ihH_0}{g^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) (e^{-ihz} + e^{ihz}), \\ \dot{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) (e^{-ihz} - e^{ihz}). \end{aligned} \right\}$$

Применив формулы Эйлера для комплексных экспонент

$$(e^{-ihz} + e^{ihz}) = 2\cos(hz),$$

$$(e^{-ihz} - e^{ihz}) = -2i\sin(hz),$$

учитывая  $h = p\pi/l$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= 2 \frac{\omega\mu_a H_0}{g^2} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_y &= -2 \frac{\omega\mu_a H_0}{g^2} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_x &= i2 \frac{H_0}{g^2} \frac{p\pi}{l} \frac{m\pi}{a} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_y &= i2 \frac{H_0}{g^2} \frac{p\pi}{l} \frac{n\pi}{b} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_z &= -i2H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right). \end{aligned} \right\} \quad (7.2.7)$$

Физический смысл всех составляющих системы (7.2.7) такой же, как и для  $H$ -волн в прямоугольном волноводе. Индекс  $m$  показывает

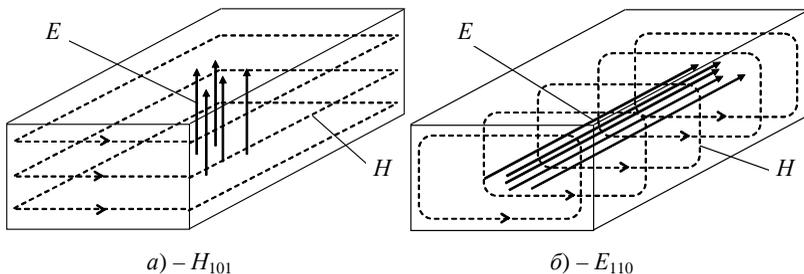
число стоячих полувольт вдоль широкой стенки резонатора по  $a$ ,  $n$  – число стоячих полувольт вдоль узкой стенки резонатора  $b$ ,  $p$  – число стоячих полувольт вдоль длины резонатора  $l$ . Поперечные компоненты электрического и магнитного полей сдвинуты по фазе на  $\pi/2$ , в пространстве их максимумы разнесены на четверть длины волны, т.е. узлы электрического поля совпадают с пучностями магнитного и наоборот. Продольная компонента магнитного поля относительно поперечной в пространстве сдвинута на четверть длины волны и противофазна ей. Следует отметить, что в волноводе максимумы поперечных компонент  $E$  и  $H$  пространственно совпадают.

Формулы (7.2.7) показывают, что в прямоугольном ОР может существовать бесчисленное множество колебаний типа  $H$ , каждое из которых определяется значениями целых индексов  $m, n, p$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ;  $p = 1, 2, \dots, \infty$ ). Одновременно  $m$  и  $n$  не могут быть равны нулю, как и в волноводе для  $H$ -волн. Индекс  $p$  также не может быть равен нулю, так как в противном случае все компоненты системы (7.2.7) обращаются в нуль. Таким образом, каждой тройке индексов  $m, n, p$  соответствует колебание  $H_{mnp}$ .

Рассуждая аналогичным образом, можно получить систему уравнений для  $E$ -колебаний в прямоугольном ОР.

Физический смысл системы уравнений (7.2.8) аналогичен системе (7.2.7). В прямоугольном ОР может существовать бесконечное множество колебаний типа  $E$ , каждому из которых соответствует тройка индексов  $m, n, p$ , причем ( $m = 1, 2, \dots, \infty$ ;  $n = 1, 2, \dots, \infty$ ;  $p = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ).

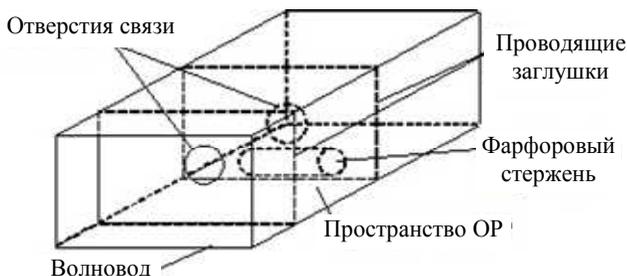
$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_x &= -2 \frac{E_0}{g^2} \frac{p\pi}{l} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_y &= -2 \frac{E_0}{g^2} \frac{p\pi}{l} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{E}_z &= 2E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_x &= i2 \frac{\omega\epsilon_a E_0}{g^2} \frac{n\pi}{b} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_y &= i2 \frac{\omega\epsilon_a E_0}{g^2} \frac{m\pi}{a} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right), \\ \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.2.8)$$



**Рис. 7.2.3. Структуры полей в прямоугольном ОР**

Аналогично волноводам, в которых вводится определение основной волны, в ОР **основным колебанием** называется колебание, имеющее наименьшую собственную резонансную частоту или наибольшую длину волны собственных колебаний. Как следует из (7.2.4), основной тип колебаний следует искать из тех, которые имеют наименьшие значения индексов  $m, n, p$ . Какое из  $H$ - или  $E$ -колебаний будет основным в прямоугольном ОР, зависит от соотношения сторон  $a, b, l$ . Например, при  $l > a > b$  основным колебанием будет  $H_{101}$ . При других соотношениях сторон возможно, что основным будет колебание  $E_{110}$ . Структуры этих типов колебаний показаны на рис. 7.2.3,  $a$  и  $b$  соответственно.

Анализ колебания  $E_{110}$  и формулы для его резонансной частоты показывает, что настроить такой резонатор перемещением одной из торцевых стенок невозможно. Резонансная частота не зависит от продольного размера резонатора, это затрудняет практическое применение этого типа колебания. На практике часто используется колебание  $H_{101}$ , поскольку этот тип колебания сходен со структурой волн  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе. Данный тип волн в волноводе час-



**Рис. 7.2.4. ОР преселектора УВЧ**

то используется для канализации энергии. Поэтому, конструктивно ОР в ВЧ-тракте может быть выполнен прямо в волноводе установкой заглушек со щелями для связи с волноводом и элементов настройки. Такой ОР выполнен в посадочном радиолокаторе (рис. 7.2.4).

Он играет роль преселектора (колебательного контура, определяющего предварительную избирательность приемника) усилителя высокой частоты. В качестве элемента настройки на нужную частоту используется фарфоровый стержень, погружаемый в пространство ОР.

### 7.2.3. Колебания *H*- и *E*-типов в круглом (цилиндрическом) ОР, основные типы колебаний, структуры полей, резонансные частоты

Круглые ОР получают из отрезков круглых волноводов путем установки в их торцевых стенках металлических заглушек. Принцип определения структуры поля в круглых ОР аналогичен прямоугольным и может быть представлен суммированием полей падающей и отраженной волн.

В круглом ОР возможно существование колебаний типов *H* и *E*. Не будем получать выражения для компонент полей в ОР. Рассмотрим резонансные частоты и длины волн в таких ОР.

Так как  $h = p\pi/l$ , тогда из выражения для коэффициента распространения волновода получим

– для *H*-волн

$$h = \frac{p\pi}{l} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - \left(\frac{\xi_{mn}}{a}\right)^2},$$

– для *E*-волн

$$h = \frac{p\pi}{l} = \sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - \left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2}.$$

Отсюда получим выражения для резонансных частот в круглых ОР:

$$f_{H_{mnp}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{\xi_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}, \quad (7.2.9)$$

$$f_{E_{mnp}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}. \quad (7.2.10)$$

Длины волн собственных колебаний будут

$$\lambda_{H_{mp}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{\xi_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}}, \quad (7.2.11)$$

$$\lambda_{E_{mp}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{x_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}}. \quad (7.2.12)$$

Частоты и длины волн собственных колебаний в цилиндрических ОР зависят от их размеров, типа и порядка колебаний. Согласно определению основного колебания, наименьшую резонансную частоту и наибольшую собственную длину волны имеет колебание, для которого либо корень функции Бесселя, либо корень производной функции Бесселя минимален. Кроме этого, третий индекс ( $p$ ) также должен быть наименьшим.

Для колебаний типа  $H$  основным является  $H_{111}$ , типа  $E$  –  $E_{010}$ . Структуры их изображены на рис. 7.2.5.

Колебание  $E_{010}$  в цилиндрическом ОР не используется на практике по тем же причинам, что и  $E_{110}$  в прямоугольном ОР.

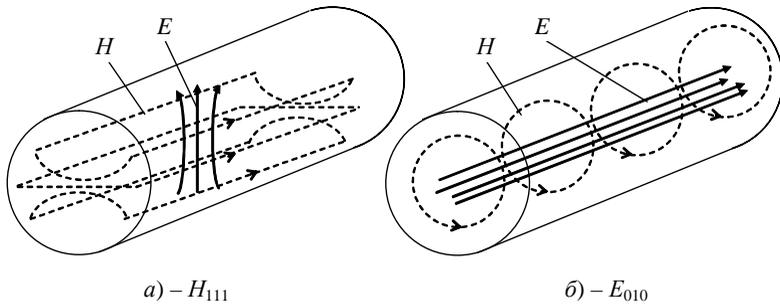


Рис. 7.2.5. Структуры полей в цилиндрическом ОР

## 8. ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ СТРУКТУРЫ

### 8.1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В ЗАМЕДЛЯЮЩИХ СТРУКТУРАХ

#### 8.1.1. Способы замедления электромагнитных волн

В ряде усилительных и генерирующих устройств СВЧ-диапазона используется эффект взаимодействия электронного потока с полем бегущей волны. При этом скорость движения электронов должна быть соизмерима с фазовой скоростью ЭМВ (условие синхронизма ЭМП с электронным потоком).

Скорость движения электронов в таких приборах изменяется в пределах 0,03...0,78 с при изменении ускоряющего напряжения от 300 в до 300 Кв. Поэтому в этих же пределах должна лежать и скорость распространения ЭМВ.

Замедление ЭМВ характеризуется **коэффициентом замедления**  $v_3$  – величиной, показывающей, во сколько раз скорость распространения ЭМВ ниже скорости света  $v_3 = c/v_{\text{ф}}$ .

Замедления можно достичь двумя способами:

1. Пространство, в котором распространяется ЭМВ, заполняется диэлектриком с высоким значением  $\epsilon_a$ .

Например, известно, что фазовая скорость в прямоугольном волноводе равна

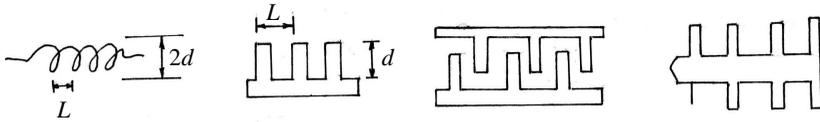
$$v_{\text{фв}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}$$

и коэффициент замедления в этом случае равен

$$v_3 = \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}$$

и зависит от  $\epsilon_a$  (для диэлектриков  $\mu_a \approx 1$ ).

Этот метод прост, но имеет существенный недостаток: получить большой коэффициент замедления ( $v_3 > 10$ ) практически невозможно, так как до настоящего времени диэлектриков с  $\epsilon_a > 100$  и малыми высокочастотными потерями не найдено. Поэтому этот метод нашел



**Рис. 8.1.1. Различные типы периодических ЗС**

применение только при конструировании антенн СВЧ-диапазона, для которых  $v_3 < 10$ , как правило.

2. Для получения больших значений применяют специальные замедляющие системы различной конструкции. Как правило, это периодические замедляющие структуры, выполненные из металла, характеризующиеся некоторым пространственным периодом  $L$  (рис. 8.1.1).

Степень замедления волн в таких системах можно характеризовать также величиной

$$v_3 = \frac{\lambda}{\lambda_3},$$

где  $\lambda$  – длина волны в свободном пространстве;  $\lambda_3$  – в замедляющей структуре. Замедляющие системы бывают: однородные, для которых  $L/\lambda_3 \ll 1$ ; неоднородные, для которых  $L/\lambda_3 \approx 1$ .

Идея замедления ЭМВ объясняется очень просто следующим образом: при падении ЭМВ на замедляющую систему в ней находятся токи проводимости, распространяющиеся по поверхности системы со скоростью света. Использование ребристых удлиняющих путь протекания токов поверхностей позволяет уменьшить скорость движения ЭМВ вдоль замедляющей системы.

### 8.1.2. Свойства «медленных» волн

Волны, распространяющиеся в замедляющих системах, носят преимущественно поверхностный характер, так как амплитуда поля «медленной» волны в направлении, перпендикулярном к оси замедляющей системы, убывает по экспоненциальному закону.

Покажем это, для чего необходимо определить выражение для поля ЭМВ, распространяющегося вдоль замедляющей системы. При этом будем считать, что замедляющая система однородна, и что условие  $L/\lambda_3 \ll 1$  выполнено до такой степени, что периодичностью замедляющей системы можно пренебречь, т.е. считать ее гладкой.

Пусть размер системы по оси  $x$  неограничен (рис. 8.1.2).

Тогда продольная составляющая поля удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \dot{E}_m + k^2 \dot{E}_m = 0,$$

или иначе

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_m}{\partial y^2} + k_z^2 \dot{E}_m + k_y^2 \dot{E}_m = 0.$$

Здесь учтено, что  $d/dx = 0$  в этом случае.

Решение уравнения ищется методом разделения переменных, т.е. в виде  $\dot{E}_m = E_m(y)\dot{E}_m(z)$ .

Окончательный его вид

$$\dot{E}_m = E_{m0} e^{-k_y y} e^{-ik_z z},$$

т.е. представляет собой гармоническую функцию вдоль оси  $z$ .

Что касается амплитуды поля, она убывает по экспоненте по мере удаления от поверхности системы.

$$E_z = A e^{-k\sqrt{v_3^2-1}y} = A e^{-k_y y}, \quad (8.1.1)$$

где

$$k_y = k\sqrt{v_3^2-1}. \quad (8.1.2)$$

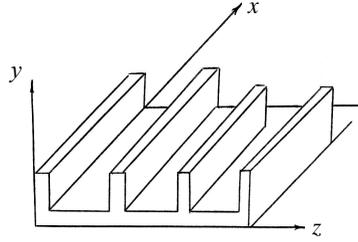
Таким образом, энергия «медленной» ЭМВ как бы «прилипает» к поверхности замедляющей системы, причем тем больше, чем больше коэффициент замедления.

### 8.1.3. Замедляющие свойства различных типов замедляющих структур

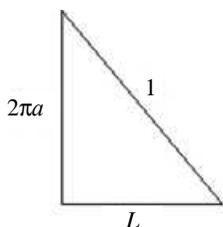
**Замедляющие свойства спирали.** Спиральная замедляющая система является простейшей и представляет собой провод, навитый с определенным шагом на круглый стержень радиусом  $a$ . В соответствии с физической моделью процесса замедления ЭМВ, принятой нами ранее, коэффициент замедления спирали определяется

$$v_3 = c/v_\phi = l/L,$$

где  $l$  – длина витка спирали;  $L$  – пространственный период спиральной ЗС.



**Рис. 8.1.2. Гребенчатая замедляющая структура**



Для определения величины развернем виток спирали на плоскости (рис. 8.1.3), тогда

$$l = \sqrt{(2\pi a)^2 + L^2}.$$

Следовательно, коэффициент замедления

$$v_3 = \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi a}{L}\right)^2}.$$

**Рис. 8.1.3. Виток спирали на плоскости**

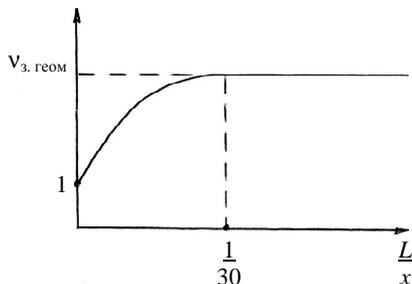
Практически размеры спирали бывают таковы, что  $\left(\frac{2\pi a}{L}\right)^2 \gg 1$ ,

поэтому  $v_3 \approx \left(\frac{2\pi a}{L}\right)$ .

Из полученного выражения видно, что коэффициент замедления спиральной ЗС не зависит от частоты колебаний волны, распространяющейся вдоль структуры. Точные же расчеты показывают, что такая зависимость имеет место (здесь мы их не рассматривали), и дисперсионная характеристика спирали имеет вид (рис. 8.1.4).

При  $L/\lambda_3 > 1/30$  зависимость  $v_3$  от длины волны незначительна, при  $L/\lambda_3 < 1/30$   $v_3$  существенно зависит от длины волны.

Иными словами, при заданном шаге спирали значение  $v_3$  тем точнее совпадает с рассчитанным по полученной формуле, чем короче длина волны. Это свойство спирали (малая зависимость  $v_3$  от частоты при  $L/\lambda_3 > 1/30$ ) нашло широкое практическое применение в различных радиотехнических устройствах, прежде всего в лампе бегущей волны (ЛБВ) и в спиральных антеннах.



**Рис. 8.1.4. Дисперсионная характеристика спирали**

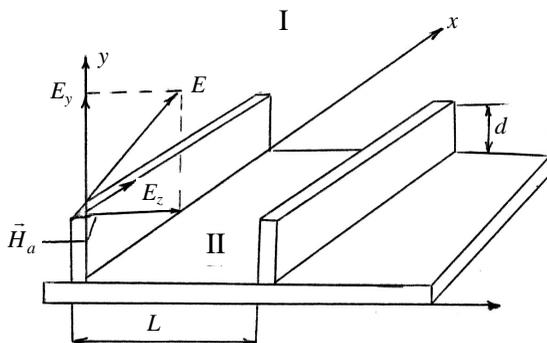


Рис. 8.1.5. Гребенчатая замедляющая структура

**Замедляющие свойства гребенчатой однородной структуры.** Рассмотрим однородную замедляющую структуру в виде гребенки, геометрические размеры которой и ориентация в декартовой системе координат показаны на рис. 8.1.5.

Будем считать также, что в направлении оси  $x$  система безгранична. Так как система однородна, то  $L \ll \lambda_z$ .

Задача: определить коэффициент замедления такой системы.

Прежде всего будем полагать:

1. Вдоль замедляющей системы распространяется волна типа  $E$ .
2. Вследствие бесконечности структуры вдоль оси  $x$  можно считать, что поле в этом направлении однородно и не зависит от координаты  $x$ .
3. Поскольку движение энергии происходит в направлении оси  $z$ , то  $E_y \neq 0$ ,  $H_x \neq 0$ ,  $E_x = 0$ ,  $H_y = 0$ .

Так как структура однородна, можно считать, что в пределах одной канавки поле не зависит от координаты  $z$ .

Учитывая вышесказанное, проведем электродинамический расчет гребенки. Для этого выделим две области:

- 1 – пространство над гребенкой,  $y > d$ ;
- 2 – пространство внутри канавок гребенки,  $0 < y < d$ .

Для каждой из этих областей определим компоненты поля, а затем «сшивая» эти решения на однородной границе областей I и II получим выражение для коэффициента замедления гребенки.

**Поле над гребенкой.** Определим составляющие электрического поля. Воспользуемся для этого уравнениями Максвелла для пространства, свободного от источников:

$$\begin{aligned}\dot{H}_{mx} &= -H_m e^{-k_y y} e^{-ik_z z}, \\ \dot{E}_{my} &= -\frac{k_z}{\omega \epsilon_a} H_m e^{-k_y y} e^{-ik_z z}, \\ \dot{E}_{mz} &= -i \frac{k_y}{\omega \epsilon_a} H_m e^{-k_y y} e^{-ik_z z}.\end{aligned}\quad (8.1.3)$$

**Поле внутри канавки.** Поскольку гребенка выполняется из проводящего материала, составляющая поля  $E_{mz}$  на дне канавки и на вершине зубца равна нулю, так как она касательна к поверхности металла. Следовательно, поле внутри канавки должно удовлетворять волновому уравнению. Компоненты поля

$$\begin{aligned}\dot{H}_{mx}^K &= -H_m \cos(ky) e^{-ik_z z}, \\ \dot{E}_{mz}^K &= i \frac{k}{\omega \epsilon_a} H_m \sin(ky) e^{-ik_z z}.\end{aligned}\quad (8.1.4)$$

Учитывая, что на вершине зубца поле должно «сшиваться» для выражений (8.1.3) и (8.1.4) запишем

$$\begin{aligned}\dot{E}_{mz} &= \dot{E}_{mz}^K \Big|_{y=d}, \\ \dot{H}_{mx} &= \dot{H}_{mx}^K \Big|_{y=d}.\end{aligned}$$

Рассмотрим первое из этих равенств

$$e^{-kyd} = (k/k_y) \sin(kd).$$

Из второго равенства аналогично

$$e^{-kyd} = \cos(kd).$$

Следовательно,

$$v_3 = \sqrt{\operatorname{tg}^2(kd) + 1} = \frac{1}{|\cos(kd)|}.\quad (8.1.5)$$

На рисунке 8.1.6 показан графический вид этой зависимости.

Коэффициент замедления гребенки зависит от  $\lambda$  и  $d$ . При  $d = \lambda/4$   $v_3 \rightarrow \infty$ , т.е. волна не распространяется вдоль гребенки.

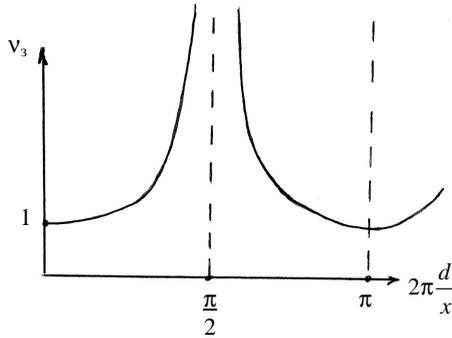


Рис. 8.1.6. Дисперсионная характеристика ГЗС

В реальных гребенчатых структурах, когда учитываются потери и конечные размеры стенок канавок, выражение для  $v_z$  имеет вид

$$v_z = \sqrt{1 + \left(\frac{L-S}{L}\right)^2 \operatorname{tg}^2(kd)}, \quad (8.1.6)$$

где  $S$  – толщина зубца ГЗС.

ГЗС широко применяются для замедления ЭМВ внутри линий передачи.

**Замедляющие свойства диэлектрической пластины.** При соблюдении условий полного внутреннего отражения  $\theta_1 > \theta_{\text{кр}}$ . Вдоль границы раздела сред «I–II» будет распространяться поверхностная волна (рис. 8.1.7). Эта волна будет замедленной.

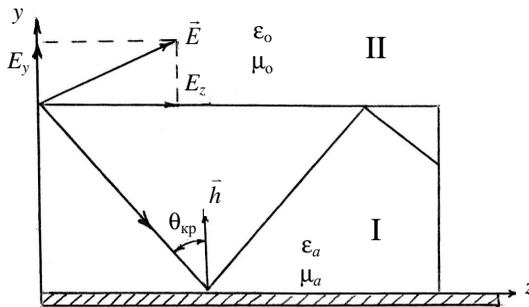


Рис. 8.1.7. Диэлектрическая пластина

Коэффициент замедления может быть найден из рисунка:

$$v_3 = v \sin \theta_1, \quad \text{или} \quad v_3 = \frac{v}{\sin \theta_1} = \frac{1}{\sin \theta_1}.$$

Величина  $\theta_1$  может быть найдена из условия, что при полном внутреннем отражении  $\theta_1 = \theta_{\text{кр}}$ .

$$\text{Тогда} \quad \sin \theta_{\text{кр}} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}. \quad \text{Следовательно} \quad v_3 = \sqrt{\epsilon}.$$

Диэлектрическая пластина – модель волоконно-оптического кабеля, которые в последнее время нашли очень широкое применение для передачи цифровых сигналов.

#### 8.1.4. Пространственные гармоники

Любая замедляющая система эквивалентна некоторому множеству четырехполосников, соединенных в последовательную цепочку.

При соотношении  $\frac{L}{\lambda} = 0,5$  неоднородность замедляющей системы становится явно выраженной и ее уже нельзя считать гладкой.

Если на вход неоднородной системы подать возбуждающее синусоидальное напряжение с круговой частотой  $\omega$ , то вдоль нее будет распространяться электромагнитная волна той же частоты, но представляющая собой периодическую функцию пространственной координаты  $Z$ . При этом форма установившейся вдоль системы волны будет тем больше отличаться от синусоиды, чем больше неоднородность структуры. Эта функция при разложении в ряд Фурье может быть представлена в виде бесконечной суммы дискретных колебаний, движущихся как в положительном (от начала к концу замедляющей системы), так и в отрицательном (от конца к началу замедляющей системы) направлениях  $Z$ .

Докажем реальность пространственных гармоник аналитически. Для этого представим периодическую функцию  $f(z)$  координаты  $z$  в виде ряда Фурье

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{-j \frac{2\pi}{L} n z}, \quad (8.1.7)$$

где  $f_n$  – коэффициент ряда Фурье. Продольная составляющая вектора напряженности электрического поля волны, бегущей вдоль оси  $z$ , при  $y = 0$  определяется по формуле  $E_z = E_0 f(z) e^{-j\beta_0 z}$ , или, с учетом (8.1.7):

$$E_z = \sum_{-\infty}^{\infty} E_0 f_n e^{-j\left(\beta_0 + \frac{2\pi}{L}n\right)z}. \quad (8.1.8)$$

Формула (8.1.8) характеризует продольную составляющую электрического поля  $E_z$  в определенный, фиксированный момент времени. Принимая во внимание, что  $E_z$  изменяется во времени по закону  $e^{i\omega t}$ , вместо (8.1.8) окончательно получим

$$E_z = \sum_{-\infty}^{\infty} E_{0n} e^{i\left[\omega t - \left(\beta_0 + \frac{2\pi}{L}n\right)z\right]}, \quad (8.1.9)$$

где  $E_{0n} = E_0 f_n$  – амплитуда  $n$ -й пространственной гармоники.

Из формулы (8.1.9) следует, что продольную составляющую электромагнитного поля  $E_z$  можно представить в виде бесконечной суммы гармонических волн, отличающихся друг от друга характером распределения вдоль пространственной координаты  $z$ . Их принято называть пространственными гармониками.

Таким образом, аналогично спектральной теории негармоническую поверхность неоднородной ЗС можно разложить в ряд по базису гармонических функций. Каждая из гармоник представляет собой отдельную ЗС гармонической формы со своим пространственным периодом (рис. 8.1.8).

Вдоль каждой из них распространяется замедленная волна. Поскольку период  $L$  этих структур различен, замедление различно. Определим основные характеристики пространственных гармоник. Прежде всего найдем их фазовые скорости.

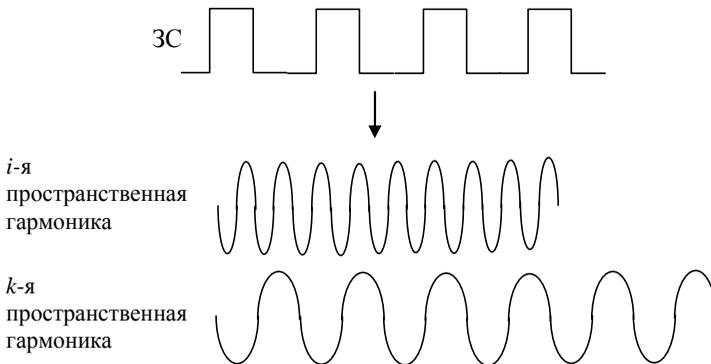


Рис. 8.1.8. Пространственные гармоники

Учитывая формулу для фазовой скорости, получим

$$v_{\phi \pm n} = \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\omega}{\beta_0 \pm \frac{2\pi}{L}n}, \quad (8.1.10)$$

где  $\beta_0 \pm \frac{2\pi}{L}n = \beta_{\pm n}$  – коэффициенты фазы  $n$ -й пространственной гармоники, причем  $n$  может иметь как положительные, так и отрицательные значения, включая нуль:  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$ .

Из формулы (8.1.4) следует:

1. Каждая из бесчисленного множества пространственных гармоник имеет различные по величине и направлению фазовые скорости при одной и той же частоте, равной частоте колебаний, вырабатываемых генератором, возбуждающим замедляющую систему.

2. Наибольшую фазовую скорость имеет пространственная гармоника с  $n = 0$ . Эта гармоника называется основной и ее фазовая скорость  $v_{\phi 0} = \frac{\omega}{\beta_0}$ . Остальные гармоники, для которых  $n \neq 0$ , называются

высшими пространственными гармониками и для них  $v_{\phi \pm n} = \frac{\omega}{\beta_{\pm n}}$ .

Можно показать, что независимо от знака гармоники ( $+n$  или  $-n$ ) всегда фазовая скорость любой высшей пространственной гармоники. При этом чем выше номер гармоники  $n$ , тем меньше ее фазовая скорость:

$$v_{\phi \pm n} < v_{\phi \pm (n-1)} < \dots < v_{\phi \pm 2} < v_{\phi \pm 1} < v_{\phi 0}. \quad (8.1.11)$$

3. Каждая из пространственных гармоник представляет собой замедленную волну с коэффициентом замедления  $v_{3 \pm n} = \frac{C}{v_{\phi \pm n}}$ . Принимая во внимание неравенство (8.1.11), приходим к выводу, что

$$v_{3 \pm n} > v_{3 \pm (n-1)} > \dots > v_{3 \pm 2} > v_{3 \pm 1} > v_{3 0}.$$

Иными словами, коэффициент замедления тем больше, чем выше номер пространственной гармоники. Как и в случае гладкой замедляющей системы, распределение энергии пространственной гармоники вдоль оси  $y$  убывает по экспоненциальному закону. Степень «прилипания» энергии медленной электромагнитной волны к поверхности замедляющей системы тем больше, чем выше номер пространственной

гармоники. Именно поэтому практическое значение имеют пространственные гармоники с  $n = 0$  и  $n = \pm 1$ . Остальные даже при малом удалении от поверхности замедляющей системы имеют незначительную переносимую ими энергию, вследствие чего они не представляют практического интереса.

Определим далее групповые скорости пространственных гармоник. Под групповой скоростью  $v_{гр}$  пространственных гармоник следует понимать скорость перемещения центра группы волн одной и той же частоты, с мало отличающимися друг от друга фазовыми скоростями.

$$v_{гр\pm n} = \frac{d\omega}{d\beta_{\pm n}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \left( \beta_0 \pm \frac{2\pi}{L} n \right)} = \frac{d\omega}{d\beta_0}. \quad (8.1.12)$$

Из формулы (8.1.12) следует, что групповые скорости всех пространственных гармоник одинаковы и совпадают по величине и направлению с той скоростью, с которой движется энергия волны вдоль замедляющей системы.

Итак, пространственные гармоники, возникающие в неоднородной замедляющей системе, имеют одну и ту же частоту и групповую скорость, но различные фазовые скорости, зависящие от номера  $n$  гармоники.

Пространственные гармоники, у которых фазовая и групповая скорости совпадают по направлению, называются прямыми; гармоники, у которых фазовая и групповая скорости имеют противоположные направления, называются обратными.

## 9. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ

### 9.1. АНИЗОТРОПНЫЕ СВОЙСТВА ФЕРРИТОВ

#### 9.1.1. Магнитные свойства веществ, анизотропные среды

Каждое вещество под влиянием внешнего магнитного поля намагничивается, т.е. является магнетиком. В соответствии с общей классификацией сред и по своим магнитным свойствам вещества подразделяются на:

- однородные и неоднородные;
- линейные и нелинейные;
- изотропные и анизотропные.

Рассмотрим более подробно некоторые виды классификации сред по их магнитным свойствам. Для этого используем молекулярную теорию магнетизма.

Физически появление собственного магнитного поля вещества объясняется с точки зрения вращения электронов по орбитам вокруг ядра атома. Это соответствует рамке с током и поэтому носит название амперовых элементарных токов. Они в свою очередь создают собственные магнитные моменты, расположенные перпендикулярно плоскости орбиты вращения, представляя собой «элементарные магниты».

В изотропных магнетиках под воздействием внешнего магнитного поля элементарные токи упорядочиваются таким образом, что их магнитные моменты имеют преимущественную ориентацию параллельно магнитной индукции в среде. При этом намагниченность

$$J = \sum_{i=1}^N p_i, \text{ где } p_i - \text{элементарная намагниченность области вещества,}$$

а, следовательно, и напряженность магнитного поля, параллельны вектору магнитной индукции  $\vec{B} = \mu_a \vec{H}$ , где  $\mu_a = \mu_0 \mu$ .

Изотропные линейные магнетики подразделяются на две группы: парамагнетики и диамагнетики.

Парамагнитные вещества под воздействием внешнего магнитного поля намагничиваются по направлению этого поля. У них  $\mu > 1$ . К таким веществам относятся: кислород, платина, алюминий.

Диамагнитные вещества под воздействием внешнего магнитного поля намагничиваются в направлении, обратном направлению этого поля. У них  $\mu < 1$ .

К парамагнетикам относятся: инертные газы, углерод, вода, ртуть, серебро, медь.

Но диамагнетики и парамагнетики весьма слабо проявляют магнитные свойства, т.е. слабо изменяют внешнее магнитное поле, а, значит, и не экранируют его. Для них можно считать  $\mu \approx 1$ .

Нелинейными магнетиками являются ферромагнетики, к которым относятся ферромагнитные металлы (железо, никель, кобальт и их сплавы) и ферриты, представляющие собой магнито-диэлектрики. У ферромагнетиков магнитная проницаемость  $\mu$  не остается постоянной, а зависит от значения напряженности внешнего магнитного поля  $H$ . Зависимость  $B(H)$  имеет нелинейный гистерезисный характер (рис. 9.1.1).

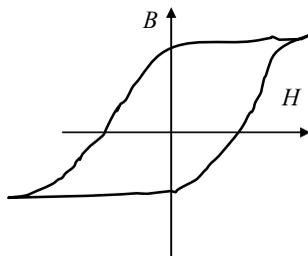


Рис. 9.1.1. Петля гистерезиса

При уменьшении напряженности внешнего магнитного поля до нуля сохраняется остаточная намагниченность. Явление гистерезиса объясняется тем, что изменение внешнего магнитного поля приводит к изменению ориентации элементарных магнитов с отставанием.

Для ферромагнетиков характерным является формирование определенных областей – доменов, в пределах которых все атомные магнитики параллельны друг другу. Таким образом, домены имеют собственную достаточно сильную намагниченность. Но исходное направление намагниченности для разных областей различно и при отсутствии внешнего магнитного поля оно в целом компенсируется. Остаточное значение магнитной проницаемости ферромагнетиков составляет сотни–тысячи.

Эти свойства ферромагнетиков широко используются в радиотехнике с целью сохранения информации (дискеты, аудио и видеопленки).

Но данные вещества имеют еще дополнительные отличительные магнитные свойства. Магнитная проницаемость будет определяться не только значением напряженности внешнего магнитного поля, но и зависеть от его направления. Это объясняется тем, что структура строения ферромагнетиков представляет собой кристаллическую решетку. При этом магнитная проницаемость становится векторной величиной, а среда по магнитным свойствам – анизотропной. Для нее справедливо следующее выражение  $\vec{B} = \vec{\mu} \vec{H}$ , где магнитная проницаемость математически описывается тензором  $\vec{\mu}$ :

$$\vec{\mu} = \mu_0 \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}.$$

При этом все члены матрицы в общем случае могут быть комплексными, а это значит, что векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ , при условии изменения во времени, не будут синфазными.

### 9.1.2. Физико-химические свойства ферритов

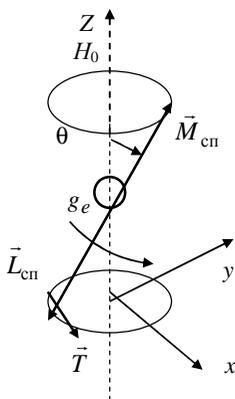
В СВЧ-устройствах, где происходят процессы распространения ЭМВ, в силу названных анизотропных свойств, находят применение ферриты. Это объясняется тем, что ферромагнитные металлы имеют довольно высокую проводимость и при взаимодействии с ними электромагнитные волны распространяются только в поверхностном слое. Ферриты же обладают низкой проводимостью ( $\gamma = 10^{-5}$ , см/м), а  $\epsilon = 10 \dots 20$  и являются по электрическим свойствам – диэлектриком.

Ферриты представляют собой химическое соединение на основе магнетита ( $\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ ). В нем двухвалентное железо заменяется каким либо двухвалентным металлом (никель, магний, марганец. Смесь таких размельченных частиц перемешивается с пластификатором (например с парафином) и спекается при температуре 1200...1400 °С. В результате термической обработки происходит образование кристаллической структуры (кристаллизация вещества). На заключительной технологической стадии ферриты формуют путем заливки в определенные формы.

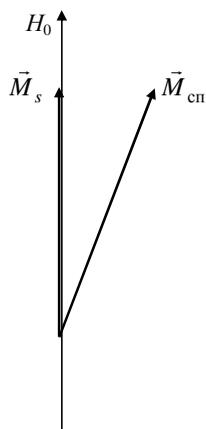
### 9.1.3. Анизотропные свойства намагниченных ферритов

Для объяснения электродинамических свойств взаимодействия ЭМВ с намагниченным ферритом классический подход, основанный на понятии молекулярных токов, недостаточен. Здесь необходимо использование некоторых квантово-механических представлений.

Квантовая теория ферромагнетизма основана на том факте, что последний электрон в оболочке иона замещающего двухвалентного металла, обладает собственными (спиновыми) магнитным  $\vec{M}_{\text{сп}}$  и механическим моментами  $\vec{L}_{\text{сп}}$ . Поэтому электрон будет удобно представить в виде вращающегося волчка (рис. 9.1.2).



**Рис. 9.1.2. К пояснению  
гиромагнитных свойств  
ферритов**



**Рис. 9.1.3. Прецессия спинового  
магнитного момента относительно  
внешнего магнитного поля**

В общем случае ориентация осей вращения таких электронов и их магнитных моментов в некотором объеме вещества может быть произвольной (угол  $\theta$  – величина случайная).

Если на феррит действует внешнее магнитное поле (например, вдоль оси  $Z$ ), то под его воздействием возникает вращающийся момент  $\vec{T} = [\vec{M}_{\text{сп}} \times \vec{H}_0]$ , стремящийся повернуть  $\vec{M}_{\text{сп}}$  в направлении  $\vec{H}_0$ . Но наличие механического  $\vec{L}_{\text{сп}}$ , момента связанного с  $\vec{M}_{\text{сп}}$ , препятствует к изменению направления. Это приводит к прецессии, т.е. к вращению спинового магнитного момента  $\vec{M}_{\text{сп}}$  относительно вектора внешнего магнитного поля  $\vec{H}_0$  (рис. 9.1.3) с частотой  $\omega_0 = k_r H_0$ , где

$$k_r = \frac{q_e \mu_0}{m_e} = 7\pi \cdot 10^4 \text{ [м/(А·с)]} - \text{гиромагнитное отношение электрона;}$$

$q_e$  – заряд электрона;  $m_e$  – масса электрона.

Если учесть потери энергии в феррите, вызванные прецессионным движением, то с течением некоторого времени направление магнитного спинового момента совпадет с направлением внешнего магнитного поля. Это время определяет быстродействие ферритовых устройств и составляет сотни доли микросекунды ( $\approx 10^{-8}$  с). Таким образом, все магнитные моменты таких электронов ориентируются вдоль силовых линий внешнего магнитного поля. Отметим, что при этом

магнитный момент единицы объема феррита  $M$  численно равен  $M_s$  – состоянию насыщения, а намагниченность характеризуется вектором намагниченности  $\vec{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\partial \vec{M}_{\text{сп}}}{\partial V}$ .

#### 9.1.4. Особенности распространения ЭМВ в ферритах

Если феррит не расположен во внешнем магнитном поле, то он является диэлектриком и, соответственно, процессы распространения в нем ничем не будут отличаться от обычного диэлектрика с вышеуказанными параметрами и  $\mu \approx 1$ .

При воздействии внешнего постоянного магнитного поля  $H_0$  определенной направления будет происходить его намагничивание и будут проявляться его обычные анизотропные свойства. Но так ЭМВ имеет собственное магнитное поле, изменяющееся во времени по гармоническому закону с частотой волны, то оно будет накладываться на внешнее постоянное магнитное поле  $\vec{H}_{\Sigma} = \vec{H}_0 + \vec{H}_m e^{i\omega t}$ .

Отсюда следует, что и значение суммарной напряженности магнитного поля тоже будет изменяться по гармоническому закону. Очевидно, что наиболее сложные явления будут происходить в случае вращения вектора магнитного поля ЭМВ, т.е. в случае ЭМВ с круговой вращающейся поляризацией. Но изменение магнитного поля, как показано выше, вызывает прецессию магнитных моментов электронов, которая уже не будет затухающей, так как не будет какого-либо постоянного направления магнитного поля. Возникает вынужденная прецессия, частота которой задается частотой ЭМВ  $\omega$ . Рассматривая электродинамическую задачу по определению магнитного момента, в случае если внешнее магнитное поле  $H_0$  расположено вдоль оси  $z$ , получают следующее ее решение:

$$\dot{J}_x = -\frac{\omega_0 \omega_s}{\omega^2 - \omega_0^2} \dot{H}_x - i \frac{\omega \omega_s}{\omega^2 - \omega_0^2} \dot{H}_y; \quad (9.1.1)$$

$$\dot{J}_y = \frac{i \omega \omega_s}{\omega^2 - \omega_0^2} \dot{H}_x - \frac{\omega_0 \omega_s}{\omega^2 - \omega_0^2} \dot{H}_y. \quad (9.1.2)$$

где  $\omega$  – частота ЭМВ;  $\omega_0 = k_r H_0$  – собственная частота прецессии;  $\omega_s = k_r J_0$ ;  $J_0$  – значение вектора намагниченности соответствующего магнитному моменту насыщения  $M_s$ .

Из данных выражений следует, что магнитная проницаемость является величиной тензорной, т.е. ее значения описываются матрицей вида:

$$\vec{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{a1} & -i\mu_{a2} & 0 \\ i\mu_{a2} & \mu_{a1} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix}, \quad (9.1.3)$$

где

$$\mu_{a1} = \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_0 \omega_s}{\omega^2 - \omega_0^2} \right); \quad (9.1.4)$$

$$\mu_{a2} = \mu_0 \frac{\omega \omega_s}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (9.1.5)$$

Из нее следует:

- 1) магнитная проницаемость может быть как вещественной, так и мнимой;
- 2) при  $\omega = \omega_0$  (частота ЭМВ равна собственной частоте прецессии) наступает явление резонанса, при котором функции (9.1.4) и (9.1.5) претерпевают разрыв;
- 3) тензор магнитной проницаемости получен из условия отсутствия потерь. При наличии их  $\mu_a$  носит комплексный характер.

Таким образом, уравнения Максвелла, решение которых и будет описывать процесс распространения ЭМВ в такой анизотропной среде будут включать в себя не только векторные значения напряженности электрической  $\vec{E}$  и магнитной  $\vec{H}$  составляющей, но и магнитной проницаемости среды.

Рассмотрим теперь влияние направления вращения вектора напряженности магнитного поля на свойства феррита. Из физических соображений следует, что волна правого направления вращения будет сильнее взаимодействовать с магнитным моментом феррита, так как направления их вращения совпадают. Волна левого вращения не может отдать энергию на поддержание прецессии, так как направление вращения  $H$  противоположно  $M$ .

Пусть вектор ЭМВ, распространяющийся в намагниченном феррите, поляризован по кругу в плоскости, перпендикулярной вектору  $H_0$ .

Обозначим через  $\vec{H}^+$  вектор, вращающийся с частотой  $\omega$  по часовой стрелке (смотрим по направлению вектора  $H_0$ )  $\vec{H}^+ = (\vec{e}_x - i\vec{e}_y)H_m$ .

Вектор с противоположным направлением вращения с той же частотой обозначим через  $\vec{H}^-$ :  $\vec{H}^- = (\vec{e}_x + i\vec{e}_y)H_m$ .

Вектор магнитной индукции также поляризован по кругу и вращается в ту же сторону, что и вектор напряженности магнитного поля. Тогда скалярные величины

$$\mu_a^+ = \mu_0 \left( 1 - \frac{\omega_S}{\omega - \omega_0} \right); \quad \mu_a^- = \mu_0 \left( 1 + \frac{\omega_S}{\omega + \omega_0} \right); \quad \mu_a^+ \neq \mu_a^-.$$

Кроме того, из вышеизложенного

$$\mu_a^+ = \mu_{a1} - \mu_{a2}, \quad \mu_a^- = \mu_{a1} + \mu_{a2}.$$

Ранее указывалось, что только потери в феррите препятствуют свободной прецессии магнитного момента с частотой  $\omega_0$ . Поэтому на этой частоте достаточно передавать прецессирующим электронам энергию, равную теряемой ими, чтобы прецессия стала незатухающей.

Роль компенсатора потерь может выполнять волна правого вращения при частоте  $\omega = \omega_0$ . При этом происходит максимальное поглощение энергии такой волны.

Явление резкого увеличения поглощения энергии электромагнитной волны с поляризацией  $\vec{H}^+$  при напряженности постоянного магнитного поля  $\vec{H}_{0\text{рез}} = \frac{\omega}{k_r}$  носит название ферромагнитного резонанса, а частота  $\omega = \omega_0$  – частота ферромагнитного резонанса.

Электромагнитная волна с поляризацией  $\vec{H}^-$  не может отдать энергию на поддержание прецессии, поэтому независимо от частоты ЭМВ и величины амплитуда прецессии на всех частотах мала, и соответственно мало на всех частотах поглощение энергии этой волны в феррите. Волна распространяется в феррите, как в обычном диэлектрике с малыми потерями и величиной абсолютной магнитной проницаемости  $\mu_0$ .

Таким образом, изменение магнитной проницаемости  $\vec{\mu}_a$  в различных направлениях  $\vec{e}_x^0$ ,  $\vec{e}_y^0$ ,  $\vec{e}_z^0$  приводит к различным условиям распространения ЭМВ в намагниченных ферритах.

# 10. ВЛИЯНИЕ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

## 10.1. РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

### 10.1.1. Радиоволны и их классификация

Радиоволнами называются электромагнитные волны длиной  $\lambda \geq 0,1$  мм (частотой  $f \leq 3 \cdot 10^{12}$  Гц). В зависимости от частоты или длины волны, радиоволны подразделяются на диапазоны. Принятая в настоящее время Международным консультативным комитетом по радио (МККР) классификация радиоволн по диапазонам приведена в табл. 10.1.1. При этом радиорегламентом, конкретизирующим практическое применение радиоволн, к использованию в радиотехнике рекомендованы диапазоны от метраметрового до децимиллиметрового.

#### 10.1.1. Классификация радиоволн по диапазонам

Диапазон волн	Диапазон ( $f$ )	Диапазон ( $\lambda$ )	Границы, м	Границы, Гц
Декамегаметровые, ДКМГВ	КНЧ	ЗВ	$10^8 \dots 10^7$	$3 \dots 30$
Мегаметровые, МГМВ	СНЧ		$10^7 \dots 10^6$	$30 \dots 3 \cdot 10^2$
Гектокилометровые, ГКМВ	ИНЧ		$10^6 \dots 10^5$	$3 \cdot 10^2 \dots 3 \cdot 10^3$
Метриаметровые, МРМВ	ОНЧ	СДВ	$10^5 \dots 10^4$	$3 \cdot 10^3 \dots 3 \cdot 10^4$
Километровые, КМВ	НЧ	ДВ	$10^4 \dots 10^3$	$3 \cdot 10^4 \dots 3 \cdot 10^5$
Гектометровые, ГМВ	СЧ	СВ	$10^3 \dots 10^2$	$3 \cdot 10^5 \dots 3 \cdot 10^6$
Декаметровые, ДКМВ	ВЧ	КВ	$10^2 \dots 10$	$3 \cdot 10^6 \dots 3 \cdot 10^7$
Метровые, МВ	ОВЧ	УКВ	$10^{-1}$	$3 \cdot 10^7 \dots 3 \cdot 10^8$
Дециметровые, ДМВ	УВЧ		$10^{-1}$	$3 \cdot 10^8 \dots 3 \cdot 10^9$
Сантиметровые, СМВ	СВЧ		$10^{-1} \dots 10^{-2}$	$3 \cdot 10^9 \dots 3 \cdot 10^{10}$
Миллиметровые, ММВ	КВЧ		$10^{-2} \dots 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{10} \dots 3 \cdot 10^{11}$
Децимиллиметровые, ДММВ	ГВЧ	ИКВ	$10^{-31} \dots 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{11} \dots 3 \cdot 10^{12}$

Радиоволны, распространяющиеся в непосредственной близости от земной поверхности, называются земными радиоволнами.

При распространении земных радиоволн возможно несколько случаев:

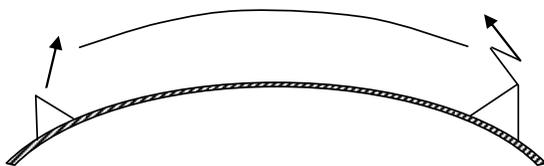
а) распространение в виде одной дифрагирующей волны, при этом обе антенны расположены непосредственно у земной поверхности (рис. 10.1.1);

б) распространение в виде прямой и отраженной от земной поверхности волн; в этом случае обе антенны подняты над поверхностью земли (рис. 10.1.2);

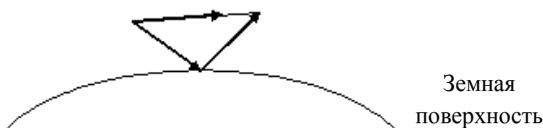
в) распространение в виде прямой волны (рис. 10.1.3).

Радиоволны, распространяющиеся на большие расстояния путем однократного или многократного отражения от ионосферы, называются ионосферными волнами. Различают два предельных случая распространения ионосферной волны:

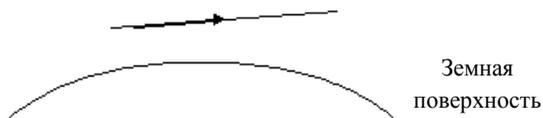
а) чисто «лучевая» картина, когда только достаточно пологие лучи возвращаются на землю (рис. 10.1.4, а);



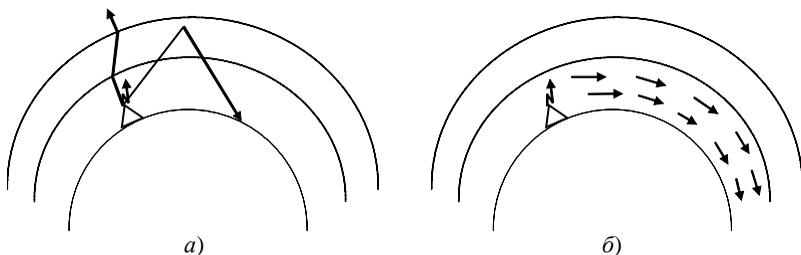
**Рис. 10.1.1. Распространение земной волны в виде одной дифрагирующей волны**



**Рис. 10.1.2. Распространение земной волны в виде прямой и отраженной от земной поверхности волн**



**Рис. 10.1.3. Распространение земной волны в виде прямой волны**



**Рис. 10.1.4. Случаи распространения ионосферной волны:**  
*a* – «лучевая» картина; *б* – пространственный волновод

*б*) случай пространственного волновода, когда лучевой картины не получается, а лучи, отраженные от ионосферы и земной поверхности, образуют практически равномерный поток энергии (рис. 10.1.4, *б*).

### 10.1.2. Модель распространения радиоволн в свободном пространстве

Полагаем, что источником излучения является изотропный излучатель, равномерно излучающий радиоволны во всех направлениях. Определим мощность, излучаемую ненаправленным источником радиоволн. Считая, что излучатель находится в воздухе, можно определить плотность потока электромагнитной энергии на расстоянии от источника

$$\Pi_m = \frac{P_{\Sigma o}}{4\pi r^2}, \text{ Вт/м}^2. \quad (10.1.1)$$

С другой стороны, известно соотношение между амплитудами напряженности электрического и магнитного полей и амплитудой вектора Пойнтинга

$$\Pi_m = \frac{E_m H_m}{2}, \quad (10.1.2)$$

где  $E_m$  и  $H_m$  – амплитудные значения напряженности электрического и магнитного полей.

В свою очередь, амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей в воздухе связаны известным соотношением

$$H_m = \frac{E_m}{Z}. \quad (10.1.3)$$

Тогда из (10.1.2) и (10.1.3) можем получить выражение для амплитуды вектора Пойнтинга для свободного пространства ( $Z = 120\pi$ ) в следующем виде

$$P_m = \frac{E_m^2}{240\pi}. \quad (10.1.4)$$

Приравнявая (10.1.1) и (10.1.4), найдем амплитудное значение напряженности электрического поля

$$E_m = \frac{\sqrt{60P_{\Sigma o}}}{r}. \quad (10.1.5)$$

Соответственно, действующее значение напряженности электрического поля определится формулой

$$E_d = \frac{\sqrt{30P_{\Sigma o}}}{r}. \quad (10.1.6)$$

В реальных радиотехнических системах находят применение направленные антенны, степень направленности которых обычно оценивается коэффициентом направленного действия. Он представляет собой безразмерную величину, показывающую, во сколько раз увеличится напряженность электрического поля, создаваемого направленной антенной по сравнению с напряженностью электрического поля, создаваемого ненаправленной антенной в данной точке пространства при условии, что мощности излучения обеих антенн равны. Таким образом, коэффициент направленного действия передающей антенны может быть учтен следующим образом

$$P_{\Sigma o} = P_{\Sigma} D_o, \quad (10.1.7)$$

где  $P_{\Sigma}$  – мощность излучения направленной антенны.

Тогда с учетом (10.1.7) формулы (10.1.5) и (10.1.6) примут вид

$$E_m = \frac{\sqrt{60P_{\Sigma} D_o}}{r}, \quad (10.1.8)$$

$$E_d = \frac{\sqrt{30P_{\Sigma} D_o}}{r}. \quad (10.1.9)$$

Выражения (10.1.8) и (10.1.9) носят название формул идеальной радиопередачи.

Если излучатель расположен непосредственно над плоской идеально проводящей поверхностью, имитирующей поверхность земли, то значение вектора Пойнтинга увеличится в два раза, так как электромагнитная энергия будет распространяться в пределах полусферы над землей и выражение (10.1.1) будет иметь в знаменателе 2 (площадь поверхности полусферы). Поэтому в формулах (10.1.8) и (10.1.9), представляющих теперь напряженность поля с учетом влияния земли, коэффициенты при правых частях должны быть дополнены множителем  $\sqrt{2}$ . С учетом этого, выражения (10.1.8) и (10.1.9) примут вид

$$E_m = \frac{\sqrt{120P_\Sigma D_0}}{r}, \quad (10.1.10)$$

$$E_d = \frac{\sqrt{60P_\Sigma D_0}}{r}. \quad (10.1.11)$$

Из рассмотрения формул (10.1.8) – (10.1.11) следует, что как при распространении электромагнитной волны в свободном пространстве, так и при распространении над идеально проводящей плоской поверхностью, напряженность электрического поля оказывается обратно пропорциональной расстоянию. Это объясняется естественным рассеянием электромагнитной энергии по поверхности сферы (или полусферы), окружающей излучатель.

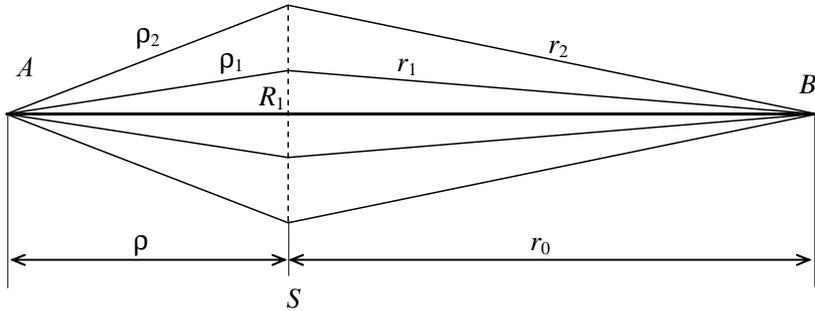
При распространении радиоволн в свободном пространстве различные области пространства по разному влияют на формирование поля на некотором расстоянии от передающей антенны.

Областью пространства, существенной при распространении радиоволн, называют область, в которой распространяется основная часть передаваемой мощности.

Эта область охватывает пространство вблизи прямой, соединяющей точки расположения передающей и приемной антенн. Размеры и конфигурация этой области определяется исходя из принципа Гюйгенса – Френеля. Пусть в точке  $A$  расположена передающая антенна, а в точке  $B$  – приемная, причем расстояние между ними много больше длины волны (рис. 10.1.5):

$$(\rho_0 + r_0) \ll \lambda.$$

На некотором расстоянии от источника проведем плоскость  $S$ , перпендикулярную линии  $AB$ . Разобьем эту плоскость на зоны Френеля, границы которых – окружности. Радиусы зон Френеля определяются из условия, что путь, проходимый волной от точки  $A$  до границы



**Рис. 10.1.5. Принцип Гюйгенса-Френеля**

зоны Френеля с номером  $n$  и до точки  $B$ , меньше пути от точки  $A$  до границы зоны Френеля с номером  $(n + 1)$  и до точки  $B$  на половину длины волны:

$$(\rho_{n+1} + r_{n+1}) - (\rho_n + r_n) = \lambda / 2 .$$

Тогда радиус внешней границы зоны Френеля любого номера  $n$  равен

$$R_n = \sqrt{\frac{\rho_0 r_0 \lambda n}{\rho_0 + r_0}} . \quad (10.1.12)$$

Элементарные вторичные источники, расположенные на внутренней и внешней границах каждой зоны, излучают волны, приходящие в точку расположения приемной антенны, в противофазе. Векторы результирующей напряженности электрического поля  $E$ , создаваемые соседними зонами Френеля, направлены в противоположные стороны (противофазны), а их амплитуды уменьшаются по мере роста номера зоны.

Результирующая напряженность поля, создаваемая всеми зонами Френеля, представляется в виде сходящегося знакопеременного ряда:

$$E_m = E_{1m} + E_{2m} + \dots + E_{nm} = E_{1m}/2 + [E_{1m}/2 - E_{2m} + E_{3m}/2] + \\ + [E_{3m}/2 - E_{4m} + E_{5m}/2] + \dots .$$

Так как соседние члены ряда по амплитуде мало отличаются друг от друга, окончательно  $E_m \approx E_{1m}/2$ , а поля, создаваемые зонами Френеля высших номеров, взаимно компенсируются, поэтому существенной при распространении радиоволн является область пространства, ограниченная эллипсоидом с поперечным сечением, равным первой зоне Френеля. Именно она вносит основной вклад в результирующее поле.

Иногда для более точных расчетов принимают, что существенной при РРВ является область пространства, ограниченная зонами Френеля нескольких начальных номеров ( $n < 6$ ). Если на пути распространения радиоволны имеется препятствие, его влияние будет заметным в том случае, когда оно входит в область пространства, существенную при распространении радиоволн.

### 10.1.3. Отражение радиоволн от земной поверхности

В большинстве практических случаев приемная и передающая антенны или хотя бы одна из них располагаются на таких расстояниях от земной поверхности, при которых необходимо учитывать ее влияние на распространение радиоволн. При этом электромагнитное поле в точке приема можно представить как совокупность первичного поля, т.е. поля, создаваемого излучателем в неограниченной однородной среде, и вторичного поля, обусловленного влиянием поверхности Земли на распространение радиоволн. Для определения напряженности электрического поля в этом случае необходимо знать электрические параметры земной поверхности, ее относительную диэлектрическую проницаемость и удельную проводимость.

Большая часть (71%) земного шара представляет собой водную поверхность. Электрические свойства воды зависят от степени ее солености. С увеличением солености растет ее удельная проводимость. Поэтому условно рассматривают воду морскую и пресную. Электрические свойства почвы зависят от ее структуры, степени влажности, температуры. С увеличением влажности удельная проводимость почвы возрастает. Характерным является то, что во всем диапазоне радиоволн, длиннее метровых электрические параметры воды и почвы не зависят от частоты, а на дециметровых и, особенно, на более коротких волнах относительная диэлектрическая проницаемость уменьшается, а удельная проводимость возрастает с повышением частоты. Растительность, снег, лед могут рассматриваться как полупроводящие слои, лежащие на поверхности почвы.

Рассмотрим важную для практики задачу определения поля излучателя, находящегося на некоторой высоте над поверхностью Земли. Для простоты решим эту задачу только в вертикальной плоскости, тогда характеристика направленных свойств излучателя будет функцией одной из координат  $F(\theta, \varphi) = F(\theta)$ .

Пусть излучатель находится в точке  $A_1$  (рис. 10.1.6). Поверхность Земли будем считать гладкой и плоской. На основании принципа суперпозиции поле в точке  $B$  можно найти как результат сложения поля прямой волны  $E_{\text{пр}}$  и поля волны, отраженной от Земли  $E_{\text{отр}}$ :  $\vec{E}_B = \vec{E}_{\text{пр}} + \vec{E}_{\text{отр}}$ .

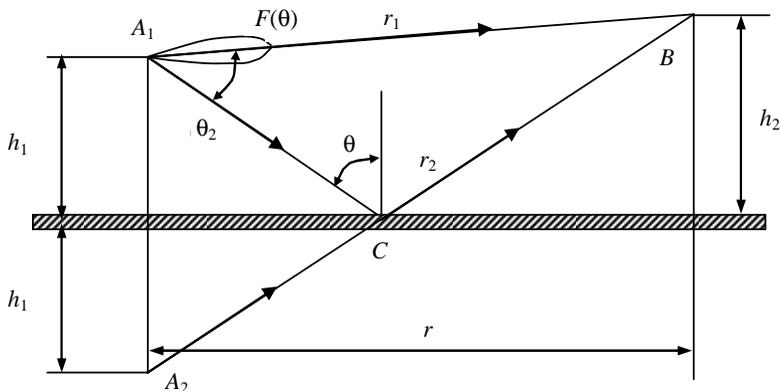


Рис. 10.1.6. Отражение волны от земной поверхности

Поле отраженной волны может быть найдено с помощью комплексных коэффициентов Френеля  $\dot{F}_{\parallel, \perp}$  для соответствующей поляризации

$$\vec{E}_{\text{отр}} = \dot{R}_{\parallel, \perp} \vec{E}_1;$$

Иначе говоря, поле отраженной волны может быть заменено полем источника, находящегося на таком же расстоянии вглубь поверхности Земли, т.е. в точке  $A_2$ .

#### 10.1.4. Критерий Рэлея

В реальных условиях на распространение радиоволн оказывают влияние неровности земной поверхности: леса, холмы, здания и т.п. При падении волны на ровную плоскую поверхность поле отраженной волны распространяется в одном направлении (угол падения равен углу отражения). Такое отражение называют зеркальным.

Отражение от ровной поверхности описывается известными законами. Амплитуда отраженной волны может быть найдена с помощью так называемых коэффициентов Френеля. При этом используется понятие комплексной абсолютной диэлектрической проницаемости  $\dot{\epsilon}_a$

$$\dot{\epsilon}_a = \epsilon_a \left( 1 - i \frac{\gamma}{\omega \epsilon_0 \epsilon} \right) = \epsilon_a \left( 1 - i \frac{60 \gamma \lambda}{\epsilon} \right), \quad (10.1.13)$$

где  $\gamma$  – удельная электрическая проводимость среды.

Коэффициент Френеля есть отношение комплексных амплитуд напряженностей полей падающей и отраженной волн на гладкой плоской поверхности раздела двух сред.

Для вертикально и горизонтально поляризованных волн, падающих из свободного пространства на среду с комплексной абсолютной диэлектрической проницаемостью, значения соответствующих коэффициентов Френеля рассчитываются по известным формулам

$$R_{\parallel} = \frac{(\varepsilon_a - i60\gamma\lambda)\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_a - i60\gamma\lambda - \sin^2\theta}}{(\varepsilon_a - i60\gamma\lambda)\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_a - i60\gamma\lambda - \sin^2\theta}} = |R_{\parallel}| \exp\{-i\Phi_{\parallel}\}; \quad (10.1.14)$$

$$R_{\perp} = \frac{\cos\theta - \sqrt{\varepsilon_a - i60\gamma\lambda - \sin^2\theta}}{\cos\theta + \sqrt{\varepsilon_a - i60\gamma\lambda - \sin^2\theta}} = |R_{\perp}| \exp\{-i\Phi_{\perp}\}, \quad (10.1.15)$$

где  $\theta$  – угол падения;  $|R_{\parallel}|$  и  $|R_{\perp}|$  – модули коэффициентов Френеля;  $\Phi_{\parallel}$  и  $\Phi_{\perp}$  – фазы коэффициентов Френеля.

Для практического определения модулей и фаз коэффициентов Френеля служат специальные графики их зависимости от угла падения и параметров среды раздела. Если поверхность раздела двух сред идеально проводящая, то при любых углах падения происходит полное отражение, т.е. выполняются равенства

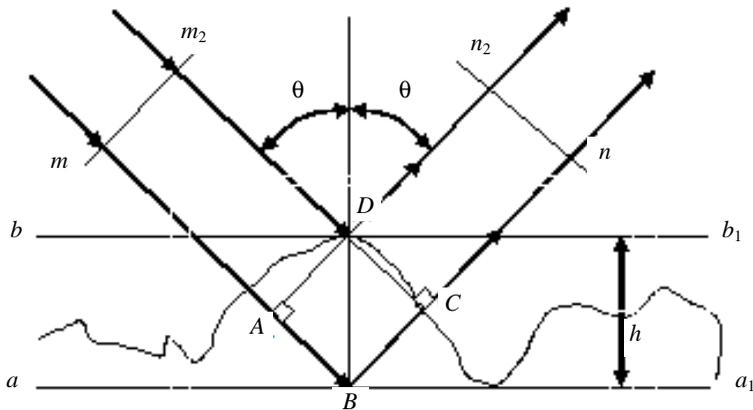
$$|R_{\parallel}| = |R_{\perp}|; \quad (10.1.16)$$

$$\Phi_{\parallel} = 0^\circ \text{ и } \Phi_{\perp} = 180^\circ. \quad (10.1.17)$$

Если земная поверхность неровная, то радиоволны отражаются в различных направлениях, отражение является рассеянным и напряженность поля отраженной волны в направлении зеркального отражения меньше, чем в случае отражения от ровной поверхности. Качественно это можно пояснить следующим образом.

Пусть плоская радиоволна падает на неровную земную поверхность, причем наибольшая высота неровности равна  $h$  как показано на рис. 10.1.7). Часть мощности падающей волны отразится на нижнем уровне неровностей ( $aa_1$ ), а другая часть – на верхнем ( $bb_1$ ).

Плоскость, перпендикулярная направлению распространения падающей волны, является фазовым фронтом. Определим фазовые соотношения на плоскости ( $nm_1$ ), перпендикулярной распространению отраженной волны. Очевидно, что наибольшая разность фаз окажется между волнами, отраженными от верхнего (точка  $D$ ) и нижнего (точ-



**Рис. 10.1.7. Отражение плоской радиоволны от неровной земной поверхности**

ка  $B$ ) уровней неровности. Разность пути ( $\Delta r$ ) хода лучей  $mm$  и  $m_1n_1$  может быть определена из геометрических построений:

$$\Delta r = 2AB \approx 2h \cos \theta, \quad (10.1.18)$$

где  $\theta$  – угол падения.

Эта разность хода, в свою очередь, приводит к сдвигу фаз между лучами, равному

$$\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} 2h \cos \theta. \quad (10.1.19)$$

Считают, что если фазовые искажения на плоскости не превышают  $\pi/2$ , то фазовый фронт волны мало отличается от плоского и влиянием неровностей на отражение волны можно пренебречь. Тогда из (10.1.19) можем получить максимальную высоту неровностей, при которой отражение еще можно считать зеркальным

$$h_{\text{доп}} = \frac{\lambda}{8 \cos \theta}. \quad (10.1.20)$$

Соотношение (10.1.20) называется критерием Рэля. Этот критерий показывает, что при известной высоте неровностей характер отражения ближе к зеркальному для полого падающих лучей и более длинных волн. Поэтому влияние неровностей земной поверхности особенно существенно сказывается на распространение дециметровых

и более коротких волн. В этих диапазонах даже небольшие неровности Земли и взволнованное море вызывают рассеянное отражение радиоволн. Характер рассеянного отражения учитывается **эффективным коэффициентом отражения** в направлении зеркального отражения, который обычно определяют экспериментально.

## 10.2. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

### 10.2.1. Интерференционная формула для расчета напряженности поля, множитель ослабления

В предыдущих главах были рассмотрены особенности учета отражения радиоволн от земной поверхности. Далее рассмотрим важную для практики задачу определения поля излучателя, находящегося на некоторой высоте над поверхностью Земли (рис. 10.1.6). Этот случай соответствует антенне, поднятой над поверхностью Земли.

Наибольший практический интерес представляет случай, когда точка  $B$  находится в дальней зоне, т.е. выполняется условие  $r \gg h_{1,2}$ . При этом лучи прямой и отраженной волн можно считать параллельными, тогда разность расстояний от излучателей, находящихся в точках  $A_1$  и  $A_2$  может быть найдена из формулы  $r_2 - r_1 = 2h_1 \cos(\theta)$ , где угол  $\theta$  – угол точки отражения в сферической системе координат.

Мгновенное значение напряженности электрического поля в точке  $B$  может быть определено из следующего выражения

$$\dot{E}_m = \frac{\sqrt{60P_\Sigma D_0}}{r} F(\theta) \left[ \exp(i2kh_1 \cos(\theta)) + \dot{R}_{\parallel, \perp} \frac{F(\theta_2)}{F(\theta)} \right], \quad (10.2.1)$$

где угол  $\theta_2$  – угол точки отражения.

Амплитудное значение напряженности поля в точке может быть определено из (10.2.1) по теореме косинусов следующим образом

$$\begin{aligned} \dot{E}_m = & \frac{\sqrt{60P_\Sigma D_0}}{r} F(\theta) \times \\ & \times \sqrt{1 + \left| \dot{R}_{\parallel, \perp} \right|^2 \frac{F^2(\theta_2)}{F^2(\theta)} + 2 \left| \dot{R}_{\parallel, \perp} \right| \frac{F(\theta_2)}{F(\theta)} \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} 2h_1 \cos(\theta) + \Phi_{\parallel, \perp} \right)}. \end{aligned} \quad (10.2.2)$$

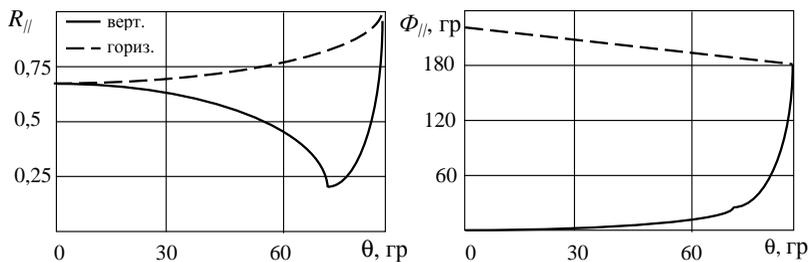
Эта формула получила название интерференционной, а квадратный корень, входящий в нее, называется **интерференционным мно-**

**жителем** и обозначается  $V(\mathbf{n})$ . Этим подчеркивается роль интерференции двух лучей в создании результирующего поля в точке приема. За счет интерференции прямого и отраженного лучей в вертикальной плоскости даже для изотропного излучателя формируется многолепестковая диаграмма направленности. Эта изрезанность во многих случаях оказывается вредной, снижающей качество связи с ВС в воздухе. В некоторых случаях многолепестковость результирующей ДН используют для формирования заданного направления (например, в инструментальных системах посадки). Величины  $R$  и  $\Phi$  следует вычислять для соответствующей поляризации волны, для данного вида земной поверхности со своими электрическими свойствами и угла падения волны.

Так, например, для вертикальной поляризации величина коэффициента Френеля  $R_{\parallel}$  и фаза коэффициента Френеля  $\Phi_{\parallel}$  значительно изменяются в зависимости от угла падения. Для горизонтальной поляризации эти изменения являются более монотонными (рис. 10.2.1).

Это значит, что при горизонтальной поляризации ЭМВ легче учесть свойства земной поверхности. Модуль коэффициента Френеля при больших углах падения  $u$ , что соответствует большим расстояниям, оказывается более близок к единице, а фаза его к  $180^\circ$ , чем при вертикальной поляризации для большей разновидности типов земной поверхности. Это значит, что при горизонтальной поляризации ЭМВ напряженность поля в точке приема меньше подвержена случайным колебаниям из-за переотражений, чем при вертикальной поляризации. Поэтому волны горизонтальной поляризации в случае сильного влияния полупроводящей земной поверхности (в диапазоне УКВ) применяются чаще.

Если главный максимум диаграммы направленности передающей антенны ориентирован в направлении на точку  $B$ , или передающая



**Рис. 10.2.1.** Зависимость коэффициента Френеля  $R_{\parallel}$  и фазы  $\Phi_{\parallel}$  от угла падения

антенна является слабонаправленной, интерференционный множитель примет следующий вид:

$$V(\theta) = \sqrt{1 + |\dot{R}_{\parallel,\perp}|^2 + 2|\dot{R}_{\parallel,\perp}| \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} 2h_1 \cos(\theta) + \Phi_{\parallel,\perp}\right)}. \quad (10.2.3)$$

Рассмотрим влияние полупроводящей земной поверхности на распространение радиоволн. Пусть передача ведется на вертикальную антенну. При этом вектор напряженности магнитного поля  $H_y$  будет параллелен земной поверхности. Согласно приближенным граничным условиям Леонтовича-Шукина в этом случае имеется отличная от нуля тангенциальная составляющая электрического поля  $E_z$  (рис. 10.2.2), определяемая волновым сопротивлением земной поверхности:  $E_z = Z_3 H_y$ .

Так как компонента  $E_z$  сдвинута по фазе относительно  $E_x$ , результирующее электрическое поле оказывается эллиптически поляризованным в вертикальной плоскости с большим эксцентриситетом. При этом говорят, что фронт волны становится наклонным.

Явление наклона фронта волны имеет большое практическое значение. Оно позволяет принимать радиосигналы, излученные вертикальными антеннами на земные антенны – симметричные антенны в виде двух проводов, проложенных по земле или протянутых на небольшой высоте над ней. В такой антенне ЭДС наводится только продольной компонентой электрического поля  $E_z$ . Если бы почва была идеально проводящей, прием на земную антенну был бы невозможен.

На практике приемная и передающая антенны радиолинии могут располагаться на различных высотах относительно земной поверхности. Рассмотрим распространенный случай, когда высоты расположения передающей  $h_1$  и приемной  $h_2$  антенн таковы, что выполняются

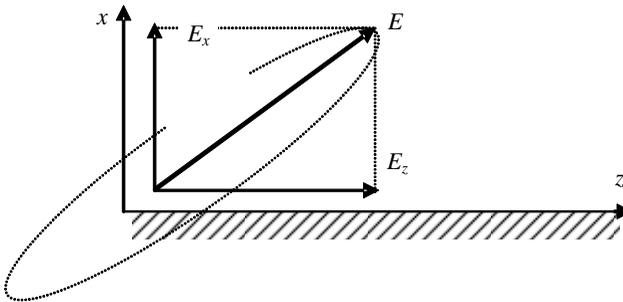


Рис. 10.2.2. Тангенциальная составляющая ЭМП  $E_z$

неравенства  $h_1 \gg \lambda$  и  $h_2 \gg \lambda$ . При этом будем полагать, что поверхность Земли в пределах радиолинии однородна. С практической точки зрения такой случай имеет место в диапазонах волн, в которых  $\lambda$  меньше 10 м.

В точке приема  $B$  поле может быть представлено в виде суперпозиции прямой волны  $E_{\text{пр}}$  и отраженной  $E_{\text{отр}}$ . Заменяем путь отраженной волны  $ACB$  на равный ему  $A_1CB$ . Напряженность поля прямой волны в точке  $B$  определяется следующим выражением:

$$\vec{E}_{\text{пр}} = E_{\text{mnp}} \exp[i(\omega t - kr_1)]. \quad (10.2.4)$$

Напряженность поля отраженной волны в точке  $B$  необходимо находить с учетом комплексного коэффициента Френеля  $R$ , учитывающего влияние земной поверхности и вид поляризации радиоволны:

$$\vec{E}_{\text{отр}} = E_{\text{moom}} \exp[i(\omega t - kr_2)] \cdot |R| \exp[-i\Phi]. \quad (10.2.5)$$

Так как расстояние между антеннами  $r$  много больше высот их расположения ( $r \gg h_1$  и  $r \gg h_2$ ), то можно считать, что  $r_1 \approx r_2 \approx r$ . На основании этих рассуждений можно полагать, что влияние неодинаковости расстояний  $r_1$  и  $r_2$  на амплитуды прямой и отраженной волн незначительно

$$E_{\text{mnp}} = E_{\text{moom}} = E_{\text{mo}}. \quad (10.2.6)$$

Напряженность поля прямой волны в точке  $B$  будет определяться следующей формулой с учетом (10.2.4) и (10.2.6)  $\dot{E}_{\text{пр}} = E_{\text{mo}} \exp[i(\omega t - kr_1)]$ . При нахождении фазы поля разностью расстояний  $\Delta r = r_2 - r_1$  пренебрегать нельзя, поэтому напряженность поля отраженной волны будет определяться следующим выражением:

$\dot{E}_{\text{отр}} = E_{\text{mo}} |R| \exp[i(\omega t - kr_1)] \exp[-i(k\Delta r + \Phi)]$ , где разность расстояний  $\Delta r = r_2 - r_1 = \frac{2h_1h_2}{r}$ .

Тогда, с учетом вышеизложенного, модуль вектора напряженности электрического поля в точке  $B$  равен

$$E_{\text{mB}} = |\dot{E}_{\text{пр}} + \dot{E}_{\text{отр}}| = E_{\text{mo}} \sqrt{1 + 2|R| \cos\left(k \frac{2h_1h_2}{r} + \Phi\right) + |R|^2}. \quad (10.2.7)$$

Данная формула также носит название интерференционной, а квадратный корень, входящий в нее, называется интерференционным множителем или **множителем ослабления  $G$** .

При изменении расстояния  $r$  и высот подъема антенн поле в точке  $B$  будет меняться. Очевидно, что поле будет максимальным при выполнении равенства  $\cos\left(k\frac{2h_1h_2}{r} + \Phi\right) = 1$ .

Тогда интерференционный множитель  $G$  будет равен  $G = 1 + |\dot{R}|$ , а модуль вектора напряженности электрического поля будет определяться простым выражением  $E_{mB\max} = E_{mo}\left(1 + |\dot{R}|\right)$ . Рассуждая аналогично, можем сказать, что поле будет минимальным при

$$\cos\left(k\frac{2h_1h_2}{r} + \Phi\right) = -1.$$

Тогда интерференционный множитель будет равен  $G = 1 - |\dot{R}|$ , а модуль вектора напряженности электрического поля в этом случае будет равен  $E_{mB\min} = E_{mo}\left(1 - |\dot{R}|\right)$ .

Характер зависимости  $G$  от  $r$  определяет название  $G$ : для расстояний  $r < r_{\max}$  – интерференционный множитель, а для расстояний  $r > r_{\max}$  – множитель ослабления, где  $r_{\max}$  – расстояние, определяемое по формуле

$$r_{\max} = \frac{18h_1h_2}{\lambda}. \quad (10.2.8)$$

### 10.2.2. Модель радиотрассы с высокоподнятыми антеннами. Метод расчета по формуле Б.А. Введенского

На практике часто встречаются случаи, когда угол падения  $\theta$  близок к  $90^\circ$ . При этом, независимо от вида поляризации радиоволны модуль коэффициента Френеля приблизительно равен единице, а фаза  $\Phi$  – ста восьмидесяти градусам. В этом случае интерференционная формула (10.2.7) принимает следующий вид

$$E_{mB} = E_{mo}\sqrt{2\left(1 - \cos\left(k\frac{2h_1h_2}{r}\right)\right)} = 2E_{mo}\sin\left(k\frac{h_1h_2}{r}\right). \quad (10.2.9)$$

Поскольку аргумент функции синус в (10.2.9) много меньше единицы, то окончательно можем записать

$$E_{mB} = \frac{\sqrt{60P_\Sigma D_o}}{r} \frac{4\pi h_1h_2}{\lambda r}. \quad (10.2.10)$$

Данная формула получила название формулы Б.А. Введенского и была получена им в 1928 г. Она наглядно характеризует зависимость напряженности электрического поля от расстояния, длины волны и высот расположения антенн. Тем не менее, при ее использовании необходимо учитывать следующие ограничения:

- должны выполняться условия  $|R| > 0,95$  и  $175^\circ < \Phi < 180^\circ$ , которые легче выполняются для горизонтально поляризованной волны и труднее – для вертикально поляризованной;
- формула применима при высотах подъема антенн и расстояний, для которых выполняется условие  $\frac{\pi}{9} > \frac{2\pi h_1 h_2}{\lambda r}$ , так как только в этом случае синус можно заменить его аргументом;
- формула дает правильные результаты только для излучателей, высоко поднятых над поверхностью Земли, т.е. при  $h_1 \gg \lambda$  и  $h_2 \gg \lambda$ ;
- формула применима для высот подъема точки наблюдения не выше первого максимума диаграммы направленности передающей антенны.

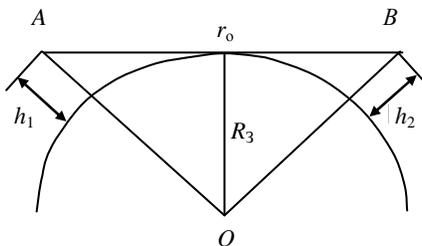
В инженерных расчетах считают, что формулу Введенского можно применять при выполнении условия  $r > r_{\max}$ , вычисляемого по формуле (10.2.8).

Как видно из (10.2.10), для формулы Введенского характерно квадратичное убывание напряженности поля с расстоянием. Это объясняется тем, что отраженный луч приходит в точку наблюдения в противофазе с прямым лучом, так как при отражении фаза волны изменяется почти на  $180^\circ$ , что ослабляет поле в точке приема в направлениях ниже первого максимума.

### **10.2.3. Учет сферичности поверхности Земли при распространении радиоволн. Учет явления дифракции**

В диапазонах радиоволн с частотой от  $10^7$  до  $10^{11}$  Гц, на которых выполняется условие высоко поднятых антенн, начиная с некоторого расстояния между передающей и приемной антеннами необходимо учитывать влияние сферичности Земли на распространение радиоволн. С этой целью вводится так называемое «расстояние прямой видимости».

*Расстояние прямой видимости* – это такое расстояние между передающей и приемной антеннами, при котором прямая, их соединяющая, касается Земли (рис. 10.2.3).



**Рис. 10.2.3.** Пояснение понятия прямой видимости

Расстояние прямой видимости может быть найдено по формуле

$$r_0 = \sqrt{2R_3} \left( \sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} \right), \quad (10.2.11)$$

где  $R_3$  – радиус Земли, равный 6370 км.

Подставляя в (10.2.11) радиус Земли и выражая в километрах, а высоты расположения передающей и приемной антенн – в метрах, получим

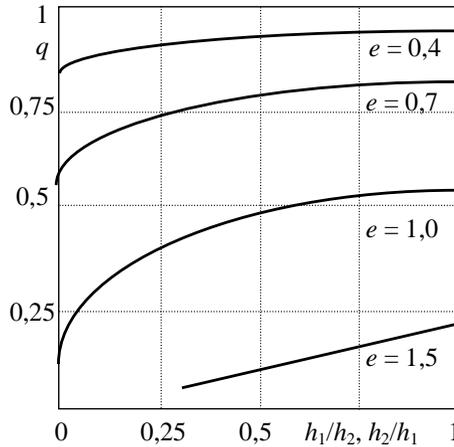
$$r_0 = 3,57 \left( \sqrt{h_1[\text{М}]} + \sqrt{h_2[\text{М}]} \right), \quad [\text{км}]. \quad (10.2.12)$$

Рассматривая распространение радиоволн над сферической земной поверхностью можно выделить два случая: дифракция радиоволн не учитывается и дифракция радиоволн учитывается.

1) Определение напряженности электрического поля без учета дифракции.

Результаты расчетов и практическое измерение напряженности электрического поля показывают, что при  $r < 0,2r_0$  поверхность Земли можно считать плоской и при определении напряженности поля можно пользоваться формулой Введенского. Если длина трассы больше  $r > 0,2r_0$ , но меньше  $r < 0,8r_0$ , то необходимо учитывать сферичность Земли. Вычисление напряженности поля сводится к формуле Введенского, в которой вместо произведения высот расположения передающей  $h_1$  и приемной антенн  $h_2$  необходимо использовать произведение так называемых приведенных высот  $h_{1\text{пр}}$  и  $h_{2\text{пр}}$  над плоскостью, касательной к поверхности Земли в точке отражения. Для определения произведения  $h_{1\text{пр}} \cdot h_{2\text{пр}}$  служат графики, где по оси абсцисс отложено отношение высот расположения передающей и приемной антенн, а по оси ординат – коэффициент  $q$  (рис. 10.2.4) [6], равный

$$q = \frac{h_{1\text{пр}} h_{2\text{пр}}}{h_1 h_2}. \quad (10.2.13)$$



**Рис. 10.2.4. График для определения произведения высот передающей и приемной антенн с учетом  $q$**

Параметром на этих графиках служит величина  $e$ , зависящая от высоты расположения передающей антенны

$$e = \frac{r}{\sqrt{2R_3 h_1}}, \quad (10.2.14)$$

$$E_{mB} = \frac{\sqrt{60P_\Sigma D_o}}{r} \frac{4\pi h_{1\text{пн}} h_{2\text{пн}}}{\lambda r}.$$

2) Определение напряженности электрического поля с учетом дифракции.

Если длина трассы больше  $0,8r_0$ , то при определении напряженности электрического поля необходимо учитывать явление дифракции радиоволн на земной поверхности. При этом напряженность поля в зоне дифракции определяется по формуле:

$$E_m = \frac{\sqrt{60P_\Sigma D_o}}{r} G_{\text{диф}}, \quad (10.2.15)$$

где  $G_{\text{диф}}$  – множитель ослабления, учитывающий затенение области, существенной при распространении радиоволн выпуклостью Земли. Он определяется произведением трех функций

$$G_{\text{диф}} = U(x)V(y_1)V(y_2), \quad (10.2.16)$$

где  $U(x)$  – функция расстояния;  $V(y_1)$  и  $V(y_2)$  – функции высот подъема антенн.

Аргументы этих функций вычисляются по следующим формулам  $x = r/L$ ;  $y_1 = \frac{h_1}{H}$ ;  $y_2 = \frac{h_2}{H}$ , в которых  $L$  – масштабный коэффициент расстояния  $L = \sqrt[3]{\frac{\lambda R_3^2}{\pi}}$ , а  $H$  – масштабный коэффициент высот

$$H = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\lambda^2 R_3}{\pi^2}}.$$

Определить величины функций  $U$  и  $V$  по рассчитанным их аргументам можно по графикам [6].

Расчет с использованием этих графиков проводится, главным образом, для диапазона УКВ, в котором применяются антенны, высоко поднятые над поверхностью Земли.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

---

---

В современной радиотехнике широко используются различные волновые электромагнитные процессы (например, направляемые волны в разнообразных линиях передачи и линейных устройствах, излучение и прием радиоволн антеннами, распространение этих волн в среде между антеннами и др.) Их многообразные свойства и особенности могут быть рассмотрены только при помощи законов электродинамики. Электродинамика как раз и занимается изучением этих законов, исследованием на их основе технических устройств, в которых применяются различные способы управления электромагнитными процессами.

В данном пособии изложены основы теории электромагнетизма. Рассматриваются процессы излучения, отражения и преломления волн, дифракция, распространение волн в волноводах различной конфигурации, включая нерегулярные структуры, в тропосфере и ионосфере, электромагнитные колебания в резонаторах, процессы в интегральных схемах СВЧ. Излагается теория возбуждения регулярных и нерегулярных волноводов и резонаторов с учетом потерь в стенках. Описываются в виде законов сохранения особенности взаимодействия заряженных частиц с полями, имеющими пространственно-временную симметрию.

Учебное пособие будет полезно студентам, бакалаврам, магистрантам при изучении дисциплин «Электромагнитные поля и волны», «Электродинамика и распространение радиоволн», «Радиотехника», а также студентам других радиотехнических специальностей, связанных с расчетом и эксплуатацией соответствующих радиосистем.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

---

1. Петров, Б.М. Электродинамика и распространение радиоволн : учебник для вузов / Б.М. Петров. – 2-е изд., испр. – М. : Горячая линия–Телеком, 2007. – 558 с., ил.
2. Новокшанов, М.Н. Электродинамика и распространение радиоволн / М.Н. Новокшанов. – Рига : РВВАИУ, 1981. – 563 с.
3. Фальковский, О.И. Техническая электродинамика : учебник / О.И. Фальковский. – 2-е изд., стер. – СПб. : Изд-во «Лань», 2009. – 432 с.
4. Пименов, А.Д. Техническая электродинамика / А.Д. Пименов. – М. : Радио и связь, 2005. – 483 с.
5. Никольский, В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М. : Наука, 1989. – 543 с.
6. Максимов, В.М. Линии передачи СВЧ-диапазона : учебное пособие для вузов / В.М. Максимов. – М. : САЙНС-ПРЕСС, 2002. – 46 с.
7. Грудинская, Г.П. Распространение радиоволн / Г.П. Грудинская. – М. : Высшая школа, 1975. – 280 с.
8. Рамо, С. Поля и волны в современной радиотехнике / С. Рамо и Дж. Уиннери. – М., Л. : ОГИЗ, 1948. – 631 с.
9. Стрэттон, Дж.А. Теория электромагнетизма / Дж.А. Стрэттон. – М., Л. : ОГИЗ, 1948. – 539 с.
10. Кисунько, Г.В. Электродинамика полых систем / Г.В. Кисунько. – Л. : ВКАС, 1949. – 426 с.
11. Никольский, В.В. Теория электромагнитного поля / В.В. Никольский. – М. : Высшая школа, 1961. – 371 с.
12. Никольский, В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский. – М. : Наука, 1973. – 607 с.
13. Никольский, В.В. Вариационные методы для внутренних задач электродинамики / В.В. Никольский. – М. : Наука, 1967. – 460 с.
14. Никольский, В.В. Электродинамика и распространение радиоволн / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М. : Наука, 1989. – 544 с.
15. Никольский, В.В. Декомпозиционный подход к задачам электродинамики / В.В. Никольский, Т.И. Никольская. – М. : Наука, 1983. – 304 с.
16. Вайнштейн, Л.А. Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М. : Советское радио, 1957. – 581 с.

17. Вайнштейн, Л.А. Электромагнитные волны / Л.А. Вайнштейн. – М. : Радио и связь, 1988. – 440 с.
18. Вайнштейн, Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы / Л.А. Вайнштейн. – М. : Советское радио, 1966. – 475 с.
19. Миттра, Р. Аналитические методы теории волноводов / Р. Миттра, С. Ли. – М. : Мир, 1974. – 327 с.
20. Тамм, И.Е. Основы теории электричества / И.Е. Тамм. – М. : Наука, 1966. – 624 с.
21. Гольдштейн, Л.Д. Электромагнитные поля и волны / Л.Д. Гольдштейн, Зернов Н.В. – М. : Связь, 1971. – 602 с.
22. Вольман, В.И. Техническая электродинамика / В.И. Вольман, Ю.В. Пименов. – М. : Связь, 1971. – 486 с.
23. Марков, Г.Т. Электродинамика и распространение радиоволн / Г.Т. Марков, Б.М. Петров, Г.П. Грудинская. – М. : Советское радио, 1979. – 376 с.
24. Каценеленбаум, Б.З. Высокочастотная электродинамика / Б.З. Каценеленбаум. – М. : Наука, 1966. – 240 с.
25. Семенов, Н.А. Техническая электродинамика / Н.А. Семенов. – М. : Связь, 1973. – 470 с.
26. Машковцев, Б.М. Теория волноводов / Б.М. Машковцев, К.Н. Цибизов, Б.Ф. Емелин. – М. : Наука, 1966. – 351 с.
27. Левин, Л. Теория волноводов / Л. Левин. – М. : Радио и связь, 1981. – 312 с.
28. Сушкевич, В.И. Нерегулярные линейные волноводные системы / В.И. Сушкевич. – М. : Советское радио, 1967. – 295 с.
29. Марков, Г.Т. Возбуждение электромагнитных волн / Г.Т. Марков, А.Ф. Чаплин. – М., Л. : Энергия, 1967. – 376 с.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ</b> .....	3
<b>1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ</b> .....	4
1.1. Интегральные и дифференциальные уравнения электростатического поля .....	4
1.1.1. Электростатическое поле заряда. Закон Кулона .....	4
1.1.2. Напряженность электрического поля. Потенциал .....	5
1.1.3. Поле системы зарядов. Электрический диполь .....	9
1.1.4. Теорема Остроградского–Гаусса, материальные уравнения .....	10
1.1.5. Энергия электростатического поля .....	13
1.2. Интегральные и дифференциальные уравнения магнитного поля .....	14
1.2.1. Постоянный электрический ток. Вектор плотности тока .....	14
1.2.2. Закон Ома в дифференциальной форме. Уравнение непрерывности .....	15
1.2.3. Закон Ампера. Магнитная индукция .....	17
1.2.4. Напряженность магнитного поля .....	19
1.2.5. Магнитное поле рамки с постоянным током .....	20
1.2.6. Энергия магнитного поля .....	21
1.3. Уравнения Максвелла и их решение .....	22
1.3.1. Полная система уравнений Максвелла. Их физическое содержание. Интегральная форма уравнений Максвелла .....	22
1.3.2. Решение уравнений Максвелла, волновых уравнений. Теорема запаздывающих электродинамических потенциалов ...	25
1.3.3. Уравнения Максвелла в комплексной форме .....	28
1.3.4. Граничные условия для векторов электромагнитного поля .....	29
1.3.5. Теорема Умова–Поинтинга. Энергия электромагнитного поля. Теорема подобия. Граничные задачи электродинамики .....	31
<b>2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПАРАМЕТРЫ</b> .....	35
2.1. Электромагнитные волны .....	35
2.1.1. Понятие волнового процесса .....	35
2.1.2. Плоские электромагнитные волны .....	35
2.1.3. Ортогональность векторов электрического и магнитного полей .....	38
2.1.4. Цилиндрические и сферические волны .....	40
2.1.5. Поляризация электромагнитных волн .....	41

<b>3. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ .....</b>	<b>44</b>
3.1. Распространение плоских ЭМВ в идеальном диэлектрике .....	44
3.1.1. Классификация сред по их электрическим свойствам, границная частота .....	44
3.1.2. Распространение плоских ЭМВ в идеальном диэлектрике .....	47
3.2. Плоские ЭМВ в средах с потерями .....	49
3.2.1. Распространение плоских ЭМВ в среде с потерями .....	49
3.2.2. Фазовая и групповая скорости ЭМВ, явление дисперсии и ее виды .....	52
3.2.3. Поверхностный эффект .....	55
<b>4. ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХ СРЕД .....</b>	<b>58</b>
4.1. Падение плоской ЭМВ на границу раздела двух сред .....	58
4.1.1. Основные соотношения, описывающие падение плоской ЭМВ на границу раздела двух сред .....	58
4.1.2. Коэффициенты Френеля для волн различной поляризации .....	61
4.1.3. Нормальное падение плоской ЭМВ на границу раздела двух сред .....	64
4.2. Наклонное падение плоской ЭМВ на границу раздела двух сред .....	64
4.2.1. Наклонное падение плоской ЭМВ на границу раздела двух идеальных диэлектриков .....	64
4.2.2. Явление полного преломления, угол Брюстера .....	65
4.2.3. Явление полного внутреннего отражения, критический угол ...	68
4.2.4. Падение плоской ЭМВ на поверхность идеального проводника	70
4.2.5. Приближенные граничные условия Леонтовича–Щукина .....	72
<b>5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН</b>	<b>76</b>
5.1. Электромагнитное поле элементарного вибратора .....	76
5.1.1. Физическая сущность процесса излучения ЭМВ в свободное пространство .....	76
5.1.2. Элементарные излучатели, их основные типы .....	78
5.1.3. Электромагнитное поле элементарного вибратора .....	79
5.2. Зоны поля элементарного электрического вибратора (ЭЭВ) .....	82
5.2.1. Структура поля в ближней и дальней зонах .....	82
5.2.2. Энергетические параметры, мощность и сопротивление излучения .....	86
5.2.3. Диаграмма направленности, коэффициент направленного действия .....	87

5.3. Электромагнитное поле элементарной рамки .....	89
5.3.1. Определение магнитной элементарной рамки .....	89
5.3.2. Принцип перестановочной двойственности и его применение для нахождения ЭМП элементарной рамки .....	91
5.3.3. Мощность и сопротивление излучения, диаграмма направленности элементарной рамки .....	94
5.4. Электромагнитное поле источника Гюйгенса .....	96
5.4.1. Метод эквивалентных токов и его применение для решения задач электродинамики .....	96
5.4.2. Электромагнитное поле источника Гюйгенса в дальней зоне ...	98
5.4.3. Диаграмма направленности, коэффициент направленного действия .....	100
5.5. Дифракция электромагнитных волн .....	101
5.5.1. Дифракционный метод Гюйгенса–Кирхгофа для мономатической волны .....	101
5.5.2. Дифракция Фраунгофера плоской волны на прямоугольном отверстии в проводящем экране .....	104
5.5.3. Дифракция Френеля .....	107
<b>6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В НАПРАВЛЯЮЩИХ СИСТЕМАХ .....</b>	<b>109</b>
6.1. Основные характеристики линий передачи .....	109
6.1.1. Назначение направляющих систем – линий передачи .....	109
6.1.2. Определение и классификация направляемых электромагнитных волн в линиях передачи, классификация линий передачи .....	110
6.1.3. <i>T</i> -волна в коаксиальной линии передачи .....	113
6.1.4. Полосковые линии передачи .....	115
6.1.5. Волноводные линии передачи .....	116
6.2. Электромагнитные волны в прямоугольном волноводе .....	120
6.2.1. <i>H</i> -волны в прямоугольном волноводе .....	120
6.2.2. <i>E</i> -волны в прямоугольном волноводе .....	126
6.2.3. Критическая частота и критическая длина волны в прямоугольном волноводе .....	127
6.2.4. Основные параметры распространения ЭМВ в прямоугольном волноводе .....	128
6.2.5. Волна $H_{10}$ в прямоугольном волноводе .....	130
	<b>197</b>

<b>7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРАХ</b> .....	133
7.1. Объемные резонаторы .....	133
7.1.1. Общие сведения об объемных резонаторах .....	133
7.1.2. Свободные электромагнитные колебания в объемных резонаторах .....	135
7.1.3. Добротность, вынужденные колебания в объемных резонаторах .....	138
7.1.4. Резонаторы сложной формы, коаксиальный объемный резонатор .....	141
7.2. Электромагнитные колебания в объемных резонаторах волноводных типов .....	145
7.2.1. Резонаторы волноводного типа .....	145
7.2.2. Колебания <i>H</i> - и <i>E</i> -типов в прямоугольном ОР, основные типы колебаний, структуры полей, резонансные частоты .....	148
7.2.3. Колебания <i>H</i> - и <i>E</i> -типов в круглом (цилиндрическом) ОР, основные типы колебаний, структуры полей, резонансные частоты .....	153
<b>8. ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ СТРУКТУРЫ</b> .....	155
8.1. Электромагнитные волны в замедляющих структурах .....	155
8.1.1. Способы замедления электромагнитных волн .....	155
8.1.2. Свойства «медленных» волн .....	156
8.1.3. Замедляющие свойства различных типов замедляющих структур .....	157
8.1.4. Пространственные гармоники .....	162
<b>9. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ</b> .....	166
9.1. Анизотропные свойства ферритов .....	166
9.1.1. Магнитные свойства веществ, анизотропные среды .....	166
9.1.2. Физико-химические свойства ферритов .....	168
9.1.3. Анизотропные свойства намагниченных ферритов .....	168
9.1.4. Особенности распространения ЭМВ в ферритах .....	170
<b>10. ВЛИЯНИЕ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН</b> .....	173
10.1. Распространение радиоволн в свободном пространстве .....	173
10.1.1. Радиоволны и их классификация .....	173
10.1.2. Модель распространения радиоволн в свободном пространстве .....	175
10.1.3. Отражение радиоволн от земной поверхности .....	179
10.1.4. Критерий Рэлея .....	180

10.2. Распространение электромагнитных волн вблизи поверхности земли .....	183
10.2.1. Интерференционная формула для расчета напряженности поля, множитель ослабления .....	183
10.2.2. Модель радиотрассы с высокоподнятыми антеннами. Метод расчета по формуле Б.А. Введенского .....	187
10.2.3. Учет сферичности поверхности Земли при распространении радиоволн. Учет явления дифракции .....	188
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> .....	192
<b>СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ</b> .....	193

Учебное издание

МУРОМЦЕВ Дмитрий Юрьевич,  
ЗЫРЯНОВ Юрий Трифонович,  
ФЕДЮНИН Павел Александрович,  
БЕЛОУСОВ Олег Андреевич,  
РЯБОВ Александр Вячеславович,  
ГОЛОВЧЕНКО Евгений Викторович

## **ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН**

Учебное пособие

Редактор Е.С. Мордасова

Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано в печать 04.12.2012

Формат 60 × 84/16. 11,63 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ № 611

Издательско-полиграфический центр ФГБОУ ВПО «ТГТУ»  
392000, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106, к. 14