

С.В. Пономарев, С.В. Мищенко, А.Г. Дивин

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И
ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ
ИЗМЕРЕНИЙ

Книга 1

◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Тамбовский государственный технический университет"

С.В. Пономарев, С.В. Мищенко, А.Г. Дивин

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И
ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ
ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ
ИЗМЕРЕНИЙ**

Книга 1

Монография



Тамбов
Издательство ТГТУ
2006

УДК 536.24.08: 532.517.2

ББК ζ 31

П56

Р е ц е н з е н т ы:

Доктор технических наук, профессор ИТЭС ОИВТ РАН

В.А. Петров

Доктор технических наук,

профессор МГГРУ им. Серго Орджоникидзе

В.А. Вертоградский

П56 Пономарев С.В., Мищенко С.В., Дивин А.Г.

Теоретические и практические аспекты теплофизических измерений: Монография. В 2 кн. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. Кн. 1. 204 с.

Изложены теоретические и практические основы принципа действия и работы наиболее часто применяемых в производственной и исследовательской практике методов и приборов, предназначенных для измерения теплофизических свойств веществ. Большое внимание уделено стационарным и нестационарным методам и приборам для измерения теплопроводности, коэффициента температуропроводности и объемной теплоемкости. Рассмотрены проблемы анализа и уменьшения влияния источников погрешностей измерения теплофизических свойств. Приведены примеры применения теории погрешностей для оценки метрологических характеристик теплофизических методов и приборов.

Предназначена для студентов магистратуры, аспирантов и специалистов предприятий, занимающимся вопросами применения теплофизических методов и приборов для контроля и управления качеством продукции и процессов.

УДК 536.24.08: 532.517.2

ББК ζ 31

ISBN 5-8265-0439-0

© Пономарев С.В., Мищенко С.В.,
Дивин А.Г., 2006

© Тамбовский государственный
технический университет (ТГТУ), 2006

Научное издание

ПОНОМАРЕВ Сергей Васильевич,
МИЩЕНКО Сергей Владимирович,
ДИВИН Александр Георгиевич

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ И ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

К н и г а 1

Монография

Редактор З.Г. Чернова

Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано к печати 30.01.2006.

Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Гарнитура Times New Roman. Объем: 11,86 усл. печ. л.; 11,75 уч.-изд. л.

Тираж 100 экз. С. 41

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Материалы подготовлены к опубликованию на основании многолетнего опыта разработки и практического использования теплофизических методов и приборов, а также по результатам многократного чтения курса лекций «Основы теплофизических измерений» в Тамбовском государственном техническом университете для студентов, обучающихся по программе подготовки инженеров по специализации 210217 «Автоматизация аналитического контроля технологических процессов» в рамках специальности 210200 «Автоматизация технологических процессов и производств». В последнее время одноименный курс лекций читается для студентов магистратуры, обучающихся по программам 200410 – «Метрологическое обеспечение контроля качества, свойств и состава веществ, материалов и изделий», 200415 – «Всеобщее управление качеством», в рамках направления 200400 – «Метрология, стандартизация и сертификация».

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, например [1–3, 5–6, 10–14, 17, 18, 23–27, 57], посвященных теплофизическим измерениям и приборам. В этих книгах, как правило, приводятся очень краткие описания отличительных особенностей рассматриваемых методов и измерительных устройств. Однако при этом очень редко обсуждаются исходные математические модели рассматриваемых теплофизических методов и приборов. В большинстве случаев приводятся только итоговые расчетные соотношения и практически никогда не рассматривается процесс вывода этих расчетных формул. К сожалению, мало внимания уделяется анализу источников погрешности и метрологическому анализу обсуждаемых методов и приборов.

Отличительной особенностью данной монографии является то, что при изложении принципа действия каждого метода и измерительного устройства приводятся:

- физическая модель рассматриваемого метода и устройства с изложением примерного порядка осуществления измерительных операций;

- математическая модель в виде прямой или инверсной (обратной) краевой задачи, описывающей процессы теплопроводности, влажпроводности или течения исследуемой субстанции;

– процедура получения расчетных формул (соотношений) для вычисления искомых теплофизических свойств по значениям физических величин, непосредственно измеряемым в ходе эксперимента;

– процедура получения расчетных формул для вычисления погрешностей измерения искомых теплофизических свойств по известным погрешностям непосредственно измеряемых в ходе эксперимента физических величин (геометрических размеров, температур, тепловых потоков, расхода жидкости, перепада давления и т.п.);

– в ряде случаев приведен анализ возможных источников погрешностей измерения экспериментально измеряемых физических величин и рекомендации по уменьшению влияния этих источников на результирующую погрешность определения искомых теплофизических свойств.

Предлагаемая вниманию читателя монография будет полезна специалистам организаций, аспирантам и студентам, специализирующимся в области проектирования, разработки и практического применения теплофизических методов и приборов для измерения, контроля и управления качеством сырья, материала, полупродуктов и конечной продукции технологических процессов.

Ряд результатов исследований, представленных в монографии, были получены на кафедре «Автоматизированные системы и приборы» Тамбовского государственного технического университета при поддержке РФФИ (гранты 02-02-17587а и 05-08-01515а). Материалы монографии изложены в двух книгах.

Авторы монографии выражают благодарность сотрудникам, аспирантам и студентам магистратуры кафедры «Автоматизированные системы и приборы» Тамбовского государственного технического университета за большую помощь в подготовке рукописи к опубликованию, а именно: начальнику сектора Постниковой Елене Петровне; аспиранту Миронову Сергею Владимировичу; студентам: Минько Ирине, Павлинову Александру, Поповой Елене, Савельевой Екатерине, Утоповой Маргарите, Кузнецовой Екатерине, Серегину Виктору, Тимошиной Евгении, Чепурновой Евгении, Павлинову Роману, Ходилину Сергею.

1 ОСНОВЫ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Феноменологическая теория теплопроводности игнорирует молекулярное строение вещества, т.е. она рассматривает вещество не как совокупность отдельных дискретных частиц, а как сплошную среду – континуум. Такое модельное представление вещества может быть применено на практике при решении задач переноса тепла, если размеры рассматриваемых дифференциальных объемов достаточно велики по сравнению с размерами молекул и расстояниями между ними [1].

1.1 ПОНЯТИЕ О ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Аналитическое исследование теплопроводности сводится [1] к изучению пространственно-временного изменения так называемого температурного поля, характерного для рассматриваемого процесса,

$$T = f(x, y, z, \tau), \quad (1.1)$$

где T – температура; x, y, z – пространственные координаты в декартовой системе; τ – время; f – обозначение функции, определяющей зависимость температуры T от координат x, y, z и времени τ .

Различают стационарное и нестационарное температурное поле.

Выражение (1.1) представляет собой математическую запись нестационарного температурного поля [1], зависящего не только от пространственных координат x, y, z , но и от времени τ .

Стационарным температурным полем называется такое поле [1]

$$T = F(x, y, z), \quad \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0, \quad (1.2)$$

значение которого в любой его точке не изменяется во времени, т.е. является функцией только пространственных координат x, y, z .

Температурные поля (1.1) и (1.2) являются трехмерными, так как являются функциями трех координат. Если температура есть функция только двух пространственных координат x, y

$$T = f_2(x, y, \tau); \quad (1.1a)$$

$$T = F_2(x, y), \quad (1.2a)$$

то температурные поля (1.1a), (1.2a) называют двухмерными. Если же температуры представляют собой функции одной пространственной координаты x

$$T = f_1(x, \tau); \quad (1.1b)$$

$$T = F_1(x), \quad (1.2b)$$

то соответствующие температурные поля (1.1b), (1.2b) называются одномерными [1].

Примером одномерных температурных полей могут служить:

- поле неограниченной пластины, ширина и длина которой очень велики по сравнению с ее толщиной;
- поле неограниченного цилиндра, длина которого очень велика по сравнению с его диаметром (радиусом);
- поле шара.

Принимая во внимание, что температура является скалярной величиной, можно утверждать, что температурное поле является скалярным полем.

Если точки поля, имеющие одинаковые температуры, соединить, то получится изотермическая поверхность (рис. 1.1). Пересечение изотермической поверхности плоскостью дает на этой поверхности изотерму (линию, соответствующую одинаковой температуре).

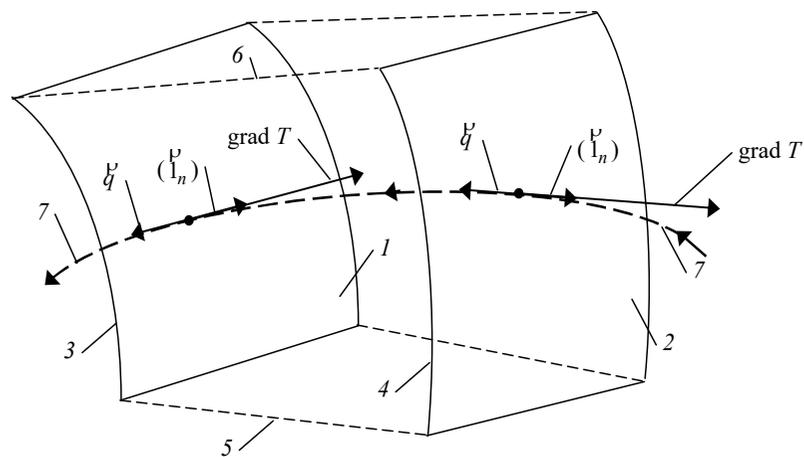


Рис. 1.1 К определению понятий изотермической поверхности, вектора

градиента температуры grad T и вектора теплового потока \vec{q} :

1, 2 – изотермические поверхности с температурами T_1 и $T_2 = T_1 + \Delta T$; 3, 4 – изотермы (линии пересечения изотермических поверхностей 1 и 2 с плоскостью, представленной пунктирными линиями 5, 6; 7 – линия теплового тока

Вдоль изотермической поверхности температура не изменяется. Наибольшее изменение температуры на единицу длины происходит в направлении нормали n к изотермической поверхности и характеризуется градиентом температуры, представляющим собой вектор, направленный по нормали к изотермической поверхности в сторону возрастания температуры

$$\text{grad } T = \left(\overset{P}{1}_n \right) \frac{\partial T}{\partial n},$$

где $\left(\overset{P}{1}_n \right)$ – единичный вектор, направленный по нормали в сторону возрастания температуры; $\frac{\partial T}{\partial n}$ – производная температура по направлению нормали n к изотермической поверхности.

Градиент температуры grad T часто обозначают также символом ∇T . Составляющие градиента температуры по осям декартовой системы координат равны соответствующим частным производным

$$\text{grad } T \equiv \nabla T = 1_x \frac{\partial T}{\partial x} + 1_y \frac{\partial T}{\partial y} + 1_z \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (1.3)$$

где $1_x, 1_y, 1_z$ – ортогональные между собой векторы единичной длины, направленные вдоль осей x, y, z соответственно; $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$ – частные производные температуры $T(x, y, z, \tau)$ по координатам x, y, z .

1.2 ОСНОВНОЙ ЗАКОН ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ФУРЬЕ

Количество тепла Q , проходящее в единицу времени τ через единицу площади S изотермической поверхности, называется *плотностью теплового потока* q и определяется соотношением [1]

$$\vec{q} = \left(-\overset{P}{1}_n \right) \frac{dQ}{d\tau} \frac{1}{S}, \quad (1.4)$$

где $\left(-\overset{P}{1}_n \right)$ – единичный вектор, направленный по нормали к поверхности S в сторону уменьшения температуры; $\frac{dQ}{d\tau}$ – количество тепла, проходящего в единицу времени; \vec{q} – вектор теплового потока.

Следовательно, вектор \vec{q} называется вектором теплового потока, направление которого противоположно градиенту температуры ($\text{grad} T \equiv \nabla T$). Оба вектора \vec{q} и $\text{grad} T$ направлены по нормали к изотермической поверхности, но в противоположные стороны (см. рис. 1.1).

Линии, касательные к которым совпадают с направлениями векторов \vec{q} , называются линиями теплового тока. Линии теплового тока перпендикулярны к изотермическим поверхностям в точках пересечения с ними. Касательная к линиям теплового тока, взятая в обратном направлении, указывает направление градиента температуры [1].

Основной закон теплопроводности, часто называемый законом Фурье, может быть записан в виде

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T = -\lambda \nabla T = \lambda \left(-\vec{1}_n \right) \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (1.5)$$

где λ – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплопроводности.

Таким образом, вектор плотности теплового потока прямо пропорционален градиенту температуры, но направлен в противоположную сторону (от точек тела, имеющих более высокую температуру, к точкам с меньшей температурой).

Вектор теплового потока, с учетом выражения (1.3), может быть представлен в виде

$$\vec{q} = 1_x q_x + 1_y q_y + 1_z q_z = \lambda \left[(-1_x) \frac{\partial T}{\partial x} + (-1_y) \frac{\partial T}{\partial y} + (-1_z) \frac{\partial T}{\partial z} \right], \quad (1.6)$$

причем, его проекции на оси координат x, y, z соответственно равны

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x};$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y};$$

$$q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

В случае стационарного одномерного температурного поля $\left(\text{при } \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \right)$ закон теплопроводности Фурье имеет наиболее простую запись

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (1.7)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{dT}{dx} \approx \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1}; \quad q = \frac{Q}{S\tau},$$

закон Фурье (1.7) можно представить в виде

$$\frac{Q}{S\tau} = -\lambda \frac{T_2 - T_1}{x_2 - x_1},$$

т.е. коэффициент теплопроводности λ равен количеству тепла Q [Дж], протекающему в единицу времени τ [с] через изотермическую поверхность площадью S [м²] при перепаде температуры $(T_2 - T_1) = 1$ К на одну единицу длины $(x_2 - x_1) = 1$ м нормали.

Основной закон теплопроводности (1.5) можно представить в несколько ином виде:

$$\dot{q} = -\frac{\lambda}{c\rho} \text{grad}(c\rho T) = -a \text{grad } h, \quad (1.8)$$

где $h = c\rho T$ [Дж/м³] – объемная энтальпия несжимаемого вещества;

ρ [кг/м³] – плотность; c [Дж/кг·К] – удельная теплоемкость; $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ [м²/с] –

коэффициент температуропроводности.

Согласно выражению (1.8) плотность теплового потока \dot{q} пропорциональна градиенту объемной энтальпии h (объемной концентрации тепловой энергии, имеющей размерность [Дж/м³]).

Коэффициент пропорциональности $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ получил в русском языке

наименование «коэффициент температуропроводности», а в английском языке называется «thermal diffusivity», т.е. коэффициент диффузии тепла.

В случае одномерного стационарного переноса тепла основной закон теплопроводности приобретает вид

$$q = -a \frac{dh}{dx}. \quad (1.9)$$

Учитывая, что $\frac{dh}{dx} \approx \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1}$, $q = \frac{Q}{S\tau}$, выражение (1.9) можно

представить

$$\frac{Q}{S\tau} = -a \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1},$$

т.е. коэффициент теплопроводности $a \left[\frac{\frac{\text{Дж}}{\text{м}^2 \text{с}}}{\frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}} / \frac{\text{Дж}}{\text{м}} \right] = a \left[\frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right]$

равен количеству тепла Q [Дж], протекающему через изометрическую поверхность площадью $S = 1 \text{ м}^2$ в единицу времени $\tau = 1 \text{ с}$ при перепаде объемной энтальпии h (объемной концентрации тепловой энергии) в $h_2 - h_1 = 1 \text{ Дж/м}^3$ на единицу длины $(x_2 - x_1) = 1 \text{ м}$ нормали.

1.3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Под дифференциальным уравнением теплопроводности понимают математическую зависимость, обычно выражаемую дифференциальным уравнением в частных производных, характеризующую протекание физического явления переноса тепла и позволяющую рассчитать температурное поле в любой внутренней точке тела в любой момент времени.

Вывод дифференциального уравнения теплопроводности для неподвижной среды приведем для простого случая, а именно одномерного температурного поля в плоской неограниченной пластине.

Выделим в неподвижной однородной и изотропной среде (см. рис. 1.2) элементарный параллелепипед, объем которого равен $V = dx dy dz$. Обозначим q_x [Вт/м²] – тепловой поток, втекающий в левую грань, а q_{x+dx} – тепловой поток, вытекающий из правой грани. Количество тепла, втекающего в левую грань площадью $dy dz$ в единицу времени, равно $q_x dy dz$, а количество тепла, вытекающего через правую грань, равно $q_{x+dx} dy dz$.

Если $q_x > q_{x+dx}$, то элементарный параллелепипед будет нагреваться; если $q_x < q_{x+dx}$ – охлаждаться. В итоге, в единицу времени в объеме $V = dx dy dz$ будет накапливаться следующее количество тепла $P_q = q_x dy dz - q_{x+dx} dy dz$. При q_{x+dx} стоит знак "-", так как тепло вытекает из объема $dx dy dz$.

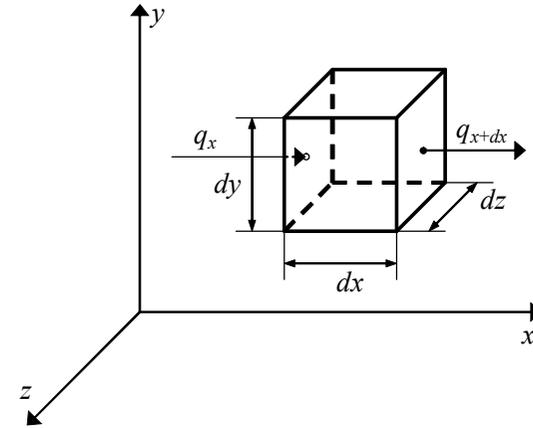


Рис. 1.2 К выводу дифференциального уравнения теплопроводности

В среде может действовать внутренний источник энергии W [Вт/м³]. Тогда в элементарном объеме параллелепипеда будет выделяться в единицу времени количество теплоты $P_W = WV = Wdxdydz$. Всего в объеме $V = dxdydz$ будет накапливаться суммарное количество тепла в единицу времени

$$P_q + P_W = q_x dydz - q_{x+dx} dydz + Wdxdydz. \quad (1.10)$$

По закону сохранения энергии количество тепла, накапливающееся в объеме $V = dxdydz$ в единицу времени, должно быть равно количеству тепла, аккумулируемому средой в единицу времени:

$$P_{ак} = c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dxdydz,$$

$$\frac{Q_{ак}}{\tau} = P_{ак},$$

т.е.

$$P_{ак} = P_q + P_w,$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dxdydz = (q_x - q_{x+dx}) dydz + Wdxdydz. \quad (1.11)$$

Разложим q_{x+dx} в ряд Тейлора:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{dq_x}{dx} dx;$$

$$(q_x - q_{x+dx}) dydz = -\frac{dq_x}{dx} dx dydz. \quad (1.12)$$

Подставим (1.12) в (1.11) и получим

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} dx dy dz = -\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz + W dx dy dz.$$

Поделим на $V = dx dy dz$ и получим дифференциальное уравнение теплопроводности в неокончатальном виде

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} + W. \quad (1.13)$$

Согласно закону теплопроводности Фурье

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (1.14)$$

Подставив (1.14) в (1.13), получаем

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + W.$$

Учитывая, что температура $T = T(x, \tau)$, и функция внутренних источников тепла $W = W(x, \tau)$ являются функциями координаты x и времени τ , уравнение теплопроводности для неподвижных сред примет вид

$$c\rho \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right) + W(x, \tau). \quad (1.15)$$

Если можно принять, что $\lambda = \text{const}$, то уравнение можно упростить:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{W(x, \tau)}{c\rho}, \quad (1.16)$$

где $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности.

Отметим, что в случае трехмерного температурного поля, уравнение (1.15) записывают в виде

$$c\rho \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T(x, y, z, \tau)}{\partial z} \right) + W(x, y, z, \tau). \quad (1.17)$$

Уравнение (1.15) записано для плоских тел в декартовой системе. Часто требуется запись уравнений (1.15), (1.16) для цилиндрической или сферической систем координат. В этом случае пользуются понятием коэффициента формы γ :

- для плоской (декартовой) системы координат $\gamma = 0$;
- для цилиндрической системы координат $\gamma = 1$;
- для сферической системы координат $\gamma = 2$.

С использованием коэффициента формы γ уравнения (1.15) и (1.16) записываются в виде:

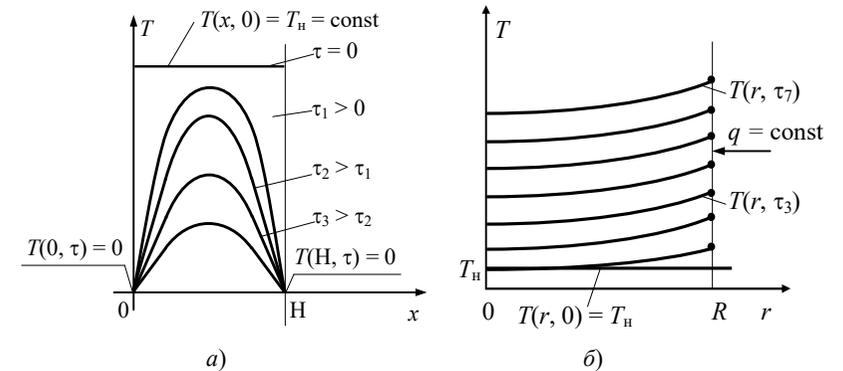
$$c\rho \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{1}{x^\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda x^\gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right) + W; \quad (1.18)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \frac{1}{x^\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (1.19)$$

Уравнения (1.15) – (1.19) описывают перенос тепла во внутренних точках неподвижных сред (см. рис. 1.3).

Для того, чтобы воспользоваться любым из этих уравнений, их надо дополнить краевыми условиями, включающими в себя:

- 1) задание геометрии рассматриваемого тела;
- 2) задание начального условия, определяющего распределение температуры в теле в начальный момент времени;
- 3) задание граничных условий первого, второго, третьего или четвертого рода, определяющих закономерности теплообмена на граничных поверхностях рассматриваемого образца (тела).



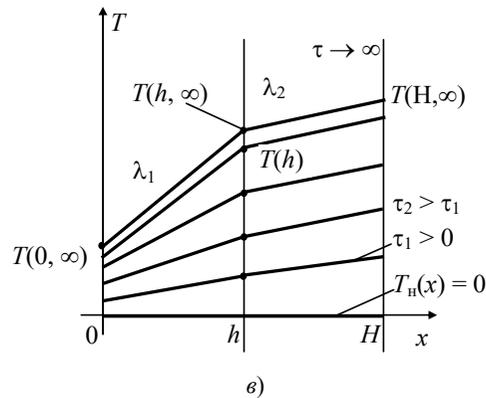


Рис. 1.3 Кривые изменения температур:

a – в неограниченной пластине при граничных условиях первого рода на обеих поверхностях; *б* – в сплошном неограниченном цилиндре, обогреваемом равномерно распределенным тепловым потоком $q = \text{const}$; *в* – в двухслойной пластине при задании граничных условий четвертого рода на поверхности $x = h$ контакта слоев

1.4 НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Начальные условия обычно задаются в виде известных значений температурного поля внутри исследуемого образца в момент времени, предшествующий (или совпадающий) с моментом подачи теплового воздействия на образец, например:

$$T(x, y, z, 0) = T_n(x, y, z);$$

$$T(x, 0) = T_n(x).$$

Для упрощения получающихся аналитических решений стараются обеспечить, чтобы начальные условия имели простейший вид, например:

$$T_n(x, y, z) = T_n = \text{const} \quad \text{или} \quad T_n(x) = T_n = \text{const}.$$

1.5 ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Граничные условия могут быть заданы в виде граничных условий первого, второго, третьего или четвертого рода.

Граничные условия первого рода обычно задают в виде известного закона изменения во времени температуры на поверхности исследуемого образца. Для тела, представленного на рис. 1.3, *a*, граничные условия первого рода (ГУ-1) имеют вид:

$$T(0, \tau) = \varphi_1(\tau);$$

$$T(H, \tau) = \varphi_2(\tau).$$

Функции $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ могут иметь вид:

$$T(0, \tau) = \varphi_1(\tau) = T_0(1 - e^{-2\tau});$$

$$T(H, \tau) = \varphi_2(\tau) = k\tau.$$

В общем случае граничные условия имеют вид

$$T(x_{\text{п}}, y_{\text{п}}, z_{\text{п}}, \tau) = \varphi_1(x_{\text{п}}, y_{\text{п}}, z_{\text{п}}, \tau),$$

где $x_{\text{п}}$, $y_{\text{п}}$, $z_{\text{п}}$ – координаты точек поверхности тела.

Граничные условия второго рода обычно задают в виде известных функций изменения во времени теплового потока на поверхности тела. С учетом закона Фурье $q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$ для случая геометрии образца, представленного на рис. 1.3, а, получаем запись граничных условий второго рода (ГУ-2) в виде

$$-\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = q_1(\tau);$$

$$\lambda \frac{\partial T(H, \tau)}{\partial x} = q_2(\tau).$$

В простейшем случае

$$q_1(\tau) = \text{const};$$

$$q_2(\tau) = \text{const}.$$

Эти функции $q_1(\tau)$, $q_2(\tau)$ могут быть записаны в виде

$$q_1(\tau) = 0;$$

$$q_2(\tau) = 0.$$

Граничные условия третьего рода описывают взаимодействие тела с окружающей средой по закону конвективного теплообмена, предложенного Ньютоном и имеющим вид

$$q = \alpha(T^c - T_{\text{п}}),$$

где α – коэффициент теплообмена [Вт/(м² °С)]; T^c – температура

греющей среды; T_n – температура поверхности.

С учетом того что

$$q(0, \tau) = -\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x};$$

$$q(H, \tau) = \lambda \frac{\partial T(H, \tau)}{\partial x},$$

для случая геометрии образца, представленного на рис. 1.3, а, получаем запись граничных условий третьего рода (ГУ-3) в виде:

$$-\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = \alpha_1 [T_1^c(\tau) - T(0, \tau)];$$

$$\lambda \frac{\partial T(H, \tau)}{\partial x} = \alpha_2 [T_2^c(\tau) - T(H, \tau)].$$

Граничные условия четвертого рода задаются (см. рис. 1.3, в) на внутренних границах контакта двух твердых тел или на границах контакта твердое тело – жидкость (газ) следующим образом:

$$\begin{cases} T(h-0, \tau) = T(h+0, \tau); \\ \lambda_1 \frac{\partial T(h-0, \tau)}{\partial x} = \lambda_2 \frac{\partial T(h+0, \tau)}{\partial x}. \end{cases} \quad (1.20)$$

Согласно граничным условиям четвертого рода (ГУ-4) на границе контакта обеспечивается одновременная непрерывность изменения как температур, так и тепловых потоков, хотя производные температурного поля по координате при этом могут иметь разрыв (см. рис. 1.3, в).

В некоторых случаях на практике используют граничные условия четвертого рода специального вида [2], учитывающие наличие поверхностного источника тепла $p(\tau)$ [Вт/м²], действующего на поверхности раздела соседних слоев. Например, в случае, если на поверхности $x = h$ будет действовать (см. рис. 1.3, в) источник тепла с удельной поверхностной мощностью $p(\tau)$, то ГУ-4 специального вида могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} T(h-0, \tau) = T(h+0, \tau); \\ \lambda_1 \frac{\partial T(h-0, \tau)}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T(h+0, \tau)}{\partial x} = p(\tau). \end{cases}$$

С учетом изложенного выше легко получают записи постановок прямых краевых задач теплопроводности, лежащих в основе рассматриваемых в данной монографии методов и приборов для измерения теплофизических свойств веществ.

Ниже приведены несколько примеров постановок краевых задач теплопроводности для различных случаев геометрии рассматриваемых образцов, а также вариантов задания начальных и граничных условий.

Пример 1. Постановка задачи о расчете температурного поля плоской пластины толщиной H , на поверхности $x = 0$ которой заданы граничные условия первого рода, а на поверхности $x = H$ – граничные условия второго рода при постоянных начальных условиях может быть записана в виде:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (1.21a)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < x < H; \quad (1.21b)$$

$$T(x, 0) = T_H = \text{const}; \quad (1.21c)$$

$$T(0, \tau) = \varphi(\tau); \quad (1.21d)$$

$$\lambda \frac{\partial T(H, \tau)}{\partial x} = q(\tau). \quad (1.21e)$$

Пример 2. Постановка задачи о расчете температурного поля плоской пластины толщиной H , на поверхности $x = 0$ которой заданы граничные условия второго рода, а на поверхности $x = H$ – граничные условия третьего рода, с постоянными начальными условиями записывается в виде:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (1.22a)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < x < H; \quad (1.22b)$$

$$T(x, 0) = T_H = \text{const}; \quad (1.22c)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = q_1(\tau); \quad (1.22d)$$

$$\lambda \frac{\partial T(H, \tau)}{\partial x} = \alpha [\psi_2(\tau) - T(H, \tau)]. \quad (1.22e)$$

Пример 3. Постановка задачи о расчете температурного поля неограниченного сплошного цилиндра радиуса R с постоянной первоначальной температурой $T_H = 0$ °С, помещенного в момент времени $\tau = 0$ в активно перемешиваемую жидкость с температурой $T_K = 50$ °С, может быть представлена так:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right]; \quad (1.23a)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < r < R; \quad (1.23b)$$

$$T(r, 0) = T_{\text{н}} = 0 \text{ } ^\circ\text{C}; \quad (1.23c)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (1.23d)$$

$$T(R, \tau) = T_{\text{к}} = 50 \text{ } ^\circ\text{C}. \quad (1.23e)$$

Пример 4. Постановка задачи о расчете температурного поля шара с первоначальной температурой $T(r, 0) = T_{\text{н}} = \text{const}$, который в момент времени $\tau = 0$ помещен в активно перемешиваемую жидкость с температурой $T_{\text{к}} = \text{const}$, имеет вид:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right]; \quad (1.24a)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < r < R; \quad (1.24b)$$

$$T(r, 0) = T_{\text{н}} = \text{const}; \quad (1.24c)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (1.24d)$$

$$T(R, \tau) = T_{\text{к}} = \text{const}. \quad (1.24e)$$

Пример 5. Для случая, аналогичного рассмотренному в предыдущем примере, однако отличающегося тем, что шар в момент времени $\tau = 0$ помещен в газовую среду, теплообмен с которой происходит по закону Ньютона, постановка краевой задачи теплопроводности примет вид:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right]; \quad (1.25a)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < r < R; \quad (1.25b)$$

$$T(r, 0) = T_{\text{н}} = \text{const}; \quad (1.25c)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (1.25d)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial r} = \alpha [T^c(\tau) - T(R, \tau)]. \quad (1.25e)$$

Пример 6. Для двухслойного неограниченного цилиндра ($0 < r < R_1$ и $R_1 < r < R_2$) из материала с постоянными теплофизическими свойствами $\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2$ при $r = R_1$ заданы граничные условия четвертого рода специального вида ($p(\tau) = p = \text{const}$), при $r = 0$ задан тепловой поток $q = 0$, при $r = R_2$ известен закон теплообмена по закону Ньютона с греющей средой $T^c(\tau)$, а начальное условие имеет вид $T_H(r) = 0$.

В этом случае запись постановки задачи о расчете температурного поля $T(r, \tau)$ принимает вид:

$$\frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T_1(r, \tau)}{\partial r} \right]; \quad (1.26a)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < r < R_1; \quad (1.26b)$$

$$\frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial \tau} = a_2 \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T_2(r, \tau)}{\partial r} \right]; \quad (1.26c)$$

$$\tau > 0, \quad R_1 < r < R_2; \quad (1.26d)$$

$$T_1(r, 0) = 0, \quad T_2(r, 0) = 0; \quad (1.26e)$$

$$\frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (1.26f)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_1(R_1, \tau) = T_2(R_1, \tau); \end{array} \right. \quad (1.26g)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \frac{\partial T_1(R_1, \tau)}{\partial r} - \lambda_2 \frac{\partial T_2(R_1, \tau)}{\partial r} = p = \text{const}; \end{array} \right. \quad (1.26h)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial T_2(R_2, \tau)}{\partial r} = \alpha [T^c(\tau) - T_2(R_2, \tau)]. \quad (1.26i)$$

1.6 ОСНОВНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

1.6.1 ПРЯМАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Простейшую аналитическую запись, при прочих равных условиях, имеет одномерное температурное поле в образцах простой формы в

виде:

- пластины $\gamma = 0$;
- цилиндра $\gamma = 1$;
- шара $\gamma = 2$.

Рассмотренные выше постановки краевых задач для:

- неограниченной пластины (1.21a) и (1.21e); (1.22a) и (1.22e);
- неограниченного цилиндра в виде (1.23a) – (1.23e);
- шаров в виде (1.24a) – (1.24e); (1.25a) – (1.25e);
- двухслойной неограниченной пластины в виде (1.26a) – (1.26i),

представляют собой примеры записи прямых краевых задач теплопроводности.

Прямые краевые задачи теплопроводности по известным (заданным):

- виду уравнения теплопроводности (1.21a);
- геометрии образца ($\gamma = 0$) и его размерам (1.21b);
- теплофизическим свойствам (a, λ);
- начальным условиям (1.21c);
- граничным условиям (1.21d), (1.21e),

позволяют найти (рассчитать) температурное поле $T(x, \tau)$, которое будет иметь место в рассматриваемом теле (в любой точке $0 < x < H$ и в любой момент времени $\tau > 0$).

1.6.2 ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

Пусть известна геометрия образца ($\gamma = 0, 0 < x < H$), его теплофизические свойства ($a, \lambda = \text{const}$), вид дифференциального уравнения теплопроводности, начальное условие $T_n(x) = T_0 = \text{const}$, вид граничных условий, например,

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad T(H, \tau) = U(\tau),$$

где $U(\tau)$ – управляющее воздействие, которое следует выбрать таким [4], чтобы, например, за минимальное возможное время $\tau_k = \min$ нагреть образец до конечной температуры $T_k = \text{const}$.

Тогда обратная краевая задача может быть записана в виде:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (1.27a)$$

$$\tau > 0, 0 < x < H; \quad (1.27b)$$

$$T(x, 0) = T_H = \text{const}; \quad (1.27c)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (1.27d)$$

$$T(H, \tau) = U(\tau) \quad (1.27e)$$

с дополнительными условиями

$$|T(x, \tau_k) - T_k| < \varepsilon, \quad (1.27f)$$

$$\int_0^{\tau_k} d\tau = \min. \quad (1.27g)$$

Если (1.27c) представляет собой так называемое начальное условие, то выражение (1.27f) можно рассматривать как некоторое «конечное условие», задающее желаемое распределение температуры $T(x, \tau_k) = T_k = \text{const}$ в образце, которое должно быть получено в процессе нагрева, с погрешностью, не превышающей заданной малой величины $\varepsilon > 0$.

Выражение (1.27g) представляет собой функционал, который обычно используют в теории автоматического управления при постановке задач максимального быстродействия [4, 5].

Таким образом, обратная краевая задача теплопроводности (1.27a) – (1.27g) требует найти такую программу изменения управляющего воздействия $U(\tau)$, при котором образец, имевший температуру $T(x, 0) = T_H = \text{const}$ в начальный момент времени $\tau = 0$, за минимальное возможное время τ_k будет нагрет до температуры $T(x, \tau_k) = T_k = \text{const}$ с погрешностью, не превышающей заданной малой величины ε .

1.6.3 ОБРАТНАЯ (ИНВЕРСНАЯ) КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО КОЭФФИЦИЕНТОВ (ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ)

Пусть известны:

- дифференциальное уравнение теплопроводности (1.27a);
- геометрия образца ($\Gamma = 0$) и его размеры $0 < x < H$ (1.27b);
- начальное условие (1.27c);
- граничное условие (1.27d) слева;

– граничное условие $T(H, \tau) = 0$ справа, причем в ходе эксперимента определена функция $T(H/2, \tau) = f_3(\tau)$, а требуется найти значение коэффициента теплопроводности a , при котором расчетные значения $T(H/2, \tau)$ и экспериментально измеренная функция $f_3(\tau)$ будут мало отличаться друг от друга.

Тогда обратная краевая задача теплопроводности (относительно неизвестного коэффициента теплопроводности $a = ?$) может быть представлена в виде:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}; \quad (1.28a)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < x < H; \quad (1.28b)$$

$$T(x, 0) = T_H = \text{const}; \quad (1.28c)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (1.28d)$$

$$T(H, \tau) = 0 \quad (1.28e)$$

с дополнительным условием

$$T(H/2, \tau) = f_3(\tau). \quad (1.28f)$$

Требуется найти такое значение коэффициента a , которое минимизирует функционал

$$\int_0^{\tau_k} [T(H/2, \tau) - f_3(\tau)] d\tau = \min. \quad (1.28g)$$

Отметим, что обратные краевые задачи теплопроводности относительно коэффициентов (теплофизических свойств) в монографии [5] было предложено называть инверсными краевыми задачами теплопроводности.

Рассмотренные в этой главе основы феноменологической теории теплопроводности представляют собой теоретическую базу обсуждаемых в данной монографии методов и приборов для измерения теплофизических свойств веществ.

2 ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ И ПРИБОРАХ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ

2.1 ОРГАНИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ

Современные теплофизические методы и приборы основаны на том, что искомое теплофизическое свойство проявляется через температурный отклик исследуемого образца на внешнее тепловое воздействие, которому этот образец подвергается в ходе специально организованного эксперимента.

Обобщенная схема установки для измерения теплофизических свойств веществ представлена на рис. 2.1.

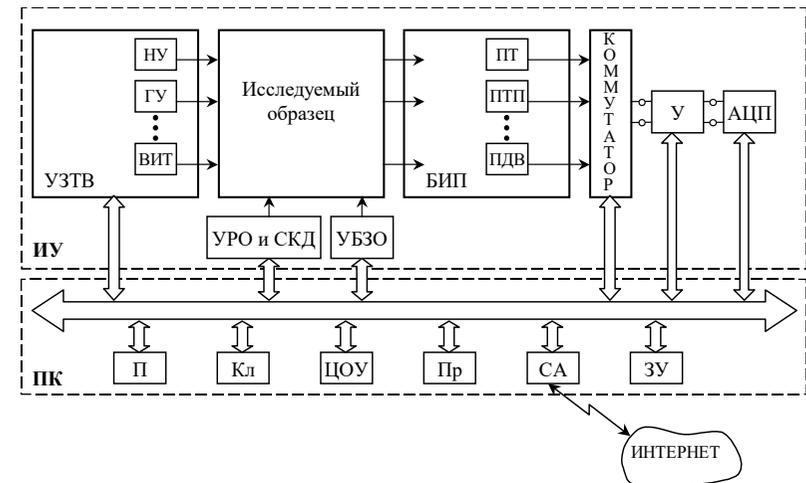


Рис. 2.1 Структурная схема компьютерного устройства для измерения теплофизических свойств веществ:

ИУ – измерительное устройство; УЗТВ – устройство задания тепловых воздействий на образец, обеспечивающее управление начальными условиями (ИУ), граничными условиями (ГУ) и внутренними источниками тепла (ВИТ); БИП – блок измерительных преобразователей, включающий в себя преобразователи температуры (ПТ), преобразователи теплового потока (ПТП), преобразователи других величин (ПДВ); У – усилитель; АЦП – аналого-цифровой преобразователь;

УРО и СКД – устройство для размещения образца и создания контактного давления; УБЗО – устройство боковой защиты образца от теплообмена с окружающей средой; ПК – персональный компьютер, включающий в себя:

П – процессор; Кл – клавиатуру; ЦОУ – цифровое отсчетное устройство; Пр – принтер; СА – системный адаптер; ЗУ – запоминающее устройство

Устройство задания тепловых воздействий (УЗТВ) позволяет при подготовке к эксперименту создать в образце необходимые начальные условия (НУ) за счет управления граничными условиями (ГУ) и внутренними источниками тепла (ВИТ), а затем в ходе эксперимента изменять значения ГУ и ВИТ по закону, заданному программным обеспечением персонального компьютера (ПК). Устройство УРО и СКД служит для размещения образца и для создания контактного давления на внешних поверхностях образца, что позволяет снизить контактные тепловые сопротивления на граничных поверхностях образца.

Блок измерительных преобразователей (БИП) включает в себя преобразователи температуры (ПТ), преобразователи теплового потока (ППП), преобразователи других величин (ПДВ), например, устройства для измерения электрической мощности, тока, напряжения и т.п. Коммутатор обеспечивает возможность подключения выходного сигнала любого из измерительных преобразователей ко входу усилителя У, коэффициент передачи которого задается персональным компьютером ПК. Выходной сигнал усилителя преобразуется аналого-цифровым преобразователем (АЦП) в цифровой сигнал, воспринимаемый персональным компьютером ПК. Устройство боковой защиты образца (УБЗО) позволяет создать необходимые тепловые условия на боковых поверхностях исследуемого образца, например, адиабатические условия, позволяющие исключить теплообмен боковых поверхностей образца с окружающей средой.

Персональный компьютер (ПК) обеспечивает управление ходом эксперимента как во время его подготовки, так и во время активной стадии проведения эксперимента. Системный адаптер (СА) позволяет проводить теплофизический эксперимент в режиме удаленного доступа через Интернет.

2.2 КЛАССИФИКАЦИЯ МЕТОДОВ И ПРИБОРОВ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ

Методы и приборы, предназначенные для измерения теплофизических свойств веществ, могут быть классифицированы по различным признакам.

I *По измеряемому теплофизическому свойству* различают теплофизические методы и приборы:

- 1) *для измерения одной теплофизической величины*, например:
 - удельной теплоемкости c [Дж/(кг · К)];
 - объемной теплоемкости c_p [Дж/(м³ · К)];
 - теплопроводности λ [Вт/(м · К)];

- температуропроводности a [$\text{м}^2/\text{с}$];
- динамической вязкости μ [$\text{Па} \cdot \text{с}$];
- коэффициента диффузии a_m [$\text{м}^2/\text{с}$] и т.п.;

2) для одновременного измерения комплекса теплофизических величин, например:

- объемной теплоемкости c_p , теплопроводности λ и температуропроводности $a = \lambda/c_p$;
- теплопроводности λ и вязкости μ ;
- температуропроводности a и коэффициента диффузии a_m и т.п.

II В зависимости от требований к форме и размерам образцов различают теплофизические методы и приборы:

1) *работающие с одномерными образцами* простой формы, например, в виде:

- неограниченной пластины;
- неограниченного цилиндра;
- шарового слоя;

2) *работающие с двумерными образцами* простой формы, например, в виде:

- неограниченного бруса;
- полупространства;
- цилиндра ограниченной длины и т.п.;

3) *работающие с трехмерными образцами*, например, в виде:

- параллелепипеда;
- цилиндра ограниченной длины, обогреваемого неравномерно распределенным внешним тепловым потоком и т.п.

Примечание. Простейший вид имеют решения одномерных краевых задач теплопроводности. Двухмерность и трехмерность температурных полей обычно не обеспечивает улучшения эксплуатационных показателей метода (устройства), однако, при этом значительно ухудшаются метрологические характеристики этого метода (устройства). Поэтому при разработке теплофизических методов и приборов стараются согласовать пространственное расположение источника теплового воздействия с геометрией образца таким образом, чтобы этот образец можно было считать одномерным (плоским, цилиндрическим, сферическим) в ходе активной стадии эксперимента.

III В зависимости от характера изменения во времени температур и тепловых потоков в исследуемом образце в ходе рабочей стадии измерительного эксперимента различают:

1) *стационарные методы и приборы*, предназначенные для измерения теплофизических свойств веществ после завершения всех тепловых переходных процессов в исследуемом образце, т.е. в

условиях, когда $T = \text{const}$, $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$ и $q = \text{const}$, $\frac{\partial q}{\partial \tau} = 0$;

2) *нестационарные методы и приборы*, предназначенные для измерения теплофизических свойств веществ в ходе теплового переходного процесса, когда $T \neq \text{const}$, $\frac{\partial T}{\partial \tau} \neq 0$ и/или $q \neq \text{const}$, $\frac{\partial q}{\partial \tau} \neq 0$.

Принимая во внимание, что тепловой переходной процесс в исследуемом образце принято делить на три стадии (см. рис. 2.2), различают нестационарные теплофизические методы и приборы основанные на закономерностях:

– *начальной стадии теплового переходного процесса;*

Примечание. Такие методы и приборы иногда неправильно называют экспресс-методами и/или приборами для экспрессного измерения теплофизических свойств на том основании, что длительность их активной части эксперимента (определяемая длительностью начальной стадии теплового переходного процесса) обычно бывает в пределах от десятков секунд до одной или нескольких минут. Однако, при обычно используемых исследуемых образцах толщиной в 40...100 мм такие методы и приборы требуют затрат времени порядка 30...100 мин для получения необходимого начального распределения температуры в толще образца. Поэтому полная длительность экспериментального измерения теплофизических свойств веществ с применением методов и приборов, основанных на закономерностях начальной стадии теплового переходного процесса, оказывается соизмеримой с длительностью эксперимента, основанного на закономерностях стационарной стадии теплового процесса. По этой причине *использование терминов «экспресс-метод» или «экспресс-прибор» применительно к таким методам и/или приборам следует считать неправомерным.*

– *регулярной стадии теплового переходного процесса* (это так называемые методы и приборы регулярных режимов первого, второго и третьего рода);

– *начальной и регулярной стадий теплового переходного процесса;*

– *регулярной и квазистационарной стадий теплового переходного процесса;*

– *всех трех стадий* (начальной, регулярной и квазистационарной) теплового переходного процесса (например, методы и приборы, основанные на использовании временных и/или пространственно-временных интегральных характеристик температур и тепловых потоков, разрабатываемые на кафедре

«Автоматизированные системы и приборы» в Тамбовском государственном техническом университете);

3) *комбинированные методы и приборы*, основанные на закономерностях как нестационарного, так и стационарного тепловых процессов в исследуемых образцах.

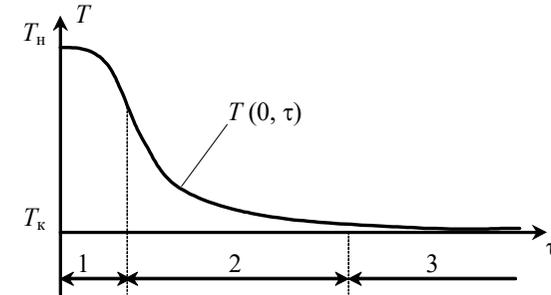


Рис. 2.2 Характерные стадии теплового процесса изменения температуры $T(0, \tau)$ на оси цилиндра при скачкообразном изменении температуры на его внешней поверхности $T(R, \tau)$ от начального значения $T_n > T_k$ до конечного значения T_k :

- 1 – начальная стадия процесса для которой характерно сильное влияние начальных условий на измеряемую температуру;
- 2 – нестационарная регулярная стадия переходного процесса, на которой начальное распределение температуры $T(r, 0)$ почти не влияет на измеряемую температуру $T(0, \tau)$;
- 3 – заключительная квазистационарная стадия

IV По характеру изменения во времени внешнего теплового воздействия на исследуемый образец различают следующие виды нестационарных методов и приборов для измерения теплофизических свойств:

- 1) *со ступенчатым изменением* температуры (теплого потока) во времени (рис. 2.3, а, б);
- 2) *с импульсным изменением* температуры (теплого потока) на поверхности образца во времени (см. рис. 2.3, в, г);
- 3) *с линейным изменением* температуры поверхности образца во времени (см. рис. 2.3, д);
- 4) *с периодическим* (гармоническим или импульсным) изменением температуры поверхности образца (см. рис. 2.3, е, ж);
- 5) *с тепловым воздействием* на исследуемый образец за счет изменения объемной плотности W [Вт/м³] внутренних источников

тепла, действующих внутри образца, например, за счет пропускания электрического тока:

- через электропроводный образец;
- через электронагреватель, рассматриваемый в качестве одного из слоев многослойного образца и т.п.

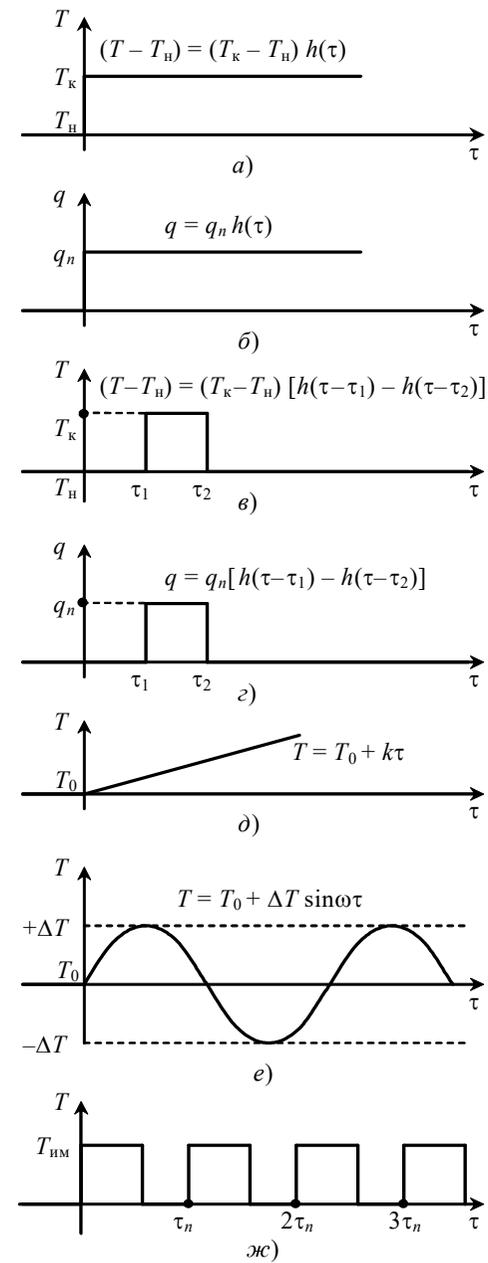


Рис. 2.3 Характер изменения тепловых воздействий на внешние поверхности исследуемых образцов

V **В зависимости от вида исследуемого вещества** различают методы и приборы, предназначенные для измерения теплофизических свойств:

- 1) газов;
- 2) жидкостей и растворов;
- 3) эмульсий (суспензий);
- 4) пастообразных материалов;
- 5) насыпного слоя сыпучих (дисперсных) материалов;
- 6) твердых материалов.

VI **В зависимости от того, находится ли исследуемый газ или жидкость в неподвижном («квazitвердом») состоянии в процессе измерения его свойств или ламинарно течет через измерительное устройство**, различают:

1) *традиционные методы и приборы теплофизических измерений*, предполагающие, что газ или жидкость находятся в «квazitвердом» состоянии в ходе процесса измерения их свойств (в таких методах и приборах предпринимаются специальные меры, направленные на предотвращение какой-либо естественной или вынужденной конвекции внутри исследуемого образца газа или жидкости);

2) *методы ламинарного режима*, основанные на закономерностях переноса тепла в ламинарных потоках жидкостей; достоинствами методов ламинарного режима являются:

– возможность непрерывного измерения теплофизических свойств технологических жидкостей в процессе течения через измерительное устройство, например, в ходе инженерного эксперимента или в ходе реального технологического процесса);

– возможность экспериментального исследования зависимости теплопроводности жидкостей от скорости сдвига.

VII **В зависимости от возможности проконтролировать теплофизические свойства материалов и изделий без разрушения их целостности** различают методы и приборы:

1) *обычные (разрушающие)* – позволяющие измерять и контролировать теплофизические свойства материалов и изделий только после изготовления из них образцов заданной формы и размеров;

2) *неразрушающие* – для измерения и контроля теплофизических свойств материалов и изделий без нарушения их целостности.

Примечание. Неразрушающие теплофизические методы и приборы обычно рассматривают образцы материала (или изделия) в виде

неограниченного полупространства и базируются на использовании двумерных краевых задач теплопроводности.

3 ОСНОВЫ КАЛОРИМЕТРИИ

Калориметрия является одним из разделов технической теплофизики, в котором изучают [3, 6, 7] методы и средства измерения физических величин, характеризующих тепловые эффекты химических, физических и биологических процессов, а также тепловые свойства веществ (например, удельная теплоемкость, объемная теплоемкость и некоторые другие).

Результаты калориметрических измерений используются:

- в научных исследованиях;
- при проектировании технологических процессов и аппаратов, промышленных и гражданских сооружений;
- при контроле и испытании качества продукции (переработанных материалов).

В данной главе рассматриваются основы калориметрических измерений.

Теоретические основы калориметрии основаны на уравнениях теплового баланса, например, в виде

$$Q = Q_a + Q_o + Q_{\text{пот}},$$

где Q – общее количество тепла, выделившееся в системе; Q_a – количество тепла, аккумулированное материалом ампулы; Q_o – количество тепла, аккумулированное образцом; $Q_{\text{пот}}$ – потери тепла в окружающую среду, и на известном соотношении

$$Q = Cm (T_k - T_n),$$

согласно которому, при нагреве тела от начальной температуры T_n до конечной температуры T_k , это тело аккумулирует количество тепла Q , где C – удельная теплоемкость; m – масса тела.

3.1 АДИАБАТИЧЕСКАЯ КАЛОРИМЕТРИЯ

Наиболее точные измерения теплоемкости веществ обычно проводят [3] в адиабатическом калориметре (см. рис. 3.1).

Образец 1 из исследуемого материала (жидкость или твердое тело) с известной массой m и удельной теплоемкостью C_x , подлежащей измерению, помещают в ампулу-стакан 2 с известной удельной теплоемкостью C_a и массой m_a . Нагреватель 3 может быть размещен в стенке ампулы 2 (если образец 1 представляет собой твердое тело) или непосредственно в исследуемом материале, если это жидкость. Ваттметр 4 позволяет измерять электрическую мощность $W(\tau)$, потребляемую нагревателем 3, и вычислять суммарное количество

тепла

$$Q = \int_{\tau_0}^{\tau_1} W(\tau) d\tau, \quad (3.1)$$

подведенное к двухсоставному ядру, образованному образцом *1* и ампулой *2*. Термопара *5* и вторичный прибор *6* позволяют измерять температуру двухсоставного ядра. На рис. 3.1 показано, что термопара *5* может быть установлена непосредственно в исследуемом материале (если это жидкость или сыпучее вещество), однако, при измерении теплоемкости твердых материалов термопару *5* часто устанавливают в стенке ампулы *2*.

Внешнюю оболочку *7* обычно выполняют из металла, что позволяет создать изотермические условия вокруг двухсоставного центрального ядра. Адиабатическая система, включающая в себя дифференциально включенные термопары *8*, *9*, автоматический регулятор *10* и охранный нагреватель *11*, обеспечивает почти полное устранение утечек тепла от двухсоставного ядра (включающего в себя исследуемый материал *1* и ампулу-стакан *2* с крышкой) за счет поддержания нулевой разности температур между внешней металлической оболочкой *7* и ампулой *2*.

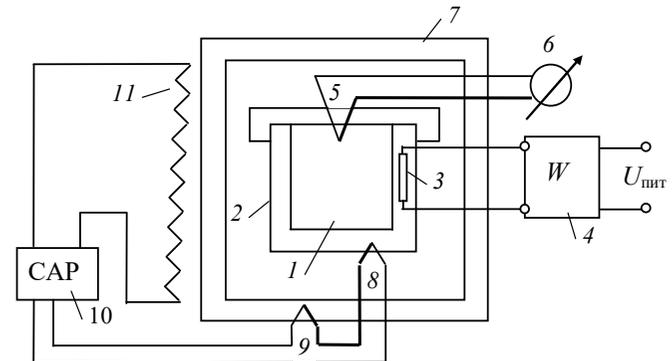


Рис. 3.1 Модель адиабатического калориметра с двухсоставным ядром:

1 – исследуемый образец с неизвестной удельной теплоемкостью C_x и известной массой m ; *2* – ампула (стакан с крышкой); *3* – нагреватель; *4* – прибор для измерения электрической мощности (ваттметр); *5*, *8*, *9* – термопары; *6* – прибор для измерения температуры; *7* – внешняя металлическая оболочка; *10* – автоматический регулятор, поддерживающий нулевую разность температур (измеряемую дифференциально включенными термопарами *8* и *9*) между ампулой *2* и внешней металлической оболочкой *7*;

11 – охранный нагреватель адиабатической системы

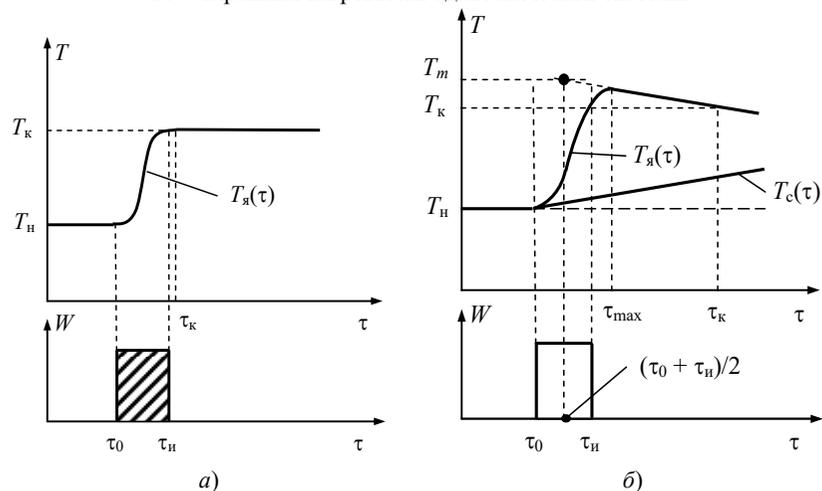


Рис. 3.2 Кривые изменения температуры $T_{я}(\tau)$ двухсоставного центрального ядра при подводе к нему импульса теплоты [3]:

a – без учета потерь тепла в окружающую среду;

б – с учетом потерь тепла в окружающую среду

Если принять меры к тому, чтобы в ходе эксперимента обеспечивался идеальный тепловой контакт между исследуемым образцом 1 и ампулой 2, то температуры образца 1 и ампулы 2 можно считать одинаковыми. При выполнении этого условия температура ампулы 2 с образцом 1 при подводе к ним импульса тепла (3.1) изменяется так, как это показано на рис. 3.2.

При полном отсутствии потерь тепла в окружающую среду уравнение теплового баланса для центрального двухсоставного ядра может быть записано в виде

$$\int_{\tau_0}^{\tau_H} W(\tau) d\tau = Q = C_x m (T_K - T_H) + C_a m_a (T_K - T_H), \quad (3.2)$$

где Q – полное количество тепла, подведенное к нагревателю 3; C_x, m – удельная теплоемкость и масса образца 1; C_a, m_a – удельная теплоемкость и масса ампулы 2 с встроенным нагревателем и с крышкой; T_H, T_K – температуры, зарегистрированные термодатчиком 5 в начале и в конце опыта.

Принимая во внимание, что полную теплоемкость ампулы 2 (вместе с нагревателем 3 и крышкой) находят на практике в

предварительных экспериментах и обозначают

$$C_A = C_a m_a,$$

уравнение теплового баланса обычно записывают в виде

$$Q = C_x m (T_k - T_n) + C_A (T_k - T_n). \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.3) легко получается

$$Q = (T_k - T_n) [C_x m + C_A],$$

$$C_x m + C_A = \frac{Q}{T_k - T_n},$$

откуда следует основная расчетная формула адиабатического калориметра

$$C_x = \frac{1}{m} \left[\frac{Q}{T_k - T_n} - C_A \right]. \quad (3.4)$$

В большинстве случаев на практике не удается полностью устранить утечки тепла от центрального двухсоставного ядра в окружающую среду. Тогда уравнение теплового баланса принимает вид [3]:

$$Q = C_x m (T_k - T_n) + C_A (T_k - T_n) + \int_{\tau_0}^{\tau_k} K [T_y(\tau) - T_c(\tau)] d\tau,$$

где K – коэффициент эффективной тепловой проводимости в окружающую среду; T_n – начальная температура центрального ядра; $T_y(\tau)$ – изменение температуры центрального ядра (ампулы) во времени; T_c – температура окружающей среды. Третье слагаемое

$Q_{\text{пот}} = \int_{\tau_0}^{\tau_k} [T_y(\tau) - T_c(\tau)] d\tau$ в последней формуле представляет собой

потери тепла в окружающую среду.

Примерный вид функции, описывающий закономерности изменения температуры $T_y(\tau)$ центрального ядра при наличии утечек тепла, представлен на рис. 3.2, б. Если импульс имеет прямоугольную форму ($W = \text{const}$ при $\tau_0 < \tau < \tau_n$), то при $K = \text{const}$, $T_c = \text{const}$ уравнение теплового баланса можно представить в виде

$$Q = C_x m (T_m - T_n) + C_A (T_m - T_n),$$

где T_m – условное значение температуры центрального ядра в момент времени

$$\tau = (\tau_0 + \tau_n) / 2,$$

определяемое в результате графической обработки экспериментальных данных, как это показано на рис. 3.2, б.

При этом расчетная зависимость (3.4) приобретает вид

$$C_x = \frac{1}{m} \left[\frac{Q}{T_m - T_n} - C_A \right]. \quad (3.4a)$$

Рассмотренный прием обработки удобен тем, что не требуется специальных вспомогательных опытов по измерению коэффициента K эффективной тепловой проводимости между центральным ядром и окружающей средой.

Эффективную теплоемкость C_A ампулы-стакана 2 с встроенным в него нагревателем 3 целесообразно определять экспериментально в опытах без образца.

В заключение отметим, что адиабатические калориметры имеют достаточно несложную конструкцию, позволяют измерить теплоемкость с маленькими погрешностями, что позволяет применять их при прецизионных научных исследованиях.

3.2 ОСНОВЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОЕМКОСТИ МЕТОДОМ МОНОТОННОГО НАГРЕВА

Метод монотонного нагрева реализован в измерителе теплоемкости ИТ-с-400, предназначенном для исследования температурной зависимости теплоемкости твердых тел, сыпучих, волокнистых материалов, жидкостей с плотностью не менее 800 кг/м^3 .

Тепловая схема С-калориметра типа ИТ-С-400 представлена на рис. 3.3.

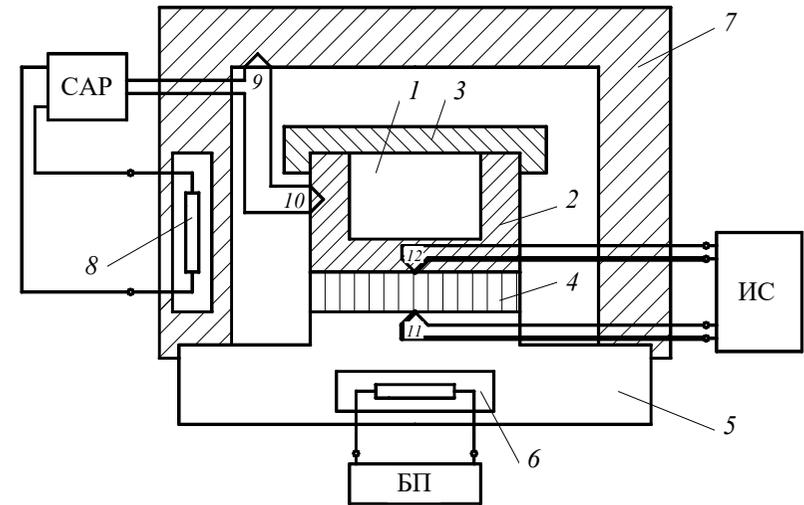


Рис. 3.3 Схема динамического С-калориметра типа ИТ-С-400

В процессе подготовки к работе образец *1* помещают в ампулу, выполненную в виде стакана *2* с крышкой *3*. Стакан размещают на тепломере *4*, закрепленном на основании *5* с встроенным нагревателем *6*. Тепловая связь образца *1*, находящегося в стакане *2* с крышкой *3*, с внешней средой допускается только через тепломер *4*. Поэтому внешние поверхности стакана *3* отделены от окружающей среды адиабатической оболочкой, выполненной в виде колпака *7* со встроенным в него нагревателем *8*. Система автоматического регулирования САР поддерживает нулевую разность между температурой колпака *7* (измеряемой термопарой *9*) и температурой стакана *2* (измеряемой термопарой *10*) путем изменения электрической мощности, подводимой к нагревателю *8*, равномерно распределенному по боковой поверхности колпака *7*. Монотонный нагрев образца *1* и ампулы осуществляется за счет подвода электрической мощности к нагревателю *6*, встроенному в основание *5*.

3.2.1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА ИЗМЕРЕНИЯ

Количество тепла, проходящее в единицу времени через сечение тепломера *4* (рис. 3.3), расходуется как на разогрев образца *1*, так и на разогрев ампулы в виде стакана *2* с крышкой *3*

$$P_{\tau} = P_0 + P_a, \quad (3.5)$$

где P_0 – мощность (количество тепла в единицу времени), идущая на разогрев образца; P_a – мощность (количество тепла в единицу времени), идущая на разогрев ампулы; P_T – полная мощность (количество тепла в единицу времени), проходящая через тепломер 4.

Величины P_0 , P_a могут быть рассчитаны по формулам

$$P_0 = cm_0b ;$$

$$P_a = c_a m_a b = C_A b ,$$

где c, c_a – удельная теплоемкость образца и ампулы [Дж/(кг·К)];

m_0, m_a – массы образца и ампулы [кг]; $b = \frac{dT}{d\tau}$ – скорость разогрева

[К/с]; $C_A = c_a m_a$ – полная теплоемкость ампулы [Дж/К].

Полная теплоемкость $C_A = C_A(T)$ является постоянной характеристикой ампулы, выполненной в виде стакана с крышкой, и зависит только от температуры T .

О величине тепловой мощности P_T , проходящей через тепломер 4, можно судить по величине перепада температуры Θ на тепломере 4 и по коэффициенту K_T тепловой проводимости тепломера, определенных в ходе независимых градуировочных экспериментов

$$P_T = K_T \Theta .$$

Параметр $K_T = K_T(T)$ является постоянной характеристикой тепломера и зависит только от температуры T . С учетом изложенного выше, уравнение теплового баланса (3.5) для ампулы с размещенным в ней образцом можно записать в виде

$$K_T \Theta = cm_0b + C_A b ,$$

откуда получается расчетная формула

$$c = \frac{1}{m_0} \left[\frac{K_T \Theta}{b} - C_A \right]. \quad (3.6)$$

На рис. 3.4 показаны графики, иллюстрирующие изменение температур, измеряемых термопарами 11 и 12 (см. рис. 3.3). Отметим, что термопара 11 измеряет температуру $T_n(\tau)$ нижней части тепломера 4, а термопара 12 измеряет температуру $T_a(\tau)$ ампулы, опирающейся на верхнюю часть тепломера 4 (см. рис. 3.3).

Из рис. 3.4 видно, что перепад $\Theta(\tau)$ температуры на тепломере представляет собой разность между температурами $T_n(\tau)$ и $T_a(\tau)$, т.е.

$$\Theta(\tau) = T_n(\tau) - T_a(\tau).$$

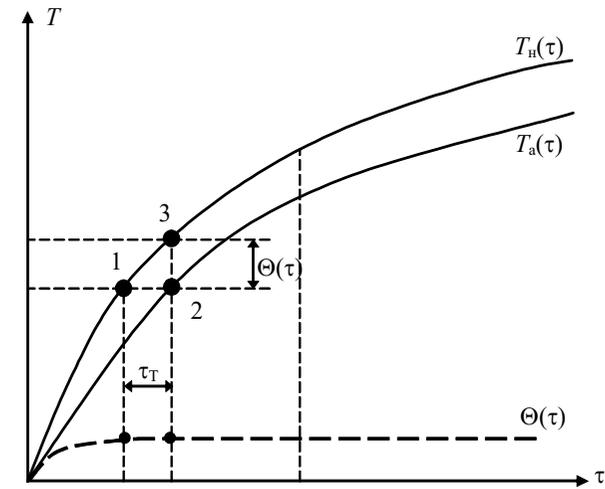


Рис. 3.4 Характер изменения температур $T_n(\tau)$ и $T_a(\tau)$ во времени
Если рассмотреть треугольник 1-2-3 на рис. 3.4, то легко получить соотношение

$$\frac{dT}{d\tau} = b \approx \frac{\Theta}{\tau_T} \quad \text{или} \quad \Theta \approx b \tau_T,$$

где τ_T – время запаздывания температуры на тепломере. Подставив последнее выражение в формулу (3.6), получим расчетную зависимость

$$c = \frac{1}{m_0} [K_T \tau_T - C_A]. \quad (3.7)$$

Если в формуле (3.7) вынести K_T за скобку, то получим

$$c = \frac{K_T}{m_0} \left[\tau_T - \frac{C_A}{K_T} \right].$$

Если обозначить $C_A / K_T = \tau_T^n$ и принять во внимание, что величина τ_T^n представляет собой время запаздывания на тепломере, которое можно определить опытным путем в экспериментах с пустой ампулой, то получим формулу

$$c = \frac{K_T(T)}{m_0} [\tau_T - \tau_T^n(T)], \quad (3.8)$$

наиболее часто используемую на практике при обработке экспериментальных данных с применением динамического калориметра типа ИТ-С-400. Постоянные характеристики $K_T(T)$, $\tau_T^n(T)$ обычно приводятся в эксплуатационной документации измерителей теплоемкости ИТ-С-400.

3.2.2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Испытуемый образец 1 (рис. 3.3) помещают в ампулу в виде стакана 2, который закрывается крышкой 3. Колпак 7 адиабатической оболочки опускают на основание 5. Измерительное устройство охлаждают до необходимого нижнего уровня температуры путем пропускания жидкого азота через отверстия в колпаке 7 (эти отверстия в колпаке 7 на рис. 3.3 не показаны). Достижение необходимой начальной температуры контролируют по показаниям термодатчиков 11 и 12.

В момент начала активной стадии эксперимента подают напряжение с блока питания БП на нагреватель 6. Ядро измерительной ячейки начинает плавно (монотонно) разогреваться вплоть до достижения верхней (предельной для каждого образца) температуры.

При подготовке к эксперименту и во время активной стадии эксперимента система автоматического регулирования поддерживает (изменяя электрическую мощность, потребляемую нагревателем 8) нулевую разность температур (контролируемую дифференциально включенными термопарами 9 и 10) между колпаком 7 и стаканом 2 с исследуемым образцом 1.

В ходе эксперимента, в процессе непрерывного монотонного разогрева, на различных уровнях температуры с шагом в 25 °С измерительная схема ИС измеряет время запаздывания τ , температуры ампулы $T_a(\tau)$ по отношению к температуре $T_n(\tau)$ основания 5. Искомую теплоемкость c вычисляют по формуле (3.8) с учетом известных зависимостей от температуры «постоянных» характеристик $K_T(T)$, $\tau_T^n(T)$ прибора.

Блок питания обеспечивает нагрев ядра измерительной ячейки с заданной скоростью $b = \frac{dT}{d\tau} \approx 0,1 \text{ K/c}$, а система автоматического регулирования САР обеспечивает поддержание с высокой точностью нулевой разности между температурой колпака 7 и температурой

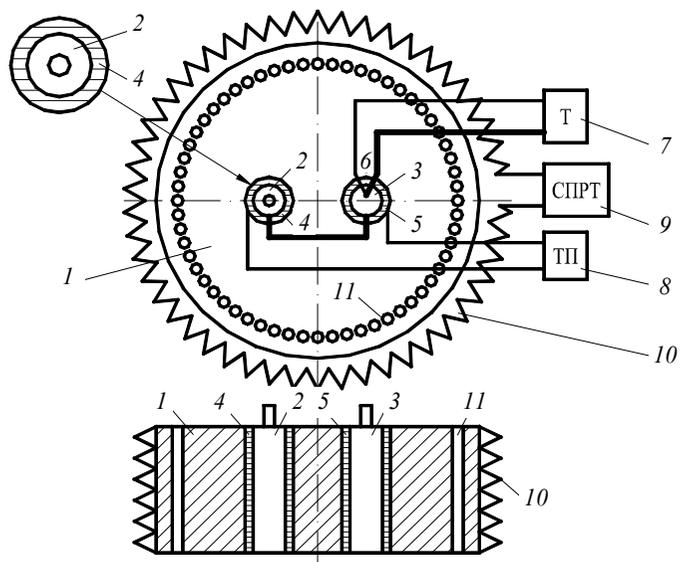
стакана 2, достаточной для того, чтобы утечками тепла в окружающую среду можно было пренебречь.

3.3 ОСНОВЫ МИКРОКАЛОРИМЕТРИИ

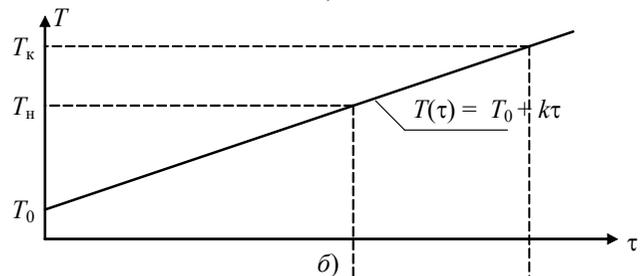
Микрокалориметры предназначены для изучения процессов, сопровождающихся малыми тепловыми эффектами и характеризующихся малой тепловой мощностью.

В последние годы стали достаточно широко использоваться микрокалориметры типа Кальве [7]. Эти калориметры, принцип действия которых основан на регистрации тепловых потоков двумя дифференциально включенными датчиками тепловых потоков (на основе термобатарей), обладают высокой чувствительностью (по температуре до 10^{-3} К, по тепловым эффектам – до 10^{-4} Дж/с), что позволяет исследовать процессы длительностью до нескольких часов при общем тепловом эффекте в несколько джоулей.

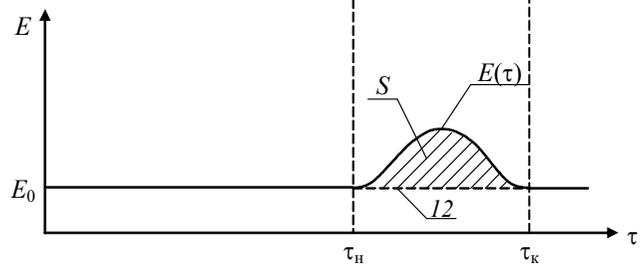
Типичный микрокалориметр Кальве состоит (см. рис. 3.5, *a*) из массивного металлического (медного) блока 1, в двух (иногда в четырех) симметрично расположенных цилиндрических полостях которого размещены микрокалориметрические ячейки 2 и 3 цилиндрической формы. Между этими ячейками 2, 3 и стенками блока 1 находятся тепломеры 4, 5 также цилиндрической формы.



a)



б)



в)

Рис. 3.5 Микрокалориметр Кальве:

a – один из вариантов конструкции микрокалориметра;

б – изменение температуры в ячейке 3 во времени; в – график изменения сигнала E дифференциально включенных термомеров 4 и 5

Перед началом эксперимента в рабочую ячейку 2 помещают образец исследуемого вещества, например, навеску известной массы из приготовленного заранее состава при изучении теплового эффекта химической реакции отверждения композиционного связующего. В сравнительной ячейке 3 размещают такой же по массе образец из инертного материала, например, из уже отвержденного композиционного материала. Для контроля температуры в ходе эксперимента, в сравнительной ячейке 3 размещают термопару 6, подключенную к вторичному прибору 7. Тот факт, что массивный металлический блок 1 обычно изготавливают из меди, одного из самых высокотеплопроводных металлов, позволяет считать, что температура рабочей ячейки 2 и сравнительной ячейки 3 практически не отличаются друг от друга. При необходимости термопара 6 может быть размещена в рабочей ячейке 2.

Большое количество отверстий 11, расположенных вдоль периметра массивного металлического блока 1, введены для того, чтобы создать повышенное тепловое сопротивление между нагревателем 10 и ячейками 2, 3. За счет этого теплового сопротивления снижается влияние колебаний температуры нагревателя 10, возникающих при работе системы программного регулирования температуры (СПТР) 9, что позволяет получить желаемый закон изменения температуры ячеек 2 и 3. На рис. 3.5, б приведен пример эксперимента, когда СПТР 9 задает и реализует линейный закон изменения температуры.

Сигнал дифференциально (встречно) включенных термопар 4, 5 подается на вторичный прибор 8. Пример изменения суммарного сигнала $E(\tau)$ термопар 4, 5 приведен на рис. 3.5, в.

Значения $E(\tau)$ суммарного сигнала термопар 4, 5 связаны прямопропорциональной зависимостью с текущей мощностью $W(\tau)$ тепловых выделений в рабочей ячейке 2

$$W(\tau) = kE(\tau), \quad (3.9)$$

где k – коэффициент пропорциональности.

$$\text{Суммарный тепловой эффект } Q = \int_{\tau_n}^{\tau_k} W(\tau) d\tau \text{ исследуемого}$$

процесса пропорционален площади S под кривой $E(\tau) - E_0$, представленной на рис. 3.5, в, и с учетом соотношения (3.9) может быть рассчитан по формуле

$$Q = \int_{\tau_n}^{\tau_k} W(\tau) d\tau = k \int_{\tau_n}^{\tau_k} [E(\tau) - E_0] d\tau = kS, \quad (3.10)$$

где $S = \int_{\tau_n}^{\tau_k} [E(\tau) - E_0] d\tau$ – площадь между кривой $E(\tau)$ и базовой пунктирной линией E_0 , обозначенной позицией 12 (см. рис. 3.3, в), по которой изменялся бы сигнал $E(\tau)$, если бы в рабочей ячейке 2 не было бы никаких тепловыделений; τ_n , τ_k – моменты времени, соответствующие началу и окончанию химической реакции отверждения.

Сопоставление графиков $T(\tau)$ и $E(\tau)$, приведенных на рис. 3.5, б, в, позволяет также определить температурный диапазон $T_n < T < T_k$, в пределах которого происходит реакция отверждения при заданном в ходе эксперимента режиме (скорости) изменения температуры, например, по линейному закону $T(\tau) = T_0 + k\tau$, представленному на рис. 3.5, б.

Коэффициент пропорциональности k зависимости (3.10) на практике находят путем проведения специально организованного эксперимента. В ходе такого эксперимента в рабочую ячейку 2 дополнительно помещают миниатюрный электрический нагреватель, с помощью которого в интервале времени $\tau_n < \tau < \tau_k$ вводят количество тепла

$$Q = \int_{\tau_n}^{\tau_k} P(\tau) d\tau,$$

где $P(\tau)$ – электрическая мощность нагревателя.

Если в ходе эксперимента подается постоянная мощность $P(\tau) = P = \text{const}$, то последняя формула принимает вид

$$Q = P(\tau_k - \tau_n).$$

По полученным в ходе эксперимента данным определяют площадь S под кривой $E(\tau) - E_0$

$$S = \int_{\tau_n}^{\tau_k} [E(\tau) - E_0] d\tau,$$

а искомый коэффициент пропорциональности k находят по формуле

$$k = \frac{Q}{S}.$$

Полученное значение коэффициента $k = k(T)$ является параметром конкретного микрокалориметра типа Кальве, зависимость которого от температуры T заранее известна. Эта известная зависимость $k = k(T)$ в дальнейшем используется при обработке результатов экспериментов по измерению тепловых эффектов Q химических реакций.

Отметим, что при замене измерительных ячеек 2, 3, после ремонта или замены тепломеров 4, 5, следует полностью повторить процесс экспериментального определения коэффициента $k(T)$, являющегося одним из главных параметров микрокалориметра Кальве, определяющим метрологические показатели результатов исследований.

Можно рекомендовать повторное определение коэффициента k сразу же после завершения ответственного исследования. Это позволяет получить подтверждение того, что в ходе исследования основные параметры и метрологические показатели микрокалориметра не изменились.

4 СТАЦИОНАРНЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В данной главе рассматриваются теоретические основы стационарных методов измерения теплопроводности λ веществ. Физический параметр вещества, называемый теплопроводностью λ , характеризует способность вещества проводить тепло. Теплопроводность вводится в теории теплофизических исследований как коэффициент, входящий в рассмотренный выше закон Фурье

$$q = -\lambda \text{ grad } T,$$

приобретающий наиболее простой вид для одномерного теплопереноса

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x},$$

где $q = \frac{Q}{S\tau}$ – количество тепла Q [Дж], прошедшее через единицу площади S [м²] изотермической поверхности в единицу времени τ [с];

$\text{grad } T = 1_x \frac{\partial T}{\partial x} + 1_y \frac{\partial T}{\partial y} + 1_z \frac{\partial T}{\partial z}$ – градиент температуры в направлении нормали к изотермической поверхности.

Для случая переноса тепла только вдоль одной оси координат, например, вдоль x , градиент температуры определяется наиболее просто $\text{grad } T = 1_x \frac{\partial T}{\partial x}$, а закон Фурье представляется в наиболее простой форме $q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$.

4.1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ПЛОСКОГО СЛОЯ

4.1.1 ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТРОЙСТВА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА

Положим, имеем (см. рис. 4.1) однородную плоскую неограниченную пластину (стенку) толщиной H из материала, теплопроводность λ которого надо измерить.

Если в эксперименте создать условия, когда через эту пластину будет проходить неизменный во времени и равномерно распределенный

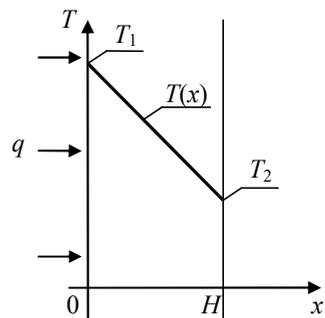


Рис. 4.1 Схематическое представление физической модели измерительного устройства

тепловой поток q , условно показанный стрелками на рис. 4.1, то после достижения стационарного режима в этой пластине установится линейное распределение температуры, а на поверхностях пластины можно измерить два значения температур T_1 и T_2 .

Постараемся найти ответ на вопрос – каким образом по измеренным значениям физических величин q , T_1 , T_2 , H можно определить искомое значение теплопроводности λ .

4.1.2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА И УСТРОЙСТВА

Принимая во внимание, что на двух поверхностях пластины нам известны два измеренных значения температур:

при $x = 0$

$$T(0) = T_1,$$

при $x = H$

$$T(H) = T_2,$$

а, кроме того, при $x = 0$ измерен тепловой поток $q = -\lambda \frac{\partial T(0)}{\partial x}$,

математическая модель температурного поля образца для рассматриваемого метода и устройства может быть записана в виде:

$$\text{ср} \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right]; \quad (4.1)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < x < H; \quad (4.2)$$

$$T(x, 0) = T_n(x); \quad (4.3)$$

$$T(0, \tau) = T_1 = \text{const}; \quad (4.4)$$

$$T(H, \tau) = T_2 = \text{const} \quad (4.5)$$

с дополнительным условием

$$-\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = q = \text{const}. \quad (4.6)$$

Задача (4.1)–(4.6) представляет собой пример нестационарной обратной (инверсной) краевой задачи теплопроводности относительно неизвестного коэффициента теплопроводности λ . По истечении большого промежутка времени в исследуемой пластине устанавливается стационарный режим переноса теплоты, когда распределение температуры $T(x)$ в стационарном режиме может быть получено из решения краевой задачи теплопроводности (4.1)–(4.5) при $\tau \rightarrow \infty$. Причем при $\tau \rightarrow \infty$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = 0,$$

температура $T(x, \tau) = T(x)$ перестает зависеть от времени, а начальное условие (4.3) совершенно не сказывается на стационарном распределении температуры в используемой пластине.

С учетом сказанного выше, краевая задача (4.1)–(4.5) для стационарного процесса переноса тепла примет вид:

$$\frac{d}{dx} \left[\lambda \frac{dT(x)}{dx} \right] = 0; \quad (4.1a)$$

$$0 < x < H; \quad (4.2a)$$

$$T(0) = T_1 = \text{const}; \quad (4.4a)$$

$$T(H) = T_2 = \text{const} \quad (4.5a)$$

с дополнительным условием

$$-\lambda \frac{dT(0)}{dx} = q = \text{const}. \quad (4.6a)$$

Задача (4.1a), (4.2a), (4.4a)–(4.6a), представляет собой пример обратной (инверсной) стационарной задачи теплопроводности относительно неизвестного пока параметра – искомой теплопроводности λ .

Проинтегрируем уравнение (4.1a), взяв неопределенный интеграл от его левой и правой частей

$$\int \frac{d}{dx} \left[\lambda \frac{dT(x)}{dx} \right] dx = \int 0 dx,$$

или

$$\lambda \frac{dT(x)}{dx} = C = \text{const.} \quad (4.7)$$

Сравнивая (4.7) с (4.6а), получаем

$$C = -q.$$

Тогда уравнение (4.7) приобретает вид

$$\lambda \frac{dT(x)}{dx} = -q,$$

или

$$\frac{dT(x)}{dx} = -\frac{q}{\lambda}.$$

Проинтегрируем последние выражения в пределах от $x = 0$ до $x = H$. В результате получаем

$$\int_0^H \frac{dT(x)}{dx} dx = -\frac{q}{\lambda} \int_0^H dx,$$

$$T(x)|_0^H = -\frac{q}{\lambda} x|_0^H,$$

$$T(H) - T(0) = -\frac{q}{\lambda} (H - 0),$$

откуда следует основное расчетное соотношение рассматриваемого стационарного метода плоского слоя

$$\lambda = -\frac{qH}{T(H) - T(0)},$$

которое, с учетом приведенных на рис. 4.1 обозначений

$$T(H) = T_2,$$

$$T(0) = T_1,$$

приобретает вид

$$\lambda = \frac{qH}{T_1 - T_2}. \quad (4.8)$$

4.1.3 ПОРЯДОК ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Из изложенного выше вытекает следующий примерный порядок

осуществления эксперимента при измерении теплопроводности λ стационарным методом.

1 Из исследуемого материала изготавливают образец (или несколько образцов) в виде пластины необходимой формы, например, в виде диска или пластины квадратной формы с размерами (см. рис. 4.2), позволяющими разместить их в измерительной ячейке прибора.

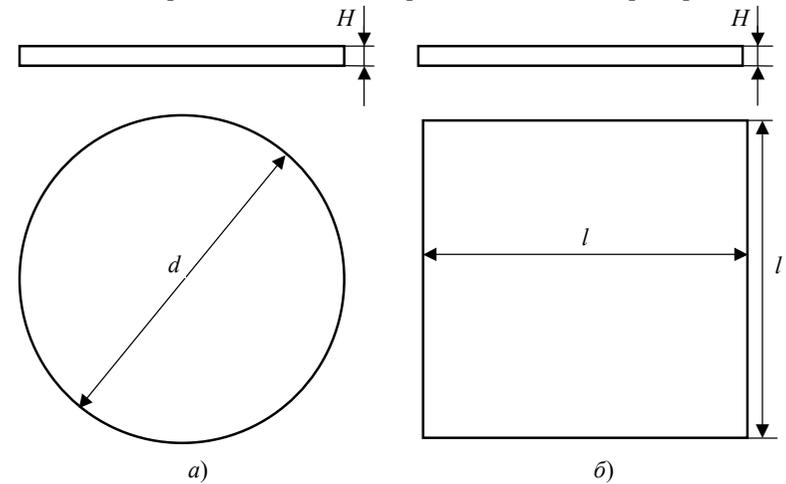


Рис. 4.2 Примерные формы образцов из твердых материалов:
a – в виде диска; *б* – в виде пластины квадратной формы

2 С использованием микрометра (в крайнем случае, штангенциркулем) многократно измеряют значение толщины H пластины в нескольких местах поверхности и находят среднее значение этой толщины:

$$\bar{H} = \frac{H_1 + H_2 + \dots + H_n}{n} .$$

3 Образец (или несколько образцов) помещают в измерительную ячейку и начинают подводить постоянный во времени тепловой поток q к этому образцу (образцам).

4 Через определенные промежутки времени контролируют значения температур T_1 , T_2 на внешних поверхностях (см. рис. 4.1) исследуемого образца.

5 После достижения стационарного распределения температуры в исследуемом образце, когда

$$T_1 = \text{const},$$

$$T_2 = \text{const},$$

$$q = \text{const},$$

измеряют значение теплового потока q и значение температур T_1, T_2 .

6 Исследуемую теплопроводность λ рассчитывают по формуле (4.8) по измеренным значениям H, q, T_1 и T_2 .

Результат измерения теплопроводности λ относят к средней температуре

$$T_{\text{cp}} = (T_1 + T_2)/2.$$

4.1.4 СРЕДСТВА И МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ, ТЕМПЕРАТУР И ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ

В практике теплофизических измерений геометрические размеры H, d или H, l образцов (см. рис. 4.2) контролируют с использованием микрометров и штангенциркулей.

Для измерения температур T_1, T_2 наиболее часто применяют термопары или термометры сопротивления (без защитных оболочек), изготовленные непосредственно из металлических проволочек с диаметром $0,1 \dots 0,4$ мм, что позволяет:

1) уменьшить искажение температурного поля на поверхностях образцов из-за влияния установленных на этих поверхностях термопар и термометров сопротивления,

2) уменьшить инерционность используемых термопар и термометров сопротивления.

Наиболее широкое распространение в практике теплофизических измерений получили следующие типы термопар [2, 3, 8, 9]:

1) хромель-копель, имеющие старое обозначение ХК;

2) хромель-алюмель, ранее обозначаемые ХА, а в настоящее время – К (по СТ СЭВ 1065–78);

3) платина-платинородий, ранее обозначаемые ПП-1, а в настоящее время – S (по СТ СЭВ 1065–78).

Для измерения температуры наиболее часто применяют термометры сопротивления, изготовленные из медной тонкой проволоочки, реже – из платиновых проволочек.

Для измерения теплового потока q на практике применяют несколько способов, рассмотренные ниже.

Первый способ основан (см. рис. 4.3, а) на использовании двух одинаковых плоских образцов 1 и 2, между которыми зажат электрический нагреватель 3. В этом случае электрическая мощность P , потребляемая электрическим нагревателем 3, благодаря симметрии рассматриваемой системы, делится на две равные части, одна из которых уходит в образец 1, а вторая – в образец 2. При этом тепловой поток, проходящий через каждый образец 1 и 2, может быть вычислен по формулам

$$q = \frac{P/2}{S} = \frac{UI}{2S} = \frac{I^2 R}{2S} = \frac{U^2}{2RS},$$

где $P = UI = I^2 R = U^2/R$ – мощность, потребляемая нагревателем 3; U – электрическое напряжение, подведенное к нагревателю 3; I – электрический ток, потребляемый нагревателем; R – сопротивление электрического нагревателя; S – площадь изотермической поверхности, через которую проходит тепловой поток q .

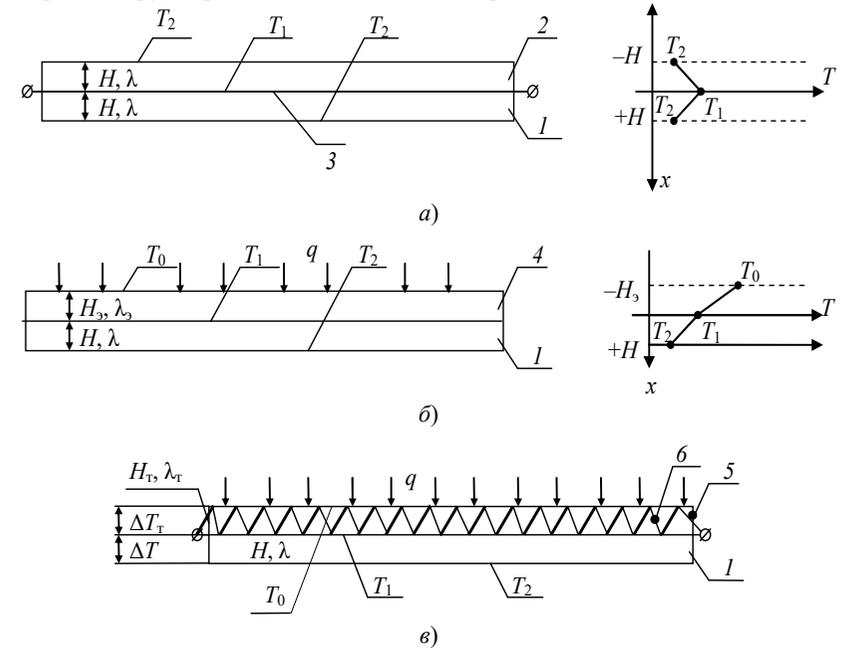


Рис. 4.3 Способы измерения тепловых потоков:

- a* – с использованием двух плоских образцов 1, 2 и нагревателя 3;
- б* – с использованием слоя 4 эталонного материала с известными толщиной H , и теплопроводностью λ_3 ;
- в* – с использованием термомера 5 на основе термобатареи 6

Если размер электрического нагревателя 3 совпадает с размерами образцов, то площадь S изотермической поверхности, через которую тепловой поток q проходит в каждом из двух симметрично расположенных образцов одинаковой толщины H , может быть вычислена по формулам:

- в случае образца в форме диска (рис. 4.2, *a*)

$$S = \pi \frac{d^2}{4};$$

– в случае образца в виде пластины квадратной формы (рис. 4.2, б)

$$S = l^2.$$

Если при проведении эксперимента непосредственно измеряют все величины H , T_1 , T_2 , q , входящие в (4.8), то такой метод измерения теплопроводности носит название «абсолютный метод плоского слоя».

Второй способ основан (см. рис. 4.3, б) на использовании вспомогательного слоя 4, изготовленного из эталонного материала с известной теплопроводностью λ_3 и толщиной H_3 .

Слой 4 эталонного материала с известными значениями λ_3 , H_3 приводят в тепловой контакт с исследуемым образцом 1 и пропускают через них тепловой поток. Если принять, что через оба образца 1 и 4 проходят одинаковые тепловые потоки:

– через эталонный образец 4

$$q_3 = -\lambda_3 \frac{\partial T}{\partial x} = +\lambda_3 \frac{T_0 - T_1}{H_3};$$

– через исследуемый образец

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = +\lambda \frac{T_1 - T_2}{H},$$

то, приравняв эти тепловые потоки, искомый тепловой поток q можно вычислить по данным, полученным на эталонном образце с известной толщиной H_3 и теплопроводностью λ_3 :

$$q = q_3 = -\lambda_3 \frac{\partial T}{\partial x} = +\lambda_3 \frac{T_0 - T_1}{H_3}.$$

С учетом вычисленного теплового потока $q = q_3$ искомая теплопроводность λ исследуемого материала может быть рассчитана по формуле (4.8).

Подставив последнее выражение для вычисления теплового потока в формулу (4.8), получим

$$\lambda = \lambda_3 \frac{H}{H_3} \frac{T_0 - T_1}{T_1 - T_2}, \quad (4.9)$$

или

$$\lambda = \lambda_3 \frac{H}{H_3} \frac{\Delta T_3}{\Delta T}, \quad (4.9a)$$

где $\Delta T_3 = T_0 - T_1$ – перепад температур в слое эталонного вещества с известной теплопроводностью λ_3 и толщиной H_3 ; $\Delta T = T_1 - T_2$ – перепад температур в слое исследуемого вещества, имеющего толщину H .

Пользуясь соотношениями (4.9), (4.9a) можно вычислить теплопроводность λ слоя исследуемого вещества, если известны (см. рис. 4.3, б) значения: λ_3 , H_3 – теплопроводность и толщина слоя эталонного вещества; H – толщина слоя исследуемого вещества; $\Delta T_3 = T_0 - T_1$, $\Delta T = T_1 - T_2$ – перепады температур, соответственно на слое эталонного вещества и на слое исследуемого вещества.

Рассмотренный нами второй способ позволяет заменить непосредственное измерение теплового потока q на измерение перепада температур

$$\Delta T_3 = T_0 - T_1$$

на слое эталонного материала с известной толщиной H_3 и с известной теплопроводностью λ_3 .

В случае использования этого второго способа измерения теплового потока получаем метод определения теплопроводности, который носит название «относительный метод плоского слоя».

Относительный метод плоского слоя впервые был предложен в 1881 году [8]. Однако, отсутствие достоверных данных по теплопроводности эталонных веществ на протяжении долгого времени приводило к существенным погрешностям в измерениях.

Развитие абсолютных методов измерения теплопроводности дало возможность накопить достоверные данные по теплопроводности эталонных веществ, которые в настоящее время можно использовать в качестве основы при практическом применении относительных методов плоского слоя.

Третий способ измерения теплового потока также основан (см. рис. 4.3, в) на использовании вспомогательного слоя, который в этом случае выполняется в виде самостоятельного изделия, называемого тепломером 5.

Принцип действия тепломера при измерении теплового потока q основан на законе Фурье

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \quad \text{или} \quad q_T = +\lambda_T \frac{\Delta T_T}{H_T}$$

и предполагает измерение (см. рис. 4.3, в) перепада температур ΔT_T на слое материала толщиной H_T с теплопроводностью λ_T . Если принять, что $\lambda_T = \text{const}$, $H_T = \text{const}$, измерение теплового потока сводится к измерению перепада температур ΔT_T на тепломере, т.е.

$$q_T = K_1 \Delta T_T, \quad (4.10)$$

где $K_1 = \frac{\lambda_T}{H_T}$ – постоянный коэффициент.

На практике перепад температур ΔT_T на тепломере может быть измерен с использованием термометров сопротивления, дифференциально включенных в мостовую схему, или с применением термопар, включенных по схеме (см. рис. 4.3, в), образующей термобатарейку δ .

В большинстве случаев сигнал E термобатарейки (или мостовой схемы) можно считать пропорциональным перепаду температуры ΔT_T , т.е.

$$E = K_2 \Delta T_T$$

или

$$\Delta T_T = \frac{E}{K_2}.$$

Подставив это выражение в (4.10), получим запись градуировочной характеристики тепломера

$$q_T = K_1 \frac{1}{K_2} E$$

или

$$q_T = K_T E, \quad (4.10a)$$

где K_T – постоянная (коэффициент передачи) тепломера, которая может быть вычислена по формуле

$$K_T = \frac{K_1}{K_2} = \frac{\lambda_T}{H_T K_2},$$

однако на практике коэффициент передачи тепломера K_T находят в специальном градуировочном опыте либо с применением слоя l из эталонного материала (см. рис. 4.3, в), либо с использованием второго «эталонного» тепломера с известным значением коэффициента передачи $K_{Tэ}$.

В процессе градуировки под рабочим (градуируемым) тепломером

вместо эталонного слоя l (см. рис. 4.3, *в*) устанавливают эталонный тепломер с известным значением коэффициента передачи $K_{тэ}$. Через оба тепломера пропускают постоянный тепловой поток q , измеряют сигналы каждого тепломера и, с использованием градуировочной характеристики эталонного тепломера, измеренному сигналу E_n градуируемого тепломера ставят в соответствие определенное значение теплового потока q_n . Коэффициент передачи K_t градуируемого тепломера может быть вычислен по формуле

$$K_t = \frac{q_n}{E_n},$$

где E_n – значение сигнала градуируемого тепломера; q_n – измеренное значение теплового потока, проходящего через оба тепломера, и вычисленное по формуле

$$q_n = q_s = K_{тэ} E_s,$$

где $K_{тэ}$ – коэффициент передачи эталонного тепломера; E_s – сигнал эталонного тепломера при данном тепловом потоке $q_n = q_s$.

В случае использования тепломера для измерения теплового потока, в ходе экспериментального определения теплопроводности λ измеряют величины T_1 , T_2 , E , тепловой поток q вычисляют по формуле (4.10а), а искомую теплопроводность λ находят по формуле (4.8) с учетом известного геометрического размера H образца.

4.1.5 ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СТАЦИОНАРНЫМ МЕТОДОМ ПЛОСКОГО СЛОЯ

Применим традиционные подходы теории погрешностей измерений [15] к основной расчетной зависимости (4.8), лежащей в основе стационарного метода плоского слоя и имеющей вид

$$\lambda = \frac{qH}{T_1 - T_2}.$$

1 Прологарифмируем это соотношение

$$\ln \lambda = \ln q + \ln H - \ln (T_1 - T_2)$$

и найдем соответствующие дифференциалы:

$$d \ln \lambda = d \ln q + d \ln H - d \ln (T_1 - T_2);$$

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{dq}{q} + \frac{dH}{H} - \frac{d(T_1 - T_2)}{T_1 - T_2}.$$

2 Воспользуемся принятой в теории погрешностей заменой:

$$d\lambda \approx \Delta\lambda;$$

$$dq \approx \Delta q;$$

$$dH \approx \Delta H;$$

$$d(T_1 - T_2) \approx \Delta(T_1 - T_2),$$

где $\Delta\lambda$, Δq , ΔH , $\Delta(T_1 - T_2)$ – абсолютные погрешности измерения, соответственно, теплопроводности λ , теплового потока q , толщины образца H и перепада температур $(T_1 - T_2)$ на исследуемом образце.

Подставив обозначения $\Delta\lambda$, Δq , ΔH , $\Delta(T_1 - T_2)$ в последнюю формулу, получим

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta H}{H} - \frac{\Delta(T_1 - T_2)}{T_1 - T_2}.$$

Этой формулой можно было бы пользоваться, если бы знаки погрешностей $\Delta\lambda$, Δq , ΔH , $\Delta(T_1 - T_2)$ были заранее известны. Однако знаки этих погрешностей $\Delta\lambda$, Δq , ΔH , $\Delta(T_1 - T_2)$ практически никогда не бывают известны.

3 Для того чтобы получить гарантированную оценку погрешности измерения теплопроводности (часто называемую «предельной оценкой погрешности»), в последней формуле знак «-» следует заменить на знак «+», а все знаки «+» оставить без изменения. В результате такой замены получим

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_{\text{пр}} = \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta H}{H} + \frac{\Delta(T_1 - T_2)}{T_1 - T_2},$$

где $\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_{\text{пр}}$ – предельная оценка относительной погрешности

измерения теплопроводности λ , которая будет иметь место, если все погрешности Δq , ΔH , $\Delta(T_1 - T_2)$ будут согласованно действовать в одну сторону, увеличивают суммарную относительную погрешность $\delta\lambda$.

Если воспользоваться принятым в теории погрешностей обозначениями относительных погрешностей

$$\delta q = \frac{\Delta q}{q}; \quad \delta H = \frac{\Delta H}{H}; \quad \delta(T_1 - T_2) = \frac{\Delta(T_1 - T_2)}{(T_1 - T_2)},$$

то последняя формула примет вид

$$(\delta\lambda)_{\text{пр}} = \delta q + \delta H + \delta(T_1 - T_2),$$

т.е. предельная оценка $(\delta\lambda)_{\text{пр}}$ относительной погрешности измерения теплопроводности λ вычисляется как сумма относительных погрешностей δq , δH , $\delta(T_1 - T_2)$ непосредственно измеряемых физических величин q , H и $(T_1 - T_2)$.

4 Если температуры T_1 , T_2 измеряются двумя датчиками температуры, то суммарная абсолютная погрешность $\Delta(T_1 - T_2)$ измерения их разности $(T_1 - T_2)$ определяется по формуле

$$\Delta(T_1 - T_2) = \Delta T_1 + \Delta T_2.$$

Если погрешности ΔT_1 , ΔT_2 одинаковы и равны $\Delta T = \Delta T_1 = \Delta T_2$,

то

$$\Delta(T_1 - T_2) = 2\Delta T.$$

5 Подставив это соотношение в формулу для вычисления предельной оценки погрешности измерения теплопроводности, получим

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_{\text{пр}} = \left(\frac{\Delta q}{q}\right) + \left(\frac{\Delta H}{H}\right) + \frac{2\Delta T}{(T_1 - T_2)}$$

или

$$(\delta\lambda)_{\text{пр}} = \delta q + \delta H + \delta(T_1 - T_2),$$

где $\delta(T_1 - T_2) = \frac{2\Delta T}{(T_1 - T_2)}$.

Предельная оценка погрешности измерения теплопроводности $(\delta\lambda)_{\text{пр}}$ в большинстве случаев оказывается завышенной по сравнению с реальными значениями погрешностей, так как на самом деле составляющие δq , δH , $\delta(T_1 - T_2)$ суммарной погрешности $(\delta\lambda)_{\text{пр}}$ действуют случайным образом, например так, что погрешности δq , δH действуют согласованно и увеличивают величину $(\delta\lambda)_{\text{пр}}$, а погрешность $\delta(T_1 - T_2)$ – действует в противоположную сторону и уменьшает

величину суммарной погрешности $(\delta\lambda)_{\text{пр}}$.

6 Опыт практического использования теории погрешностей показал [15], что наиболее близкими к реальным значениям погрешностей являются так называемые среднеквадратичные оценки погрешностей, вычисляемые по формуле

$$(\delta\lambda)_{\text{ск}} = \sqrt{(\delta q)_{\text{ск}}^2 + (\delta H)_{\text{ск}}^2 + [\delta(T_1 - T_2)]_{\text{ск}}^2}$$

или

$$\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)_{\text{ск}} = \sqrt{\left(\frac{\Delta q}{q}\right)^2 + \left(\frac{\Delta H}{H}\right)^2 + \frac{2(\Delta T)^2}{(T_1 - T_2)^2}},$$

где принято во внимание, что среднеквадратичная оценка погрешности измерения разности температур $(T_1 - T_2)$ с учетом того, что $\Delta T = \Delta T_1 = \Delta T_2$, имеет вид

$$[\delta(T_1 - T_2)]_{\text{ск}} = \frac{\sqrt{(\Delta T_1)^2 + (\Delta T_2)^2}}{(T_1 - T_2)} = \frac{\sqrt{2(\Delta T)^2}}{(T_1 - T_2)}.$$

7 Если принять во внимание, что в случае использования дополнительного слоя толщиной H_3 из эталонного материала с теплопроводностью λ_3 , тепловой поток q вычисляется по формуле

$$q = q_3 = \lambda_3 \frac{(T_0 - T_1)}{H_3},$$

то легко получить соотношения, имеющие вид:

$$(\delta q)_{\text{пр}} = \delta\lambda_3 + \delta H_3 + \delta(T_1 - T_2);$$

$$(\delta q)_{\text{ск}} = \sqrt{(\delta\lambda_3)^2 + (\delta H_3)^2 + \frac{2(\Delta T)^2}{[T_0 - T_1]^2}}.$$

Если подставить эти соотношения в основные формулы для вычисления оценки погрешностей измерения теплопроводности, то получаются следующие формулы:

$$(\delta\lambda)_{\text{пр}} = \delta\lambda_3 + \delta H_3 + \delta H + \frac{2\Delta T}{(T_1 - T_2)} + \frac{2\Delta T}{(T_0 - T_1)};$$

$$(\delta\lambda)_{\text{ск}} = \sqrt{(\delta\lambda_3)^2 + (\delta H_3)^2 + (\delta H)^2 + 2\left[\frac{\Delta T}{(T_1 - T_2)}\right]^2 + 2\left[\frac{\Delta T}{(T_0 - T_1)}\right]^2}.$$

Последние формулы легко можно было бы получить, применив традиционные подходы теории погрешностей к расчетной формуле (4.9).

Проиллюстрируем полезность замены измерения двух пар температур T_0, T_1 и T_1, T_2 на непосредственное измерение их разностей.

Если абсолютные погрешности $\Delta(T_0 - T_1)$ и $\Delta(T_1 - T_2)$ измерения разностей $(T_0 - T_1)$, $(T_1 - T_2)$ этих температур имеют такую же величину, как и абсолютные погрешности $\Delta T = \Delta T_0 = \Delta T_1 = \Delta T_2$ измерения температур T_0, T_1, T_2 , т.е. $\Delta(T_0 - T_1) = \Delta T$, $\Delta(T_1 - T_2) = \Delta T$, то формулы для вычисления предельной и среднеквадратичной оценок относительных погрешностей измерения теплопроводности примут вид:

$$(\delta\lambda)_{\text{пр}} = \delta q + \delta H + \frac{\Delta T}{(T_1 - T_2)};$$

$$(\delta\lambda)_{\text{пр}} = \delta\lambda_3 + \delta H_3 + \delta H + \frac{\Delta T}{(T_1 - T_2)} + \frac{\Delta T}{(T_0 - T_1)};$$

$$(\delta\lambda)_{\text{ск}} = \sqrt{(\delta q)^2 + (\delta H)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T_1 - T_2}\right)^2};$$

$$(\delta\lambda)_{\text{ск}} = \sqrt{(\delta\lambda_3)^2 + (\delta H_3)^2 + (\delta H)^2 + \left[\frac{\Delta T}{(T_1 - T_2)}\right]^2 + \left[\frac{\Delta T}{(T_0 - T_1)}\right]^2}.$$

Видно, что замена измерения пар температур T_0, T_1 и T_1, T_2 на измерения их разностей $(T_0 - T_1)$ и $(T_1 - T_2)$ позволяет существенно уменьшить суммарные погрешности измерения теплопроводности λ .

4.1.6 ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ПЛОСКОГО СЛОЯ

Основными достоинствами стационарного метода плоского слоя являются:

- простота изготовления плоских образцов;
- относительно простые конструкции измерительных устройств,

которые легко могут быть изготовлены практически на каждом предприятии без привлечения высококвалифицированных рабочих;

– возможность исследования теплопроводности жидкостей и газов, так как в случае использования плоского *горизонтального* слоя в исследуемой жидкости (газе) легко создать условия (при нагреве равномерно распределенным тепловым потоком, направленным сверху вниз), препятствующие возникновению естественной конвекции, сильно искажающей результаты измерения теплопроводности;

– возможность легко реализовывать как абсолютный, так и относительный варианты стационарного метода плоского слоя.

При практической реализации стационарного метода плоского слоя приходится преодолевать сложности, связанные с необходимостью предотвращения утечек части теплового потока на периферии (по краям) плоских образцов. В связи с этим в конструкции измерительных устройств приходится вводить так называемые охранные нагреватели, неизбежно усложняющие конструкцию и вызывающие удорожание измерительной установки, основанной на использовании стационарного режима плоского слоя.

4.2 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО СЛОЯ

4.2.1 ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО УСТРОЙСТВА

Допустим, что имеется (см. рис. 4.4) цилиндрический слой (труба) длиной L из однородного исследуемого материала с постоянной теплопроводностью λ . Этот слой имеет внутренний радиус R_1 и внешний R_2 . Если к этому слою подвести при $r = R_1$ неизменный во времени

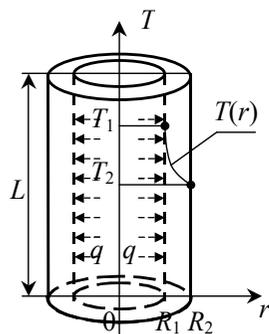


Рис. 4.4 Схематичное представление физической модели

тепловой поток q , направленный вдоль оси r от R_1 к R_2 , то через некоторое время на его внутренней и внешней поверхностях, в частности при $r = R_1$ установится постоянная температура $T(R_1) = T_1$, а при $r = R_2$ постоянная температура $T(R_2) = T_2$, а внутри цилиндрического слоя установится стационарное распределение температура $T(r)$.

Ниже рассматривается математическая модель процессов переноса тепла в однородном цилиндрическом слое с целью получить расчетное соотношение, позволяющее вычислить искомую

измерительного
устройства

теплопроводность λ по измеренным в ходе
эксперимента значениям физических
величин:

$$R_1, R_2, T(R_1) = T_1, T(R_2) = T_2, q.$$

4.2.2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА И УСТРОЙСТВА

Для рассмотренной выше в п 4.2.1 физической модели можно записать следующую математическую модель температурного поля для рассматриваемого метода цилиндрического слоя:

$$c\rho \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r\lambda \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right]; \quad (4.11)$$

$$\tau > 0, \quad R_1 < r < R_2; \quad (4.12)$$

$$T(r, 0) = T_n(r); \quad (4.13)$$

$$T(R_1, \tau) = T_1(\tau); \quad (4.14)$$

$$T(R_2, \tau) = T_2(\tau) \quad (4.15)$$

с дополнительным условием

$$-\lambda \frac{\partial T(R_1, \tau)}{\partial r} = q(\tau). \quad (4.16)$$

Задача (4.11) – (4.16) представляет собой пример нестационарной обратной (инверсной) краевой задачи теплопроводности.

Принимая во внимание, что $T_1 = \text{const}$, $T_2 = \text{const}$, $q = \text{const}$, очевидно, что по истечении достаточно большого промежутка времени после начала эксперимента, в рассматриваемой физической системе установится стационарное температурное поле такое, что в каждой точке этой системы будет выполнено условие

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = 0,$$

причем, стационарное температурное поле не будет зависеть от начальных условий (4.13).

Для стационарной стадии эксперимента краевая задача (4.11) – (4.16) приобретает вид:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r\lambda \frac{dT(r)}{dr} \right] = 0; \quad (4.11a)$$

$$R_1 < r < R_2; \quad (4.12a)$$

$$T(R_1) = T_1 = \text{const}; \quad (4.14a)$$

$$T(R_2) = T_2 = \text{const} \quad (4.15a)$$

с дополнительным условием, измеряемым в ходе эксперимента,

$$-\lambda \frac{dT(R_1)}{dr} = q = \text{const}. \quad (4.16a)$$

Задача (4.11a), (4.12a), (4.14a)–(4.16a) является примером обратной (инверсной) стационарной краевой задачи теплопроводности, позволяющей найти значение неизвестного параметра – искомой теплопроводности λ .

Преобразуем уравнение (4.11a) к виду

$$\frac{d}{dr} \left[r\lambda \frac{dT(r)}{dr} \right] = 0$$

и проинтегрируем его в пределах от $r = R_1$ до r , ($r \leq R_2$):

$$\int_{R_1}^r \frac{d}{dr} \left[r\lambda \frac{dT(r)}{dr} \right] = \int_{R_1}^r 0 \, dr.$$

Принимая во внимание, что значение интеграла в правой части равно

$$\int_{R_1}^r 0 \, dr = 0,$$

получаем

$$r\lambda \frac{dT(r)}{dr} \Big|_{R_1}^r = 0$$

или

$$r\lambda \frac{dT(r)}{dr} - R_1\lambda \frac{dT(R_1)}{dr} = 0,$$

$$r\lambda \frac{dT(r)}{dr} = R_1\lambda \frac{dT(R_1)}{dr}. \quad (4.17)$$

Принимая во внимание дополнительное условие (4.16a), получаем

$$\lambda \frac{dT(R_1)}{dr} = -q.$$

Подставив это выражение в правую часть (4.17), получим

$$r\lambda \frac{dT(r)}{dr} = -R_1 q$$

или

$$\frac{dT(r)}{dr} = -\frac{qR_1}{\lambda} \frac{1}{r}.$$

Вычислим определенный интеграл (в пределах от $r = R_1$ до $r = R_2$) от последнего выражения

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dT(r)}{dr} dr = -\frac{qR_1}{\lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr.$$

В результате, с учетом того что $\frac{d \ln r}{dr} = \frac{1}{r}$ или $\int r^{-1} dr = \ln r$, получим:

$$T(r) \Big|_{R_1}^{R_2} = -\frac{qR_1}{\lambda} \ln r \Big|_{R_1}^{R_2};$$

$$T(R_2) - T(R_1) = -\frac{qR_1}{\lambda} [\ln R_2 - \ln R_1]; \quad (4.17a)$$

$$\lambda = -\frac{qR_1 [\ln R_2 - \ln R_1]}{T(R_2) - T(R_1)}.$$

Принимая во внимание, что

$$T(R_1) = T_1; \quad T(R_2) = T_2; \quad [\ln R_2 - \ln R_1] = \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right),$$

получаем

$$\lambda = \frac{qR_1 \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)}{T_1 - T_2}. \quad (4.18)$$

Полученная формула (4.18) является основным расчетным соотношением для вычисления искомой теплопроводности λ в рамках рассматриваемого нами стационарного метода цилиндрического слоя.

4.2.3 ПОРЯДОК ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Рассмотренные выше физическая и математическая модели метода

цилиндрического слоя и устройства для его реализации позволяют сформулировать следующий порядок осуществления измерительных операций при экспериментальном определении теплопроводности λ с использованием абсолютного метода цилиндрического слоя.

1 Из исследуемого материала изготавливают образец (см. рис. 4.4) в виде цилиндрического слоя длиной L с внутренним радиусом R_1 и с внешним радиусом R_2 .

Примечание. При измерении теплопроводности жидкости (газа), необходимым количеством жидкости (или газа) заполняют полость измерительного устройства с необходимыми размерами L, R_1, R_2 .

2 При подготовке к проведению эксперимента с помощью поверенных микрометра или штангенциркуля измеряют размеры R_1, R_2, L образца.

Примечание. При измерении теплопроводности жидкости (газа) размеры R_1, R_2, L полости цилиндрической формы обычно бывают заранее известны и остаются одними и теми же во всех экспериментах.

3 Образец помещают в измерительное устройство (ячейку) и начинают подводить постоянный во времени тепловой поток q , равномерно распределенный по внутренней поверхности (с радиусом $r = R_1$) цилиндрического слоя.

4 Через определенные промежутки времени измеряют значения температур $T(R_1) = T_1, T(R_2) = T_2$ на внутренней и на внешней поверхностях исследуемого цилиндрического слоя.

5 После достижения стационарного режима, когда

$$\begin{aligned}T_1 &= \text{const}; \\T_2 &= \text{const}; \\q &= \text{const},\end{aligned}$$

измеряют установившиеся значения теплового потока q и температур T_1, T_2 .

6 Искомую теплопроводность λ вычисляют по формуле (4.18) по измеренным значениям физических величин R_1, R_2, T_1, T_2, q .

Если в эксперименте вместо радиусов R_1, R_2 измерены (см. рис. 4.5, а) соответствующие диаметры $d_1 = 2R_1, d_2 = 2R_2$, то формула (4.18) может быть представлена в виде

$$\lambda = q \frac{d_1 \ln \left(\frac{d_2}{d_1} \right)}{2(T_1 - T_2)}. \quad (4.18a)$$

4.2.4 ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ, ТЕМПЕРАТУР И ТЕПЛООВОГО ПОТОКА

При осуществлении метода цилиндрического слоя используются традиционные методы и средства измерения геометрических размеров R_1 , R_2 , L и температур T_1 , T_2 , рассмотренные в п. 4.1.4.

В рамках рассматриваемого метода цилиндрического слоя используются в основном три способа измерения теплового потока, аналогичные рассмотренным в п. 4.1.4.

Обсудим подробнее особенности измерения теплового потока q при практической реализации метода цилиндрического слоя.

Первый способ основан на измерении электрической мощности P достаточно длинного электронагревателя 1 с внешним радиусом R_1 , помещенного внутри исследуемого цилиндрического слоя 2 (см. рис. 4.5, а).

При использовании этого способа тепловой поток q , входящий в исследуемый образец 2 , вычисляют по формуле

$$q = \frac{P}{S} = \frac{P}{2\pi R_1 L} = \frac{P}{\pi d_1 L},$$

где P – электрическая мощность, потребляемая электронагревателем 1 ;
 $S = 2\pi R_1 L$ – площадь внутренней поверхности исследуемого образца 2 ;

$R_1 = \frac{d_1}{2}$, L – внешний радиус и длина электронагревателя 1 , совпадающие с внутренним радиусом и длиной цилиндрического слоя 2 из исследуемого материала.

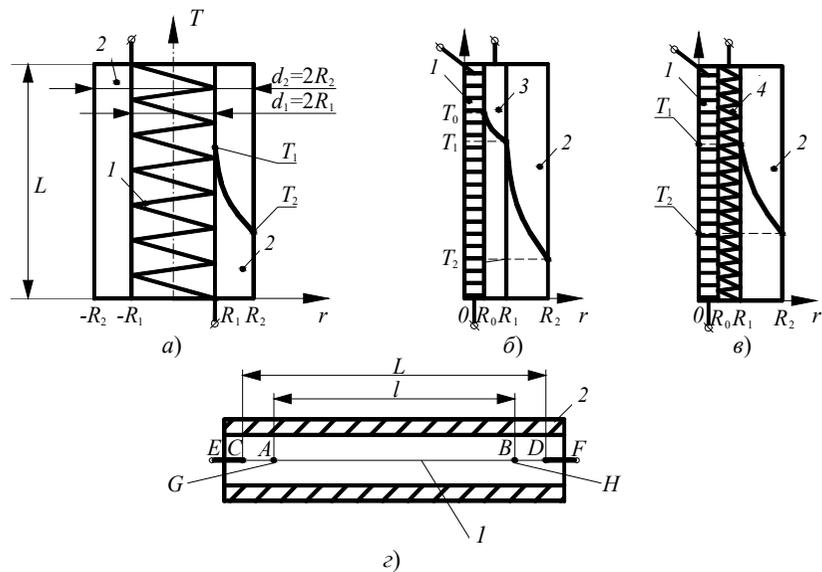


Рис. 4.5 Способы измерения тепловых потоков при практической реализации стационарного метода цилиндрического слоя:

a – по электрической мощности P нагревателя 1 , расположенного внутри цилиндрического слоя 2 ; *б* – с использованием вспомогательного слоя 3 с размерами R_0, R_1 из эталонного материала с известной теплопроводностью λ_3 ; *в* – с использованием термомера 4 термобатарейного типа; *г* – при использовании проволоки 1 одновременно в качестве нагревателя и термосопротивления

С учетом последней формулы основные расчетные соотношения (4.18), (4.18а) примут вид:

$$\lambda = \frac{PR_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi R_1 L (T_1 - T_2)} = \frac{P \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2\pi L (T_1 - T_2)}; \quad (4.19)$$

$$\lambda = \frac{Pd_1 \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{2\pi d_1 L (T_1 - T_2)} = \frac{P \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{2\pi L (T_1 - T_2)}. \quad (4.19a)$$

Если в ходе эксперимента непосредственно измеряют все величины, входящие в формулы (4.18), (4.18а) или (4.19), (4.19а), то такой метод называют «абсолютным стационарным методом цилиндрического слоя».

Второй способ основан на использовании вспомогательного слоя 3 из эталонного материала с известной теплопроводностью λ_3 и геометрическими размерами R_0, R_1 .

Внутри этого вспомогательного слоя размещают электронагреватель I , за счет которого осуществляется подвод постоянной во времени тепловой мощности $P = \text{const}$. Из физических соображений очевидно, что (при отсутствии утечек тепла в окружающую среду на верхнем и нижнем торцах эталонного 3 и рассматриваемого 2 слоев) в стационарном режиме работы через эти слои 2 и 3 проходит одинаковая и постоянная во времени тепловая мощность P , которая при $r = R_0$ может быть представлена в виде

$$P = q(R_0)S_0 = q_3(R_0)2\pi R_0L,$$

а при $r = R_1$ в виде

$$P = q(R_1)S_1 = q(R_1)2\pi R_1L. \quad (4.20)$$

С учетом соотношения (4.18) для исследуемого слоя 2 при $R_1 < r < R_2$ получаем

$$q(R_1) = \lambda \frac{T_1 - T_2}{R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Аналогично, для слоя эталонного материала при $R_0 < r < R_1$ можно записать

$$q(R_0) = q_3(R_0) = \lambda_3 \frac{T_0 - T_1}{R_0 \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)}.$$

Принимая во внимание что $q(R_0)S_0 = q(R_1)S_1$, получаем

$$q_3(R_0)2\pi R_0L = q(R_1)2\pi R_1L;$$

$$2\pi R_0L\lambda_3 \frac{T_0 - T_1}{R_0 \ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} = 2\pi R_1L\lambda \frac{T_1 - T_2}{R_1 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)},$$

откуда вытекает основное расчетное соотношение

$$\lambda = \lambda_3 \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \frac{T_0 - T_1}{T_1 - T_2} = \lambda_3 \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right)} \frac{\Delta T_3}{\Delta T}, \quad (4.20a)$$

где $\Delta T_3 = (T_0 - T_1)$ – перепад температур на слое эталонного материала с теплопроводностью λ_3 и радиусами R_0, R_1 ; $\Delta T = (T_1 - T_2)$ – перепад температур на слое исследуемого материала с теплопроводностью λ и радиусами R_1, R_2 .

Формула (4.20а) представляет собой основное расчетное соотношение «относительного стационарного метода цилиндрического слоя», применяемое для вычисления теплопроводности в случае использования дополнительного слоя 3, выполненного из эталонного материала.

Третий способ измерения теплового потока (см. рис. 4.5, в) предполагает использование тепломера 4, например термобатарейного типа, либо установленного внутри цилиндрического слоя из исследуемого материала либо размещенного снаружи этого слоя (на рис. 4.5, в этот вариант не показан).

Если известна градуировочная характеристика (4.10а) этого тепломера

$$q_T = K_T E,$$

то после достижения стационарного режима работы установки (см. рис. 4.5, в) измеряют величины T_1, T_2 и E , вычисляют тепловой поток $q = K_T E$ и, с учетом известных значений R_1, R_2 , определяют искомую теплопроводность по формуле (4.18).

Существенное практическое значение имеют вопросы, связанные с выводом формул для оценки предельных и среднеквадратичных погрешностей измерения теплопроводности λ стационарным методом цилиндрического слоя. Предлагаем вам самостоятельно получить такие расчетные формулы (по аналогии с п. 4.1.5 для плоского слоя).

4.2.5 СТАЦИОНАРНЫЙ МЕТОД НАГРЕТОЙ ПРОВОЛОКИ

Если внутренний цилиндр, содержащий нагреватель 1 (см. рис. 4.5, а), при измерении теплопроводности λ жидкости или газа заменить на проволоку небольшого диаметра (порядка 0,1 мм), а эту проволоку использовать одновременно как в качестве электронагревателя, так и в качестве термометра сопротивления, уменьшив при этом размеры внешнего цилиндра (с целью предотвращения возникновения естественной конвекции в слое исследуемой жидкости или газа), то получим вариант стационарного метода цилиндрического слоя, который обычно называют «стационарным методом нагретой проволоки».

Схема измерительного преобразователя, используемого при

реализации стационарного метода нагретой проволоки, приведена на рис. 4.5, з. Этот метод впервые был предложен в 1888 году немецким ученым Шлеермахером [8]. В XX веке этот метод наиболее широко применялся для исследования теплопроводности жидкостей и газов.

Расчетной формулой стационарного метода нагретой проволоки остаются соотношения (4.19) и (4.19а), которые после некоторых преобразований могут быть представлены в виде [8]:

$$\lambda = A \frac{P}{(T_1 - T_2)}, \quad (4.19b)$$

где $A = \frac{\ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right)}{2\pi L}$ – постоянная установки; P – электрическая мощность, потребляемая нагреваемой проволокой (см. рис. 4.5, з) на участке длиной L ; $d_1 = 2R_1$ – диаметр проволоки 1; d_2 – внутренний диаметр внешнего цилиндра 2; $(T_1 - T_2)$ – перепад температуры на слое исследуемой жидкости или газа.

Для определения постоянной установки A необязательно проводить измерения диаметров d_1 , d_2 и длины L рабочего участка проволоки 1. Заполнив установку жидкостью или газом с известной теплопроводностью λ_0 и проводя измерения P , T_1 , T_2 , можно из уравнения (4.19b) определить числовые значения A . Полученное таким образом значение постоянной установки A в дальнейшем можно использовать при вычислении теплопроводности λ исследуемой жидкости или газа.

При таком подходе рассматриваемый метод называют «Относительный стационарный метод нагретой проволоки».

Рассмотрим подробнее схему установки (см. рис. 4.5, з) для осуществления стационарного метода нагретой проволоки [8]. Внутренний цилиндр CD выполнен в виде тонкой платиновой проволоки 1 диаметром d_1 . Эта проволока, прикрепленная к токоподводам EC и DF , должна быть помещена строго по оси наружного цилиндра 2 с внутренним диаметром d_2 , в качестве которого обычно используются либо стеклянная или кварцевая трубка, либо медный блок с высверленным в нем каналом, по оси которого натягивается указанная платиновая проволока. Длина l измерительного участка проволоки 1 фиксируется припаянными в точках A и B отводами AG и BH из тонких платиновых проволочек.

При использовании стеклянных или кварцевых трубок на их внешние поверхности наматывают термометр сопротивления, используемый для измерения температуры T_3 внешней поверхности

стенки трубки, имеющей диаметр d_3 . Перепад температур $(T_2 - T_3)$ в стенке стеклянной или кварцевой трубки определяют расчетным путем по формуле

$$(T_2 - T_3) = \frac{P \ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right)}{2\pi L \lambda_{\text{тр}}} = \frac{P_l \ln\left(\frac{d_3}{d_2}\right)}{2\pi l \lambda_{\text{тр}}}, \quad (4.19c)$$

где T_2, T_3 – температура на внутренней и внешней поверхностях трубки 2; d_2, d_3 – внутренний и наружный диаметры трубки 2; P – электрическая мощность, выделяющаяся в проволоке l ; L – длина проволоки l ; $\lambda_{\text{тр}}$ – теплопроводность материала стенки трубки 2; P_l – электрическая мощность, потребляемая измерительным участком длиной l проволоки l .

Исследуемой жидкостью или газом заполняют промежуток между платиновой проволокой l и внешним цилиндром 2. Смонтированную измерительную трубку помещают в термостат. Тепло от нагреваемой электрическим током проволоки l радиально проходит через слой исследуемого вещества. После достижения стационарного режима работы (о чем судят по постоянству во времени как силы тока, так и падения напряжения на участках длиной l (и/или L) проволоки l) измеряют:

- 1) силу тока I через проволоку l ;
- 2) падение напряжения U_l на участке длиной l проволоки l между точками A и B (см. рис. 4.5, z);
- 3) температуру T_1 платиновой проволоки l на участке длиной l (величину температуры T_1 определяют по сопротивлению $R_l = \frac{U_l}{I}$, рассчитанному по измеренным значениям U_l и I);

4) температуру T_2 наружной поверхности слоя исследуемого вещества, причем, при измерении температуры T_3 внешней поверхности трубки 2 температуру T_2 находят по формуле

$$T_2 = T_3 + (T_2 - T_3)_p,$$

где $(T_2 - T_3)_p$ – величина расчетной поправки, вычисленная по формуле (4.19c).

После измерения величин I, U_l и вычисления T_1 и T_2 , искомую теплопроводность λ исследуемой жидкости или газа рассчитывают по формулам (4.19), (4.19а) или по формуле (4.19b), в которой при измерении падения напряжения U_l на участке l (между точками A и B на

рис. 4.5, з) постоянная установки A может быть представлена в виде

$$A = \frac{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{2\pi l} = \frac{\ln\left(\frac{d_1}{d_2}\right)}{2\pi l}. \quad (4.19d)$$

Когда многократными измерениями подтверждено строгое расположение проволоки l по оси трубки 2 и когда с высокой точностью измерены диаметры d_1 , d_2 и длина l , можно вычислить числовое значение A по формуле (4.19d), а затем рассчитать теплопроводность λ по формуле (4.19b). В этом случае метод называют «Абсолютный стационарный метод нагретой проволоки».

Если же мы располагаем эталонным веществом (жидкостью или газом) с известной зависимостью теплопроводности $\lambda = \lambda(T)$ от температуры, то в результате экспериментов с этим веществом можно найти зависимость $A = A(T)$, не проводя измерений d_1 , d_2 и l и не проверяя строгой соосности (отсутствия эксцентриситета) проволоки l и трубки 2 . В этом случае рассматриваемый метод называют «Относительный стационарный метод нагретой проволоки».

4.3 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СТАЦИОНАРНОГО МЕТОДА ШАРОВОГО СЛОЯ

4.3.1 ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УСТРОЙСТВА ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА

Рассмотрим однородный шаровой слой из исследуемого материала, теплопроводность λ которого требуется определить. Обозначим (см. рис. 4.6) внутренний и внешний радиусы этого шарового слоя R_1 и R_2 .

Если к рассматриваемому шаровому слою на его внутренней поверхности $r = R_1$ подвести неизменный во времени тепловой поток

$$-\lambda \frac{\partial T(R_1, \tau)}{\partial r} = q = \text{const},$$

направленный вдоль оси r в направлении от $r = R_1$ к $r = R_2$, то через некоторое время внутри

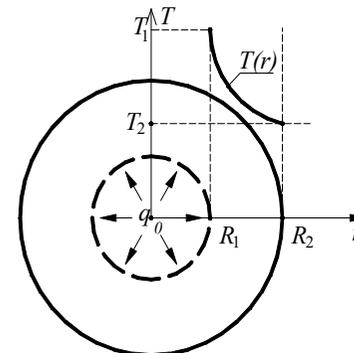


Рис. 4.6 Схематичное представление физической модели измерительного устройства

шарового слоя установится стационарное распределение температур $T(r)$, а на его внутренней и внешней поверхностях можно измерить постоянные во времени температуры:

при $r = R_1$

$$T(R_1) = T_1 = \text{const};$$

при $r = R_2$

$$T(R_2) = T_2 = \text{const}.$$

4.3.2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА И УСТРОЙСТВА

Применительно к рассматриваемой физической модели можно записать математическую модель метода шарового слоя в виде:

$$c\rho \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 \lambda \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right]; \quad (4.21)$$

$$\tau > 0, \quad R_1 < r < R_2; \quad (4.22)$$

$$T(R, 0) = T_{\text{н}}(r); \quad (4.23)$$

$$T(R_1, \tau) = T_1 = \text{const}; \quad (4.24)$$

$$T(R_2, \tau) = T_2 = \text{const} \quad (4.25)$$

с дополнительным условием, определяемым в ходе эксперимента,

$$-\lambda \frac{\partial T(R_1, \tau)}{\partial r} = q = \text{const}. \quad (4.26)$$

Задача (4.21) – (4.26) представляет собой пример нестационарной обратной (инверсной [5]) краевой задачи теплопроводности.

Принимая во внимание, что после достижения стационарного режима работы физические величины становятся постоянными и неизменными во времени, а именно:

$$T_1 = \text{const};$$

$$T_2 = \text{const};$$

$$q = \text{const};$$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = 0,$$

а также учитывая, что стационарное температурное поле $T(r) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} T(r, \tau)$ не зависит от начальных условий (4.23), исходная

краевая задача (4.21) – (4.26) приобретает вид:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \lambda \frac{dT(r)}{dr} \right] = 0; \quad (4.21a)$$

$$R_1 < r < R_2; \quad (4.22a)$$

$$T(R_1, \tau) = T_1 = \text{const}; \quad (4.24a)$$

$$T(R_2, \tau) = T_2 = \text{const} \quad (4.25a)$$

с дополнительным условием

$$-\lambda \frac{dT(R_1)}{dr} = q = \text{const}. \quad (4.26a)$$

Задача (4.21a), (4.22a), (4.24a) – (4.26a) является примером обратной (инверсной [5]) стационарной краевой задачи теплопроводности, позволяющей вычислить искомое значение λ теплопроводности материала, из которого изготовлен шаровой слой, по значениям физических величин R_1 , R_2 , T_1 , T_2 , q , измеренным в процессе эксперимента.

После преобразования уравнения (4.21a) к виду

$$\frac{d}{dr} \left[r^2 \lambda \frac{dT(r)}{dr} \right] = 0$$

и его интегрирования в пределах от $r = R_1$ до $r \leq R_2$

$$\int_{R_1}^r \frac{d}{dr} \left[r^2 \lambda \frac{dT(r)}{dr} \right] dr = \int_{R_1}^r 0 dr$$

получаем

$$r^2 \lambda \frac{dT(r)}{dr} \Big|_{R_1}^r = 0;$$

$$r^2 \lambda \frac{dT(r)}{dr} - R_1^2 \lambda \frac{dT(R_1)}{dr} = 0;$$

$$r^2 \lambda \frac{dT(r)}{dr} = R_1^2 \lambda \frac{dT(R_1)}{dr}. \quad (4.27)$$

Из дополнительного условия (4.16a) следует

$$\lambda \frac{dT(R_1)}{dr} = -q.$$

Подставим это выражение в правую часть (4.27) и получим

$$r^2 \lambda \frac{dT(r)}{dr} = -R_1^2 q \quad \text{или} \quad \frac{dT(r)}{dr} = -\frac{qR_1^2}{\lambda r^2}.$$

Вычислив определенный интеграл (в пределах от $r = R_1$ до $r = R_2$) для последнего выражения

$$\int_{R_1}^{R_2} \frac{dT(r)}{dr} dr = -\frac{qR_1^2}{\lambda} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r^2} dr$$

с учетом того, что $\int r^{-2} dr = -r^{-1}$, получим:

$$\begin{aligned} T(r) \Big|_{R_1}^{R_2} &= + \frac{qR_1^2}{\lambda} r^{-1} \Big|_{R_1}^{R_2}; \\ T(R_2) - T(R_1) &= \frac{qR_1^2}{\lambda} \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]; \\ \lambda &= q \frac{R_1^2 \left[\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right]}{T_2 - T_1}; \\ \lambda &= q \frac{R_1^2 \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]}{T_1 - T_2}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Формула (4.28) является основным расчетным соотношением, используемым для вычисления искомой теплопроводности λ по значениям физических величин R_1 , R_2 , T_1 , T_2 , q , измеряемым в ходе эксперимента при практическом осуществлении абсолютного стационарного метода шарового слоя.

4.3.3 ПОРЯДОК ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

Физическая и математическая модели рассматриваемого нами абсолютного стационарного метода шарового слоя позволяют сформулировать примерный порядок осуществления измерительных операций при экспериментальном определении теплопроводности λ , заключающийся в следующем.

1 Из исследуемого материала изготавливают образец (см. рис. 4.6) в виде шарового слоя с внутренним радиусом R_1 и внешним радиусом R_2 .

Примечания.

1 На практике шаровой слой обычно изготавливают в виде двух половинок, которые приводят в плотный контакт после размещения внутри них

- нагревателя;
- датчика температуры T_1 .

2 При измерении теплопроводности сыпучих, волокнистых, пастообразных и высоковязких материалов эти материалы в необходимом количестве помещают в полость измерительного устройства в виде шарового слоя с размерами R_1, R_2 .

3 Стационарный метод шарового слоя не применяют для исследования маловязких жидкостей и газов, так как при нагреве в них неизбежно возникает естественная конвекция, вносящая большие погрешности в результаты измерения искомой теплопроводности.

2 При подготовке к проведению эксперимента измеряют размеры R_1, R_2 шарового слоя.

Примечание. При измерении теплопроводности вязких жидкостей, пастообразных, волокнистых и сыпучих материалов размеры R_1, R_2 шаровой полости измерительного устройства обычно становятся известными сразу после изготовления установки и остаются постоянными во всех экспериментах.

3 После размещения нагревателя и датчика температуры T_1 внутри шарового слоя и установки датчика температуры T_2 на внешней поверхности этого шарового слоя начинают подводить постоянный во времени тепловой поток q , равномерно распределенный по внутренней поверхности (с радиусом $r = R_1$) шарового слоя.

4 Через определенные промежутки времени измеряют значения температур $T(R_1) = T_1$ и $T(R_2) = T_2$ на внутренней $r = R_1$ и на внешней $r = R_2$ поверхностях шарового слоя с целью определить момент времени, после которого режим работы установки станет стационарным.

5 После выхода на стационарный режим работы, когда

$$T_1 = \text{const},$$

$$T_2 = \text{const},$$

$$q = \text{const},$$

измеряют установившиеся значения температур T_1, T_2 и теплового потока q .

6 Искомую теплопроводность λ вычисляют по формуле (4.28).

Вопросы о том, как в случае использования метода шарового слоя следует измерять:

- геометрические размеры R_1, R_2 шарового слоя;
- температуры T_1, T_2 на внешних поверхностях шарового слоя;
- тепловой поток q , подводимый к внутренней поверхности $r = R_1$

шарового слоя, обычно решаются аналогично тому, как это было рассмотрено в пп. 4.1.3 и 4.2.3 данной главы.

4.3.4 ДОСТОИНСТВА И НЕДОСТАТКИ МЕТОДА ШАРОВОГО СЛОЯ

Метод шарового слоя позволяет [3, 8, 12] получить одномерный тепловой поток (4.26а) без применения каких-либо охранных нагревателей и адиабатических устройств. Это обстоятельство выгодно отличает метод шарового слоя от описанных выше методов плоского и цилиндрического слоев, которые без таких устройств применять не представляется возможным [12].

Однако шаровой прибор отличается сложностью изготовления образцов и/или деталей шаровой формы, а при осуществлении измерений требует:

- строгой центровки шаров, в полость между которыми помещают сыпучие, волокнистые, пастообразные либо высоковязкие материалы;

- преодоления трудностей, возникающих при выполнении требований к равномерности заполнения (исследуемым веществом) шарового пространства между двумя полыми концентрическими поверхностями сферической формы.

Метод шарового слоя применяют преимущественно для измерения теплопроводности сыпучих и волокнистых материалов. Из-за сложностей изготовления деталей сферической формы метод шарового слоя не получил широкого распространения.

4.4 ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СТАЦИОНАРНЫМИ МЕТОДАМИ

Результаты измерения теплопроводности веществ, полученные с применением рассмотренных выше методов, всегда содержат погрешности, составляющие которых обусловлены различными причинами и явлениями.

Для того чтобы правильно сконструировать и изготовить измерительное устройство, а затем успешно осуществить экспериментальное измерение теплопроводности веществ в соответствии с разработанным методом, необходимо знать и понимать все причины и источники погрешностей измерения теплопроводности.

Ниже рассмотрены основные источники, причины и явления, вносящие вклад в результирующую погрешность измерения теплопроводности твердых, сыпучих, пастообразных, жидких и

газообразных веществ.

4.4.1 ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ НЕПОЛНЫМ ДОСТИЖЕНИЕМ СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА РАБОТЫ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ УСТАНОВОК

Рассмотренные выше математические модели стационарных методов:

- для плоского слоя (4.1а), (4.2а), (4.4а) – (4.6а);
- для цилиндрического слоя (4.11а), (4.12а), (4.14а) – (4.16а);
- для шарового слоя (4.21а), (4.22а), (4.24а) – (4.26а),

предполагают, что измеряемые физические величины:

- тепловой поток q ;
- температуры T_1, T_2 ,

должны быть строго постоянными (неизменными) во времени, что возможно только при достижении полностью стационарного режима работы измерительной установки.

Для уменьшения влияния этого источника погрешностей необходимо контролировать изменения во времени значений измеряемых физических величин q, T_1, T_2 , а их регистрацию следует осуществлять только после того, когда будет достигнута полная уверенность в том, что желаемый стационарный режим работы экспериментальной установки достигнут с допустимой погрешностью. О достижении стационарного режима работы можно судить. Например, по динамическим критериям E_q, E_T вида:

$$E_q = \frac{\Delta\tau}{q} \frac{dq}{d\tau} \approx \frac{\Delta\tau}{q_i} \frac{q_i - q_{i-1}}{\Delta\tau} = \frac{q_i - q_{i-1}}{q_i} \leq \varepsilon_q;$$

$$E_T = \frac{\Delta\tau}{T} \frac{dT}{d\tau} \approx \frac{T_i - T_{i-1}}{T_i} \leq \varepsilon_T,$$

где $\Delta\tau$ – величина шага измерения во времени теплового потока q_i и температуры T_i ; $\varepsilon_q, \varepsilon_T$ – допустимые погрешности достижения стационарных значений теплового потока q и температуры T ; $q_i, q_{i-1}, T_i, T_{i-1}$ – значения теплового потока и температуры на i -м и на $(i-1)$ -м шагах измерения.

Для повышения надежности контроля наступления стационарного режима работы экспериментальной установки динамические критерии E_q и E_T могут быть представлены в виде:

$$E_q = \frac{q_i - q_{i-n}}{q_i} \leq \varepsilon_q ;$$

$$E_T = \frac{T_i - T_{i-n}}{T_i} \leq \varepsilon_T ,$$

где $q_i, q_{i-n}, T_i, T_{i-n}$ – значения тепловых потоков и температур на i -м и на $(i - n)$ -м шагах измерения (отстоящих друг от друга на постоянное число n шагов измерения).

Если величина шага измерения Δt во времени достаточно велика, то число n может быть задано относительно небольшим ($n = 1 \dots 5$), а при малой величине шага Δt иногда приходится задавать большое значение числа n .

4.4.2 ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ УТЕЧКАМИ ТЕПЛА ОТ ЭЛЕКТРОНАГРЕВАТЕЛЯ, ПОДВОДЯЩЕГО ТЕПЛОВОЙ ПОТОК К СЛОЮ ИССЛЕДУЕМОГО ВЕЩЕСТВА

При конструировании экспериментальных установок и при осуществлении стационарных методов измерения теплопроводностей λ должны быть исключены либо учтены потери теплового потока, проходящего через слой исследуемого вещества.

4.4.2.1 МЕТОДЫ ИСКЛЮЧЕНИЯ ИЛИ УЧЕТА ПОТЕРЬ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

При измерении теплопроводности жидкости или газа методом плоского горизонтального слоя, исследуемое вещество l помещают между двумя горизонтально расположенными пластинами 2 и 3 в соответствии со схемой, приведенной на рис. 4.7.

Тепло подводится к верхней пластине 3, обогреваемой электронагревателем 4, и через слой исследуемого вещества l проходит в нижнюю более холодную плиту 2, выполненную в виде проточного теплообменника-холодильника из хорошо проводящего тепло материала (меди или латуни) с вырезанными спиральными каналами для охлаждающей жидкости. По расходу охлаждающей жидкости, ее начальной и конечной температурам можно подсчитать количество тепла, прошедшего в единицу времени через измерительную (рабочую) часть слоя l исследуемого вещества.

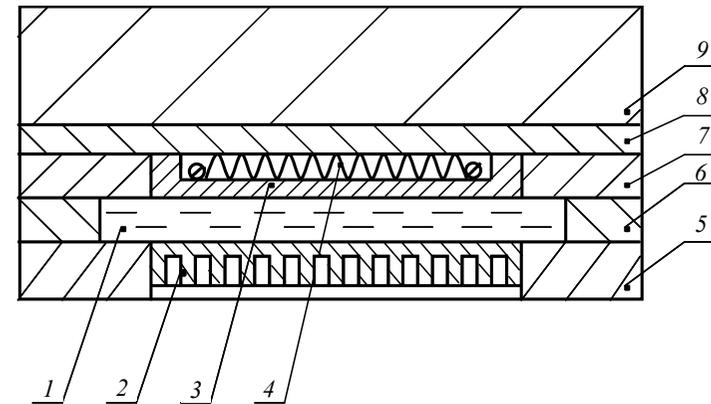


Рис. 4.7 Схема измерительного преобразователя установки, выполненной по методу плоского горизонтального слоя [8]:

1 – слой исследуемого вещества; 2 – нижняя пластина (проточный теплообменник – калориметр); 3 – верхняя пластина с размещенным в ней электронагревателем 4; 5, 7 – кольцевые охранные нагреватели; 8 – верхняя охранный обогреваемая плита; 6, 9 – теплоизоляция

Пластины как верхняя 3, так и нижняя 2 с целью предотвращения конвективного теплообмена в слое 1 исследуемой жидкости или газа, должны быть расположены строго горизонтально. При этом тепловой поток q должен быть направлен строго сверху вниз. В рассматриваемой схеме установки утечки тепла возможны с боков установки и сверху от пластины 3 с размещенным в ней электронагревателем 4. Для исключения утечек тепла в состав установки введены кольцевые охранные нагреватели 5, 7, верхняя охранный обогреваемая плита 8, слои 6, 9 защитной теплоизоляции. Для контроля за температурными полями обычно используют систему термопар (на рис. 4.7 эти термопары не показаны), размещенных во всех частях установки.

В установке, представленной на рис. 4.7, утечки тепла исключаются кольцевыми охранными нагревателями 5, 7 и верхней охранный плитой 8. Слои теплоизоляции 6, 9 дополнительно способствуют уменьшению потерь теплового потока, проходящего через слой 1 исследуемого вещества.

Описание схемы (рис. 4.7) дает представление о том, как следует бороться с утечками тепла с помощью охранных нагревателей и слоев теплоизоляции.

В методе коаксиальных цилиндров для исключения утечек тепла с торцов также применяют охранные нагреватели. Такой вариант исключения утечек теплоты был реализован в конструкции прибора Варгафтика [8, с. 32].

При применении метода нагретой проволоки утечки тепла от

концов измерительных проволок (см. рис. 4.5, з) могут быть:

– либо исключены за счет использования двух измерительных трубок, имеющих одинаковые диаметры измерительных проволок и одинаковые капилляры, но различные длины (при этом исходят из того, что при достаточно большом отношении длины капилляра к его диаметру концевые эффекты не зависят от длины трубки; вычитая сопротивление короткой проволоки из сопротивления длинной проволоки, получают сопротивление средней части длинной проволоки, освобождаясь при этом от влияния концевых эффектов);

– либо учтены расчетным путем (путем введения поправок в результаты измерений).

Отметим, что стационарный метод шарового слоя, с точки зрения теории, обладает определенным преимуществом перед методами плоских и цилиндрических слоев, так как в силу сферической симметрии при осуществлении метода шарового слоя можно наиболее точно получить одномерный тепловой поток, полностью проходящий через слой исследуемого вещества. К сожалению, из-за сложностей изготовления деталей установок и образцов сферической формы, метод шарового слоя не нашел широкого применения на практике.

4.4.2.2 ОСОБЕННОСТИ ИСКЛЮЧЕНИЯ ИЛИ УЧЕТА ПОТЕРЬ ТЕПЛООВОГО ПОТОКА ИЗ-ЗА ТЕПЛООБМЕНА ИЗЛУЧЕНИЕМ

Количество тепла $Q_{\text{л}}$, [Дж/с] = [Вт], передаваемое излучением в единицу времени (в методах плоского слоя – от нагреваемой пластины к более холодной; в методах коаксиальных цилиндров и нагретой проволоки – от внутреннего более горячего цилиндра (или проволоки) к внутренней поверхности внешнего цилиндра), может быть рассчитано по закону Стефана-Больцмана:

$$Q_{\text{л}} = \sigma \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right] F \quad (4.29)$$

или

$$q_{\text{л}} = \frac{Q_{\text{л}}}{F} = \sigma \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (4.29a)$$

где $q_{\text{л}} = \frac{Q_{\text{л}}}{F}$ – тепловой поток, Вт/м², передаваемый излучением; F – площадь излучающей поверхности, м²; T_1 , T_2 – абсолютные температуры (в градусах Кельвина, К) горячей и более холодной поверхностей;

σ – коэффициент излучения, Дж/(м²·с·К⁴).

Отметим, что поправку на потери тепла излучением обычно приходится вводить при измерении теплопроводности газов. При исследовании теплопроводности жидкостей и твердых материалов поправки на излучения оказываются достаточно небольшими, и их обычно не вводят.

При конструировании измерительной установки ее характерные размеры должны быть выбраны с учетом потерь тепла за счет излучения, особенно в тех случаях, когда планируется проводить измерения при повышенных температурах.

В целях уменьшения количества тепла, передаваемого излучением, диаметр проволоки (в методе нагретой проволоки) желательно выбирать возможно меньше. Однако при этом должна быть обеспечена достаточная механическая прочность проволоки. Из формулы (4.29) видно, что количество тепла $Q_{\text{л}}$, передаваемого излучением в единицу времени, зависит от величины площади F поверхности рабочего участка измерительной проволоки, т.е. от ее диаметра. Пример неправильного выбора диаметра нагреваемой проволоки в одной зарубежной установке, использовавшейся для измерения теплопроводности λ гелия в диапазоне температур от -183 до $+306$ °C приведен в [8, с. 41]. Из-за большой величины диаметра платиновой проволоки $d_1 = 1,465$ мм, авторам установки приходилось вводить большие по величине поправки на передачу тепла излучением в результаты измерения теплопроводности гелия:

- при $T = 0$ °C 1 %,
- при $T = 210$ °C 8 %,
- при $T = 306$ °C 20 %

от электрической мощности, выделяющейся в проволоке.

Если бы в этом же исследовании теплопроводности гелия была бы использована платиновая проволока диаметром $d_1 = 0,1$ мм, то поправка на излучение даже при температуре $T = 400$ °C не превышала бы 0,35 % от подводимой к проволоке электрической мощности.

4.4.3 ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ КОНВЕКТИВНЫМ ТЕПЛООБМЕНОМ В ОБЪЕМЕ ИССЛЕДУЕМОЙ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА

Исключение влияния конвективного переноса тепла является одним из самых существенных вопросов в практике измерения теплопроводности жидкостей и газов [18].

Для описания естественной конвекции обычно используют соотношение

$$\varepsilon = \frac{\lambda'}{\lambda} = f(\text{Ra}), \quad (4.30)$$

где λ' – эффективная теплопроводность жидкости или газа, включающая в себя как молекулярную теплопроводность λ , так и конвективную передачу тепла; ε – коэффициент конвекции (при отсутствии конвекции $\varepsilon = 1$, а при наличии конвекции $\varepsilon > 1$);

$\text{Ra} = \text{Gr Pr}$ – число Рейля; $\text{Gr} = \frac{g\beta\delta^3\rho^2\Delta T}{\mu^2}$ – число Грасгофа;

$\text{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\mu c}{\lambda}$ – число Прандтля; g – ускорение свободного падения; β – коэффициент объемного расширения; δ – толщина слоя исследуемой жидкости или газа (в случае метода плоского слоя $\delta = H$ – толщина исследуемого слоя; в случае метода коаксиальных цилиндров $\delta = R_2 - R_1$ – зазор между цилиндрами); ρ , μ , λ – плотность, динамическая вязкость и теплопроводность исследуемой жидкости или газа; c , $\nu = \mu/\rho$, $a = \frac{\lambda}{\rho c}$ – удельная теплоемкость, кинематическая вязкость и

коэффициент температуропроводности исследуемой жидкости или газа; ΔT – перепад температуры на толщине δ слоя исследуемой жидкости или газа.

В 1934 году Крауссолд обобщил [8, 18] имевшиеся к тому времени экспериментальные данные о естественной конвекции в ограниченном пространстве. Используя соотношение (4.30) Крауссолд получил для горизонтальных и вертикальных слоев, независимо от их конфигурации, единую кривую I, показанную на рис. 4.8.

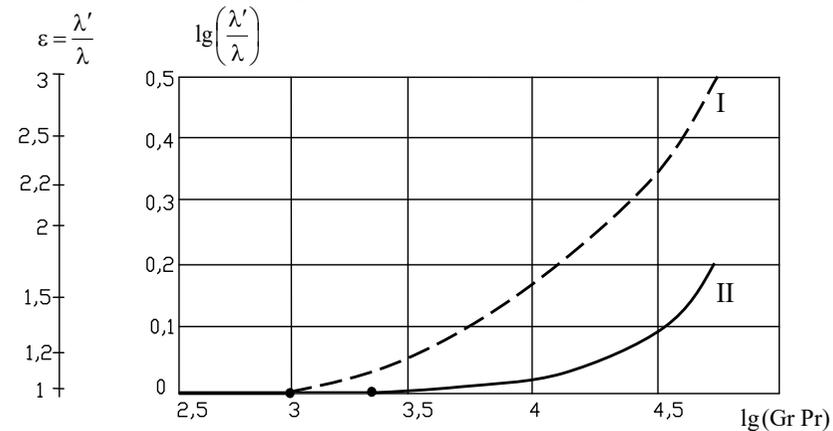


Рис. 4.8 Зависимость коэффициента конвекции ε

от логарифма числа Релея $\lg Ra = \lg(Gr Pr)$ [8, 18]:

I – по данным Крауссольда; II – по данным более поздних исследований

Из кривой I видно, что по данным Крауссольда конвекция в слое исследуемой жидкости или газа начинает искажать результаты измерения теплопроводности при $Ra > 1000$, что соответствует $\lg(Gr Pr) > 3$. При измерении теплопроводности λ все авторы обычно руководствовались этой кривой Крауссольда (обозначенной позицией I на рис. 4.8) при выборе величины допустимого перепада температуры ΔT и конструктивного параметра δ измерительных ячеек при их проектировании.

В некоторых случаях делались попытки вносить поправки в измеренные значения λ' с использованием кривой Крауссольда. Однако большинство авторов при конструировании измерительных ячеек и выборе режимов экспериментов предпочитали обеспечить выполнение условия

$$Ra < 1000, \quad (4.31)$$

гарантирующее отсутствие естественной конвекции в слое исследуемой жидкости и позволяющее отказаться от введения поправок на естественную конвекцию.

Однако все эти результаты были сформулированы Крауссольдом при обобщении данных, полученных в сравнительно широких зазорах $\delta = 7...300$ мм. Вместе с тем, при измерении теплопроводности λ жидкостей и газов реальные величины зазоров $\delta = 0,2...2$ мм и обычно не превышают $3...5$ мм.

Ученые-теплофизики Р.В. Шингарев, А.А. Беркгейм, Ю.Л. Расторгуев и В.З. Геллер в середине XX века осуществили обобщение накопленных к тому времени данных о влиянии естественной конвекции на результаты измерения теплопроводности при малых величинах зазоров $\delta \leq 6$ мм и при малых перепадах температуры ΔT на слое δ исследуемых жидкостей и газов. Результаты этих обобщений показали, что представленная на рис. 4.8 реальная кривая II $\epsilon = f(Ra)$, построенная по опытным данным при δ и ΔT , характерных для экспериментальных измерений теплопроводности, лежит заметно ниже кривой Крауссольда I.

Из результатов таких обобщений также следовало, что начало конвекции ($\epsilon > 1$) имеет место [18] при $Ra > 2000...2500$ ($\lg Ra > 3,3...3,4$).

В настоящее время можно рекомендовать [18] использовать условие

$$Ra \leq 2000, \quad (4.32)$$

обеспечивающее правильный выбор:

- величины зазора δ , являющегося главным конструктивным параметром измерительной ячейки;
- величины перепада температуры ΔT , являющегося основным режимным параметром процесса измерения теплопроводности жидкостей или газов.

Выполнение условия (4.32) гарантирует отсутствие естественной конвекции в слое исследуемой жидкости или газа (при отсутствии влияния возмущающих воздействий в виде вибраций) и позволяет обойтись без введения поправок в результаты измерения теплопроводности.

4.4.4 ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ НАЛИЧИЕМ ТЕПЛОВЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТЯХ КОНТАКТА ИССЛЕДУЕМЫХ ОБРАЗЦОВ СО СТЕНКАМИ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ЯЧЕЙКИ

При формулировке математических моделей (4.1a)–(4.6a); (4.11a)–(4.16a); (4.21a)–(4.26a) соответственно для стационарных методов плоского, цилиндрического и шарового слоев, в этих краевых задачах теплопроводности на поверхностях контакта исследуемых веществ со стенками измерительных ячеек принято задавать граничные условия первого или второго рода, например:

- в виде (4.4a), (4.5a), (4.6a) – для метода плоского слоя;
- в виде (4.14a), (4.15a), (4.16a) – для метода цилиндрического слоя;
- в виде (4.24a), (4.25a), (4.26a) – для метода шарового слоя.

При задании всех этих граничных условий предполагается, что имеет место идеальный тепловой контакт исследуемых образцов с поверхностями стенок измерительных ячеек. В действительности же далеко не всегда удается получить хороший тепловой контакт исследуемых образцов со стенками измерительной ячейки. В результате в таких местах контактирования появляются так называемые контактные тепловые сопротивления.

4.4.4.1 ПОНЯТИЕ КОНТАКТНОГО ТЕПЛОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Рассмотрим контактные тепловые сопротивления в системе плоских тел, представленной на рис. 4.9, когда одномерный тепловой поток q проходит сверху вниз в направлении, противоположном направлению оси x . При стационарном режиме для каждого слоя $1, 2, 3, 4, 5$ можно записать соотношения:

$$q_1 = \lambda_1 \frac{T_A - T_B}{h_1}; \quad (4.33a)$$

$$q_2 = \lambda_2 \frac{T_C - T_D}{h_2}; \quad (4.33b)$$

$$q_3 = \lambda_3 \frac{T_E - T_F}{h_3}; \quad (4.33c)$$

$$q_4 = \lambda_4 \frac{T_B - T_C}{\delta_4}; \quad (4.33d)$$

$$q_5 = \lambda_5 \frac{T_D - T_E}{\delta_5}. \quad (4.33e)$$

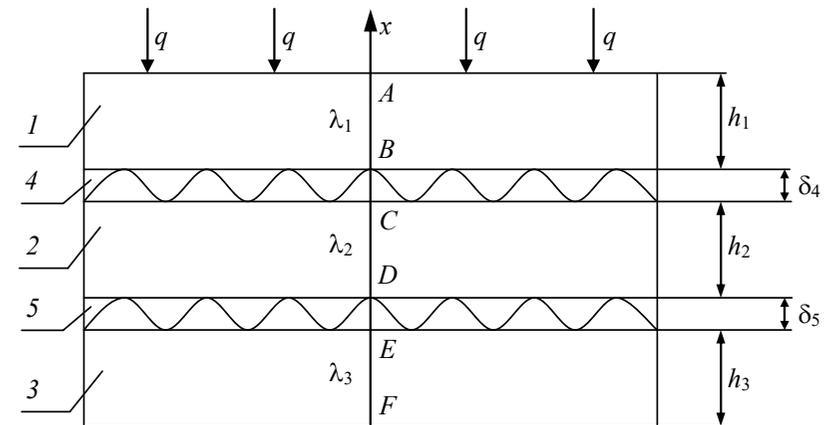


Рис. 4.9 К определению понятия контактного теплового сопротивления:

1, 3 – верхняя и нижняя пластины измерительной ячейки, работающей по стационарному методу плоского слоя; 2 – исследуемый образец;

4, 5 – места возникновения контактных тепловых сопротивлений

Принимая во внимание, что при стационарном тепловом режиме и при отсутствии потерь теплового потока

$$q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = q = \text{const},$$

из соотношений (4.33a) – (4.33e) следует, что

$$T_A - T_B = \frac{h_1}{\lambda_1} q;$$

$$T_B - T_C = \frac{\delta_4}{\lambda_4} q;$$

$$T_C - T_D = \frac{h_2}{\lambda_2} q;$$

$$T_D - T_E = \frac{\delta_5}{\lambda_5} q;$$

$$T_E - T_F = \frac{h_3}{\lambda_3} q.$$

Суммируя последние выражения, получаем:

$$\begin{aligned} T_A - T_F &= (T_A - T_B) + (T_B - T_C) + (T_C - T_D) + (T_D - T_E) + \\ &+ (T_E - T_F) = q \left(\frac{h_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_4}{\lambda_4} + \frac{h_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_5}{\lambda_5} + \frac{h_3}{\lambda_3} \right) = \\ &= q (R_{\tau 1} + R_{\tau 2} + R_{\tau 4} + R_{\tau 5} + R_{\tau 3}), \end{aligned} \quad (4.34)$$

где $R_{\tau 1} = \frac{h_1}{\lambda_1}$, $R_{\tau 2} = \frac{h_2}{\lambda_2}$, $R_{\tau 3} = \frac{h_3}{\lambda_3}$, $R_{\tau 4} = \frac{\delta_4}{\lambda_4}$, $R_{\tau 5} = \frac{\delta_5}{\lambda_5}$ – тепловые сопротивления слоев, обозначенных позициями 1, 2, 3, 4 и 5 на рис. 4.9.

Таким образом, $R_{\tau 1}$, $R_{\tau 2}$, $R_{\tau 3}$ – это тепловые сопротивления соответственно верхней пластины 1, слоя 2 исследуемого вещества и нижней пластины 3. Причем, $R_4 = \frac{\delta_4}{\lambda_4}$ и $R_5 = \frac{\delta_5}{\lambda_5}$ – это тепловые сопротивления мест контакта образца 2 соответственно с верхней 1 и с нижней 3 пластинами.

Обращаем внимание на тот факт, что формула (4.34) по своей форме практически совпадает с записью закона Ома для пяти последовательно соединенных сопротивлений:

$$U_A - U_F = I(R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5). \quad (4.35)$$

Понятно, что тепловой поток q в (4.34) является аналогом тока I в (4.35), разность температур $(T_A - T_F)$ является аналогом разности напряжений $(U_A - U_F)$, а тепловые сопротивления $R_{\tau i}$ являются аналогом электрических сопротивлений R_i .

4.4.4.2 ПРИЧИНЫ ВОЗНИКНОВЕНИЯ ТЕПЛОВЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ В МЕСТАХ КОНТАКТА ИССЛЕДУЕМЫХ ОБРАЗЦОВ

С ПОВЕРХНОСТЯМИ СТЕНОК ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЯЧЕЕК

Если бы поверхности исследуемого образца и поверхности стенок измерительных ячеек имели идеальную плоскую (цилиндрическую, сферическую) форму, то никакие контактные тепловые сопротивления на таких поверхностях соприкосновения образцов со стенками измерительных ячеек не возникали бы. Однако эти поверхности соприкосновения на практике оказываются далеко не идеальными, что приводит к появлению так называемых контактных тепловых сопротивлений.

В общем случае величина контактного теплового сопротивления $R_T = \frac{\delta_T}{\lambda_T}$ зависит от качества обработки соприкасающихся поверхностей и определяется влиянием:

- микронеровностей (микрошероховатостей);
- макронеровностей из-за различного рода отклонений формы контактирующих поверхностей от взаимной параллельности, например, из-за температурной деформации образца;
- загрязнений, появляющихся на поверхностях контакта;
- смазки, например, кремнийорганической жидкости ПФМС-4, используемой для уменьшения величины контактных тепловых сопротивлений.

Наличие контактных тепловых сопротивлений проявляется в том, что в общую измеряемую разность температур $T_A - T_F$ помимо перепадов температур $(T_A - T_B) = q \frac{h_1}{\lambda_1}$, $(T_C - T_D) = q \frac{h_2}{\lambda_2}$ и $(T_E - T_F) = q \frac{h_3}{\lambda_3}$ на верхней пластине 1, на образце 2 и на нижней пластине 3, входят перепады температур

$$(T_B - T_C) = q \frac{\delta_4}{\lambda_4},$$

$$(T_D - T_E) = q \frac{\delta_5}{\lambda_5}$$

на контактных тепловых сопротивлениях, возникающих на границе:

- соприкосновения пластины 1 с образцом 2; это тепловое сопротивление имеет неизвестные толщину δ_4 и теплопроводность λ_4 ;

– соприкосновения образца 2 с пластиной 3; это тепловое сопротивление может быть охарактеризовано неизвестными толщиной δ_5 и теплопроводностью λ_5 .

Из-за наличия контактных тепловых сопротивлений измеренный перепад температуры $(T_A - T_F)$ будет завышен на величину $(T_B - T_C) + (T_D - T_E)$, а вычисленное значение теплопроводности λ_2 исследуемого образца 2 будет занижено по сравнению с действительным значением (см. расчетные формулы (4.8), (4.18), (4.28)).

4.4.4.3 СПОСОБЫ УМЕНЬШЕНИЯ ВЛИЯНИЯ КОНТАКТНЫХ ТЕПЛОВЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ НА РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Как известно, теплота через зону контакта передается двояким путем [3]:

- через места непосредственного (фактического) контакта тел;
- через среду, заполняющую пространство между выступами микрошероховатостей и имеющимися макронеровностями.

В связи с этим можно рекомендовать следующие способы уменьшения влияния контактных тепловых сопротивлений:

1) введение поправки на контактное тепловое сопротивление, которая может быть определена либо расчетным путем, либо экспериментально на образцах с известной теплопроводностью; по ряду причин на практике предпочтение отдается экспериментальному определению контактных тепловых сопротивлений с применением образцов из высокотеплопроводных материалов;

2) принятие специальных мер для того, чтобы влияние контактных тепловых сопротивлений можно было считать пренебрежимо малым; к числу таких мер следует отнести:

- тщательную обработку поверхностей образцов с целью уменьшения микрошероховатостей и макронеровностей путем шлифовки, полировки и притирки поверхностей образцов на специальных станках и приспособлениях;

- тщательную промывку поверхностей образцов поверхностноактивными веществами и растворителями для устранения возможных загрязнений, способных привести к возрастанию контактных тепловых сопротивлений;

- использование специальных устройств для прижатия исследуемого образца к стенкам измерительной ячейки с заранее определенной силой, что способствует существенному снижению влияния контактных тепловых сопротивлений;

– использование специальных высокотеплопроводных смазок, способствующих уменьшению контактных тепловых сопротивлений.

В широком диапазоне температур $T = 80 \dots 670$ К для плотных (монокристаллических) материалов в качестве высокотеплопроводной смазки успешно применяется кремнийорганическая жидкость ПФМС-4. При более высоких температурах контактное тепловое сопротивление может быть уменьшено за счет применения газов Ag и He, обладающих достаточно высокой теплопроводностью [3].

Примечание. При исследовании пористых материалов недопустимо применение жидких смазок, так как, впитываясь в материал, они могут резко изменить его свойства [3], в том числе и теплопроводность. Некоторое улучшение теплового контакта в этом случае может быть достигнуто за счет применения сухих смазок на основе порошков высокотеплопроводных материалов: графита, алюминия, серебра.

При измерении теплопроводности жидкостей с применением стационарных методов создаются наиболее благоприятные условия для уменьшения влияния контактных тепловых сопротивлений (из-за имеющихся микрошероховатостей и макронеровностей). Однако даже в этом случае возможны существенные погрешности измерений теплопроводности из-за контактных тепловых сопротивлений, возникающих при загрязнении поверхностей стенок измерительной ячейки. Поэтому необходимо тщательно следить за чистотой поверхностей, не допускать их загрязнения из-за неправильного или небрежного выполнения операций по заполнению измерительных ячеек исследуемыми жидкостями. После завершения эксперимента необходимо сразу же тщательно промывать поверхности стенок измерительных ячеек.

4.4.4.4 ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОГО СКАЧКА НА РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ГАЗОВ

При опытном определении теплопроводности газов обычно измеряют температуру стенок измерительной ячейки. В теплофизике известно, что между телом и газом, находящимся на расстоянии среднего свободного пробега молекул газа, существует скачок температур δT .

Как установлено [8, 18], скачок температуры δT для умеренно разреженных газов пропорционален градиенту температуры по нормали к поверхности стенки

$$\delta T = \gamma \frac{dT}{dn},$$

а коэффициент $\gamma = \frac{A}{P}$ обратно пропорционален давлению газа, т.е.

$$\delta T = \frac{A}{P} \frac{dT}{dn},$$

где A – коэффициент пропорциональности.

Обычно, измеряя теплопроводность λ газов при малых давлениях $P \approx 1$ атм, поправку на величину температурного скачка δT вводят расчетным путем по формуле

$$(T_1 - T_2) = \Delta T = (t' - t'') + \frac{B}{P},$$

где $\Delta T = T_1 - T_2$ – измеренная разность между температурами T_1 и T_2 горячей и холодной поверхностей; t', t'' – температуры газа у горячей и холодной поверхностей; B – коэффициент, величина которого может быть определена расчетным путем по результатам экспериментов с газом при постоянном тепловом потоке q при нескольких значениях давления P .

Более подробно о способах учета контактных тепловых сопротивлений и температурных скачков в газах изложено в [3, 8, 10 – 14, 18].

4.4.5 ИСТОЧНИКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЕМ ТЕПЛОВЫХ ПОТОКОВ, ТЕМПЕРАТУР И ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РАЗМЕРОВ

В расчетные формулы (4.8), (4.18) и (4.28), используемые при вычислении искомой теплопроводности λ в соответствии с рассматриваемыми в данной главе стационарными методами, входят физические величины: q – тепловой поток; T_1, T_2 – температуры поверхностей исследуемых образцов; H, λ, R_1, R_2, L – геометрические размеры образцов.

Из полученных в п. 4.1.5 формул для вычисления погрешностей измерения теплопроводности видно, что результирующие погрешности определения теплопроводности зависят от абсолютных $\Delta q, \Delta T_1, \Delta T_2, \Delta H, \Delta \lambda$ и относительных $\delta T_1, \delta T_2, \delta H, \delta \lambda$ погрешностей непосредственно измеряемых физических величин q, T_1, T_2, H, λ .

Очевидно, что абсолютные и относительные погрешности непосредственно измеряемых физических величин q, T_1, T_2, H, λ могут быть уменьшены за счет:

- снижения погрешностей используемых первичных измерительных преобразователей, например, путем замены имеющихся средств измерений на более точные;
- использования методов статистической обработки результатов

многократных измерений, что позволяет (в условиях действия помех и шумов) существенно повышать точность результатов измерений;

- принятия специальных мер (использование электрических экранов; установка фильтров, устраняющих влияние внешних электромагнитных наводок переменного тока, во входных цепях используемых вторичных приборов и во входных каналах информационно-измерительных систем), снижающих влияние внешних помех и шумов;

- использования рациональных измерительных схем и выбора оптимальных вариантов организации процессов измерения, позволяющих дополнительно уменьшить влияние абсолютных погрешностей непосредственно измеряемых физических величин на конечный результат определения теплопроводности; например, при замене двух измерений температур T_1 и T_2 на одно измерение разности этих температур $T_1 - T_2$ соответствующая составляющая суммарной погрешности $\delta\lambda$ измерения теплопроводности, как это показано в конце п. 4.1.5, оказывается пропорциональной не двум абсолютным погрешностям $(\Delta T_1 + \Delta T_2)$, а всего-навсего одной абсолютной погрешности ΔT измерения разности температур $(T_1 - T_2)$; аналогично, при переходе к относительному варианту метода плоского слоя соответствующая составляющая суммарной погрешности измерения теплопроводности перестает зависеть от большой по величине абсолютной погрешности Δq измерения теплового потока, а оказывается пропорциональной меньшим по величине абсолютным погрешностям ΔT_1 и ΔT_2 измерения разности температур на толщине H , эталонного слоя.

Помимо рассмотренных в п. 4.4, в конкретных случаях возможны и другие варианты источников погрешностей. В частности, в книге [8] рассмотрено влияние эксцентриситета в методах коаксиальных цилиндров и нагретой проволоки. Возможна ситуация, когда, например, при использовании проточного теплообменника-калориметра 2, представленного на рис. 4.7, суммарная погрешность измерения теплопроводности будет иметь составляющую, зависящую от абсолютных погрешностей измерения расхода g теплоносителя, пропускаемого через этот теплообменник-калориметр.

5 МЕТОДЫ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ТЕОРИИ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ИССЛЕДУЕМОМ ОБРАЗЦЕ

5.1 МЕТОД ПЛОСКОГО МГНОВЕННОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

5.1.1 ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА И УСТРОЙСТВА ДЛЯ ЕГО ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ

Рассмотрим одномерное неограниченное пространство в декартовой системе координат. Предположим, что в точке с координатой $x = 0$ в этом неограниченном пространстве находится (см. рис. 5.1) тонкий плоский электронагреватель I , а на расстоянии $x = x_0$ от этого нагревателя – безинерционный измеритель температуры 2 , например, терморпара или термометр сопротивления.

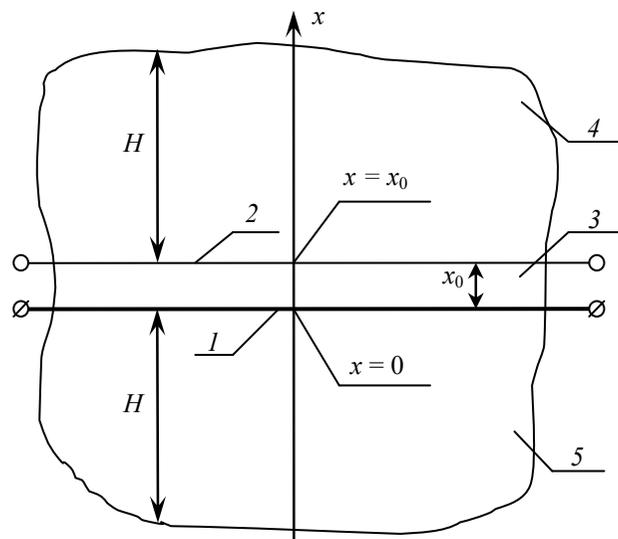


Рис. 5.1 Физическая модель метода и устройства

Если плоский электронагреватель I изготовить из тонкой нихромовой (манганиновой или константановой) проволоки диаметром порядка $0,1$ мм, а измеритель температуры 2 – из тонкой медной проволоки тоже диаметром порядка $0,1$ мм, то при расстоянии $x_0 = 2 \dots 3$

мм между нагревателем 1 и измерителем температуры 2, их геометрическими размерами, а также их теплоемкостью и теплопроводностью в большинстве случаев можно пренебречь. При этом можно считать, что очень тонкие и безинерционные электронагреватель 1 и измеритель температуры 2 практически не искажают температурное поле исследуемого вещества.

5.1.2 ПОРЯДОК ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

В случае практического применения метода плоского мгновенного источника тепла измерительные операции осуществляют, например, в следующем порядке.

1 Из исследуемого твердого материала изготавливают три пластины:

- одну тонкую пластину толщиной x_0 , обозначенную цифрой 3 на рис. 5.1;
- две массивные (толстые) пластины, обозначенные цифрами 4 и 5 на рис. 5.1, причем, толщина H этих пластин должна не менее чем в десять-двадцать раз превышать толщину x_0 тонкой пластины 3.

2 Плоский нагреватель 1 размещают между пластинами 3 и 5, а измеритель температуры 2 – с другой стороны, между пластинами 3 и 4. Для уменьшения влияния контактных тепловых сопротивлений, необходимо обеспечить необходимую силу прижатия пластин к нагревателю 1 и к измерителю температуры 2. При необходимости рекомендуется использовать высокотеплопроводные смазки, способствующие существенному снижению погрешностей измерений из-за влияния контактных тепловых сопротивлений, возникающих на поверхностях контакта рассматриваемой системы.

3 Получившуюся систему, включающую в себя пластины 3, 4, 5 с зажатыми между ними нагревателем 1 и измерителем температуры 2, в течении достаточно большого промежутка времени выдерживают при заданной температуре T_0 . Длительность этого промежутка времени выбирают из условия, что число Фурье $Fo = \frac{a\tau}{L^2}$ для рассматриваемой системы образцов должно быть $Fo \geq 0,5$, где a – температуропроводность исследуемого материала; L – характерный размер системы (для нашего случая $L = x_0 + 2H$); τ – время.

Например, при $Fo = 0,5$, $a = 1,06 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $x_0 = 3 \text{ мм}$, $H = 50 \text{ мм}$, $L = 103 \text{ мм} = 1,03 \cdot 10^{-1} \text{ м}$, $L^2 = 1,06 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$, получаем, что длительность предварительной выдержки образцов при подготовке к эксперименту должна быть

$$\tau \geq Fo \frac{L^2}{a} = 0,5 \frac{1,06 \cdot 10^{-2}}{1,06 \cdot 10^{-7}} = 0,5 \cdot 10^5 \text{ с} = 50\,000 \text{ с} \approx 13,9 \text{ ч}.$$

Если принять, что $Fo = 0,5$, $a = 1,06 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$, $x_0 = 2 \text{ мм}$, $H = 20 \text{ мм}$, $L = 42 \text{ мм} = 4,2 \cdot 10^{-2} \text{ м}$, $L^2 = 17,64 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, то получаем

$$\tau \geq 0,5 \frac{17,64 \cdot 10^{-4}}{1,06 \cdot 10^{-7}} = 8,32 \cdot 10^3 \text{ с} = 8320 \text{ с} \approx 2,36 \text{ ч}.$$

Таким образом, для предварительного выдерживания образцов при заданной начальной температуре T_0 , в абсолютном большинстве случаев, требуется не менее двух часов.

4 После предварительного выдерживания образцов из исследуемого материала при заданной температуре T_0 , начинается активная часть эксперимента, обычно занимающая несколько десятков секунд и не превышающего, как правило, нескольких минут.

Активная часть эксперимента начинается в тот момент времени, когда на электронагреватель I подается короткий электрический импульс. За время действия этого импульса в единице площади плоского нагревателя выделяется определенное количество тепла

$$Q_n = \int_0^{\tau_n} P(\tau) d\tau \approx P\tau_n,$$

где P – электрическая мощность [$\text{Вт}/\text{м}^2$], приходящаяся на единицу площади плоского нагревателя; τ_n – длительность импульса.

Для того чтобы в каждом эксперименте количество тепла Q_n было одинаковым, необходимо обеспечить, чтобы сопротивление R электронагревателя, напряжение U , подаваемое на этот нагреватель, и длительность импульса τ_n были постоянными, т.е. $R = \text{const}$, $U = \text{const}$, $\tau_n = \text{const}$. Тогда мощность P , выделяющаяся в электронагревателе

$$P = \frac{U^2}{R} = \text{const}, \quad \text{и} \quad \text{соответственно} \quad \text{количество} \quad \text{тепла} \\ Q_n = P\tau_n = \text{const}.$$

В некоторых случаях для выполнения условия $Q_n = \text{const}$ применяют конденсаторы постоянной емкости. При подготовке к эксперименту такой конденсатор (часто – конденсаторную батарею) заряжают до постоянного напряжения $U = \text{const}$, а в момент начала активной стадии эксперимента накопившийся в конденсаторе электрический заряд $q_0 = \text{const}$ пропускают через электронагреватель I . Такой подход позволяет в каждом эксперименте осуществлять практически «мгновенный» подвод заданного количества тепла

$Q_n = \text{const}$ за достаточно малый промежуток времени $\tau_n \rightarrow 0$.

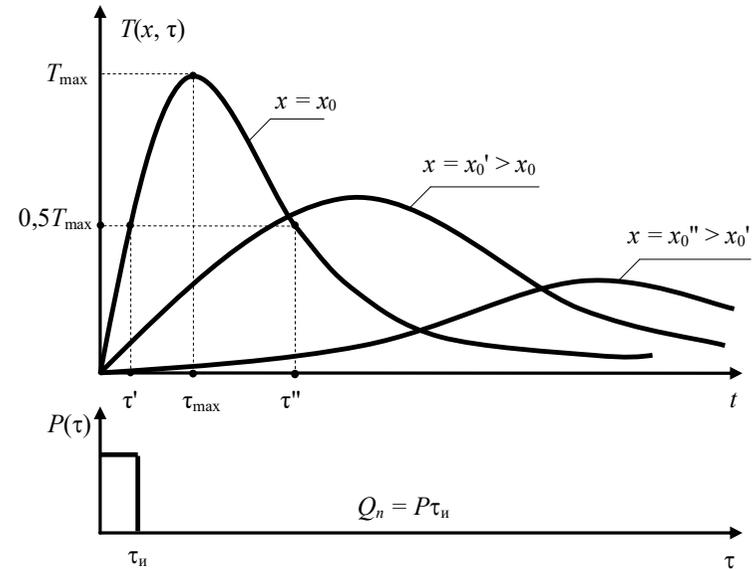


Рис. 5.2 Изменение температуры во времени в точке $x = x_0$ после действия «мгновенного» источника тепла при $\tau_n \rightarrow 0$

5 После действия "мгновенного" источника тепла на протяжении активной стадии эксперимента осуществляют измерение и регистрацию сигнала измерителя температуры 2. Характер изменения этого сигнала во времени представлен на рис. 5.2.

Активную стадию эксперимента часто завершают при $\tau > \tau_{\max}$, но во многих случаях предпочитают зарегистрировать экспериментальные данные вплоть до момента времени $\tau > \tau''$, где τ_{\max} – момент времени, соответствующий достижению максимального значения температуры T_{\max} ; τ' , τ'' – моменты времени (см. рис. 5.2), в которые измеряемая температура принимает значения $0,5T_{\max}$.

6 После завершения активной части эксперимента по полученным данным (x_0 , Q_n , T_{\max} , τ_{\max} или τ' , τ'') вычисляют искомые теплофизические свойства исследуемого вещества по расчетным формулам, вывод которых рассмотрен ниже.

5.1.3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА И УСТРОЙСТВА

Математическая модель метода плоского «мгновенного»

источника тепла, описывающая температурное поле в исследуемом материале, имеет вид:

$$c\rho \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right] + Q_n \delta(\tau) \delta(x), \quad \tau > 0, \quad -\infty < x < +\infty; \quad (5.1)$$

$$T(x, 0) = T_0 = 0; \quad (5.2)$$

$$T(-\infty, \tau) = T(+\infty, \tau) = T_0 = 0, \quad (5.3)$$

где $T(x, \tau)$ – температура в точке с координатой x в момент времени τ ; c, ρ, λ – удельная теплоемкость, плотность и теплопроводность исследуемого вещества; T_0 – начальная температура вещества, принимаемая за начало температурной шкалы данного эксперимента ($T_0 = 0$);

Q_n [Дж/м²] – количество тепла, выделившееся в единице поверхности плоского нагревателя; $\delta(\tau), \delta(x)$ – символические дельта-функции Дирака, обладающие свойствами [16]:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x = 0; \\ 0 & \text{при } x \neq 0; \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi) d\xi = 1; \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\int_a^b f(\xi) \delta(x - \xi) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \text{ и } x > b; \\ \frac{1}{2} f(x+0) & \text{при } x = a; \\ \frac{1}{2} f(x-0) & \text{при } x = b; \\ f(x) & \text{при } a < x < b. \end{cases} \quad (5.4a)$$

Функций, обладающих в точности такими свойствами, не существует, однако δ -функцию Дирака можно рассматривать как предел некоторых обычных функций, например [16]:

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 x^2 + 1)};$$

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2};$$

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\alpha \sin \alpha x}{\sqrt{\pi} \alpha x}.$$

5.1.3.1 РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Общее решение задачи (5.1) – (5.3) имеет вид [1]:

$$T(x, \tau) = \frac{Q_n}{c\rho\sqrt{4\pi a\tau}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a\tau}\right]. \quad (5.5)$$

Покажем, что выражение (5.5) является решением краевой задачи (5.1) – (5.3). Для этого сначала продифференцируем (5.5) по времени τ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{Q_n}{c\rho\sqrt{4\pi a}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\tau^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a}\tau^{-1}\right) \right] = \\ &= \frac{Q_n}{c\rho\sqrt{4\pi a}} \left[-\frac{1}{2}\tau^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a}\tau^{-1}\right) + \tau^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a}\tau^{-1}\right) \left(-\frac{x^2}{4a}\right) \cdot (-1)\tau^{-2} \right] = \\ &= \frac{Q_n \tau^{-\frac{3}{2}}}{c\rho\sqrt{4\pi a}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) \left[\frac{x^2}{4a\tau} - \frac{1}{2} \right]. \end{aligned} \quad (5.5a)$$

Затем продифференцируем (5.5) два раза по пространственной координате x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\lambda \frac{\partial T(x, \tau)}{\partial x} \right] &= \lambda \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2} = \\ &= \frac{Q_n \lambda}{c\rho\sqrt{4\pi a\tau}} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) \right] = \frac{Q_n a}{\sqrt{4\pi a\tau}} \frac{\partial}{\partial x} \left[\exp\left(-\frac{1}{4a\tau}x^2\right) \left(-\frac{1}{4a\tau}\right) 2x \right] = \\ &= \frac{Q_n a}{\sqrt{4\pi a\tau}} \left(-\frac{1}{2a\tau}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left[x \exp\left(-\frac{1}{4a\tau}x^2\right) \right] = \\ &= -\frac{Q_n}{2\tau\sqrt{4\pi a\tau}} \left[\exp\left(-\frac{1}{4a\tau}x^2\right) + x \exp\left(-\frac{1}{4a\tau}x^2\right) \left(-\frac{1}{4a\tau}\right) 2x \right] = \\ &= -\frac{Q_n 2}{2\tau\sqrt{4\pi a\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) \left[\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4a\tau} \right] = \frac{Q_n \tau^{-\frac{3}{2}}}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) \left(\frac{x^2}{4a\tau} - \frac{1}{2} \right). \end{aligned} \quad (5.5b)$$

Подставив (5.5a) и (5.5b) в (5.1), получим

$$\frac{Q_n}{\sqrt{4\pi a\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) \left[\frac{x^2}{4a\tau} - \frac{1}{2}\right] = \frac{Q_n}{\sqrt{4\pi a\tau}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) \left[\frac{x^2}{4a\tau} - \frac{1}{2}\right]. \quad (5.1a)$$

Видно, что решение (5.5) после подстановки в (5.1) дает равенство (5.1a), которое всегда выполняется при $\tau > 0$, когда $Q_n \delta(\tau) \delta(x) = 0$, так как δ – функция Дирака обладает свойствами (5.4), в силу которых $\delta(\tau) = 0$ при $\tau \neq 0$ ($\tau > 0$).

5.1.3.2 РЕШЕНИЕ ИНВЕРСНОЙ (ОБРАТНОЙ) КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Из изложенного выше примерного порядка осуществления эксперимента видно, что при обработке экспериментальных данных искомые теплофизические свойства вычисляются с учетом измеренных значений физических величин

$$x_0, Q_n, T_{\max}, \tau_{\max}.$$

Получим расчетные формулы для вычисления искомых теплофизических свойств исследуемого материала.

Из рис. 5.2 видно, что T_{\max} и τ_{\max} являются координатами точки экстремума (максимума) на графике функции $T(x, \tau)$, построенному по экспериментальным данным. Для поиска экстремума функции $T(x, \tau)$ воспользуемся известным в математике необходимым условием экстремума в виде

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = 0.$$

С учетом уже выполненной процедуры вычисления этой производной, имеющей вид (5.5a), необходимое условие экстремума функции (5.5) имеет вид

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{Q_n}{c\rho\sqrt{4\pi a\tau^3}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) \left(\frac{x^2}{4a\tau} - \frac{1}{2}\right) = 0,$$

откуда следует, что решение (5.5) имеет экстремумы в следующие моменты времени:

$$\tau = \infty, \text{ так как } \frac{Q_n}{c\rho\sqrt{4\pi a\tau^3}} = 0 \text{ при } \tau = \infty;$$

$$\tau = 0, \text{ так как } \exp\left(-\frac{x^2}{4a\tau}\right) = 0 \text{ при } \tau = 0;$$

$$\tau = \frac{x^2}{2a}, \text{ так как } \left(\frac{x^2}{4a\tau} - \frac{1}{2} \right) = 0 \text{ при } \tau = \frac{x^2}{2a}.$$

Из последнего соотношения получаем

$$a = \frac{x_0^2}{2\tau_{\max}}, \quad (5.6)$$

где τ_{\max} – момент времени, в который экспериментально измеренная функция $T(x, \tau)$ имеет экстремум; x_0 – расстояние (см. рис. 5.1) от плоского электронагревателя I до измерителя температуры 2.

Получим расчетную формулу для вычисления других теплофизических свойств. Для этого примем во внимание, что в момент времени

$\tau = \tau_{\max}$ в точке с координатой $x = x_0$ температура $T(x_0, \tau_{\max}) = T_{\max}$.

С учетом того, что $\tau_{\max} = \frac{x_0^2}{2a}$, на основании (5.5) получим

$$T_{\max} = \frac{Q_n}{c\rho\sqrt{4\pi a \frac{x_0^2}{2a}}} \exp\left[-\frac{x_0^2}{4a \frac{x_0^2}{2a}}\right] = \frac{Q_n}{c\rho\sqrt{2\pi} x_0} \exp\left[-\frac{1}{2}\right] = \frac{Q_n}{c\rho\sqrt{2\pi e} x_0},$$

откуда следует, что объемную теплоемкость $c\rho$, с учетом измеренного максимального значения температуры T_{\max} и известного геометрического размера x_0 , можно вычислить по формуле

$$c\rho = \frac{Q_n}{T_{\max} x_0 \sqrt{2\pi e}}. \quad (5.7)$$

С учетом формул (5.6) и (5.7) получаются расчетные соотношения для вычисления других теплофизических свойств исследуемого материала:

$$\lambda = ac\rho = \frac{Q_n x_0}{2\sqrt{2\pi e} \tau_{\max} T_{\max}}; \quad (5.8)$$

$$b = \sqrt{\lambda c\rho} = \frac{Q_n}{\sqrt{4\pi e} \tau_{\max} T_{\max}}, \quad (5.9)$$

где b – коэффициент тепловой активности.

Соотношения (5.6) – (5.9) лежат в основе метода мгновенного

источника тепла.

Отметим, что определение момента времени τ_{\max} по экспериментальной кривой (см. рис. 5.2) характеризуется низкой точностью. В связи с этим оказалось целесообразней использовать участки температурной кривой, имеющие (см. рис. 5.2) наибольшую крутизну, например точки с координатами $(\tau', T_{\max}/2)$, $(\tau'', T_{\max}/2)$, для которых получены расчетные соотношения [3]:

$$a = \frac{x_0^2}{7,4\tau'}; \quad (5.6a)$$

$$a = \frac{x_0^2}{0,202\tau''}, \quad (5.6b)$$

где τ' , τ'' – моменты времени, в которые температурная кривая $T(x_0, \tau)$ принимает значения $T_{\max}/2$, причем, момент времени τ' определяют на участке возрастания температура $T(x_0, \tau)$ до достижения максимального значения T_{\max} , а момент времени τ'' – на участке убывания температуры $T(x_0, \tau)$ после прохождения максимального значения T_{\max} этой температуры.

Подставив значения $(\tau', T_{\max}/2)$ в (5.5) получим

$$T(x_0, \tau') = \frac{T_{\max}}{2} = \frac{Q_n}{c\rho\sqrt{4\pi a\tau'}} \exp\left[-\frac{x_0^2}{4a\tau'}\right]$$

или

$$c\rho = \frac{Q_n}{\sqrt{\pi a\tau'} T_{\max}} \exp\left[-\frac{x_0^2}{4a\tau'}\right]. \quad (5.7a)$$

Аналогично, после подстановки значений $(\tau'', T_{\max}/2)$ в (5.5), получим

$$T(x_0, \tau'') = \frac{T_{\max}}{2} = \frac{Q_n}{c\rho\sqrt{4\pi a\tau''}} \exp\left[-\frac{x_0^2}{4a\tau''}\right]$$

или

$$c\rho = \frac{Q_n}{\sqrt{\pi a\tau''} T_{\max}} \exp\left[-\frac{x_0^2}{4a\tau''}\right]. \quad (5.7b)$$

Расчетные формулы (5.7a) и (5.7b) позволяют (с учетом уже рассчитанной по формулам (5.6a), (5.6b) и известной

температуропроводности a) вычислить сначала объемную теплоемкость $c\rho$, а затем теплопроводность и коэффициент тепловой активности

$$\lambda = ac\rho, \quad b = \sqrt{\lambda c\rho}.$$

5.1.4 ВВЕДЕНИЕ ПОПРАВОК НА КОНЕЧНУЮ ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ТЕПЛОВОГО ИМПУЛЬСА

Расчетные формулы (5.6) – (5.9) были получены в предположении, что мгновенный источник тепла в уравнении (5.1) с достаточно высокой точностью может быть представлен в виде выражения $Q_n \delta(\tau) \delta(x)$, записанного с использованием δ -функции Дирака. Это означает, что длительность теплового импульса в реальном эксперименте должна быть во много раз меньше значения τ_{\max} момента времени, в который достигается максимальное значение температуры T_{\max} . Однако при практическом проведении экспериментов приходится увеличивать длительность τ_n импульса, подводимого к электронагревателю, для того чтобы получить возможность зарегистрировать (с необходимой точностью) измеряемую температуру $T(x_0, \tau)$.

Расчетные соотношения, позволяющие вводить поправки (на конечную длительность τ_n теплового импульса) в результаты измерения теплофизических свойств веществ, имеют вид [17]:

$$a = \frac{x_0^2}{2\tau_n} \varphi_a \left(\frac{\tau_n}{\tau_{\max}} \right); \quad (5.6c)$$

$$c\rho = \frac{2Q_n \tau_n}{x_0 T_{\max}} \varphi_{c\rho} \left(\frac{\tau_n}{\tau_{\max}} \right); \quad (5.7c)$$

$$\lambda = ac\rho = \frac{x_0 Q_n}{T_{\max}} \varphi_\lambda \left(\frac{\tau_n}{\tau_{\max}} \right), \quad (5.8a)$$

где $\varphi_a \left(\frac{\tau_n}{\tau_{\max}} \right)$, $\varphi_{c\rho} \left(\frac{\tau_n}{\tau_{\max}} \right)$, $\varphi_\lambda \left(\frac{\tau_n}{\tau_{\max}} \right) = \varphi_a \varphi_{c\rho}$ – поправочные функции,

приведенные в [17], учитывающие, что реальный источник тепла является не δ -функцией Дирака, а конечным импульсом с длительностью τ_n . Видно, что величина поправки зависит от отношения τ_n/τ_{\max} длительности импульса τ_n к значению момента времени τ_{\max} , в который температурный отклик $T(x_0, \tau)$ принимает (см. рис. 5.2) максимальное значение T_{\max} .

5.1.5 ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА «МГНОВЕННОГО» ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

С учетом рассмотренной в п. 4.1.5 методики легко получить расчетные соотношения для вычисления погрешностей измерения теплофизических свойств. В частности, на основании формулы (5.6с), представленной в виде

$$a = \frac{x_0^2}{2\tau_{\text{и}}} \varphi_a(\omega); \quad \omega = \frac{\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{max}}},$$

легко получаем оценку предельной относительной погрешности $(\delta a)_{\text{пр}}$ измерения температуропроводности. Для этого прологарифмируем последнее выражение

$$\ln a = 2 \ln x_0 + \ln \varphi_a(\omega) - \ln 2 - \ln \tau_{\text{и}},$$

а затем найдем дифференциал от левой и правой частей

$$\frac{da}{a} = 2 \frac{dx_0}{x_0} + \frac{d\varphi_a(\omega)}{\varphi_a(\omega)} - \frac{d2}{2} - \frac{d\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{и}}}.$$

Принимая во внимание, что $\frac{d2}{2} = 0$, $d\varphi_a = \frac{d\varphi_a(\omega)}{d\omega} d\omega$, получаем

$$\frac{da}{a} = 2 \frac{dx_0}{x_0} + \frac{1}{\varphi_a(\omega)} \frac{d\varphi_a(\omega)}{d\omega} d\omega - \frac{d\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{и}}}.$$

Поступая аналогично с соотношением $\omega = \frac{\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{max}}}$, получаем:

$$\ln \omega = \ln \tau_{\text{и}} - \ln \tau_{\text{max}};$$

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{d\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{и}}} - \frac{d\tau_{\text{max}}}{\tau_{\text{max}}} \quad \text{или} \quad d\omega = \omega \left[\frac{d\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{и}}} - \frac{d\tau_{\text{max}}}{\tau_{\text{max}}} \right].$$

Производя принятую в теории погрешностей замену дифференциалов на абсолютные погрешности $dx_0 \approx \Delta x_0$, $d\tau_{\text{max}} \approx \Delta \tau_{\text{max}}$, $d\tau_{\text{и}} \approx \Delta \tau_{\text{и}}$, после замены всех знаков « \rightarrow » на знаки « $+$ » получаем

$$\left(\frac{\Delta a}{a} \right)_{\text{пр}} = 2 \left(\frac{\Delta x_0}{x_0} \right) + \left(\frac{\Delta \tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{и}}} \right) + \frac{1}{\varphi_a(\omega)} \frac{d\varphi_a(\omega)}{d\omega} \omega \left[\frac{\Delta \tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{и}}} + \frac{\Delta \tau_{\text{max}}}{\tau_{\text{max}}} \right];$$

$$(\delta a)_{\text{пр}} = 2\delta x_0 + \delta\tau_{\text{и}} + \frac{1}{\varphi_a(\omega)} \frac{d\varphi_a(\omega)}{d\omega} \omega [\delta\tau_{\text{и}} + \delta\tau_{\text{max}}], \quad (5.10a)$$

Среднеквадратичная оценка относительной погрешности измерения температуропроводности вычисляется по формуле

$$(\delta a)_{\text{ск}} = \sqrt{4(\delta x_0)^2 + (\delta\tau_{\text{и}})^2 + \left[\frac{1}{\varphi_a(\omega)} \frac{d\varphi_a(\omega)}{d\omega} \omega \sqrt{(\delta\tau_{\text{и}})^2 + (\delta\tau_{\text{max}})^2} \right]^2}. \quad (5.10b)$$

Аналогично, на основании формулы (5.7с) получаем соотношения для вычисления как предельной оценки $(\delta c\rho)_{\text{пр}}$, так и среднеквадратичной оценки $(\delta c\rho)_{\text{ск}}$ относительной погрешности измерения объемной теплоемкости $c\rho$ в виде:

$$(\delta c\rho)_{\text{пр}} = \delta x_0 + \delta T_{\text{max}} + \delta Q_n + \delta\tau_{\text{и}} + \frac{1}{\varphi_{c\rho}(\omega)} \frac{d\varphi_{c\rho}(\omega)}{d\omega} \omega [\delta\tau_{\text{и}} + \delta\tau_{\text{max}}]; \quad (5.10c)$$

$$(\delta c\rho)_{\text{ск}} = \sqrt{(\delta x_0)^2 + (\delta T_{\text{max}})^2 + (\delta Q_n)^2 + (\delta\tau_{\text{и}})^2 + \left[\frac{1}{\varphi_{c\rho}(\omega)} \frac{d\varphi_{c\rho}(\omega)}{d\omega} \omega \sqrt{(\delta\tau_{\text{и}})^2 + (\delta\tau_{\text{max}})^2} \right]^2}. \quad (5.10d)$$

При практическом осуществлении метода «мгновенного» источника тепла *наибольший вклад* в суммарные погрешности δa , $\delta c\rho$, $\delta\lambda$ измерения температуропроводности a , объемной теплопроводности $c\rho$ и теплопроводности λ вносят:

1) относительная погрешность $\delta\tau_{\text{max}} = \frac{\Delta\tau_{\text{max}}}{\tau_{\text{max}}}$ измерения времени τ_{max} , обусловленная тем фактом, что функция $T(x_0, \tau)$, представленная на рис. 5.2, имеет неярко выраженный максимум, что приводит к существенным абсолютным погрешностям $\Delta\tau_{\text{max}}$, достигающим иногда до 10 % от величины τ_{max} ;

2) относительная погрешность $\delta x_0 = \frac{\Delta x_0}{x_0}$ измерения расстояния

x_0 между (см. рис. 5.1) нагревателем 1 и измерителем температуры 2;

3) относительная погрешность $\delta Q_n = \frac{\Delta Q_n}{Q_n}$ измерения количества

тепла, выделившегося в единице поверхности нагревателя 2.

В большинстве случаев погрешности измерения $\delta \tau_n$ и δT_{\max} вносят заметно меньший вклад в суммарные погрешности измерения теплофизических свойств.

5.1.6 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ И ОБЪЕМНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Обработка экспериментальных данных, полученных при практическом осуществлении метода мгновенного источника тепла, сопряжена с существенными погрешностями, возникающими из-за сложности точного определения значения момента времени τ_{\max} .

Такую случайную погрешность можно заметно снизить, если использовать [3] рассмотренный ниже вариант обработки экспериментальной температурной кривой $T(x_0, \tau)$.

Если ввести новые переменные [3]:

$$z = \frac{1}{\tau}; \quad y = \frac{2\sqrt{\pi}}{Q_n} T(x_0, \tau)\sqrt{\tau},$$

то функцию (5.5) удастся представить (см. рис. 5.3) в системе координат $(\ln y, z)$ линейной зависимостью:

$$T(x_0, \tau) = \frac{Q_n}{2\sqrt{\pi c \rho \lambda} \sqrt{\tau}} \exp\left[-\frac{x_0^2}{4a} \frac{1}{\tau}\right];$$

$$\frac{T(x_0, \tau) 2\sqrt{\pi} \sqrt{\tau}}{Q_n} = \frac{1}{\sqrt{c \rho \lambda}} \exp\left[-\frac{x_0^2}{4a} z\right];$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{c \rho \lambda}} \exp\left[-\frac{x_0^2}{4a} z\right];$$

$$\ln y = \ln y_0 - \frac{x_0^2}{4a} z,$$

или

$$\ln y = \ln y_0 - hz, \quad (5.11)$$

где $y_0 = (c\rho\lambda)^{-0.5}$ – вспомогательная величина, обратная коэффициенту тепловой активности $b = \sqrt{\lambda c\rho}$; $h = \frac{x_0^2}{4a}$ – тангенс угла наклона зависимости (5.11), представленной на рис. 5.3.

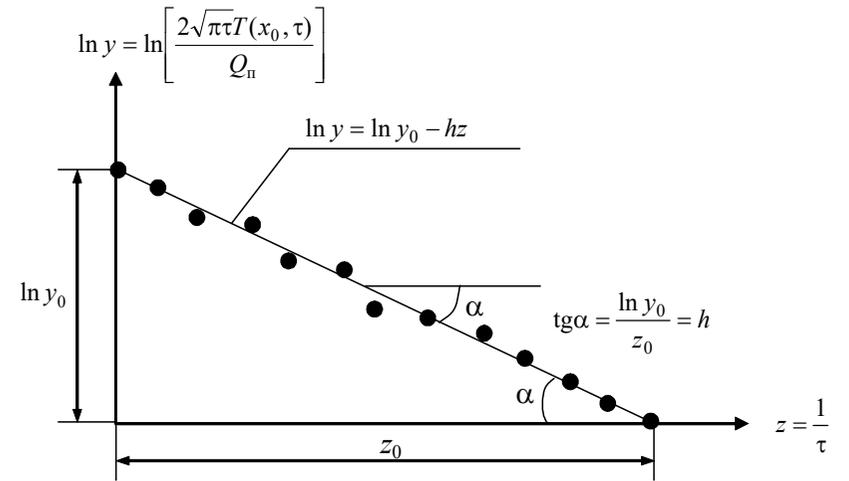


Рис. 5.3 К вопросу об обработке экспериментальной информации в системе координат $(\ln y, z)$

В результате графической или компьютерной обработки экспериментальных данных находят значения $\ln y_0 = \ln \left[\frac{1}{\sqrt{\lambda c\rho}} \right]$ и $h = \frac{x_0^2}{4a}$, а затем искомые теплофизические свойства исследуемого материала вычисляют по формулам

$$a = \frac{x_0^2}{4h}; \quad (5.6d)$$

$$c\rho = \frac{1}{\sqrt{ay_0}}; \quad (5.7d)$$

$$\lambda = ac\rho = \frac{x_0^2}{4h\sqrt{ay_0}}; \quad (5.8b)$$

$$b = \sqrt{c\rho\lambda} = \frac{1}{y_0}. \quad (5.9a)$$

Использование рассмотренного в п. 5.1.6 подхода к обработке экспериментальных данных позволяет снизить влияние случайных погрешностей измерений на результаты вычисления искомых теплофизических свойств a , $c\rho$, λ и b за счет того, что при вычислении величин y_0 и h используется (см. рис. 5.3) большое количество экспериментальных точек.

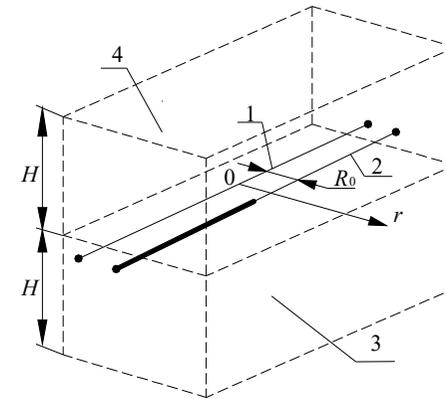
На основании формул (5.6d), (5.7d), (5.8b) и (5.9a) легко получить расчетные соотношения для вычисления предельных и среднеквадратичных оценок погрешностей измерения искомых теплофизических свойств a , $c\rho$, λ и b .

5.2 МЕТОД ЛИНЕЙНОГО МГНОВЕННОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

5.2.1 ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА И УСТРОЙСТВА ДЛЯ ЕГО ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ

Рассмотрим (см. рис. 5.4, *a*) одномерное неограниченное пространство в цилиндрической системе координат. Поместим в точку с координатой $r = 0$ этого пространства линейный электронагреватель 1 (выполненный, например, в виде тонкой металлической проволоки), а на расстоянии $r = r_0$ от нагревателя разместим измеритель температуры 2 (например, в виде термопары или термометра сопротивления).

Если линейный нагреватель 1 изготовить из тонкой нихромовой (манганиновой или константановой) проволоки диаметром порядка 0,1 мм, а измеритель температуры 2 выполнить в виде термопары, например, из хромелевой и копелевой проволочек тоже малого диаметра порядка 0,1 мм, то при расстоянии $r_0 = 2...3$ мм между нагревателем 1 и измерителем температуры 2 , их геометрическими размерами, а также влиянием их теплоемкости и теплопроводности на результаты измерения, можно пренебречь.

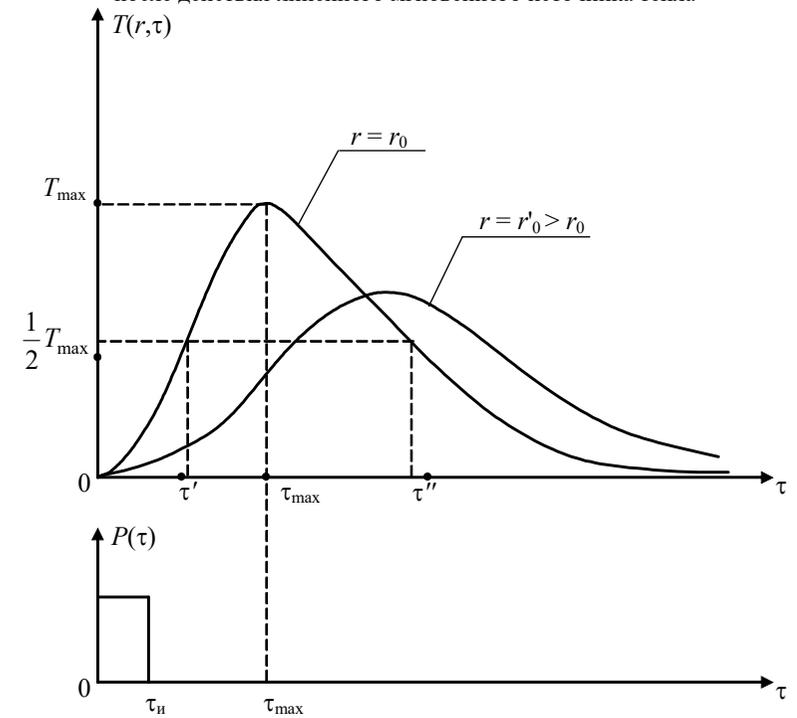


a)

Рис. 5.4 К методу линейного мгновенного источника тепла:

a – физическая модель метода и устройства;

б – изменение температуры $T(r, \tau)$ во времени в точке $r = r_0$ после действия линейного мгновенного источника тепла



б)

Рис. 5.4 Окончание

5.2.2 ПОРЯДОК ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

При практическом применении метода линейного мгновенного источника тепла измерительные операции осуществляют (см. рис. 5.5) в определенном порядке.

1 В простейшем случае из исследуемого материала изготавливают две массивные (толстые) пластины, обозначенные позициями 3 и 4 на рис. 5.4. Толщина H этих пластин должна на менее, чем в десять-двадцать раз превышать расстояние r_0 между электронагревателем 1 и измерителем температур 2. При $r = 3$ мм должно быть $H = 30 \dots 60$ мм, а при $r = 2$ мм – $H = 20 \dots 40$ мм.

Примечание. Возможен второй вариант, когда (по аналогии с рис. 5.1) из исследуемого материала изготавливаются три плоских образца: один тонкий толщиной $r_0 = 2 \dots 3$ мм и два толстых (массивных) толщиной $H \geq (10 \dots 20) r_0$.

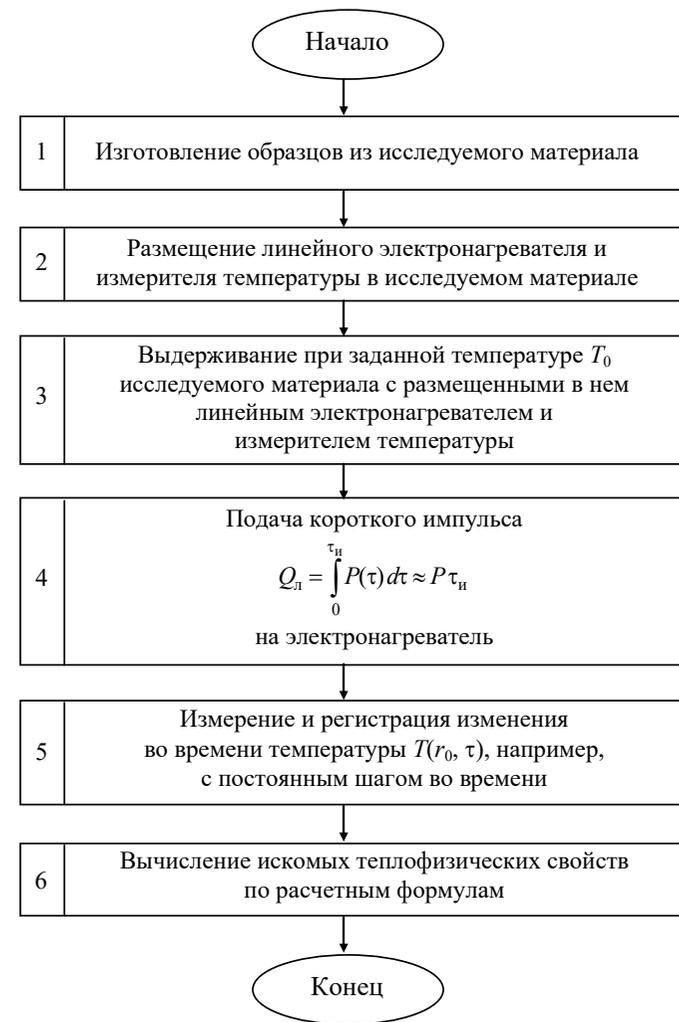


Рис. 5.5 Блок-схема, иллюстрирующая примерный порядок осуществления эксперимента с использованием метода линейного мгновенного источника тепла

2 Линейный нагреватель 1 и измеритель температуры 2 размещают между плоскими образцами 3 и 4 так, как это показано на рис. 5.4, а.

В случае использования трех плоских образцов (см. рис. 5.1), линейный электронагреватель 1 и измеритель температуры 2

размещают (строго друг против друга так, чтобы расстояние между ними было равно r_0) с разных сторон тонкой пластины толщиной $r_0 = 2...3$ мм, а затем с двух сторон этой тонкой пластины устанавливают массивные пластины толщиной $H \geq (10...20) r_0$.

Для уменьшения контактных тепловых сопротивлений рекомендуется использовать высокотеплопроводные смазки и обеспечить необходимую постоянную силу сжатия системы, состоящей из пластин из исследуемого материала с размещенными между ними линейным электронагревателем 1 и измерителем температуры 2 .

3 Получившуюся систему, включающую в себя пластины из исследуемого материала с зажатым между ними электронагревателем 1 и измерителем температуры 2 , в течение достаточно длинного промежутка времени

$$\tau \geq Fo \frac{L^2}{a}$$

выдерживают при необходимой постоянной температуре T_0 . В последней формуле использованы обозначения: Fo – число Фурье, достаточное для получения однородного распределения температуры и обычно для цилиндрической системы координат принимаемое равным $Fo = 0,8$; $L \approx H + r_0$ – характерный размер рассматриваемой системы; a – температуропроводность исследуемого материала.

Например, при $a = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$,

$$L = 3 \text{ мм} + 60 \text{ мм} = 6,3 \cdot 10^{-2} \text{ м} \quad \text{или} \quad L^2 = 3,969 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

необходимая длительность выдерживания системы при постоянной температуре

$$\tau \geq 0,8 \cdot \frac{3,969 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-7}} = 2,646 \cdot 10^4 = 26\,460 \text{ с} = 7,35 \text{ ч.}$$

4 Активная часть эксперимента начинается в тот момент времени, когда на электронагреватель 1 подается короткий электрический импульс. За время действия этого импульса в единице длины линейного электронагревателя 1 выделяется определенное количество тепла

$$Q_{\text{л}} = \int_0^{\tau_{\text{и}}} P(\tau) d\tau \approx P \tau_{\text{и}},$$

где P – электрическая мощность, приходящаяся на единицу длины линейного нагревателя, [Вт/м]; τ_n – длительность импульса.

Для того чтобы в каждом эксперименте количество тепла Q_n [Дж/м], выделяющееся в единице длины линейного нагревателя, было строго постоянным и одинаковым, необходимо обеспечить, чтобы:

- сопротивление R электронагревателя l было постоянным в каждом эксперименте, т.е. $R = \text{const}$;
- напряжение U , подаваемое на этот электронагреватель l , должно быть также постоянным, т.е. $U = \text{const}$;
- длительность τ_n электрического импульса, подаваемого на электронагреватель, также должна быть постоянной, т.е. $\tau_n = \text{const}$.

Тогда мощность P , выделяющаяся в единице длины электронагревателя,

$$P = \frac{U^2}{R} = \text{const},$$

и соответственно, количество тепла, выделяющегося в единице длины электронагревателя

$$Q_n = P \tau_n,$$

будет постоянным в каждом эксперименте.

Возможно использование конденсаторной батареи, заряжаемой до постоянного напряжения U , для обеспечения мгновенного подвода заданного и постоянного количества тепла

$$Q_n = \text{const}$$

за достаточно малый промежуток времени $\tau_n \rightarrow 0$.

5 После действия мгновенного линейного источника тепла на протяжении всей активной стадии эксперимента осуществляют измерения и регистрацию температуры $T(r_0, \tau)$ по сигналу измерителя температуры 2. В большинстве случаев регистрацию температуры $T(r_0, \tau)$ ведут с постоянным шагом во времени. Характер изменения температуры $T(r_0, \tau)$ во времени представлен на рис. 5.4, б.

Активную часть эксперимента часто завершают при $\tau > \tau_{\text{max}}$, но во многих случаях экспериментальные данные регистрируют вплоть до момента времени τ'' , соответствующего снижению температуры $T(r_0, \tau)$

до величины $T_{\max}/2$ после достижения максимального значения температуры $T_{\max} = T(r_0, \tau_{\max})$.

Длительность активной части эксперимента обычно составляет от десятков секунд до нескольких минут.

Примечание. В связи с малой длительностью активной стадии эксперимента некоторые начинающие исследователи называют метод мгновенного источника тепла «экспресс-методом». Такое название следует считать ошибочным. Несмотря на чрезвычайно малую длительность активной стадии эксперимента (обычно не более 2...5 мин), метод мгновенного источника тепла требует до 2...10 ч для предварительной выдержки образцов, поэтому суммарная длительность экспериментального измерения теплофизических свойств такими методами, как правило, оказывается не менее длительности экспериментов, базирующихся на стационарных методах измерения теплопроводности.

6 После завершения активной стадии эксперимента по измеренным значениям r_0 , $Q_{\text{л}}$, T_{\max} , τ_{\max} , τ' , τ'' вычисляют искомые теплофизические свойства исследуемого вещества по расчетным формулам, вывод которых приведен ниже.

5.2.3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА ЛИНЕЙНОГО МГНОВЕННОГО ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

Математическая модель метода линейного мгновенного источника тепла, описывающая температурное поле $T(r, \tau)$ в исследуемом материале, имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} c\rho \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\lambda r \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right] + Q_{\text{л}} \delta(\tau) \delta(r); \\ \tau &> 0, \quad 0 < r < \infty; \\ T(r, 0) &= T_0 = 0; \\ \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} &= 0, \quad T(\infty, \tau) = T_0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

где $T(r, \tau)$ – температура в точке с координатой r в момент времени τ ; $c\rho$, λ – соответственно объемная теплоемкость и теплопроводность исследуемого вещества; T_0 – начальная температура исследуемого вещества, условно принимаемая за начало температурной шкалы в каждом эксперименте; $Q_{\text{л}}$ – количество тепла, мгновенно выделившееся в единице длины линейного нагревателя в момент начала активной стадии эксперимента; $\delta(\tau)$, $\delta(r)$ – символические δ - функции Дирака [1, 16].

Решение задачи (5.12) имеет вид [1, 3, 7]:

$$T(r, \tau) = \frac{Q_{\text{л}}}{4\pi\lambda\tau} \exp\left[-\frac{r^2}{4a\tau}\right]. \quad (5.13)$$

Для того чтобы получить расчетные формулы для вычисления искомых теплофизических свойств исследуемого материала по измеренным в ходе эксперимента физическим величинам r_0 , $Q_{\text{л}}$, T_{max} , τ_{max} , τ' , τ'' , преобразуем решение (5.13). Введем в рассмотрение безразмерную переменную $z = \frac{r^2}{4a\tau}$. Тогда решение (5.13) примет вид

$$T(r, \tau) = \frac{Q_{\text{л}} r^2}{r^2 \pi c \rho 4a\tau} \exp\left[\frac{-r^2}{4a\tau}\right] = \frac{Q_{\text{л}}}{r^2 \pi c \rho} z \exp[-z], \quad (5.14)$$

где принято во внимание, что $\lambda = ac\rho$.

Из рис. 5.4, б видно, что физические величины τ_{max} и T_{max} являются координатами точки экстремума (максимума) на графике функции $T(r, \tau)$. Для поиска экстремума функции (5.14) вычислим ее производную по безразмерной переменной z , а результат дифференцирования приравняем нулю.

В результате получаем

$$\frac{d}{dz}[z \exp(-z)] = \exp(-z) + z \exp(-z)(-1) = \exp(-z)(1 - z) = 0.$$

Полученное уравнение имеет два корня:

1) первый корень $z = \infty$ (при $\exp(-z) = 0$) соответствует (учитывая что $z = \frac{r_0^2}{4a\tau}$) моменту времени $\tau = 0$ и не представляет интереса для рассматриваемого нами метода измерения;

2) второй корень $z = 1$ (при $1 - z = 0$) позволяет, с учетом обозначения $z = \frac{r_0^2}{4a\tau}$, получить расчетную формулу для вычисления коэффициента температуропроводности; принимая во внимание, что в ходе эксперимента измерены $r = r_0$ и $\tau = \tau_{\text{max}}$, получаем

$$z = \frac{r_0^2}{4a\tau_{\text{max}}} = 1,$$

или

$$a = \frac{r_0^2}{4\tau_{\max}}, \quad (5.15)$$

где r_0 – расстояние (см. рис. 5.4, *a*) от линейного электронагревателя I до измерителя температуры 2; τ_{\max} – момент времени (см. рис. 5.4, *a*), в который достигается максимальное значение температуры T_{\max} на экспериментально измеренной зависимости $T(r, \tau) = T(r_0, \tau)$.

Получим расчетные формулы для вычисления других теплофизических свойств исследуемого материала.

Подставив в формулу (5.14) значение $z = 1$, соответствующее (см. рис. 5.4, *b*) достижению максимальной температуры T_{\max} в точке $r = r_0$ в момент времени τ_{\max} , получим

$$T(r_0, \tau_{\max}) = T_{\max} = \frac{Q_{\text{л}}}{c\rho\pi r_0^2} z \Big|_{z=1} \exp[-z] \Big|_{z=1} = \frac{Q_{\text{л}}}{c\rho\pi r_0^2} e^{-1},$$

или

$$c\rho = \frac{Q_{\text{л}}}{\pi e r_0^2 T_{\max}}. \quad (5.16)$$

По аналогии с изложенным в п. 5.1.3.2 получаем

$$\lambda = ac\rho = \frac{r_0^2}{4\tau_{\max}} \frac{Q_{\text{л}}}{\pi e r_0^2 T_{\max}},$$

или

$$\lambda = \frac{Q_{\text{л}}}{4\pi e \tau_{\max} T_{\max}}. \quad (5.17)$$

Аналогично,

$$b = \sqrt{\lambda c\rho} = \sqrt{\frac{Q_{\text{л}} Q_{\text{л}}}{4\pi e \tau_{\max} T_{\max} \pi e r_0^2 T_{\max}}},$$

или

$$b = \frac{Q_{\text{л}}}{2\pi e r_0 T_{\max} \sqrt{\tau_{\max}}}. \quad (5.18)$$

Соотношения (5.15)–(5.18) позволяют вычислить искомые теплофизические свойства a , λ , $c\rho$, b исследуемого материала по экспериментально измеренным значениям физических величин r_0 , $Q_{\text{л}}$,

T_{\max}, τ_{\max} .

Однако определение значения момента времени τ_{\max} по экспериментальной кривой (см. рис. 5.4, б) связано со значительными погрешностями, так как температурная кривая $T(r_0, \tau)$ имеет очень «размытый» максимум (экстремум) в точке $\tau = \tau_{\max}$. Если величину максимальной температуры T_{\max} удастся измерить с хорошей точностью, то значение момента времени τ_{\max} определяется, как правило, с большой относительной погрешностью, достигающей иногда 10 %. В связи с этим оказалось целесообразней использовать участки кривой $T(r_0, \tau)$, имеющие наибольшую крутизну (см. рис. 5.4, б), в частности, вместо момента времени τ_{\max} значительно точнее могут быть измерены моменты времени τ' и τ'' , в которые экспериментально измеренная температурная кривая $T(r_0, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$T(r_0, \tau) = T_{\max} / 2.$$

Решение этого уравнения дает две точки (см. рис. 5.4, б) с координатами $(\tau', T_{\max} / 2)$ и $(\tau'', T_{\max} / 2)$, для которых получены расчетные соотношения [3]:

$$a = \frac{r_0^2}{10,7\tau'}; \quad (5.1a)$$

$$a = \frac{r_0^2}{0,925\tau''}, \quad (5.15b)$$

где τ' , τ'' – моменты времени, в которые температурная кривая $T(r_0, \tau)$ принимает значения $T_{\max} / 2$, причем, момент времени τ' определяют на участке возрастания температуры $T(r_0, \tau)$ до достижения максимального значения T_{\max} температуры, а момент времени τ'' определяют на участке убывания температуры $T(r_0, \tau)$ после прохождения максимального значения T_{\max} этой температуры.

Подставив значения $(\tau', T_{\max} / 2)$ в решение (5.13), получим

$$T(r_0, \tau') = T_{\max} / 2 = \frac{Q_{\text{л}}}{4\pi\lambda\tau'} \exp\left[-\frac{r_0^2}{4a\tau'}\right],$$

или

$$\lambda = \frac{Q_{\text{л}}}{2\pi\tau' T_{\text{max}}} \exp\left[-\frac{r_0^2}{4a\tau'}\right]. \quad (5.17a)$$

Аналогично, для пары значений $(\tau'', T_{\text{max}}/2)$ после их подстановки в (5.14) получаем

$$T(r_0, \tau'') = \frac{T_{\text{max}}}{2} = \frac{Q_{\text{л}}}{4\pi\lambda\tau''} \exp\left[-\frac{r_0^2}{4a\tau''}\right],$$

или

$$\lambda = \frac{Q_{\text{л}}}{2\pi\tau'' T_{\text{max}}} \exp\left[-\frac{r_0^2}{4a\tau''}\right]. \quad (5.17b)$$

Соотношения (5.17a) и (5.17b) позволяют (с учетом уже известной температуропроводности a) вычислить теплопроводность λ , а затем и другие теплофизические свойства

$$c\rho = \frac{\lambda}{a}; \quad b = \sqrt{\lambda c\rho}.$$

5.2.4 ВВЕДЕНИЕ ПОПРАВКИ НА КОНЕЧНУЮ ДЛИТЕЛЬНОСТЬ ТЕПЛООВОГО ИМПУЛЬСА

Расчетные формулы (5.15)–(5.18) так же, как и (5.15a), (5.15b), (5.17a), (5.17b), были получены в предположении, что мгновенный источник тепла в правой части уравнения теплопроводности краевой задачи (5.12) может быть представлен в виде δ -функции Дирака. Это означает, что длительность $\tau_{\text{и}}$ теплового импульса (см. рис. 5.4, б) в реальном эксперименте должна быть во много раз меньше значения τ_{max} момента времени, в который достигается максимальное значение температуры T_{max} .

На практике длительность $\tau_{\text{и}}$ такого теплового импульса, подводимого к линейному электронагревателю I , приходится выбирать достаточно большой, для того чтобы с необходимой точностью зарегистрировать измеряемую температуру $T(r_0, \tau)$.

Расчетные соотношения, позволяющие учитывать конечную длительность $\tau_{\text{и}}$ теплового импульса при вычислении искомых теплофизических свойств материалов, представлены в [17]. В случае использования метода «мгновенного» линейного источника тепла эти

расчетные соотношения имеют вид:

$$a = \frac{r_0^2}{4\tau_{\text{и}}} \varphi_a \left(\frac{\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{max}}} \right); \quad (5.15\text{с})$$

$$c_{\text{р}} = \frac{Q_{\text{л}} \tau_{\text{и}}}{\pi r_0^2 T_{\text{max}}} \varphi'_{\text{ср}} \left(\frac{\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{max}}} \right); \quad (5.16\text{с})$$

$$\lambda = \frac{Q_{\text{л}}}{4\pi T_{\text{max}}} \varphi'_{\lambda} \left(\frac{\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{max}}} \right), \quad (5.17\text{с})$$

где $\varphi_a(\omega)$, $\varphi'_{\lambda}(\omega)$, $\varphi'_{\text{ср}}(\omega) = \frac{\varphi'_{\lambda}(\omega)}{\varphi_a(\omega)}$ – функции, приведенные в [17],

учитывающие, что реальный импульсный источник тепла является не δ -функцией Дирака, а конечным импульсом с длительностью $\tau_{\text{и}}$.

Видно, что величина поправок зависит от безразмерной переменной $\omega = \frac{\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{max}}}$, представляющей собой отношение длительности $\tau_{\text{и}}$ теплового

импульса к значению момента времени τ_{max} , в которой температурный отклик $T(r_0, \tau)$ принимает максимальное значение $T_{\text{max}} = T(r_0, \tau_{\text{max}})$.

Значения функций $\varphi'_{\lambda}(\omega)$, $\varphi_a(\omega)$ приведены в [17]. Отметим, что в случае импульсного линейного источника тепла функция $\varphi_a(\omega)$, входящая в формулу (5.15с), совпадает с функцией $\varphi_a(\omega)$, входящей в формулу (5.6с) для плоского импульсного источника тепла. Однако функции $\varphi'_{\lambda}(\omega)$ и $\varphi'_{\text{ср}}(\omega)$ для импульсного линейного источника тепла не совпадают с функциями $\varphi_{\lambda}(\omega)$ и $\varphi_{\text{ср}}(\omega)$, используемыми для импульсного плоского источника тепла, введенными в п. 5.1.4.

Значения функций $\varphi_a(\omega)$, $\varphi_{\lambda}(\omega)$, $\varphi'_{\lambda}(\omega)$, заимствованные из [17], приведены в табл. 5.1.

5.1 Значения функций $\varphi_a(\omega)$, $\varphi_{\lambda}(\omega)$, $\varphi'_{\lambda}(\omega)$ в зависимости от безразмерной переменной $\omega = \tau_{\text{и}} / \tau_{\text{max}}$

$\omega = \frac{\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{max}}}$	$\varphi'_{\lambda}(\omega)$	$\varphi_a(\omega)$	$\varphi_{\lambda}(\omega)$	$\omega = \frac{\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{max}}}$	$\varphi'_{\lambda}(\omega)$	$\varphi_a(\omega)$	$\varphi_{\lambda}(\omega)$
0,02	0,0674	0,0202	0,0025	0,20	0,0822	0,2241	0,0271
0,04	0,0150	0,0408	0,0049	0,22	0,0916	0,2497	0,0302

0,06	0,0228	0,0619	0,0075	0,24	0,1013	0,2762	0,0334
0,08	0,0307	0,0834	0,0101	0,26	0,1112	0,3034	0,0366
0,10	0,0389	0,1055	0,0128	0,28	0,1214	0,3315	0,0400
0,12	0,0471	0,1280	0,0155	0,30	0,1319	0,3605	0,0435
0,14	0,0556	0,1511	0,0183	0,32	0,1427	0,3905	0,0471
0,16	0,0642	0,1748	0,0211	0,34	0,1540	0,4215	0,0508
0,18	0,0732	0,1991	0,0241	0,36	0,1655	0,4537	0,0546

Окончание табл. 5.1

$\omega = \frac{\tau_{и}}{\tau_{max}}$	$\varphi'_\lambda(\omega)$	$\varphi_a(\omega)$	$\varphi_\lambda(\omega)$	$\omega = \frac{\tau_{и}}{\tau_{max}}$	$\varphi'_\lambda(\omega)$	$\varphi_a(\omega)$	$\varphi_\lambda(\omega)$
0,38	0,1776	0,4872	0,0586	0,50	0,2601	0,7213	0,0864
0,40	0,1900	0,5220	0,0628	0,52	0,2760	0,7675	0,0917
0,42	0,2028	0,5583	0,0671	0,54	0,2927	0,8163	0,0974
0,44	0,2163	0,5962	0,0716	0,56	0,3102	0,8681	0,1035
0,46	0,2302	0,6359	0,0763	0,58	0,3290	0,9233	0,1098
0,48	0,2449	0,6776	0,0813	0,60	0,3486	0,9822	0,1166

Примечание. $\varphi_a(\omega)$, $\varphi'_\lambda(\omega)$ – для линейного импульсного источника тепла; $\varphi_a(\omega)$, $\varphi_\lambda(\omega)$ – для плоского импульсного источника тепла.

5.2.5 ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ЛИНЕЙНОГО «МГНОВЕННОГО» ИСТОЧНИКА ТЕПЛА

С использованием рассмотренной в п. 4.1.5 методики можно легко получить расчетные соотношения для вычисления погрешностей измерения теплофизических свойств веществ.

В случае использования расчетной зависимости (5.15с), представленной в виде

$$a = \frac{r_0^2}{4\tau_{и}} \varphi_a(\omega), \quad \omega = \frac{\tau_{и}}{\tau_{max}},$$

действуя по аналогии с тем, как это было показано в п. 5.1.5, получаем

$$(\delta a)_{пр} = 2\delta r_0 + \delta \tau_{и} + \frac{1}{\varphi_a(\omega)} \frac{d\varphi_a(\omega)}{d\omega} \omega (\delta \tau_{и} + \delta \tau_{max}), \quad (5.19a)$$

$$(\delta a)_{\text{ск}} = \sqrt{4(\delta r_0)^2 + (\delta \tau_{\text{и}})^2 + \left[\frac{1}{\varphi_a(\omega)} \frac{d\varphi_a(\omega)}{d\omega} \omega \right]^2 [(\delta \tau_{\text{и}})^2 + (\delta \tau_{\text{макс}})^2]}. \quad (5.19\text{б})$$

Аналогично, на основе зависимости (5.16с) получаем:

$$(\delta c_p)_{\text{пр}} = \delta Q_{\text{л}} + \delta \tau_{\text{и}} + \delta r_0 + \delta T_{\text{макс}} + \frac{1}{\varphi'_{c_p}(\omega)} \frac{d\varphi'_{c_p}(\omega)}{d\omega} \omega (\delta \tau_{\text{и}} + \delta \tau_{\text{макс}}); \quad (5.19\text{с})$$

$$(\delta c_p)_{\text{ск}} = \sqrt{(\delta Q_{\text{л}})^2 + (\delta \tau_{\text{и}})^2 + (\delta r_0)^2 + (\delta T_{\text{макс}})^2 + \left[\frac{1}{\varphi'_{c_p}(\omega)} \frac{d\varphi'_{c_p}(\omega)}{d\omega} \omega \right]^2 [(\delta \tau_{\text{и}})^2 + (\delta \tau_{\text{макс}})^2]}. \quad (5.19\text{д})$$

Действуя аналогично, на основе расчетной зависимости (5.17с) легко вывести соотношения для вычисления предельных $(\delta \lambda)_{\text{пр}}$ и среднеквадратичных $(\delta \lambda)_{\text{ск}}$ оценок погрешностей измерения теплопроводности λ , имеющие вид:

$$(\delta \lambda)_{\text{пр}} = \delta Q_{\text{л}} + \delta T_{\text{макс}} + \frac{1}{\varphi'_\lambda(\omega)} \frac{d\varphi'_\lambda(\omega)}{d\omega} \omega (\delta \tau_{\text{и}} + \delta \tau_{\text{макс}}); \quad (5.19\text{е})$$

$$(\delta \lambda)_{\text{ск}} = \sqrt{(\delta Q_{\text{л}})^2 + (\delta T_{\text{макс}})^2 + \left[\frac{1}{\varphi'_\lambda(\omega)} \frac{d\varphi'_\lambda(\omega)}{d\omega} \omega \right]^2 [(\delta \tau_{\text{и}})^2 + (\delta \tau_{\text{макс}})^2]}. \quad (5.19\text{ф})$$

Как и в случае плоского «мгновенного» источника тепла, при практическом использовании метода линейного «мгновенного» источника тепла *наибольший вклад* в результирующие погрешности δa , δc_p , $\delta \lambda$ измерения коэффициента температуропроводности a , объемной теплоемкости c_p и теплопроводности λ вносят:

1) относительная погрешность $\delta \tau_{\text{макс}} = \frac{\Delta \tau_{\text{макс}}}{\tau_{\text{макс}}}$ измерения момента

времени $\tau_{\text{макс}}$; это обусловлено тем, что функция $T(r_0, \tau)$, представленная на рис. 5.4, б, обычно имеет «плоский» максимум, следствием чего являются существенные абсолютные погрешности

$\Delta\tau_{\max}$, иногда достигающие 10 % от величины τ_{\max} ;

2) относительная погрешность $\delta r_0 = \frac{\Delta r_0}{r_0}$ измерения расстояния r_0

от линейного нагревателя 1 до измерителя температуры 2 (см. рис. 5.4, а);

3) относительная погрешность $\delta Q_{\text{л}} = \frac{\Delta Q_{\text{л}}}{Q_{\text{л}}}$ измерения количества

тепла $Q_{\text{л}}$, выделяющегося в единице длины линейного нагревателя 2.

Обычно погрешности $\delta\tau_{\text{и}} = \frac{\Delta\tau_{\text{и}}}{\tau_{\text{и}}}$, $\delta T_{\max} = \frac{\Delta T_{\max}}{T_{\max}}$ измерения

длительности $\tau_{\text{и}}$ теплового импульса и максимального значения температуры T_{\max} вносят заметно меньший вклад в суммарные погрешности измерения искомых теплофизических свойств, чем погрешность $\delta\tau_{\max}$.

Влияние дополнительных источников погрешностей, обусловленных неполным соответствием используемой математической модели реальным физическим процессам, происходящим в измерительном устройстве в ходе эксперимента, было рассмотрено в четвертой главе. Дополнительные погрешности в случае рассматриваемых в данной главе методов возникают, например:

1) из-за неисключенных или неучтенных утечек тепла:

– от линейного электронагревателя, по подводящим напряжение проводам, приводящих к дополнительным погрешностям определения количества тепла $Q_{\text{л}}$, выделившегося в единице его длины;

– по проводам, подходящим к измерителю температуры 2, вызывающим дополнительные и существенные погрешности измерения температуры T_{\max} ;

– от торцов исследуемых образцов, обусловленных как конвективным, так и радиационным теплообменом с окружающей средой, и приводящих к дополнительным погрешностям из-за того, что фактические температурное поле и поле тепловых потоков становятся неоднородными;

– от периферии (но не от торцов) исследуемых образцов; эти утечки тепла обычно бывают обусловлены тем, что образцы, которые теоретически должны быть бесконечными по координате r , на самом деле имеют конечные радиальные размеры; поэтому, на периферийных (внешних) поверхностях образцов обычно возникают утечки тепла преимущественно из-за конвективного теплообмена, приводящие к дополнительным погрешностям измерения температуры T_{\max} ;

2) из-за неучета переноса тепла излучением (радиационного теплопереноса) в слое исследуемого вещества; теплоперенос излучением практически отсутствует в материалах, «непрозрачных» для инфракрасного излучения; поправка на теплоперенос излучением при измерении теплофизических свойств газов может достигать

$$1 \% \text{ от } Q_{\text{л}} \text{ при } T = 0 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$8 \% \text{ от } Q_{\text{л}} \text{ при } T = 200 \text{ }^{\circ}\text{C},$$

$$20 \% \text{ от } Q_{\text{л}} \text{ при } T = 300 \text{ }^{\circ}\text{C};$$

при исследовании теплофизических свойств большинства твердых материалов и жидкостей («непрозрачных» для излучения) поправка на теплоперенос излучением обычно не вводится;

3) из-за неучета переноса тепла за счет конвективного теплообмена в слое исследуемого вещества (жидкости или газа); при выполнении условия Крауссольда [8, 18] влияние конвективного теплообмена (см. п. 4.4.3) на результат измерения теплофизических свойств жидкостей и газов пренебрежимо мало.

5.2.6 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ИССЛЕДУЕМОГО МАТЕРИАЛА

Функцию (5.13) с использованием переменных величин [3]

$$z = \frac{1}{\tau}, \quad y = \frac{4\pi\tau T(r_0, \tau)}{Q_{\text{л}}}$$

удается представить в виде

$$\ln y = \ln y_0 - h z, \quad (5.20)$$

$$\text{где } y_0 = \frac{1}{\lambda}, \quad h = \frac{r_0^2}{4a}.$$

После обработки экспериментальных данных и вычисления значений

$$z_i = \frac{1}{\tau_i}; \quad \ln y_i = \frac{4\pi\tau_i T(r_0, \tau_i)}{Q_{\text{л}}}$$

следует выделить линейный участок зависимости (5.20), представленной на рис. 5.6. По двум точкам $(z', \ln y')$ и $(z'', \ln y'')$, близких к границам линейного участка, следует определить уравнение прямой линии

$$(\ln y - \ln y') = \frac{\ln y'' - \ln y'}{z'' - z'}(z - z')$$

или

$$(\ln y - \ln y') = h(z - z').$$

Принимая во внимание, что тангенс угла наклона последнего уравнения

$$h = \frac{\ln y'' - \ln y'}{z'' - z'} = \frac{r_0^2}{4a},$$

получаем

$$a = \frac{r_0^2}{4h}. \quad (5.15d)$$

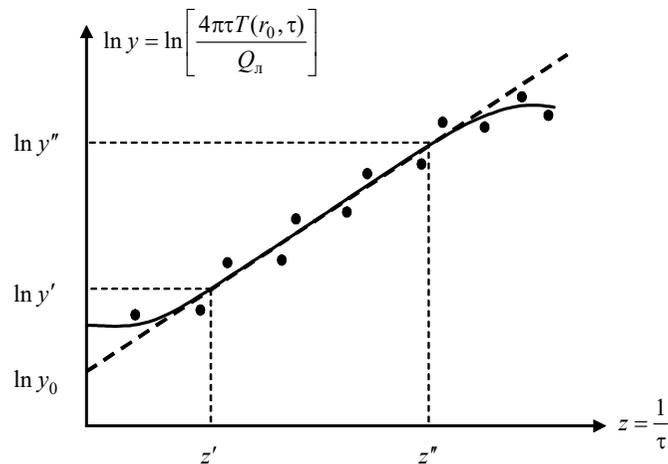


Рис. 5.6 Использование зависимости (5.20) при обработке экспериментальных данных [3]

Если прямую линию (см. рис. 5.6) продолжить до пересечения с осью ординат, то легко можно определить величину $\ln y_0$, откуда следует, что

$$y_0 = \frac{1}{\lambda} = e^{\ln y_0};$$

$$\lambda = \frac{1}{e^{\ln y_0}} = \frac{1}{y_0}; \quad (5.17d)$$

$$c\rho = \frac{\lambda}{a} = \frac{4h}{y_0 r_0^2}; \quad (5.16d)$$

$$b = \sqrt{\lambda c \rho} = \sqrt{\frac{4h}{y_0^2 r_0^2}} = \frac{2\sqrt{h}}{y_0 r_0}. \quad (5.18d)$$

Как и в случае п. 5.1.6, использование рассмотренной в п. 5.2.6 методики обработки экспериментальных данных позволяет [3] снизить влияние случайных погрешностей за счет того, что при проведении прямой линии (5.20) по большому количеству экспериментально определенных точек $(z_i, \ln y_i)$, легко удастся выделить (см. рис. 5.6) рабочую стадию опыта, на которой реально выполняется линейный характер зависимости (5.20).

На основании расчетных зависимостей (5.15d), (5.16d), (5.17d), (5.18d) легко получить формулы для вычисления предельных и среднеквадратичных оценок погрешностей измерения искомых теплофизических свойств a , λ , $c\rho$ и b .

6 НЕСТАЦИОНАРНЫЕ МЕТОДЫ РЕГУЛЯРНЫХ РЕЖИМОВ ПЕРВОГО, ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА

6.1 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ОБРАЗЦАХ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

При математическом моделировании процессов теплопереноса, проходящих в исследуемых веществах при измерении их теплофизических свойств с применением методов регулярных режимов первого, второго и третьего рода, предпочитают использовать образцы простой геометрической формы в виде неограниченной пластины (коэффициент формы $\gamma = 0$), неограниченного цилиндра ($\gamma = 1$) или в виде шара ($\gamma = 2$). Для образцов простой формы математическая модель процессов теплопереноса применительно к методам регулярных режимов первого, второго и третьего рода может быть записана в виде:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{1}{r^\gamma} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\gamma \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right]; \quad (6.1)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < r < R; \quad (6.2)$$

$$T(r, 0) = T_0 = \text{const}; \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (6.4)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial r} = \alpha [T_\kappa(\tau) - T(R, \tau)], \quad (6.5)$$

где $T(r, \tau)$ – температура в исследуемом образце в точке с координатой r в момент времени τ ; a, λ – температуропроводность и теплопроводность; T_0 – первоначальное распределение температуры в образце; α – коэффициент теплообмена внешней поверхности исследуемого образца (при $r = R$) с окружающей средой, температура которой изменяется по закону $T_\kappa(\tau)$, κ – индекс, который, в зависимости от рода рассматриваемого регулярного режима, может принимать значения κ , равные 1, 2 или 3.

При $\kappa = 1$ получаем случай регулярного режима первого рода, когда температура окружающей среды изменяется по ступенчатому закону:

$$T_1(\tau) = \begin{cases} T_0 & \text{при } \tau < 0; \\ T_c & \text{при } \tau \geq 0. \end{cases} \quad (6.6)$$

При $\kappa = 2$, соответствующем регулярному режиму второго рода, температура окружающей среды должна изменяться по линейному закону:

$$T_2(\tau) = T_n + b\tau, \quad (6.7)$$

где b – коэффициент, определяющий скорость изменения температуры по времени; T_n – начальная температура окружающей среды.

При $\kappa = 3$ получаем случай регулярного режима третьего рода, когда температура окружающей среды изменяется по гармоническому закону:

$$T_3(\tau) = T_y + A \cos(\omega\tau), \quad (6.8)$$

где T_y – установившееся среднее значение температуры; A , ω – амплитуда и частота гармонических колебаний температуры.

Наиболее просто закономерности теплопереноса в исследуемых образцах могут быть представлены, если в краевой задаче (6.1) – (6.5) граничные условия третьего рода (6.5) заменить на граничные условия первого рода:

$$T(R, \tau) = \varphi_\kappa(\tau), \quad (6.5a)$$

где $\varphi_\kappa(\tau)$ – функции, описывающие изменение температуры поверхности $T(R, \tau)$ исследуемого образца во времени. В случае использования граничных условий первого рода в виде (6.5a) индекс κ также может принимать значения 1, 2, 3, например:

1) при $\kappa = 1$, когда (см. рис. 6.1, а) температура поверхности $T(R, \tau) = \varphi_\kappa(\tau)$ подчиняется закону

$$\varphi_\kappa(\tau) \equiv \varphi_1(\tau) = T_0 + [T_c - T_0]h(\tau), \quad (6.6a)$$

получаем математическую модель (6.1) – (6.4), (6.5a) метода регулярного режима первого рода; здесь $h(\tau)$ – символическая единичная ступенчатая функция [1, 16], определяемая следующим образом

$$h(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0; \\ 1 & \text{при } \tau \geq 0; \end{cases}$$

2) при $\kappa = 2$, когда (см. рис. 6.1, б) температура поверхности образца $T(R, \tau) = \varphi_\kappa(\tau)$ изменяется по линейному закону

$$\varphi_\kappa(\tau) \equiv \varphi_2(\tau) = T_n + b\tau, \quad (6.7a)$$

краевая задача (6.1) – (6.4), (6.5а) представляет собой математическую модель метода регулярного режима второго рода;

3) при $\kappa = 3$, когда (см. рис. 6.1, в) температура поверхности образца $T(R, \tau) = \varphi_\kappa(\tau)$ изменяется по гармоническому закону

$$\varphi_\kappa(\tau) \equiv \varphi_3(\tau) = T_y + A \cos(\omega\tau), \quad (6.8a)$$

краевая задача (6.1) – (6.4), (6.5а) превращается в математическую модель метода регулярного режима третьего рода.

На рис. 6.1 проиллюстрирован характер изменения температуры в различных точках исследуемых образцов. Видно, что при регулярном режиме первого рода температура во внутренних точках исследуемого образца через некоторое время начинает изменяться по экспоненциальным зависимостям.

При регулярном режиме второго рода (см. рис. 6.1, б) температура во внутренних точках исследуемого образца (после того, когда начальные условия (6.3) перестают влиять на температурное поле) изменяется по линейному закону.

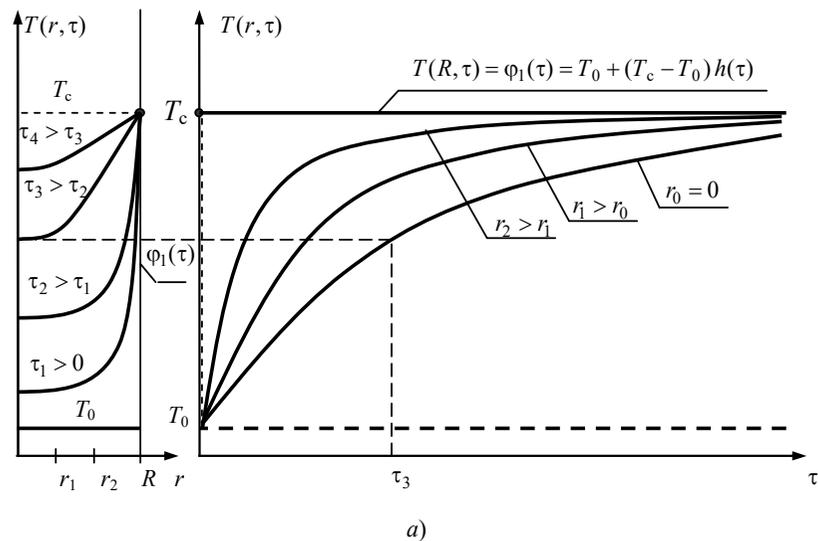


Рис. 6.1 Характер изменения температуры в образце исследуемого материала при регулярном режиме:
а – первого, б – второго, в – третьего рода

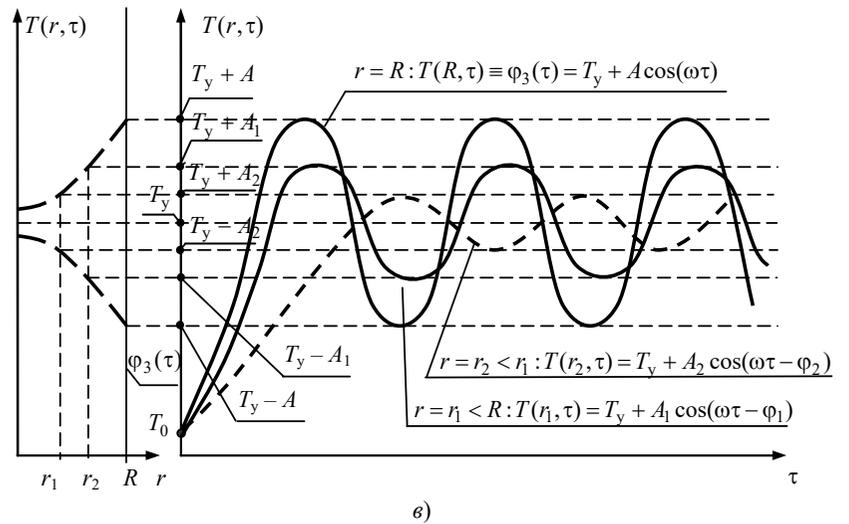
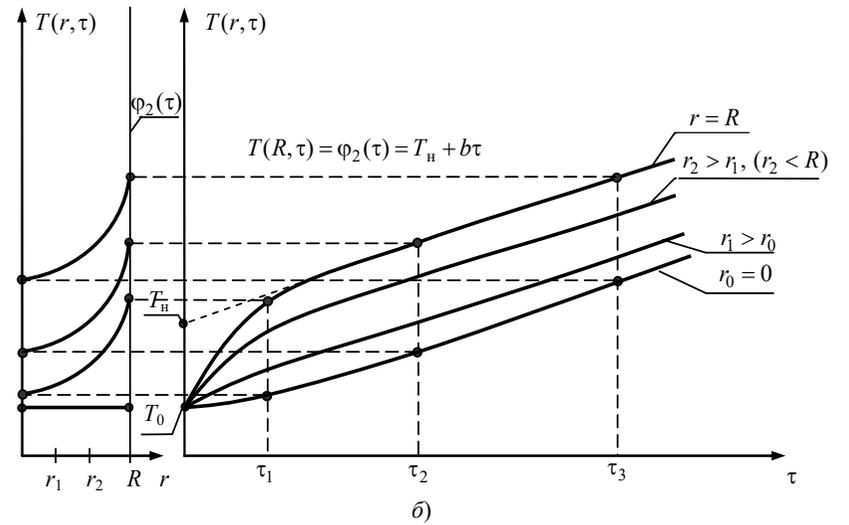


Рис. 6.1 Окончание

Аналогично, при регулярном режиме третьего рода (см. рис. 6.1, в) температура во внутренних точках исследуемого образца (по истечении промежутка времени, после которого начальные условия (6.3) перестают влиять на температурное поле) изменяется по гармоническому закону с той же частотой ω , что и температура поверхности $T(R, \tau)$, причем,

$$T(r_i, \tau) = T_y + A_i \cos(\omega\tau - \varphi_i),$$

где A_i, φ_i – амплитуды и сдвиги по фазе гармонических колебаний при $r = r_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$).

Обычно считается, что при значениях числа Фурье $Fo > (0,3 \dots 0,5)$ начальные условия (6.3) перестают оказывать влияние на температурное поле исследуемых образцов. Принимая во внимание что $Fo = \frac{a\tau}{R^2}$, получаем оценку длительности промежутка времени, по истечении которого в исследуемом образце наступает регулярный режим. Из условия $Fo > 0,5$ следует, что $\tau > 0,5 \frac{R^2}{a}$.

При $R = 10 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ($R^2 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$) и $a = 1,00 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ получаем, что регулярный режим наступает при $\tau > 0,5 \frac{1 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-7}} = 500 \text{ с} \approx 8,3 \text{ мин}$.

Академик А.В. Лыков в своих работах ввел [1] общий признак регуляризации температурных полей, справедливый для всех трех видов регулярных режимов. Этим признаком является [1, 12] постоянство во времени величины темпа охлаждения (нагрева)

$$m = - \frac{1}{[T_k(\tau) - T(\tau)]} \frac{d\bar{T}(\tau)}{d\tau} = \text{const}, \quad (6.9)$$

вычисляемого по средней температуре

$$\bar{T}(\tau) = \frac{1}{R^{\Gamma+1}} \int_0^R r^\Gamma T(r, \tau) dr \quad (6.10)$$

исследуемого образца. Напомним, что в формуле (6.9) использовано обозначение температуры окружающей среды $T_k(\tau)$, которая принимает значения функций (6.6), (6.7) и (6.8) соответственно при регулярных режимах первого ($\kappa = 1$), второго ($\kappa = 2$) и третьего ($\kappa = 3$) рода.

Если рассмотреть общую математическую модель температурных полей в исследуемых образцах в виде краевой задачи (6.1) – (6.4), (6.5а), когда при $r = R$ заданы начальные условия первого рода в виде (6.5а), то общий признак (6.9) регуляризации температурных полей примет вид [1, 12]:

$$m = - \frac{1}{[\varphi_k(\tau) - \bar{T}(\tau)]} \frac{d\bar{T}(\tau)}{d\tau} = \text{const}, \quad (6.9a)$$

где $\bar{T}(\tau)$ – средняя температура исследуемого образца, вычисляемая по формуле (6.10); $\varphi_k(\tau)$ – функции, определяющие законы изменения температуры поверхности исследуемого образца и имеющие вид (6.6а), (6.7), (6.8а) соответственно в случае регулярных режимов первого ($k = 1$), второго ($k = 2$) и третьего ($k = 3$) рода.

Ниже будет показано, что в случае использования методов регулярных режимов первого, второго и третьего рода, расчетные соотношения для вычисления искомых теплофизических свойств оказываются не намного более сложными, чем в случае стационарных методов. В отличие от стационарных методов, методы регулярных режимов обладают рядом достоинств [12]:

1) эти методы позволяют во многих случаях избежать измерений тепловых потоков (что часто бывает связано с техническими сложностями и большими погрешностями), а ограничиться измерением температур в 1–3 точках;

2) дают более широкие возможности в отношении выбора источников тепловых воздействий;

3) требуют, как правило, значительно меньших затрат времени (по сравнению со стационарными методами) на проведение активной части эксперимента;

4) часто не требуют значительного времени на предварительную выдержку образцов при определенной начальной температуре;

5) относительно малая суммарная затрата времени на проведение эксперимента часто позволяет снизить требования к тепловой защите исследуемых образцов от конвективного и лучистого теплообмена с окружающей средой;

6) метод регулярного режима второго рода позволяет в одном эксперименте получить зависимость измеряемых теплофизических свойств от температуры, например, $\lambda = \lambda(T)$; отметим, что при использовании стационарных методов такие зависимости находят по опытным данным, полученным в нескольких экспериментах;

7) измерения теплофизических свойств производятся при относительно небольших перепадах температур, что приближает их средние значения к истинным.

Благодаря перечисленным выше достоинствам, методы регулярных режимов находят все большее применение как при проведении научно-исследовательских работ, так и при контроле качества продукции и изделий в процессах их производства и хранения.

К недостаткам нестационарных методов регулярных режимов относятся:

– трудности получения точно регулируемого изменения во времени температуры окружающей среды $T_k(\tau)$ или температуры поверхности образца $\varphi_k(\tau)$;

– дополнительные динамические погрешности, возникающие из-за необходимости измерять изменяющиеся во времени температуры.

Использование современных компьютерных (микропроцессорных) технических и программных средств позволяет преодолевать эти недостатки нестационарных методов теплофизических измерений.

6.2 МЕТОД РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ПЕРВОГО РОДА

6.2.1 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИСХОДНОЙ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ К БЕЗРАЗМЕРНОМУ ВИДУ

Рассмотрим теоретические и практические аспекты метода регулярного режима первого рода одновременно для всех трех возможных вариантов образцов простой формы в виде:

- сплошной неограниченной пластины ($\gamma = 0$) толщиной $2R$, симметрично обогреваемой с двух сторон;
- сплошного неограниченного цилиндра ($\gamma = 1$) диаметром $d = 2R$;
- сплошного шара ($\gamma = 2$) диаметром $d = 2R$.

Потребуем дополнительно, что температура греющей среды во всех точках внешних поверхностей пластины (цилиндра или шара) в момент времени $\tau = 0$ ступенчато изменяется по закону (6.6), а в последующие моменты времени остается по всей поверхности одинаковой. Тогда исходную постановку краевой задачи теплопроводности можно представить в виде (6.1) – (6.5), причем, для рассматриваемого нами метода регулярного режима первого рода в этой постановке задачи (6.1) – (6.5) должно быть задано $\kappa = 1$.

Выполним процедуру преобразования краевой задачи (6.1) – (6.5) к безразмерному виду.

Перенесем начало температурной шкалы в точку $T = T_c$, где T_c – температура греющей среды (см. формулу (6.6)), которая является постоянной и не зависит ни от времени τ , ни от координаты r . В результате получим новую переменную величину

$$\vartheta(r, \tau) = T(r, \tau) - T_c, \quad (6.11)$$

тоже имеющую физический смысл температуры. Однако, если $T(r, \tau) = 35$ °C, то при $T_c = 20$ °C эта физическая переменная величина принимает значения $\vartheta(r, \tau) = T(r, \tau) - T_c = 35 - 20 = 15$ °C, так как начало отсчета температуры из точки $T = 0$ °C было перенесено в точку $T = T_c = 20$ °C.

Если соотношение (6.11) поделить на постоянную величину $(T_0 - T_c)$, то получим формальную запись безразмерной температуры, часто обозначаемой

$$\theta(r, \tau) = \frac{\mathfrak{Y}(r, \tau)}{T_0 - T_c} = \frac{T(r, \tau) - T_c}{T_0 - T_c}, \quad (6.11a)$$

где T_0 – первоначальная постоянная температура исследуемого образца; $(T_0 - T_c)$ – характерная разность температур рассматриваемой краевой задачи (6.1) – (6.5) при $\kappa = 1$.

Из соотношения (6.11a) легко получить

$$T(r, \tau) = T_c + (T_0 - T_c)\theta(r, \tau). \quad (6.11b)$$

Принимая во внимание то, что $T_c = \text{const}$, $(T_0 - T_c) = \text{const}$, на основании (6.11b) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} &= (T_0 - T_c) \frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial \tau}; \\ \frac{1}{r^\Gamma} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\Gamma \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} \right] &= (T_0 - T_c) \frac{1}{r^\Gamma} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\Gamma \frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial r} \right], \end{aligned}$$

что позволяет уравнение (6.1) записать в виде

$$\frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{1}{r^\Gamma} \frac{\partial}{\partial r} \left[r^\Gamma \frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial r} \right]; \quad (6.1a)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < r < R. \quad (6.2a)$$

Если левую и правую части (6.1a) поделить на величину $\frac{a}{R^2} = \text{const}$, то получим

$$\frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial \left(\frac{a\tau}{R^2} \right)} = \frac{1}{\left(\frac{r}{R} \right)^\Gamma} \frac{\partial}{\partial \left(\frac{r}{R} \right)} \left[\left(\frac{r}{R} \right)^\Gamma \frac{\partial \theta(r, \tau)}{\partial \left(\frac{r}{R} \right)} \right]; \quad (6.1b)$$

$$\tau > 0, \quad 0 < r < R. \quad (6.2b)$$

Введем новые переменные: $\bar{r} = \frac{r}{R}$ – безразмерная координата, изменяющаяся в пределах $0 < \bar{r} < 1$, $\text{Fo} = a\tau/R^2$ – число Фурье, представляющее собой безразмерное время ($\text{Fo} \geq 0$).

После перехода от размерных координат r, τ к безразмерным \bar{r} и Fo , выражения (6.1b), (6.2b) примут вид:

$$\frac{\partial \theta(\bar{r}, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(\bar{r})^r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[(\bar{r})^r \frac{\partial \theta(\bar{r}, Fo)}{\partial Fo} \right]; \quad (6.1c)$$

$$Fo \geq 0, \quad 0 < \bar{r} < 1. \quad (6.2c)$$

Воспользуемся (6.11b) для преобразования (6.3) к безразмерной записи:

$$T(r, 0) \equiv T_0 = T_c + (T_0 - T_c) \theta(\bar{r}, 0); \quad (6.3a)$$

$$T_0 - T_c = (T_0 - T_c) \theta(\bar{r}, 0); \quad (6.3b)$$

$$\theta(\bar{r}, 0) = \frac{T_0 - T_c}{T_0 - T_c} = 1. \quad (6.3c)$$

Аналогично, для (6.4) получаем, что $\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial r}$ соответствует соотношению

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial \bar{r}} = 0. \quad (6.4a)$$

Преобразуем (6.5)

$$\lambda \frac{\partial [T(R, \tau) - T_c]}{\partial r} = \alpha \{ [T_\kappa(\tau) - T_c] - [T(R, \tau) - T_c] \}.$$

Поделив это выражение на $[T_0 - T_c]$, получим

$$\lambda \frac{\partial \left[\frac{T(R, \tau) - T_c}{T_0 - T_c} \right]}{\partial r} = \alpha \left\{ \left[\frac{T_\kappa(\tau) - T_c}{T_0 - T_c} \right] - \left[\frac{T(R, \tau) - T_c}{T_0 - T_c} \right] \right\}.$$

Умножив левую и правую части этого равенства на $R/\lambda = \text{const}$ и приняв во внимание (6.11a), после перехода к безразмерным величинам \bar{r} и Fo получаем

$$\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial \bar{r}} = \text{Bi} [\theta_\kappa(Fo) - \theta(1, Fo)], \quad (6.5b)$$

где $\text{Bi} = \frac{\alpha R}{\lambda}$ – критерий Био; $\theta_\kappa(Fo) = \frac{T_\kappa \left(\frac{R^2}{a} Fo \right) - T_c}{T_0 - T_c}$ – безразмерная температура греющей среды.

Учитывая тот факт, что в случае регулярного режима первого рода ($\kappa = 1$) температура греющей среды изменяется по закону (6.6), имеющему вид

$$T_{\kappa}(\tau) \equiv T_1(\tau) = \begin{cases} T_0 & \text{при } \tau \leq 0; \\ T_c & \text{при } \tau > 0, \end{cases}$$

при $\tau > 0$ (что соответствует $Fo > 0$) получаем

$$\theta_{\kappa}(Fo) \equiv \theta_1(Fo) = \frac{T_1\left(\frac{R^2}{a}Fo\right) - T_c}{T_0 - T_c} = \frac{T_c - T_c}{T_0 - T_c} = 0,$$

после чего выражение (6.5b) принимает вид

$$\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial \bar{r}} + Bi \cdot \theta(1, Fo) = 0. \quad (6.5c)$$

С учетом изложенного выше исходная краевая задача теплопроводности (6.1) – (6.5), после перехода к безразмерным переменным, при ступенчатом изменении температуры греющей среды по закону (6.6), что позволяет считать $\theta_{\kappa}(Fo) \equiv \theta_1(Fo) = 0$, приобретает вид:

$$\frac{\partial \theta(\bar{r}, Fo)}{\partial Fo} = \frac{1}{(\bar{r})^r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[(\bar{r})^r \frac{\partial \theta(\bar{r}, Fo)}{\partial \bar{r}} \right], \quad Fo > 0, \quad 0 < \bar{r} < 1; \quad (6.12)$$

$$\theta(\bar{r}, 0) = 1; \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial \theta(0, Fo)}{\partial \bar{r}} = 0; \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial \theta(1, Fo)}{\partial \bar{r}} + Bi \cdot \theta(1, Fo) = 0. \quad (6.15)$$

Отметим, что в случае задания граничных условий первого рода (6.5a) при $r = R$, граничное условие (6.15) принимает вид

$$\theta(1, Fo) = 0. \quad (6.15a)$$

Если в процессе эксперимента измерены несколько (или хотя бы одна) температурных кривых

$$T(r_i, \tau) = T_{zi}(\tau), \quad i = 1, 2, \dots,$$

характеризующие температуры во внутренних точках образца с координатами

$$0 \leq r_i < R,$$

то краевая задача (6.12) – (6.15) может быть дополнена соотношениями

$$\theta\left(\frac{r_i}{R}, \text{Fo}\right) = \theta_{\text{э}i}(\text{Fo}), \quad i = 1, 2, \dots, \quad (6.16)$$

где

$$\theta_{\text{э}i}(\text{Fo}) = \frac{T_{\text{э}i}\left(\frac{R^2}{a}\text{Fo}\right) - T_c}{T_0 - T_c} = \frac{T_{\text{э}i}(\tau) - T_c}{T_0 - T_c},$$

где $\theta_{\text{э}i}(\text{Fo})$ – безразмерные температуры, легко рассчитываемые по экспериментально измеренным температурам $T_0, T_c, T_{\text{э}i}(\tau), i = 1, 2, \dots$.

Задача (6.12) – (6.16) является инверсной (обратной) краевой задачей теплопроводности, лежащей в основе рассматриваемого нами метода регулярного режима первого рода. В результате решения задачи (6.12) – (6.16) достаточно несложно получают расчетные соотношения, используемые для вычисления искомых теплофизических свойств по опытным данным $R, T_0, T_c, T_{\text{э}i}(\tau), i = 1, 2, \dots$, полученным в процессе эксперимента.

6.2.2 РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ЛЕЖАЩЕЙ В ОСНОВЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ПЕРВОГО РОДА

Сначала получим (методом разделения переменных) решение прямой краевой задачи теплопроводности (6.12) – (6.15).

6.2.2.1 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВИДЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ ФУНКЦИЙ

Решение задачи (6.12) – (6.15) будем искать в виде

$$\theta(\bar{r}, \text{Fo}) = \psi(\bar{r}) t(\text{Fo}). \quad (6.12a)$$

Тогда

$$\frac{\partial \theta(\bar{r}, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \psi(\bar{r}) \frac{d t(\text{Fo})}{d \text{Fo}} = \psi(\bar{r}) t'(\text{Fo});$$

$$\frac{1}{(\bar{r})^r} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left[(\bar{r})^r \frac{\partial \theta(\bar{r}, \text{Fo})}{\partial \bar{r}} \right] = \frac{1}{(\bar{r})^r} \frac{d}{d \bar{r}} \left[(\bar{r})^r \frac{d \psi(\bar{r})}{d \bar{r}} \right] t(\text{Fo}).$$

После подстановки этих соотношений в уравнение (6.12) получаем

$$t'(Fo) \psi(\bar{r}) = \frac{1}{(\bar{r})^r} \frac{d}{d\bar{r}} \left[(\bar{r})^r \frac{d\psi(\bar{r})}{d\bar{r}} \right] t(Fo).$$

Если это уравнение поделить на $\psi(\bar{r}) t(Fo)$, то получим равенство

$$\frac{t'(Fo)}{t(Fo)} = \frac{\frac{1}{(\bar{r})^r} \frac{d}{d\bar{r}} \left[(\bar{r})^r \frac{d\psi(\bar{r})}{d\bar{r}} \right]}{\psi(\bar{r})} = -\varepsilon^2. \quad (6.17)$$

Левая часть равенства (6.17) зависит от безразмерной временной координаты – числа Фурье Fo , а правая часть – от безразмерной пространственной координаты \bar{r} , т.е. мы имеем равенство двух функций, каждая из которых имеет свою независимую переменную.

Возникает вопрос: "При каком условии две функции, зависящие от разных переменных величин (аргументов) Fo и \bar{r} , могут быть равны между собой?". Возможен только один ответ на этот вопрос: "Две функции, стоящие в левой и правой сторонах равенства (6.17), зависящие от разных аргументов Fo и \bar{r} , могут быть равны только при условии, что каждая из них равна константе". Эта константа в равенстве (6.17) записана в виде $-\varepsilon^2$.

С учетом сказанного выше исходная прямая краевая задача теплопроводности (6.12) – (6.15) разделяется на две задачи.

Первая задача определяет зависимость искомого решения (6.12а) от безразмерного времени Fo и записывается в виде обыкновенного дифференциального уравнения

$$t'(Fo) + \varepsilon^2 t(Fo) = 0, \quad (6.18)$$

общее решение которого имеет вид

$$t(Fo) = B \exp[-\varepsilon^2 Fo]. \quad (6.18a)$$

Примечание. Если бы правую и левую части равенства (6.17) приравняли положительному числу ε^2 , то уравнение (6.18) приобрело бы вид $t'(Fo) - \varepsilon^2 t(Fo) = 0$, и имело бы неустойчивое решение

$$t(Fo) = B \exp[+\varepsilon^2 Fo],$$

которое быстро стремится к бесконечности по мере роста безразмерного времени $Fo > 0$. Нас интересует устойчивое решение исходной прямой краевой задачи теплопроводности (6.12) – (6.15). Именно поэтому левую и правую

части (6.17) мы приравняли отрицательной константе, что записано в (6.17) в виде $-\varepsilon^2$. Любая величина, возведенная в квадрат, дает положительное число $\varepsilon^2 > 0$. Тогда величина $-\varepsilon^2 < 0$ всегда является отрицательной, что позволяет в дальнейшем получить устойчивое (не обращающееся в бесконечность) решение (6.18а) уравнения (6.18).

Получившееся решение (6.18а) будет использовано нами в дальнейшем.

Вторая задача, получающаяся в результате применения метода разделения переменных, имеет вид

$$\frac{d}{d\bar{r}} \left[(\bar{r})^\gamma \frac{d\psi(\bar{r})}{d\bar{r}} \right] + \varepsilon^2 (\bar{r})^\gamma \psi(\bar{r}) = 0, \quad 0 < \bar{r} < 1; \quad (6.19)$$

$$\frac{d\psi(0)}{d\bar{r}} = 0; \quad (6.20)$$

$$\frac{d\psi(1)}{d\bar{r}} + \text{Bi} \psi(1) = 0. \quad (6.21)$$

Задача (6.19) – (6.21) представляет собой хорошо изученную в математике краевую задачу Штурма-Лиувилля [19].

6.2.2.2 СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Решения $\psi(\bar{r})$ краевой задачи Штурма-Лиувилля (6.19) – (6.21) существуют при вполне определенных значениях ε . Эти значения ε и соответствующие им решения $\psi(\bar{r})$ называются собственными значениями и собственными функциями краевой задачи Штурма-Лиувилля и обладают следующими свойствами [19]:

1) существует бесконечное (счетное) множество собственных значений ε_n и соответствующих им собственных функций $\psi_n(\bar{r})$ краевой задачи (6.19) – (6.21); индекс n может принимать значения $n = 1, 2, \dots, \infty$;

2) если $\psi_n(\bar{r})$ является собственной функцией краевой задачи (6.19) – (6.21) и $K = \text{const}$, то $K \psi_n(\bar{r})$ тоже собственная функция краевой задачи Штурма-Лиувилля (6.19) – (6.21);

3) собственные функции $\psi_n(\bar{r})$ и $\psi_m(\bar{r})$ ортогональны на отрезке $0 \leq \bar{r} \leq 1$ с весом $\rho(\bar{r}) = (\bar{r})^\gamma$, т.е.

$$\int_0^1 \psi_n(\xi) \psi_m(\xi) \xi^\gamma d\xi = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n; \\ \phi_n^2, & \text{если } m = n, \end{cases} \quad (6.22)$$

где $\phi_n = \sqrt{\int_0^1 \psi_n^2(\xi) \xi^\Gamma d\xi}$ – так называемая норма функции $\psi_n(\bar{r})$; если ввести функции $\bar{\psi}_n(\bar{r}) = \frac{\psi_n(\bar{r})}{\phi_n}$, то очевидно, что в силу сформулированного выше второго свойства краевой задачи (6.19) – (6.21), $\bar{\psi}_n(\bar{r})$ тоже является собственной функцией, причем

$$\int_0^1 [\bar{\psi}_n(\xi)]^2 \xi^\Gamma d\xi = 1;$$

$\bar{\psi}_n(\bar{r})$ называют ортонормированными собственными функциями краевой задачи Штурма-Лиувилля (6.19) – (6.20);

4) всякая непрерывная на отрезке $0 < \bar{r} < 1$ функция $f(\bar{r})$ разлагается в ряд Фурье по собственным функциям краевой задачи Штурма-Лиувилля, т.е.

$$f(\bar{r}) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \psi_n(\bar{r}), \quad (6.23)$$

где D_n – коэффициент разложения функции $f(\bar{r})$ в ряд Фурье (6.23).

Перечисленные выше свойства собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля позволяют легко находить коэффициенты D_n разложения функции $f(\bar{r})$ в ряд Фурье.

Рассмотрим порядок получения значений коэффициентов D_n . Умножим левую и правую части равенства (6.23) на $(\bar{r})^\Gamma \psi_m(\bar{r})$, а затем, после замены аргумента \bar{r} на переменную интегрирования ξ и интегрирования в пределах от 0 до 1, получим

$$\int_0^1 f(\xi) \xi^\Gamma \psi_m(\xi) d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \int_0^1 \psi_n(\xi) \psi_m(\xi) \xi^\Gamma d\xi.$$

Принимая во внимание, что в силу свойства ортогональности (6.22) в правой части последнего равенства все интегралы (при $m \neq n$)

равны нулю, кроме одного $\int_0^1 [\psi_m(\xi)]^2 \xi^\Gamma d\xi = \phi_m^2$, получаем

$$\int_0^1 f(\xi) \xi^\Gamma \psi_m(\xi) d\xi = D_m \int_0^1 [\psi_m(\xi)]^2 \xi^\Gamma d\xi,$$

откуда следует (после замены обозначения индекса m на обозначение n) формула для вычисления коэффициентов D_n разложения в ряд Фурье (6.23)

$$D_n = \frac{\int_0^1 \psi_n(\xi) \xi^\Gamma f(\xi) d\xi}{\int_0^1 \psi_n^2(\xi) \xi^\Gamma d\xi}. \quad (6.23a)$$

6.2.2.3 ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ВИДЕ РЯДА ФУРЬЕ

На основании изложенного выше становится понятно, что существует бесконечное счетное множество частных решений исходной краевой задачи теплопроводности (6.12) – (6.15) вида (6.12a), каждое из которых имеет представление

$$\theta_n(\bar{r}, Fo) = D_n \psi_n(\bar{r}) B \exp[-\varepsilon_n^2 Fo], \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.12b)$$

Если воспользоваться известным в теории решения дифференциальных уравнений приемом, согласно которому общее решение дифференциального уравнения ищется в виде линейной комбинации всех линейно независимых друг от друга частных решений, то общее решение краевой задачи (6.12) – (6.15) можно записать

$$\theta(\bar{r}, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \theta_n(\bar{r}, Fo),$$

где C_n – постоянные коэффициенты, $\theta_n(\bar{r}, Fo)$ – линейно независимые друг от друга частные решения вида (6.12b).

Принимая во внимание (6.12b), получаем

$$\theta(\bar{r}, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n D_n B \psi_n(\bar{r}) \exp[-\varepsilon_n^2 Fo],$$

или

$$\theta(\bar{r}, Fo) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(\bar{r}) \exp[-\varepsilon_n^2 Fo], \quad (6.24)$$

где $A_n = C_n D_n B$ – коэффициенты ряда Фурье (6.24), которые можно получить, воспользовавшись начальным условием (6.13). Подставив

Fo = 0 в (6.24), с учетом (6.13) получаем равенство

$$\theta(\bar{r}, 0) = 1 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(\bar{r}),$$

представляющее собой разложение начального условия $\theta(\bar{r}, 0) = 1$ в ряд Фурье.

Коэффициенты A_n этого ряда легко находятся по формуле (6.23а), если в ней положить $f(\xi) = 1$. С учетом сказанного выше

$$A_n = \frac{\int_0^1 \psi_n(\xi) \xi^\Gamma \theta(\bar{r}, 0) d\xi}{\int_0^1 \psi_n^2(\xi) \xi^\Gamma d\xi} = \frac{\int_0^1 \psi_n(\xi) \xi^\Gamma 1 d\xi}{\int_0^1 \psi_n^2(\xi) \xi^\Gamma d\xi}. \quad (6.24a)$$

Таким образом, решение $\theta(\bar{r}, Fo)$ исходной краевой задачи теплопроводности (6.12) – (6.15) имеет вид (6.24), коэффициенты A_n которого определяются соотношением (6.24а).

Из теории математической физики известно, что решение краевой задачи теплопроводности (6.12) – (6.15) можно представить с применением так называемой функции Грина [1, 2, 16, 20, 21] в виде

$$\begin{aligned} \theta(\bar{r}, Fo) &= \int_0^1 G(\bar{r}, \bar{\xi}, Fo - \eta) \Big|_{\eta=0} \left(\frac{\bar{\xi}}{\bar{r}} \right)^\Gamma \theta(\bar{\xi}, \eta) \Big|_{\eta=0} = \\ &= \int_0^1 G(\bar{r}, \bar{\xi}, Fo - 0) \bar{\xi}^\Gamma \theta(\bar{\xi}, 0) d\bar{\xi}, \end{aligned} \quad (6.25)$$

где $G(\bar{r}, \bar{\xi}, Fo - \eta)$ – функция Грина четырех аргументов; $\bar{r} = \frac{r}{R}$,

$Fo = \frac{a\tau}{R^2}$ – безразмерные пространственная и временная координаты;

$\bar{\xi} = \frac{\xi}{R}$ – пространственная переменная интегрирования; η – временная переменная интегрирования, принимающая значение $\eta = 0$ в формуле (6.25).

Для того чтобы найти функцию Грина, подставим выражение

(6.24a) в решение (6.24). В результате получим

$$\begin{aligned} \theta(\bar{r}, Fo) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^1 \psi_n(\bar{\xi}) \bar{\xi}^\Gamma \theta(\bar{\xi}, 0) d\bar{\xi}}{\int_0^1 \psi_n^2(\bar{\xi}) \bar{\xi}^\Gamma d\bar{\xi}} \psi_n(\bar{r}) \exp[-\varepsilon_n^2 (Fo - 0)] = \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\bar{r}) \psi_n(\bar{\xi}) \exp[-\varepsilon_n^2 (Fo - 0)]}{\int_0^1 \psi_n^2(s) s^\Gamma ds} \bar{\xi}^\Gamma \theta(\bar{\xi}, 0) d\bar{\xi}. \end{aligned} \quad (6.24b)$$

Сравнивая (6.24b) с (6.25), получаем функцию Грина

$$G(\bar{r}, \bar{\xi}, Fo - \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(\bar{r}) \psi_n(\bar{\xi}) \exp[-\varepsilon_n^2 (Fo - \eta)]}{\int_0^1 \psi_n^2(s) s^\Gamma ds}. \quad (6.25a)$$

6.2.2.4 СУЩНОСТЬ РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ПЕРВОГО РОДА

Полученное выше решение (6.24) исходной прямой краевой задачи теплопроводности (6.12) – (6.15) представляет собой ряд Фурье, обладающий следующими свойствами:

1) ряд Фурье (6.24) является знакопеременным, т.е. знаки коэффициентов A_n чередуются (если $A_1 > 0$, то $A_2 < 0$, $A_3 > 0$ и т.д.);

2) собственные значения ε_n быстро растут (по абсолютной величине) по мере увеличения номера n , например, в случае пластины толщиной $2R$ при $Bi \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{3\pi}{2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{5\pi}{2}, \quad \dots, \quad \varepsilon_n = \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad \dots,$$

что соответствует еще более быстрому росту ε_n^2 , пропорциональному

$$\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi^2.$$

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{4} \pi^2, \quad \varepsilon_2^2 = \frac{9}{4} \pi^2, \quad \varepsilon_3^2 = \frac{25}{4} \pi^2, \quad \dots, \quad \varepsilon_n^2 = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2 \pi^2, \quad \dots;$$

3) в силу последнего свойства собственных значений, знакопеременный ряд (6.24) быстро сходится, причем каждый последующий член ряда (6.24) стремится к нулю (по мере роста Fo) быстрее, чем предыдущий, т.е.

$$A_{n+1}\psi_{n+1}(\bar{r})\exp[-\varepsilon_{n+1}^2 Fo] < A_n\psi_n(\bar{r})\exp[-\varepsilon_n^2 Fo],$$

что графически проиллюстрировано на рис. 6.2, а.

Из изложенного выше следует (см. рис. 6.2, а), что всегда найдется такое значение Fo^* , что при $Fo > Fo^*$ всеми членами ряда (6.24), кроме первого члена $A_1\psi_1(\bar{r})\exp[-\varepsilon_1^2 Fo]$, можно пренебречь. Тогда для вычисления значений безразмерной температуры $\theta(\bar{r}, Fo)$ можно использовать первый член ряда (6.24):

$$\theta(\bar{r}, Fo) \approx A_1\psi_1(\bar{r})\exp[-\varepsilon_1^2 Fo]. \quad (6.24c)$$

Значение Fo^* может быть вычислено, исходя из предположения, что отбрасывание второго члена ряда не должно вносить погрешность более 1 % от величины первого члена ряда, что дает уравнение

$$\frac{A_2\psi_2(\bar{r})\exp[-\varepsilon_2^2 Fo]}{A_1\psi_1(\bar{r})\exp[-\varepsilon_1^2 Fo]} = -0,01. \quad (6.24d)$$

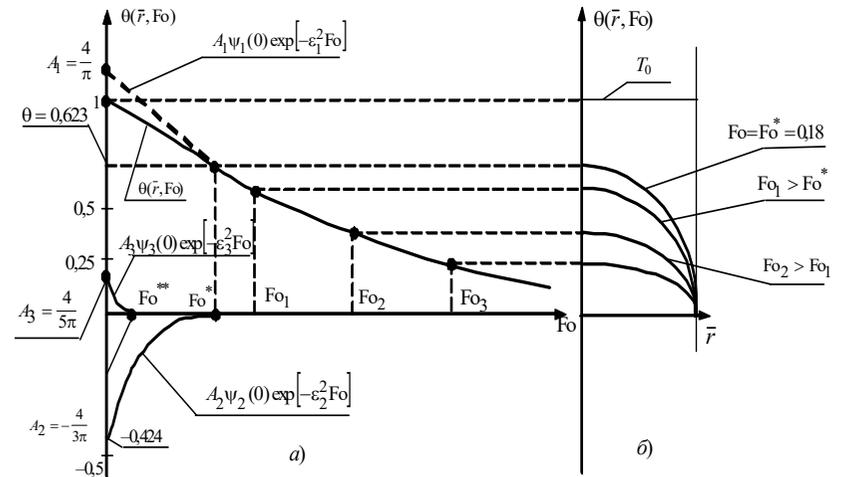


Рис. 6.2 Температурное поле в образце при регулярном режиме первого рода:

a – характер зависимости членов ряда (6.24) от числа Фурье Fo при $\bar{r} = 0$;
 b – характер зависимости температуры от пространственной координаты \bar{r}
образца внутри

В правой части последнего уравнения стоит знак "минус", так как A_1 и A_2 имеют разные знаки.

Положив в уравнении (6.24d), например, $\bar{r} = 0$, получим

$$\exp\left[-(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)Fo\right] = -0,01 \frac{A_1 \psi_1(0)}{A_2 \psi_2(0)},$$

откуда следует

$$-(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)Fo^* = \ln\left[-\frac{A_1 \psi_1(0)}{100 A_2 \psi_2(0)}\right];$$

$$Fo^* = -\frac{1}{(\varepsilon_2^2 - \varepsilon_1^2)} \ln\left[-\frac{A_1 \psi_1(0)}{100 A_2 \psi_2(0)}\right].$$

Например, в случае пластины при $Bi \rightarrow \infty$:

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{4} \pi^2; \quad \varepsilon_2^2 = \frac{9}{4} \pi^2;$$

$$\psi_1(0) = \cos\left(\varepsilon_1 \frac{0}{R}\right) = \psi_2(0) = \cos\left(\varepsilon_2 \frac{0}{R}\right) = 1;$$

$$A_1 = \frac{2}{\varepsilon_1} = \frac{2}{\pi/2} = \frac{4}{\pi} = 1,273;$$

$$A_2 = -\frac{2}{\varepsilon_2} = -\frac{2 \cdot 2}{3\pi} = -\frac{4}{3\pi} = -0,424,$$

откуда получаем

$$Fo^* = -\frac{1}{\frac{9}{4}\pi^2 - \frac{1}{4}\pi^2} \ln\left|\frac{\frac{4}{\pi}}{100 \frac{4}{3\pi}}\right| = -\frac{\ln\left(\frac{3}{100}\right)}{\pi^2 \left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right)} = \frac{\ln 33,3}{2\pi^2} = 0,178 \approx 0,18.$$

Таким образом, при $Fo > Fo^* = 0,18$ в середине пластины толщиной $2R$ при $\bar{r} = 0$ всеми членами ряда (6.24) (кроме первого члена) можно пренебречь и вычислять температурное поле $\theta(\bar{r}, Fo)$ по формуле (6.24c).

Примечание. Рассмотренный выше случай определения $Fo^* = 0,18$ при $\bar{r} = 0$ является наиболее жестким; при $\bar{r} > 0$ условие (6.24d) начинает выполняться при $Fo < Fo^* = 0,18$.

Характер зависимости температурного поля от пространственной координаты $\bar{r} = \frac{r}{R}$ при значениях числа Фурье $Fo > Fo^*$ представлен на рис. 6.2, б. Видно, что при $Fo > Fo^*$ температурное поле внутри образца описывается первой собственной функцией $\psi_1(\bar{r})$ и остается на протяжении всего регулярного режима первого рода подобным само себе, а именно:

$$\theta(\bar{r}, Fo) = K(Fo) \psi_1(\bar{r}),$$

где $K(Fo) = A_1 \exp[-\varepsilon_1^2 Fo]$ – множитель, величина которого зависит от числа Фурье Fo .

Если прологарифмировать левую и правую части равенства (6.24с), то получим уравнение

$$\ln \theta(\bar{r}, Fo) = \ln [A_1 \psi_1(\bar{r})] - \varepsilon_1^2 Fo,$$

представляющее собой уравнение прямой линии в системе координат $(\ln \theta, Fo)$.

$$\text{Подставив в последнее уравнение } Fo = \frac{a\tau}{R^2} \text{ и } \theta = \frac{T(r, \tau) - T_c}{T_0 - T_c},$$

получаем

$$\ln \left[\frac{T(r, \tau) - T_c}{T_0 - T_c} \right] = \ln \left[A_1 \psi_1 \left(\frac{r}{R} \right) \right] - \varepsilon_1^2 \frac{a}{R^2} \tau;$$

$$\ln [T(r, \tau) - T_c] = \ln [T_0 - T_c] + \ln \left[A_1 \psi_1 \left(\frac{r}{R} \right) \right] - \varepsilon_1^2 \frac{a}{R^2} \tau$$

$$\text{или} \quad \ln [T(r, \tau) - T_c] = \ln \left[(T_0 - T_c) A_1 \psi_1 \left(\frac{r}{R} \right) \right] - m\tau, \quad (6.26)$$

где $m = \frac{\varepsilon_1^2 a}{R^2}$ – темп охлаждения (нагрева) образца, который имеет смысл тангенса угла наклона зависимости (6.26), представленной графически на рис. 6.3 в полулогарифмических координатах τ и $\ln [T(r, \tau) - T_c]$.

Из уравнения (6.26) и рис. 6.3 видно, что после наступления регулярного режима первого рода логарифм разности температур $\ln [T(r, \tau) - T_c]$ линейно зависит от времени τ , причем, тангенс угла

наклона этой линейной зависимости (см. рис. 6.3) равен темпу охлаждения

$$m = |\operatorname{tg}\alpha| = \left| \frac{\ln z_2 - \ln z_1}{\tau_2 - \tau_1} \right| = \frac{\ln z_1 - \ln z_2}{\tau_2 - \tau_1}.$$

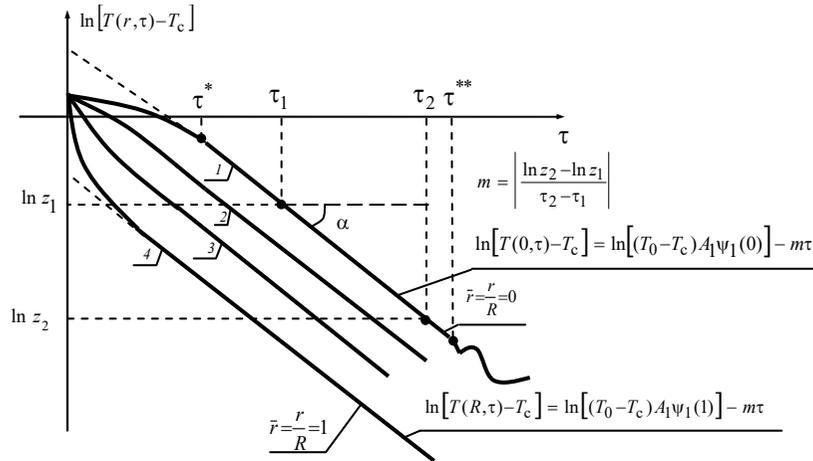


Рис. 6.3 Изменение логарифма температуры $\ln[T(r, \tau) - T_0]$ во времени τ :

$$1 - \text{при } r = 0; \quad 2 - \text{при } r = \frac{R}{2}; \quad 3 - \text{при } r = \frac{2R}{3}; \quad 4 - \text{при } r = R$$

Отметим, что величина темпа охлаждения m остается одной и той же для всех точек $0 \leq r < R$ внутри образца.

Итак, для регулярного режима первого рода характерно следующее:

1) регулярный режим первого рода наступает при $Fo > Fo^*$; если принять, что плоский образец имеет толщину $2R = 2 \cdot 10^{-2}$ м и имеет коэффициент температуропроводности $a = 1.45 \cdot 10^{-7}$ м²/с, получаем, что условию $Fo = \frac{a\tau}{R^2} \geq Fo^* = 0,18$ соответствует время наступления

регулярного режима первого рода $\tau \geq 0,18 \frac{1 \cdot 10^{-4}}{1,45 \cdot 10^{-7}} = 124 \text{ с} \approx 2,07 \text{ мин};$

2) после наступления регулярного режима первого рода (при $Fo > Fo^* = 0,18$) распределение температуры по координате \bar{r} в образце (с относительной погрешностью не более 1%) пропорционально

первой собственной функции $\psi_1(r)$ краевой задачи Штурма-Лиувилля (6.19) – (6.21), причем, это распределение температуры внутри образца остается подобным само себе $\theta(\bar{r}, Fo) = K(Fo)\psi_1(\bar{r})$ на протяжении всего регулярного режима первого рода, т.е. при $Fo > Fo^*$;

3) после наступления регулярного режима первого рода (при $Fo > Fo^*$) зависимости $\ln[T(r, \tau) - T_c]$ от времени τ в полулогарифмических координатах, представляют собой прямые линии, тангенс угла наклона которых численно равен темпу охлаждения m и остается одним и тем же для любой координаты $0 \leq r < R$.

6.2.3 РЕШЕНИЕ ИНВЕРСНОЙ (ОБРАТНОЙ) КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ЛЕЖАЩЕЙ В ОСНОВЕ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ПЕРВОГО РОДА

Целью решения инверсной (обратной) краевой задачи теплопроводности (6.12) – (6.16), представляющей собой прямую краевую задачу теплопроводности (6.12) – (6.15), дополненную экспериментально определенными данными (6.16), является получение расчетных алгоритмов, позволяющих вычислять искомый коэффициент теплопроводности по измеренным в ходе эксперимента значениям физических величин: R – характерного размера исследуемого образца, T_0 – первоначальной температуры образца, T_c – температуры среды, обогревающей внешнюю поверхность образца; $T_3(r_i, \tau) = T_{3i}(\tau)$ – изменение температуры во времени τ в точках образца с известными координатами $0 \leq r_i < R$.

6.2.3.1 УСТАНОВКА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ПЕРВОГО РОДА

Примерные варианты конструкций плоских, цилиндрических и шарообразных образцов, которые могут быть использованы при измерении коэффициента теплопроводности методом регулярного режима первого рода, представлены на рис. 6.4.

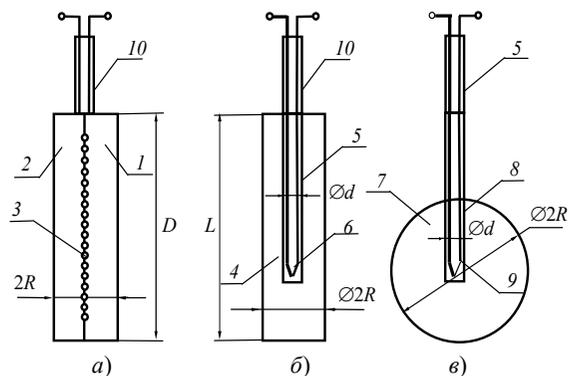


Рис. 6.4 Примерные варианты конструкций плоских (а), цилиндрических (б) и шаровых образцов (в)

Плоский образец для измерения температуропроводности методом регулярного режима первого рода может быть выполнен (см. рис. 6.4, а) в виде двух пластин 1 и 2, изготовленных из исследуемого материала, например в виде дисков одинаковой толщины R .

Между этими дисками размещают датчик температуры в виде термопары или показанного на рис. 6.4, а термометра сопротивления 3, навитого из медной проволоки, например, по спирали Архимеда. Электрические провода от термометра сопротивления 3 выводятся наружу через трубку 10, используемую так же для подвешивания плоского образца в жидкостном или воздушном термостате, обеспечивающем изменение температуры греющей среды по ступенчатому закону (6.6) или (6.6а). Диаметр D каждого диска 1, 2 должен не менее чем в 10–20 раз превышать их толщину R .

Вдоль осевой линии образца 4 цилиндрической формы (см. рис. 6.4, б) обычно просверливают отверстие 5, в котором размещают датчик температуры, например, термопару 6. Продольный размер L цилиндрического образца не менее чем в 10–20 раз должен превышать его радиус R , т.е. должно выполняться условие $L \geq (10 \dots 20) R$. Диаметр d отверстия 5 для размещения термопары 6 должен быть как можно меньше $d \leq (0,1 \dots 0,2) R$. Трубка 10 используется одновременно как для вывода наружу проводов термопары 6, так и для размещения цилиндрического образца на подвеске в жидкостном или воздушном термостате.

В образце 7 шаровой формы (см. рис. 6.4, в) также просверливают отверстие 8 диаметром d , позволяющее разместить датчик температуры, например, термопару в центральной точке шара. Диаметр d этого отверстия обычно удовлетворяет условию $d \leq (0,05 \dots 0,1) R$, где R – радиус шара. Трубка 10 и в этом случае используется для

вывода проводов датчика температуры 9, а также для подвешивания образца в жидком или воздушном термостате.

Схема установки для практического осуществления метода регулярного режима первого рода представлена на рис. 6.5.

Установка включает в себя два одинаковых термостата 1 и 2, имеющие системы автоматического регулирования температуры, включающие в себя контактные термометры 3, регуляторы температуры РТ и электронагреватели 4. Для перемешивания теплоносителя (воздуха или воды) термостаты снабжены вентиляторами (или мешалками) 5 с электроприводами 6.

На рис. 6.5 показаны воздушные термостаты с вентиляторами 5, позволяющие задавать стабильный во времени режим теплообмена на внешних поверхностях исследуемых образцов с постоянным коэффициентом теплообмена $\alpha = \text{const}$, обеспечивающие поддержание неизменного во времени значения критерия Био $Bi = \text{const}$ на протяжении всего хода эксперимента.

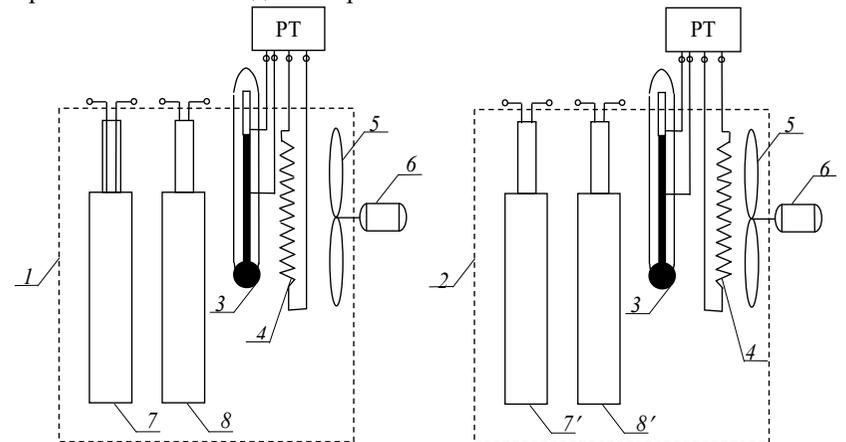


Рис. 6.5 Схема установки для измерения коэффициента температуропроводности методом регулярного режима первого рода

Если вместо воздуха-теплоносителя в термостатах использовать жидкость-теплоноситель, например воду, вентиляторы 5 обычно заменяют на пропеллерные мешалки, обеспечивающие интенсивное перемешивание жидкости-теплоносителя у внешних поверхностей исследуемых образцов 7, 8 и 7', 8'. Использование активно перемешиваемой жидкости-теплоносителя часто позволяет создать в термостатах 1, 2 настолько интенсивный теплообмен на внешних поверхностях образцов 7, 8 и 7', 8', при котором можно считать

$\alpha \rightarrow \infty$, $V_i \rightarrow \infty$, а вместо граничных условий третьего рода (6.5) использовать граничные условия первого рода (6.5а) в постановке исходной краевой задачи теплопроводности (6.1) – (6.4), (6.5а).

6.2.3.2 ПОРЯДОК ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

При одновременном измерении коэффициента температуропроводности и теплопроводности методом регулярного режима первого рода в случае использования воздушных термостатов, задающих граничные условия третьего рода (6.5) на внешней поверхности образцов, приходится применять:

- либо два образца 7, 8, первый из которых изготавливают из исследуемого материала, а второй – из материала с уже известными температуропроводностью a и теплопроводностью λ ;
- либо один образец, но с двумя датчиками температуры, установленных в двух точках с координатами $r = r_1$ и $r = r_2$.

Ниже рассмотрен порядок осуществления измерительных операций в случае использования двух образцов. Напомним, что первый образец должен быть изготовлен из исследуемого материала, а второй – из материала с известными значениями коэффициента температуропроводности a и теплопроводности λ . Желательно чтобы теплофизические свойства a и λ этих двух образцов, обозначенных позициями 7 и 8 на рис. 6.5, были достаточно близкими или, по крайней мере, не сильно отличались друг от друга.

Характерной особенностью рассматриваемого здесь метода одновременного измерения коэффициента температуропроводности a и теплопроводности λ является необходимость проведения двух экспериментов при двух различных значениях коэффициентов теплообмена

$$\alpha_1 = \text{const}; \quad \alpha_2 = \text{const}$$

на внешних поверхностях исследуемых образцов. Такой подход в монографиях [8, 12] назван *методом двух альфа*.

Метод двух альфа состоит в том, что образцы (из исследуемого материала и из материала с известными значениями a и λ) охлаждаются (нагревают) в среде с постоянной температурой T_c , но первоначально при интенсивности теплообмена, характеризуемой значением $\alpha_1 = \text{const}$, а затем при интенсивности теплообмена, характеризуемой $\alpha_2 = \text{const}$.

Величины коэффициентов теплоотдачи $\alpha_1 = \text{const}$ и $\alpha_2 = \text{const}$ определяют по экспериментальным данным, полученным на образце из материала с известными теплофизическими свойствами a и λ (см.

п. 6.2.3.4 данной главы), а затем по экспериментальным данным, полученным на исследуемом образце (с неизвестными значениями a и λ), в результате решения системы двух уравнений, имеющих вид [12]

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1 R_1}{\lambda} \equiv \text{Bi}_1 = f_1 \left(R_1 \sqrt{\frac{m_1}{a}} \right); \\ \frac{\alpha_2 R_1}{\lambda} \equiv \text{Bi}_2 = f_2 \left(R_1 \sqrt{\frac{m_2}{a}} \right), \end{cases} \quad (6.27)$$

вычисляют искомые значения коэффициента температуропроводности a и теплопроводности λ исследуемого материала.

Примерный порядок осуществления измерительных операций (см. рис. 6.5) при каждой интенсивности теплообмена состоит в следующем.

1 Изготавливают два одинаковых образца 7, 8 из исследуемого материала и из материала с известными теплофизическими свойствами. Для того, чтобы условия теплообмена на внешних поверхностях образцов можно было считать одинаковыми, геометрические размеры образцов должны быть строго одинаковыми, а их теплофизические свойства a и λ не должны сильно различаться.

2 Оба образца – исследуемый 7 и сравнительный 8 – в течение достаточно большого промежутка времени, удовлетворяющему условию $\text{Fo} > \text{Fo}_{\min}(\text{Bi})$, зависящему от значения критерия Био, выдерживают в термостате 1 (см. рис. 6.5) для достижения равномерного распределения температур $T_0 = \text{const}$ в образцах 7 и 8. О достижении равномерного распределения температур в образцах 7 и 8 судят по постоянству показаний датчиков температуры, размещенных в этих образцах.

3 В момент начала активной стадии эксперимента оба образца 7 и 8 переносят (см. рис. 6.5) во второй термостат 2. Эти образцы 7 и 8, после их перемещения во второй термостат обозначены на рис. 6.5 позициями 7' и 8'. Необходимо принять все необходимые меры для того, чтобы коэффициент теплообмена можно было считать постоянным

$\alpha_1 = \text{const}$ на протяжении всей активной стадии эксперимента.

4 Время на протяжении активной стадии эксперимента отсчитывают с момента помещения образцов 7' и 8' во второй термостат.

В моменты времени $\tau_j = \tau_{j-1} + \Delta\tau$ через равные промежутки времени $\Delta\tau$ осуществляют измерение температур $[T_7(r, \tau_j) - T_c]$ и $[T_8(r, \tau_j) - T_c]$

в образце 7' из исследуемого материала и в образце 8' из материала с известными теплофизическими свойствами.

5 Активную стадию эксперимента завершают после того, когда измеряемые разности температур $[T_7(r, \tau_j) - T_c]$ и $[T_8(r, \tau_j) - T_c]$ станут соизмеримыми с погрешностями измерения температуры.

На практике эксперимент прекращают при выполнении одного из условия:

$$\theta_7(r, \tau_j) = \frac{T_7(r, \tau_j) - T_c}{T_0 - T_c} \leq (0,05 \dots 0,1);$$

$$\theta_8(r, \tau_j) = \frac{T_8(r, \tau_j) - T_c}{T_0 - T_c} \leq (0,05 \dots 0,1),$$

где T_c – температура греющей среды (воздуха-теплоносителя) в термостате 2; T_0 – первоначальная температура образцов 7 и 8, совпадающая с температурой греющей среды (воздуха-теплоносителя) в термостате 1; $T_7(r, \tau_j)$, $T_8(r, \tau_j)$ – температуры образцов 7' и 8' в точках с координатой r , измеренные в моменты времени $\tau_j = \tau_{j-1} + \Delta\tau$ с постоянным шагом $\Delta\tau$.

6 Обработывают полученные экспериментальные данные. При этом по данным, полученным с применением образца 8 (с известными значениями коэффициента температуропроводности a , теплопроводности λ и известным характерным размером R), находят сначала значения критерия Био

$$Bi_1 = \frac{\alpha_1 R}{\lambda},$$

а затем вычисляют и коэффициент теплообмена α_1 для этого первого эксперимента

$$\alpha_1 = \frac{\lambda}{R} Bi_1.$$

7 После завершения первого эксперимента при $\alpha_1 = \text{const}$ проводят второй эксперимент при другом постоянном значении коэффициента теплообмена $\alpha_2 = \text{const}$. При этом повторяют рассмотренные выше пп. 2 – 6, приняв меры к тому, чтобы в процессе активной части второго эксперимента также можно было считать $\alpha_2 = \text{const}$.

Примечание. Простейшим вариантом получения двух значений коэффициентов теплообмена $\alpha_1 = \text{const}$ и $\alpha_2 = \text{const}$ является проведение двух

экспериментов:

– сначала в спокойном воздушном термостате 2 при выключенном электроприводе 6 вентилятора 5, что позволяет получить небольшое значение коэффициента теплообмена $\alpha_1 = \text{const}$;

– затем при интенсивном перемешивании воздуха в термостате 2 (при включенном электроприводе 6 вентилятора 5), что позволяет получить значительно большее значение коэффициента теплообмена $\alpha_2 = \text{const}$.

8 По экспериментально измеренным значениям m_1 и m_2 темпа охлаждения, полученных на образце 7 с неизвестными теплофизическими свойствами, с учетом известных значений коэффициентов теплообмена $\alpha_1 = \text{const}$ и $\alpha_2 = \text{const}$, определенных с использованием образца 8, путем решения системы уравнений (6.27) вычисляют коэффициент температуропроводности a и теплопроводность λ исследуемого материала.

**6.2.3.3 АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА
ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ,
ПОЛУЧЕННЫМ В ОДНОЙ ТОЧКЕ ПО КООРДИНАТЕ r ,
ПРИ ЗАДАНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПЕРВОГО РОДА
НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ИССЛЕДУЕМОГО ОБРАЗЦА**

При вычислении коэффициента температуропроводности по экспериментальным данным, полученным в одной точке по координате r , при задании граничных условий первого рода на внешней поверхности исследуемого образца исходной прямой краевой задаче теплопроводности (6.12) – (6.15а) соответствует краевая задача Штурма-Лиувилля:

$$\frac{d}{dr} \left[(\bar{r})^r \frac{d\psi(\bar{r})}{d\bar{r}} \right] + \varepsilon^2 (\bar{r})^r \psi(\bar{r}) = 0, \quad 0 < \bar{r} < 1; \quad (6.19a)$$

$$\frac{d\psi(0)}{d\bar{r}} = 0; \quad (6.20a)$$

$$\psi(1) = 0. \quad (6.21a)$$

Последнее граничное условие получается из соотношения (6.21), представленного в виде

$$\frac{1}{\text{Bi}} \frac{d\psi(1)}{d\bar{r}} + \psi(1) = 0,$$

при $\text{Bi} \rightarrow \infty$.

Алгоритм обработки экспериментальных данных в этом случае включает в себя следующие действия:

1 По экспериментально измеренным (по крайней мере, в одной точке r) в моменты времени τ_j значениям температуры $[T(r, \tau_j) - T_c]$

строят график зависимости

$$\ln[T(r, \tau_j) - T_c] = f(\tau_j), \quad j = 1, 2, \dots,$$

примерный вид которого представлен на рис. 6.3.

2 На этом графике выделяют прямолинейный участок и определяют его левую τ^* и правую τ^{**} границы по оси времени τ .

3 По всем экспериментальным точкам, представляющим собой пары значений

$$\{\tau_j, \ln[T(r, \tau_j) - T_c]\},$$

попадающих в пределы прямолинейного участка $\tau^* \leq \tau_j \leq \tau^{**}$, находят уравнение прямой линии

$$\ln[T(r, \tau_j) - T_c] = \ln \left[(T_0 - T_c) A_1 \psi_1 \left(\varepsilon, \frac{r}{R} \right) \right] - m\tau,$$

например, используя метод наименьших квадратов. В результате на этом шаге алгоритма получают значение темпа охлаждения m .

4 Принимая во внимание, что абсолютная величина темпа охлаждения

$$|m| = \varepsilon_1^2 \frac{a}{R^2},$$

искомый коэффициент температуропроводности вычисляют по формуле

$$a = \frac{R^2}{\varepsilon_1^2} |m|. \quad (6.27a)$$

6.2.3.4 АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОТДАЧИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ, ПОЛУЧЕННЫМ В ОДНОЙ ТОЧКЕ ПО КООРДИНАТЕ r , ПРИ ЗАДАНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ОБРАЗЦА, ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ МАТЕРИАЛА С ИЗВЕСТНЫМИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ

При вычислении коэффициента теплоотдачи по экспериментальным данным, полученным в одной точке по координате r , при задании граничных условий третьего рода на внешней поверхности образца, изготовленного из материала с известными теплофизическими свойствами, исходной прямой краевой задаче (6.12) – (6.15) соответствует краевая задача Штурма-Лиувилля (6.19) – (6.21). При этом теплопроводность λ и коэффициент температуропроводности a материала, из которого изготовлен используемый образец, считаются заранее известными. Например, эти значения λ и a могут быть заранее измерены в предварительном эксперименте. Возможен вариант, когда используемый образец

преднамеренно изготавливают из материала с известными теплофизическими свойствами λ и a .

Экспериментальные данные в этом случае следует обрабатывать в соответствии со следующим алгоритмом:

1 По экспериментально измеренным (хотя бы в одной точке r) в моменты времени τ_j значениям температуры

$$[T(r, \tau_j) - T_c]$$

строят график зависимости

$$\ln[T(r, \tau_j) - T_c] = f(\tau_j),$$

примерный вид которого представлен на рис. 6.3.

2 На получившемся графике определяют левую τ^* и правую τ^{**} границы прямолинейного участка.

3 Для всех экспериментальных точек с координатами $\{\tau_j, \ln[T(r, \tau_j) - T_c]\}$, попадающих в диапазон $\tau^* \leq \tau_j \leq \tau^{**}$ этого прямолинейного участка, находят уравнение прямой линии

$$\ln[T(r, \tau_j) - T_c] = \ln \left[(T_0 - T_c) A_1 \psi_1 \left(\varepsilon_1 \frac{r}{R} \right) \right] - m\tau,$$

например, с использованием метода наименьших квадратов.

В итоге выполнения этого шага (рассматриваемого алгоритма) получают значение темпа охлаждения m .

4 Принимая во внимание, что абсолютная величина темпа охлаждения

$$|m| = \varepsilon_1^2 \frac{a}{R^2},$$

а величина a и R заранее известны,

$$\varepsilon_1^2 = \frac{R^2}{a} |m|.$$

5 Подставив получившееся значение квадрата первого собственного значения ε_1^2 в краевую задачу Штурма-Лиувилля (6.19) – (6.21), подбирают такое значение критерия Био Bi , входящее в (6.21), при котором это первое собственное значение ε_1 и соответствующая

ему первая собственная функция $\psi_1\left(Bi, \varepsilon_1 \frac{r}{R}\right)$ являются решением задачи Штурма-Лиувилля.

Принимая во внимание, что $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$, где λ, R – известная теплопроводность и характерный размер используемого образца, искомый коэффициент теплоотдачи α вычисляются по формуле

$$\alpha = \frac{\lambda}{R} Bi. \quad (6.28)$$

6.2.3.5 АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОВОДНОСТИ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ, ПОЛУЧЕННЫМ В ДВУХ ТОЧКАХ ПО КООРДИНАТЕ r , ПРИ ЗАДАНИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ОБРАЗЦА

При вычислении коэффициента температуропроводности по экспериментальным данным, полученным в двух точках по координате r , при задании граничных условий третьего рода на внешней поверхности образца исходной прямой краевой задаче теплопроводности (6.12) – (6.15) соответствует краевая задача Штурма-Лиувилля (6.19) – (6.21).

Для вычисления искомого коэффициента температуропроводности a в случае, когда на внешних поверхностях исследуемого образца заданы граничные условия третьего рода (6.15), предлагается использовать следующий алгоритм обработки экспериментальных данных.

1 По экспериментально измеренным (по крайней мере в двух точках $r = r_1$ и $r = r_2$) в моменты времени τ_j ($j = 1, 2, \dots$) значениям температур

$$[T(r_1, \tau_j) - T_c] \text{ и } [T(r_2, \tau_j) - T_c]$$

строят графики зависимостей

$$\ln[T(r_1, \tau_j) - T_c] = f_1(\tau_j),$$

$$\ln[T(r_2, \tau_j) - T_c] = f_2(\tau_j),$$

примерный вид которых представлен на рис. 6.3.

2 На каждом таком графике определяют левые τ_1^* , τ_2^* и правые τ_1^{**} , τ_2^{**} границы прямолинейных участков.

3 Для всех экспериментальных данных, попадающих одновременно в оба диапазона $\tau_1^* \leq \tau_j \leq \tau_1^{**}$ и $\tau_2^* \leq \tau_j \leq \tau_2^{**}$ таких прямолинейных участков, вычисляют значения

$$b_j = \frac{[T(r_1, \tau_j) - T_0]}{[T(r_2, \tau_j) - T_0]}, \quad j_{\min} \leq j \leq j_{\max},$$

где j_{\min} , j_{\max} – минимальные и максимальные значения индекса j , при которых $\tau_{j_{\min}} \geq \tau_1^*$, $\tau_{j_{\max}} \leq \tau_1^{**}$, ($i = 1, 2$), после чего вычисляют среднее значение величин b_j по формуле

$$\bar{b} = \frac{1}{j_{\max} - j_{\min} + 1} \sum_{j=j_{\min}}^{j_{\max}} b_j.$$

4 Принимая во внимание, что это среднее значение \bar{b} должно быть равно

$$\bar{b} = \frac{\psi_1\left(\text{Bi}, \varepsilon_1 \frac{r_1}{R}\right)}{\psi_1\left(\text{Bi}, \varepsilon_1 \frac{r_2}{R}\right)}$$

отношению значений первой собственной функции $\psi_1\left(\text{Bi}, \varepsilon_1 \frac{r_1}{R}\right)$ и $\psi_1\left(\text{Bi}, \varepsilon_1 \frac{r_2}{R}\right)$, соответственно, при $\bar{r} = \frac{r_1}{R}$ и $\bar{r} = \frac{r_2}{R}$, зависящих от критерия Био Bi , путем решения краевой задачи Штурма-Лиувилля (6.19) – (6.21) подбирают такое значение Bi , при котором первое собственное значение ε_1 и первая собственная функция $\psi_1\left(\text{Bi}, \varepsilon_1 \frac{r}{R}\right)$ этой краевой задачи (6.19) – (6.21) удовлетворяют соотношению

$$\frac{\psi_1\left(\text{Bi}, \varepsilon_1 \frac{r_1}{R}\right)}{\psi_1\left(\text{Bi}, \varepsilon_1 \frac{r_2}{R}\right)} = \bar{b}.$$

5 Для прямолинейных участков зависимостей

$$\ln[T(r_1, \tau_j) - T_c] = \ln \left[(T_0 - T_c) A_1 \Psi_1 \left(\frac{r_1}{R} \right) \right] - m \tau_j,$$

$$\ln[T(r_2, \tau_j) - T_c] = \ln \left[(T_0 - T_c) A_1 \Psi_1 \left(\frac{r_2}{R} \right) \right] - m \tau_j,$$

границы τ^* и τ^{**} которых были ранее определены в пункте 2 данного алгоритма, вычисляют значения темпа охлаждения

$$m_1 = \frac{\ln[T(r_1, \tau_{j\min}) - T_c] - \ln[T(r_1, \tau_{j\max}) - T_c]}{\tau_{j\max} - \tau_{j\min}},$$

$$m_2 = \frac{\ln[T(r_2, \tau_{j\min}) - T_c] - \ln[T(r_2, \tau_{j\max}) - T_c]}{\tau_{j\max} - \tau_{j\min}},$$

а в качестве результата принимаем среднее значение

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2}.$$

Примечание. Если значения m_1 и m_2 сильно отличаются друг от друга, то следует обратить серьезное внимание на достоверность полученных в ходе эксперимента результатов измерения и, при необходимости, еще раз повторить эксперимент; если же значения m_1 и m_2 получились близкими друг к другу, то это свидетельствует о том, что экспериментальные данные хорошо согласуются между собой (являются достоверными).

6 Принимая во внимание, что вычисленный по экспериментальным данным темп охлаждения равен $|m| = \varepsilon_1^2 \frac{a}{R^2}$, искомую теплопроводность a вычисляют по формуле

$$a = \frac{R^2}{\varepsilon_1^2} |m|. \quad (6.27b)$$

7 Принимая во внимание значение критерия Био $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$,

которое было определено в пункте 4 данного алгоритма, дополнительно к коэффициенту температуропроводности можно вычислить отношение коэффициента теплообмена α к теплопроводности λ исследуемого материала

$$\frac{\alpha}{\lambda} = \frac{Bi}{R}. \quad (6.28a)$$

8 Если в дополнительном эксперименте, выполненном с применением образца с известными значениями λ и a , в результате обработки по алгоритму, рассмотренному в п. 6.2.3.4, получено значение коэффициента теплообмена α , то можно вычислить и значение теплопроводности

$$\lambda = \frac{\alpha R}{Bi}. \quad (6.29)$$

6.3 МЕТОДЫ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ЗАКОНОМЕРНОСТЯХ РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ВТОРОГО РОДА

6.3.1 МЕТОД РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПЛОСКИХ ОБРАЗЦОВ

6.3.1.1 ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА И УСТРОЙСТВА ДЛЯ ЕГО ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ

Схема устройства для осуществления рассматриваемого метода регулярного режима второго рода при измерении теплофизических свойств плоских образцов, изготовленных из исследуемого материала, приведена на рис. 6.6.

При осуществлении рассматриваемого метода (рис. 6.6) используют пять пар одинаковых образцов $1, 1', 2, 2', 3, 3', 4, 4', 5, 5'$, между которыми установлены четыре электронагревателя $б$, имеющие одно и то же значение электрического сопротивления R_n . Эти электронагреватели включены последовательно и подключены к управляемому блоку питания УБП. Тот факт, что электронагреватели $б$ имеют одинаковое электрическое сопротивление R_n , позволяет считать, что в ходе эксперимента в каждом таком электронагревателе выделяется одна и та же электрическая мощность

$$P = U_{\text{нагр}} I_{\text{нагр}},$$

где $U_{\text{нагр}}$, $I_{\text{нагр}}$ – электрическое напряжение и электрический ток,

подводимый к каждому нагревателю.

Благодаря симметрии системы и тому, что электронагреватели изготавливают так, чтобы их площади S также были строго одинаковыми, можно считать, что каждый электронагреватель выделяет в исследуемые образцы одинаковые тепловые потоки

$$q = \frac{1}{2} \frac{P}{S} = \frac{U_{\text{нагр}} I_{\text{нагр}}}{2S}. \quad (6.30)$$

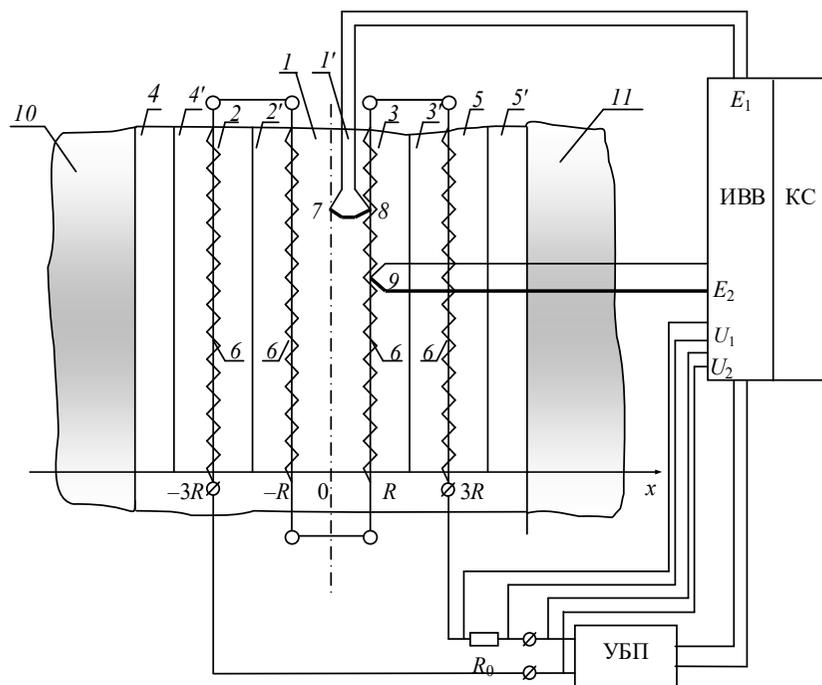


Рис. 6.6 Схема устройства для осуществления метода регулярного режима второго рода

Термопара 7 измеряет температуру $T(0, \tau)$ на оси симметрии (рассматриваемой системы) между образцами 1 и 1'. Термопары 8 и 9 измеряют температуру $T(R, \tau)$ на внешней поверхности образца 1' в месте его теплового контакта с электронагревателем 6.

Для уменьшения утечки тепла в окружающую среду внешние поверхности образцов 4 и 5' покрыты слоями теплоизоляции 10 и 11.

Термопары 7 и 8 включены встречно и образуют дифференциальную термопару, выходной сигнал E_1 которой

пропорционален разности температур

$$E_1 = k[T(R, \tau) - T(0, \tau)],$$

где k – коэффициент пропорциональности, зависящий от типа используемых (при изготовлении термопар) термоэлектродных проводов; $T(R, \tau)$, $T(0, \tau)$ – температуры в точках с координатами $x = R$ и $x = 0$.

Сигнал E_1 этой дифференциальной термопары 7, 8 и сигнал E_2 термопары 9, измеряющей температуру $[T(R, \tau) - T_0]$, воспринимаются интерфейсом ввода-вывода ИВВ компьютерной системы КС; здесь T_0 – температура свободных концов термопар 9. Кроме того, на входе ИВВ КС подаются также:

1) сигнал

$$U_1 = R_0 I_{\text{нагр}},$$

пропорциональный току $I_{\text{нагр}}$ через электронагреватели 6; сигнал U_1 представляет собой падение напряжения на образцовой катушке, имеющей сопротивление R_0 ;

2) сигнал

$$U_2 = 4U_{\text{нагр}},$$

представляющий собой падение напряжения на четырех включенных последовательно электронагревателях 6.

С учетом изложенного выше формула (6.30) принимает вид

$$q = \frac{U_1 U_2}{8R_0 S}. \quad (6.30a)$$

Компьютерная система КС в ходе эксперимента осуществляет программное управление температурой $T(R, \tau)$ во времени τ за счет изменения величины напряжения U_2 , подаваемого с выхода управляемого блока питания УБП на четыре последовательно включенные электронагреватели 6.

6.3.1.2 ПОРЯДОК ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

При практическом использовании рассматриваемого метода регулярного режима второго рода измерительные операции осуществляют в следующем порядке.

1 Из исследуемого материала изготавливают десять одинаковых плоских образцов толщиной R квадратной формы с размерами $l \times l$,

совпадающие по форме и размерам с используемыми электронагревателями площадью $S = l \times l$.

Примечание. Возможен вариант, когда используют одну пару образцов l , l' толщиной R и четыре образца с удвоенной толщиной $2R$.

2 Четыре плоских нагревателя b размещают между образцами так, как это показано на рис. 6.6.

Для уменьшения влияния контактных термических сопротивлений необходимо обеспечить постоянную силу прижатия образцов к электронагревателям b . При необходимости следует использовать высокотеплопроводные смазки, существенно снижающие погрешности измерений благодаря уменьшению термических сопротивления на поверхностях контакта образцов между собой и с электронагревателями b .

Примечание. С точки зрения уменьшения контактных термических сопротивлений предпочтительным является использование четырех образцов 2, 3, 4, 5 с удвоенной толщиной $2R$ (вместо четырех пар образцов 2, 2', 3, 3', 4, 4', 5, 5' с толщиной R), так как в этом случае исключается влияние, по крайней мере, четырех термических сопротивлений.

3 Принимая во внимание тот факт, что начальное распределение температуры в рассматриваемой системе (рис. 6.6) не очень сильно влияет на результаты измерения теплофизических свойств, начинать активную стадию эксперимента можно без длительной предварительной выдержки образцов при заданной начальной температуре эксперимента (если есть уверенность, что температура образцов близка к этой заданной начальной температуре эксперимента). Если же образцы, находящиеся при комнатной температуре, необходимо охладить до температуры жидкого азота, то для процесса такого охлаждения потребуется определенное время, однако можно ограничиться небольшим промежутком времени для выдержки образцов при заданной начальной температуре эксперимента.

Активная часть эксперимента начинается в тот момент времени, когда на включенные последовательно электронагреватели b подают напряжение питания U_2 .

Возможны два варианта осуществления активной стадии эксперимента.

В первом варианте к электронагревателям b подводят постоянную

электрическую мощность, что позволяет с достаточной точностью задать постоянную во времени величину теплового потока q , вычисляемого по формуле (6.30а); при использовании этого первого варианта температуры во внутренних точках и на поверхностях исследуемых образцов I, I' через некоторое время (после начала эксперимента) начинают изменяться по линейному закону (см. рис. 6.7)

$$T(x, \tau) = T_y(x) + k\tau,$$

где $T_y(x)$ – функция, описывающая установившееся во времени (квазистационарное) распределение температуры в образцах I, I' , достигаемое после наступления регулярного режима второго рода; в этом случае при обработке экспериментальных данных удастся вычислить не только величину коэффициента температуропроводности a , но и теплопроводность λ и объемную теплоемкость c_p исследуемого материала.

Во втором варианте электрической мощностью, подводимой к электронагревателям b , автоматически управляют таким образом, что температура $T(R, \tau)$ изменяется по линейному закону

$$T(R, \tau) = T_0 + k\tau; \quad (6.31)$$

в этом случае при обработке экспериментальных данных удастся вычислить только величину коэффициента температуропроводности a .

4 На протяжении всей активной стадии эксперимента осуществляют измерения и регистрацию физических величин:

- разности температур $[T(R, \tau) - T(0, \tau)]$ на поверхности (при $x = R$) и на оси (при $x = 0$) образцов I и I' (см. рис. 6.6);
- температуры $T(R, \tau)$ поверхности (при $x = R$) образца I' ;
- теплового потока q , вычисляемого по формуле (6.30а) по непосредственно измеряемым физическим величинам $U_1, U_2, R_0, S = l \times l$.

5 Активную часть эксперимента завершают в тот момент времени, когда температура $T(R, \tau)$ поверхности исследуемых образцов достигнет заданной величины, обычно задаваемой немного ниже температуры деструкции исследуемого материала.

6 После завершения активной стадии эксперимента по полученным экспериментальным данным $T(R, \tau), T(R, \tau) - T(0, \tau), q$ вычисляют искомые теплофизические свойства исследуемого материала по расчетным формулам, вывод которых рассмотрен ниже.

6.3.1.3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА И УСТРОЙСТВА ПРИ НАГРЕВЕ ИССЛЕДУЕМЫХ ОБРАЗЦОВ

ПОСТОЯННЫМ ТЕПЛОВЫМ ПОТОКОМ

Математическая модель, описывающая температурное поле $T(x, \tau)$ в исследуемых образцах I и I' при осуществлении первого варианта активной стадии метода регулярного режима второго рода, когда исследуемые образцы нагревают за счет подводимого к ним постоянного теплового потока $q = \text{const}$, имеет вид:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < R; \quad (6.32)$$

$$T(x, 0) = T_0 = \text{const}; \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (6.34)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} = q = \text{const}, \quad (6.35)$$

где x, τ – пространственная координата и время; R – толщина исследуемых образцов I и I' ; q – тепловой поток, подводимый к поверхностям исследуемых образцов I и I' ; T_0 – начальное распределение температуры в образцах I и I' ; λ, a – теплопроводность и коэффициент температуропроводности исследуемого материала.

Решение прямой краевой задачи теплопроводности (6.32) – (6.35) имеет вид [1]:

$$T(x, \tau) - T_0 = \frac{qR}{\lambda} \left\{ \frac{a\tau}{R^2} - \frac{1}{6} \left[1 - 3 \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} \cos \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) \exp \left(-\mu_n^2 \frac{a\tau}{R^2} \right) \right\}, \quad (6.36)$$

где $\mu_n = n\pi$, ($n = 1, 2, \dots$) – собственные значения краевой задачи Штурма-Лиувилля, возникающей при решении прямой краевой задачи теплопроводности (6.32) – (6.35).

Зависимость температурного поля $T(x, \tau)$ от пространственной координаты x и времени τ , рассчитанная по формуле (6.36), представлена на рис. 6.7.

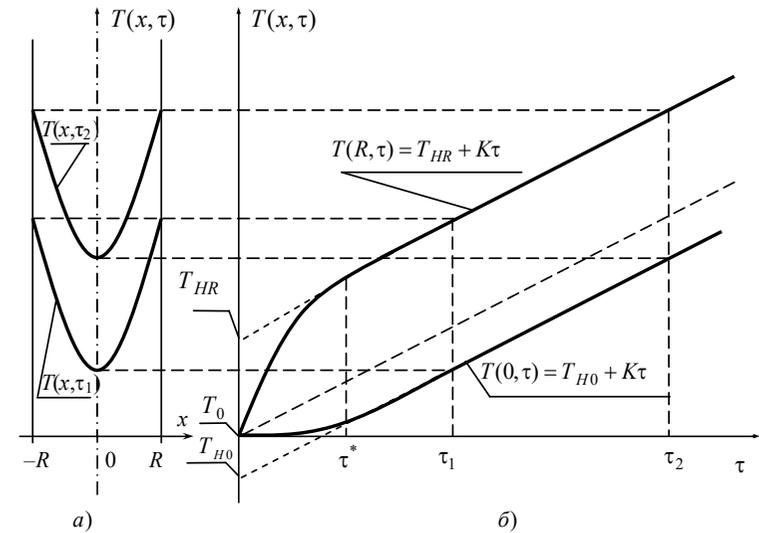


Рис. 6.7 Графическая иллюстрация температурного поля $T(x, \tau)$ образцов I и I' при осуществлении первого варианта активной стадии регулярного режима второго рода:
 a – зависимость от пространственной координаты x ;
 b – зависимость от времени τ

Анализ решения (6.36) краевой задачи (6.32) – (6.35) показывает:
 1) если в качестве характерной (для данной задачи) разности температур принять величину

$$\Delta T_{\text{хар}} = \frac{qR}{\lambda},$$

имеющую размерность температуры $\left[\frac{qR}{\lambda} \right] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{м} \cdot \text{м} \cdot \text{град}}{\text{м}^2 \cdot \text{Вт}} = \text{град}$, то безразмерная температура для рассматриваемой краевой задачи может быть представлена в виде

$$\theta(x, \tau) = \frac{T(x, \tau) - T_0}{\frac{qR}{\lambda}};$$

2) в качестве безразмерной пространственной координаты \bar{x} можно использовать величину

$$\bar{x} = \frac{x}{R};$$

3) в качестве безразмерного времени можно использовать число Фурье

$$Fo = \frac{a\tau}{R^2}.$$

С учетом введенных безразмерных переменных решение (6.36) можно представить в виде:

$$\theta(\bar{x}, Fo) = Fo - \frac{1}{6} [1 - 3(\bar{x})^2] + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{\mu_n^2} \cos(\mu_n \bar{x}) \exp(-\mu_n^2 Fo) \quad (6.36a)$$

или

$$\theta(\bar{x}, Fo) \approx Fo - \frac{1}{6} [1 - 3(\bar{x})^2]. \quad (6.36b)$$

В (6.36b) принято по внимание, что при $Fo > 0,49$ с погрешностью не более 1 % можно пренебречь бесконечным рядом в правой части (6.36a), описывающим зависимость температурного поля от начального распределения температуры $T(x, 0) = T_0 = \text{const}$.

Отметим, что в правой части (6.36b) стоит слагаемое $-\frac{1}{6} [1 - 3(\bar{x})^2]$, представляющее собой функцию

$$T_y(x) = -\frac{1}{6} \left[1 - 3 \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{R} \right)^2 - \frac{1}{6},$$

описывающую квазистационарное (установившееся во времени) распределение температуры в образцах l и l' , достигаемое после наступления (при $Fo > 0,49$) регулярного режима второго рода.

Оценим примерную величину промежутка времени τ , необходимого для того чтобы после начала активной стадии эксперимента можно было пренебречь бесконечным рядом в правой части (6.36) и (6.36a). Зададимся величинами:

- теплопроводность исследуемого материала $a = 0,9 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$;
- толщина образцов l и l' $R = 3 \text{ мм} = 0,003 \text{ м} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

Тогда $R^2 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 = 0,9 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2$.

С учетом того, что регулярный режим второго рода с погрешностью не более 1 % наступает при $Fo > Fo^* = 0,49$, получаем уравнение

$$Fo^* = \frac{a\tau^*}{R^2} = 0,49,$$

из которого находим

$$\tau^* = Fo^* \frac{R^2}{a} = \frac{0,49 \cdot 0,9 \cdot 10^{-5}}{0,9 \cdot 10^{-7}} = 0,49 \cdot 10^2 = 49 \text{ с} \approx 1 \text{ мин.}$$

Таким образом, при исследовании образца с толщиной $R = 3 \cdot 10^{-3}$ м, с коэффициентом температуропроводности $a = 0,9 \cdot 10^{-7}$ м²/с регулярный режим второго рода наступает раньше, чем через одну минуту после начала эксперимента.

Если толщина образца $R = 10 \text{ мм} = 1 \cdot 10^{-2}$ м, при $a = 1 \cdot 10^{-7}$ м²/с получаем

$$\tau^* = Fo^* \frac{R^2}{a} = 0,49 \frac{1 \cdot 10^{-4}}{1 \cdot 10^{-7}} = 490 \text{ с} \approx 8,17 \text{ мин.}$$

т.е. регулярный режим второго рода наступает через восемь минут после начала активной стадии эксперимента.

Рассмотрим вывод расчетных соотношений для вычисления искомых теплофизических свойств исследуемого материала.

После наступления регулярного режима второго рода, т.е. при $\tau > \tau^*$ температура $T(R, \tau)$ внешних поверхностей образцов I и I' при $x = R$ будет изменяться по закону

$$\begin{aligned} T(R, \tau) - T_0 &\approx \frac{qR}{\lambda} \left\{ \frac{a\tau}{R^2} - \frac{1}{6} \left[1 - 3 \left(\frac{R}{R} \right)^2 \right] \right\} = \\ &= \frac{qR}{\lambda} \left\{ \frac{a\tau}{R^2} + \frac{1}{3} \right\} = \frac{qR}{3\lambda} + \frac{qa}{\lambda R} \tau = \frac{qR}{3\lambda} + \frac{q}{c\rho R} \tau, \end{aligned} \quad (6.36c)$$

который легко получается из формулы (6.36) с учетом того, что при $\tau > \tau^*$ можно пренебречь всеми членами ряда, стоящими в правой части (6.36).

Аналогично, при $\tau > \tau^*$ из (6.36) получаем, что температура $T(0, \tau)$ между образцами I и I' при $x = 0$ будет изменяться по закону

$$\begin{aligned} T(0, \tau) - T_0 &\approx \frac{qR}{\lambda} \left\{ \frac{a\tau}{R^2} - \frac{1}{6} \left[1 - 3 \left(\frac{0}{R} \right)^2 \right] \right\} = \\ &= \frac{qR}{\lambda} \left\{ \frac{a\tau}{R^2} - \frac{1}{6} \right\} = -\frac{qR}{6\lambda} + \frac{qa}{\lambda R} \tau = -\frac{qR}{6\lambda} + \frac{q}{c\rho R} \tau. \end{aligned} \quad (6.36d)$$

Сравнивая (6.36с) и (6.36d) с рис. 6.7, получаем, что обозначения T_{HR} , T_{H0} и K , использованные на рис. 6.7, б, могут быть вычислены по соотношениям:

$$\begin{aligned} [T_{HR} - T_0] &= \frac{qR}{3\lambda}; \\ [T_{H0} - T_0] &= -\frac{qR}{6\lambda}; \\ K &= \frac{q}{c\rho R}. \end{aligned} \quad (6.36f)$$

По экспериментально измеренным значениям температур $T(R, \tau)$ или $T(0, \tau)$ при $\tau > \tau^*$ можно определить величину скорости K изменения температуры в ходе регулярного режима второго рода. Например, по двум точкам $T(R, \tau_1)$ и $T(R, \tau_2)$ при $\tau > \tau^*$ легко получить

$$K = \frac{T(R, \tau_2) - T(R, \tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}. \quad (6.36g)$$

Аналогично, по двум точкам $T(0, \tau_1)$ или $T(0, \tau_2)$ при $\tau > \tau^*$ можно определить

$$K = \frac{T(0, \tau_2) - T(0, \tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}.$$

Тогда из (6.36f) получаем соотношение для вычисления объемной теплоемкости

$$c\rho = \frac{q}{KR} = \frac{q(\tau_2 - \tau_1)}{R[T(R, \tau_2) - T(R, \tau_1)]} = \frac{q(\tau_2 - \tau_1)}{R[T(0, \tau_2) - T(0, \tau_1)]}. \quad (6.37)$$

Если из (6.36с) вычесть (6.36d), то получим, что измеряемая термометрами 7 и 8 разность температур ΔT после наступления регулярного режима второго рода при $\tau > \tau^*$ равна

$$\begin{aligned} \Delta T &\equiv [T(R, \tau) - T_0] - [T(0, \tau) - T_0] = \\ &= [T(R, \tau) - T(0, \tau)] = \frac{qR}{3\lambda} + \frac{q}{c\rho R}\tau + \frac{qR}{6\lambda} - \frac{q}{c\rho R}\tau = \frac{1}{2} \frac{qR}{\lambda}. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения следует расчетная формула для вычисления искомой теплопроводности λ исследуемого материала

$$\lambda = \frac{qR}{2\Delta T} = \frac{qR}{2[T(R, \tau) - T(0, \tau)]}. \quad (6.38)$$

Коэффициент температуропроводности a может быть вычислен по

известному соотношению

$$a = \frac{\lambda}{c\rho}$$

или

$$a = \frac{qRKR}{2\Delta Tq} = \frac{KR^2}{2\Delta T}. \quad (6.39)$$

Расчетные соотношения (6.37) – (6.39) широко используются для вычисления комплекса искомых теплофизических свойств при практическом использовании метода регулярного режима второго рода.

6.3.1.4 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА И УСТРОЙСТВА ПРИ НАГРЕВЕ ИССЛЕДУЕМЫХ ОБРАЗЦОВ ПО ЛИНЕЙНОМУ ЗАКОНУ $T(R, \tau) = T_0 + K\tau$

Математическая модель температурного поля $T(x, \tau)$ исследуемых образцов l и l' (см. рис. 6.6) при осуществлении второго варианта (см. п. 6.3.1.2) активной стадии метода регулярного режима второго рода, когда поверхность исследуемых образцов изменяется по линейному закону $T(R, \tau) = T_0 + K\tau$, имеет вид:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < R; \quad (6.32a)$$

$$T(x, 0) = T_0 = \text{const}; \quad (6.33a)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (6.34a)$$

$$T(R, \tau) = T_0 + K\tau. \quad (6.35a)$$

Все обозначения, использованные при записи краевой задачи теплопроводности (6.32a) – (6.35a), были пояснены в п. 6.3.1.3. Коэффициент K , входящий в (6.35a), имеет физический смысл скорости изменения температуры. Порядок экспериментального определения величины коэффициента K был рассмотрен в п. 6.3.1.3.

Решение прямой краевой задачи (6.32a) – (6.35a) имеет вид [1]:

$$T(x, \tau) - T_0 = \frac{KR^2}{a} \left\{ \frac{a\tau}{R^2} - \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\mu_n^2} \cos \left(\mu_n \frac{x}{R} \right) \exp \left[-\mu_n \frac{2a\tau}{R^2} \right] \right\}, \quad (6.40)$$

где $\mu_n = (2n-1)\frac{\pi}{2}$ – собственные значения краевой задачи Штурма-Лиувилля, возникающей при решении прямой краевой задачи

теплопроводности (6.32а) – (6.35а);

$A_n = (-1)^{n+1} \frac{4}{(2n-1)\pi}$ – коэффициенты ряда Фурье в правой части (6.40).

После наступления регулярного режима второго рода при $\tau > \tau^*$, когда бесконечным рядом в правой части (6.40) можно пренебречь, формула упростится и примет вид

$$T(x, \tau) - T_0 \approx K\tau - \frac{KR^2}{2a} \left[1 - \left(\frac{x}{R} \right)^2 \right]. \quad (6.40a)$$

Если в процессе эксперимента осуществлять измерение разности температур

$$\Delta T \equiv T(R, \tau) - T(0, \tau),$$

то на основании (6.40а) легко получается расчетное соотношение для вычисления коэффициента теплопроводности.

С использованием (6.40а) выразим измеряемую в ходе эксперимента разность температур

$$\begin{aligned} \Delta T \equiv T(R, \tau) - T(0, \tau) &= [T(R, \tau) - T_0] - [T(0, \tau) - T_0] = \\ &= K\tau - \frac{KR^2}{2a} \left[1 - \left(\frac{R}{R} \right)^2 \right] - K\tau + \frac{KR^2}{2a} \left[1 - \left(\frac{0}{R} \right)^2 \right] = \frac{KR^2}{2a}, \end{aligned}$$

откуда следует расчетное соотношение

$$a = \frac{KR^2}{2\Delta T} = \frac{KR^2}{2[T(R, \tau) - T(0, \tau)]}, \quad (6.39a)$$

совпадающее с ранее полученной формулой (6.39).

К сожалению, при нагреве исследуемых образцов по линейному закону (6.35а) удается вычислить только коэффициент теплопроводности a .

Примечания. 1 При нагреве исследуемых образцов по линейному закону (6.35а) регулярный режим второго рода наступает значительно позже, чем в случае нагрева образцов равномерно распределенным тепловым потоком q по закону (6.35), рассмотренном в п. 6.3.1.3. Это объясняется следующими обстоятельствами. Если задать одинаковые допустимые относительные погрешности δ , при которых можно пренебречь бесконечными рядами в правых частях решений (6.36) и (6.40), то в первом приближении можно считать, что для ряда (6.36) должно быть выполнено условие

$$\exp \left[-\mu_1^2 \frac{a\tau_1^*}{R^2} \right] = \delta \quad \text{при } \mu_1 = \pi,$$

а для ряда (6.40) – аналогичное условие

$$\exp\left[-\mu_1^2 \frac{a\tau_2^*}{R^2}\right] = \delta \quad \text{при } \mu_1 = \frac{\pi}{2}.$$

После логарифмирования получим:

– для ряда (6.36)

$$-\pi^2 \frac{a\tau_1^*}{R^2} = \ln \delta;$$

– для ряда (6.40)

$$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{a\tau_2^*}{R^2} = \ln \delta.$$

При одних и тех же значениях допустимых относительных погрешностей δ , часто задаваемых в пределах $\delta = 0,01 \dots 0,05$, что соответствует $\delta \cdot 100\% = (1 \dots 5)\%$, получаем

$$-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{a\tau_2^*}{R^2} = -\pi^2 \frac{a\tau_1^*}{R^2}$$

или

$$\tau_2^* = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2} \tau_1^* = 4\tau_1^*.$$

Видно, что при втором варианте осуществления метода регулярного режима второго рода, момент времени τ_2^* , после которого можно пренебречь бесконечным рядом в правой части (6.40), в четыре раза превышает величину момента времени τ_1^* , после которого можно пренебречь бесконечным рядом в правой части решения (6.36) при первом варианте осуществления метода, рассмотренном в п. 6.3.1.3.

2 При втором варианте осуществления метода регулярного режима второго рода, когда внешние поверхности образцов l и l' обогреваются по линейному закону (6.35а), на внешних поверхностях этих образцов l и l' при $\tau > \tau_2^*$ устанавливается постоянная во времени величина теплового потока $q = \text{const}$, которую можно вычислить по формуле (6.30а) по результатам измерения напряжения питания U_2 и падения напряжения U_1 на образцовом сопротивлении R_0 (с учетом задания известных значений площади S электронагревателя и сопротивления R_0).

Если измерен тепловой поток q , то и при втором варианте осуществления метода регулярного режима второго рода можно использовать полученные в п. 6.3.1.3 расчетные соотношения (6.37) и (6.38) для вычисления объемной теплоемкости $сr$ и теплопроводности

λ.

6.3.1.5 ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ВТОРОГО РОДА

На основании выведенных выше расчетных формул (6.37) – (6.39) легко получить оценки погрешностей измерения искомых теплофизических свойств исследуемых материалов.

На основании формулы

$$c\rho = \frac{q}{KR},$$

используемой для вычисления объемной теплоемкости $c\rho$ по измеренным значениям теплового потока q , скорости изменения температуры $K = [T(R, \tau_2) - T(R, \tau_1)] / (\tau_2 - \tau_1)$ и геометрическому размеру R образца, получаем соотношения для вычисления предельной и среднеквадратичной оценок относительных погрешностей

$$(\delta c\rho)_{\text{пр}} = \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta K}{K} + \frac{\Delta R}{R} = \delta q + \delta K + \delta R; \quad (6.41)$$

$$(\delta c\rho)_{\text{ск}} = \sqrt{(\delta q)^2 + (\delta K)^2 + (\delta R)^2}. \quad (6.41a)$$

Принимая во внимание (6.36a) и (6.36g), получаем

$$(\delta q)_{\text{пр}} = \frac{\Delta U_2}{U_2} + \frac{\Delta U_1}{U_1} + \frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{\Delta S}{S} = \delta U_2 + \delta U_1 + \delta R_0 + \delta S; \quad (6.42)$$

$$(\delta q)_{\text{ск}} = \sqrt{(\delta U_2)^2 + (\delta U_1)^2 + (\delta R_0)^2 + (\delta S)^2}; \quad (6.43)$$

$$\begin{aligned} (\delta K)_{\text{пр}} &= \frac{\Delta T(R, \tau_2) + \Delta T(R, \tau_1)}{T(R, \tau_2) - T(R, \tau_1)} + \frac{2\Delta\tau}{\tau_2 - \tau_1} =, \\ &= \frac{2\Delta T}{T(R, \tau_2) - T(R, \tau_1)} + \frac{2\Delta\tau}{\tau_2 - \tau_1}; \end{aligned} \quad (6.44)$$

$$(\delta K)_{\text{ск}} = \sqrt{\left(\frac{2\Delta T}{T(R, \tau_2) - T(R, \tau_1)}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta\tau}{\tau_2 - \tau_1}\right)^2}. \quad (6.45)$$

Подставив последние формулы (6.42) – (6.45) в (6.41) и (6.41a), можно получить расчетные соотношения для вычисления оценок относительных погрешностей $(\delta c\rho)_{\text{пр}}$ и $(\delta c\rho)_{\text{ск}}$ по погрешностям непосредственно измеряемых физических величин:

$\Delta T(R, \tau_2)$, $\Delta T(R, \tau_1)$ – абсолютные погрешности измерения температур $T(R, \tau_2)$ и $T(R, \tau_1)$ в моменты времени τ_2 и τ_1 (в абсолютном большинстве случаев эти абсолютные погрешности можно считать одинаковыми и равными $\Delta T = \Delta T(R, \tau_2) = \Delta T(R, \tau_1)$ между собой); $\Delta \tau$ – абсолютная погрешность измерения моментов времени τ_2 и τ_1 ; ΔU_2 , ΔU_1 , ΔR_0 , ΔS – абсолютные погрешности измерения электрических напряжений U_2 , U_1 , электрического сопротивления R_0 образцовой катушки и площади S электронагревателей; $\delta U_2 = \frac{\Delta U_2}{U_2}$,

$\delta U_1 = \frac{\Delta U_1}{U_1}$, $\delta R_0 = \frac{\Delta R_0}{R_0}$, $\delta S = \frac{\Delta S}{S}$ – относительные погрешности измерения физических величин U_2 , U_1 , R_0 и S .

Отметим, что формулы (6.44) и (6.45) можно представить в виде

$$(\delta K)_{\text{пр}} = \delta T_{\tau} + \delta \tau;$$

$$(\delta K)_{\text{ск}} = \sqrt{(\delta T_{\tau})^2 + (\delta \tau)^2},$$

где $\delta T_{\tau} = \frac{2\Delta T}{T(R, \tau_2) - T(R, \tau_1)}$ – относительная погрешность измерения разности температур $T(R, \tau_2)$ и $T(R, \tau_1)$ в моменты времени τ_2 и τ_1 ;

$\delta \tau = \frac{2\Delta \tau}{\tau_2 - \tau_1}$ – относительная погрешность измерения разности ($\tau_2 - \tau_1$)

моментов времени τ_2 и τ_1 .

На основании формулы (6.38)

$$\lambda = \frac{qR}{2[T(R, \tau) - T(0, \tau)]}$$

легко получить соотношения для вычисления предельной $(\delta \lambda)_{\text{пр}}$ и среднеквадратичной $(\delta \lambda)_{\text{ск}}$ оценок относительных погрешностей измерения теплопроводности

$$(\delta \lambda)_{\text{пр}} = \frac{\Delta q}{q} + \frac{\Delta R}{R} + \frac{2\Delta T}{[T(R, \tau) - T(0, \tau)]} = \delta q + \delta R + \delta T; \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned}
(\delta\lambda)_{\text{ск}} &= \sqrt{\left(\frac{\Delta q}{q}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta T}{[T(R, \tau) - T(0, \tau)]}\right)^2} = \\
&= \sqrt{(\delta q)^2 + (\delta R)^2 + (\delta T)^2}, \quad (6.46a)
\end{aligned}$$

где $\delta T = \frac{2\Delta T}{[T(R, \tau) - T(0, \tau)]}$ – относительная погрешность измерения пространственной разности температур $[T(R, \tau) - T(0, \tau)]$ между точками $x = R$ и $x = 0$. Подставив формулы (6.42) и (6.43) соответственно в (6.46) и (6.46a), можно получить соотношения для вычисления оценок предельных $(\delta\lambda)_{\text{пр}}$ и среднеквадратичных $(\delta\lambda)_{\text{ск}}$ относительных погрешностей измерения теплопроводности λ по относительным погрешностям $\delta U_2, \delta U_1, \delta R_0, \delta S$ непосредственно измеряемых в ходе эксперимента физических величин U_2, U_1, R_0, S .

Аналогично, на основании формулы (6.39)

$$a = \frac{KR^2}{2\Delta T} = \frac{KR^2}{2[T(R, \tau) - T(0, \tau)]}$$

легко получаются соотношения для вычисления оценок погрешностей измерения коэффициента температуропроводности a , а именно:

$$(\delta a)_{\text{пр}} = \frac{\Delta K}{K} + 2\frac{\Delta R}{R} + \frac{2\Delta T}{T(R, \tau) - T(0, \tau)} = \delta K + 2\delta R + \delta T; \quad (6.47)$$

$$(\delta a)_{\text{ск}} = \sqrt{(\delta K)^2 + 4(\delta R)^2 + (\delta T)^2}. \quad (6.47a)$$

Подставив формулы (6.44), (6.45) соответственно в (6.47) и (6.47a), можно легко получить соотношения для вычисления предельных и среднеквадратичных оценок относительных погрешностей измерения коэффициента температуропроводности, связывающие погрешности $(\delta a)_{\text{пр}}$ и $(\delta a)_{\text{ск}}$ с погрешностями

$$\delta T_{\tau} = \frac{2\Delta T}{T(R, \tau_2) - T(R, \tau_1)};$$

$$\delta\tau = \frac{2\Delta\tau}{\tau_2 - \tau_1}$$

непосредственно измеряемых в ходе эксперимента разности температур $[T(R, \tau_2) - T(R, \tau_1)]$ в момент времени τ_2, τ_1 и разности этих моментов времени $(\tau_2 - \tau_1)$.

6.3.2 МЕТОД РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ВТОРОГО РОДА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЫ

6.3.2.1 ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МЕТОДА И УСТРОЙСТВА ДЛЯ ЕГО ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ

Схема используемой в рассматриваемом случае двухслойной системы [3], включающей в себя исследуемую теплоизоляционную пластину 1 толщиной R и металлическое ядро 2, толщиной $(R_1 - R)$, представлена на рис. 6.8.

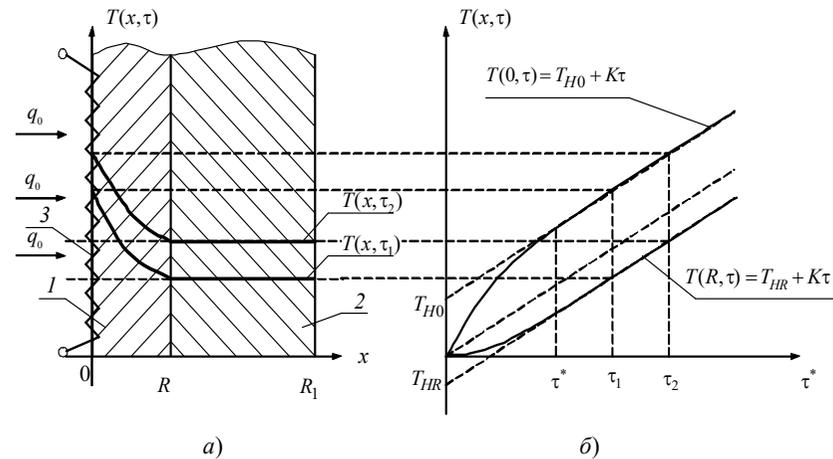


Рис. 6.8 Графическая иллюстрация осуществления
относительного метода регулярного режима второго рода [3]:

a – схема используемой двухслойной системы;
б – характер изменения температур в процессе эксперимента

Относительно тонкая теплоизоляционная пластина I толщиной R находится в идеальном тепловом контакте с металлической (медной)

пластиной 2, имеющей толщину $(R_1 - R)$.

На левую грань пластины 1 (при $x = 0$) действует постоянный тепловой поток $q_0 = \text{const}$. Правая грань пластины 2 адиабатизирована ($q = 0$), что позволяет (благодаря высокой теплопроводности λ_m меди) получить практически равномерное температурное поле при $R < x < R_1$ в пластине 2 (см. рис. 6.8).

6.3.2.2 ПОРЯДОК ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАЦИЙ

При практическом использовании рассматриваемого относительного варианта метода регулярного режима второго рода измерительные операции осуществляют в следующем порядке [3].

1 Из исследуемого материала изготавливают плоский образец с относительно небольшой толщиной R квадратной формы площадью $S = l \times l$, совпадающий по форме и размерам с используемым электронагревателем (на рис. 6.8, a электронагреватель условно обозначен позицией 3), размещаемым на левой грани образца 1.

2 Исследуемый образец 1 зажимают (с постоянной силой – для уменьшения влияния термических сопротивлений) между электронагревателем 3 и медной пластиной 2.

Получившуюся систему необходимо некоторое время выдержать при заданной температуре T_0 для получения необходимого начального распределения температуры $T(x, 0) \approx T_0$ как в образце 1, так и в медной пластине 2.

3 В момент начала активной стадии эксперимента на электронагреватель 3 подают постоянную электрическую мощность, что позволяет с достаточной точностью задать постоянную во времени величину теплового потока $q_0 = \text{const}$.

Примечание. В этом случае лучше использовать два образца 1 и две медные пластины 2, размещаемые симметрично относительно нагревателя 3.

Возможен вариант, когда система программного регулирования, за счет изменения электрической мощности (подводимой к электронагревателю 3), обеспечивает изменение во времени температуры $T(0, \tau)$ левой грани образца 1 по линейному закону $T(0, \tau) = T_{H0} + K\tau$.

4 На протяжении всей активной стадии эксперимента выполняют измерение и регистрацию изменения во времени:

1) температур $T(0, \tau)$ и $T(R, \tau)$ на левой ($x = 0$) и на правой ($x = R$) гранях исследуемого образца;

2) если есть возможность, осуществляют:

– либо непосредственное измерение величины теплового потока

$$q = \frac{1}{2} \frac{P}{S} \quad \text{по электрической мощности } P, \text{ подводимой к}$$

электронагревателю 3, и его площади S ;

– либо косвенное измерение теплового потока

$$q = c_M m_M K = c_M m_M \frac{dT(R, \tau)}{d\tau} \approx c_M m_M \frac{T(R, \tau_2) - T(R, \tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}$$

по скорости $K = \frac{dT(R, \tau)}{d\tau} = \frac{T(R, \tau_2) - T(R, \tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}$ изменения температуры

медного ядра (пластины 2) с известными удельной теплоемкостью c_M и массой m_M .

В ряде случаев при выполнении расчетов удобнее использовать величину полной теплоемкости $C_M = c_M m_M$ медного ядра 2.

5 Активную часть эксперимента завершают в момент времени, когда температура $T(0, \tau)$ левой грани исследуемого образца 1 достигает определенное заранее известное значение, обычно задаваемое на несколько градусов ниже температуры деструкции исследуемого материала.

6 После завершения эксперимента осуществляют обработку полученных данных и вычисляют искомые теплофизические свойства по приведенным ниже расчетным зависимостям.

6.3.2.3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ВАРИАНТА МЕТОДА РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ВТОРОГО РОДА И УСТРОЙСТВА ДЛЯ ЕГО ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ

Если к левой грани образца 1 подводят постоянный во времени тепловой поток q_0 , а правая грань медной пластины 2 адиабатизирована ($q = 0$), то математическая модель температурного поля рассматриваемой системы (см. рис. 6.8, а) может быть записана в виде прямой краевой задачи теплопроводности:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < R; \quad (6.48)$$

$$\frac{\partial T_M(x, \tau)}{\partial \tau} = a_M \frac{\partial^2 T_M(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad R < x < R_1; \quad (6.49)$$

$$T(x, 0) = T_M(x, 0) = T_0 = \text{const}; \quad (6.50)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = q_0 = \text{const}; \quad (6.51)$$

$$T(R, \tau) = T_M(R, \tau); \quad (6.52)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} = \lambda_M \frac{\partial T_M(R, \tau)}{\partial x}; \quad (6.53)$$

$$\lambda_M \frac{\partial T_M(R_1, \tau)}{\partial x} = q = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial T_M(R_1, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (6.54)$$

где $T(x, \tau)$, $T_M(x, \tau)$ – соответственно температурные поля исследуемого образца 1 и медной пластины 2 в точках с координатами x в моменты времени τ ; R , $(R_1 - R)$ – толщина исследуемого образца 1 и толщина медной пластины 2; T_0 – начальная температура образца 1 и пластины 2; q_0 – тепловой поток, подводимый к левой грани исследуемой пластины 1 в точке $x = 0$; a , a_M , λ , λ_M – коэффициенты температуропроводности и теплопроводности соответственно исследуемого материала (a и λ) и меди (a_M и λ_M), из которой изготовлена пластина 2.

С использованием известных методов математической физики (метод разделения переменных, принцип суперпозиции) можно получить точное аналитическое решение прямой краевой задачи теплопроводности (6.48) – (6.54). В случае, когда теплопроводность меди ($\lambda_M \approx 380 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ при комнатных температурах) в сотни и даже тысячи раз превышает теплопроводность теплоизоляционного исследуемого материала $\left(\lambda < 0,4 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}} \right)$, температурное поле $T_M(x, \tau)$ медной пластины 2 в каждый момент времени τ можно считать равномерно распределенным по координате x (одинаковым во всех точках $R < x \leq R_1$). При этом предположении температурное поле $T(x, \tau)$ исследуемого образца может быть представлено в виде [3]:

$$T(x, \tau) = T(0, \tau) - \frac{q_0}{\lambda} x + \frac{K}{2a} x^2; \quad (6.55)$$

$$K = \frac{\partial T_M(R, \tau)}{\partial \tau} = \frac{q_0}{[c\rho R + c_M \rho_M (R_1 - R)]}, \quad (6.56)$$

где K – скорость изменения во времени температуры медной пластины 2, зависящая от величины теплового потока q_0 , геометрических размеров R , $(R_1 - R)$ и объемных теплоемкостей исследуемого материала $c\rho$ и меди $c_M \rho_M$.

Если по экспериментальным данным, получаемым в ходе эксперимента, вычислить скорость изменения температуры медной пластины 2

$$K = \frac{\partial T_M(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial T_M(R, \tau)}{\partial \tau} \approx \frac{T_M(R, \tau_2) - T_M(R, \tau_1)}{\tau_2 - \tau_1}, \quad (6.57)$$

то на основании (6.56) получаем

$$c\rho R + c_M \rho_M (R_1 - R) = \frac{q_0}{K} = \frac{q_0(\tau_2 - \tau_1)}{T_M(R, \tau_2) - T_M(R, \tau_1)},$$

откуда следует расчетное соотношение для вычисления объемной теплоемкости $c\rho$ исследуемого материала

$$\begin{aligned} c\rho &= \frac{1}{R} \left[\frac{q_0}{K} - c_M \rho_M (R_1 - R) \right] = \\ &= \frac{1}{R} \left[\frac{q_0(\tau_2 - \tau_1)}{T_M(R, \tau_2) - T_M(R, \tau_1)} - c_M \rho_M (R_1 - R) \right] \end{aligned} \quad (6.58)$$

по измеренным в ходе эксперимента величинам теплового потока q и скорости изменения температуры K с учетом заранее известных значений геометрических размеров R , $(R_1 - R)$, и объемной теплоемкости меди $c_M \rho_M$.

Если в ходе эксперимента измерить величину перепада температуры ΔT на исследуемом образце 1, то на основе (6.55) легко получается расчетное соотношение для вычисления теплопроводности λ исследуемого материала.

Рассмотрим вывод этого расчетного соотношения. Подставив $x = 0$ и $x = R$ в формулу (6.55), получаем

$$T(0, \tau) = T(R, \tau);$$

$$T(R, \tau) = T(0, \tau) - \frac{q_0 R}{\lambda} + \frac{KR^2}{2a}.$$

Тогда измеренный в ходе эксперимента перепад температуры ΔT на исследуемом образце l толщиной R будет равен

$$\Delta T \equiv T(0, \tau) - T(R, \tau) = \frac{q_0 R}{\lambda} - \frac{KR^2}{2a} = \frac{q_0 R}{\lambda} - \frac{KR^2 c_p}{2\lambda},$$

откуда следует расчетное соотношение

$$\lambda = \frac{[q_0 R] - \frac{1}{2} KR^2 c_p}{[T(0, \tau) - T(R, \tau)]}, \quad (6.59)$$

позволяющее вычислить искомую теплопроводность λ исследуемого материала по измеренным в ходе эксперимента значениям теплового потока q_0 и разности температур $[T(0, \tau) - T(R, \tau)]$ с учетом вычисленной по формуле (6.57) скорости K изменения температуры и известных величин толщины R и объемной теплоемкости c_p исследуемого образца (вычисленной по формуле (6.58) по полученным в этом же эксперименте данным).

На основании приведенных выше расчетных соотношений (6.58), (6.59) можно получить формулы для вычисления предельных $((\delta c_p)_{пр}, (\delta \lambda)_{пр}$ и $(\delta c_p)_{ск}, (\delta \lambda)_{ск}$) оценок относительных погрешностей измерения объемной теплоемкости c_p и теплопроводности λ исследуемого материала.

6.3.3 МЕТОД МОНОТОННОГО РЕЖИМА НАГРЕВА ИССЛЕДУЕМЫХ ОБРАЗЦОВ

Рассмотренные в пп. 6.3.1 и 6.3.2 методы регулярного режима второго рода основаны на использовании линейных математических моделей в виде прямых краевых задач теплопроводности (6.32) – (6.35) и (6.48) – (6.54). Аналитические решения этих линейных краевых задач имеют вид (6.36) и (6.55). После наступления регулярного режима второго рода (при $\tau > \tau^*$) эти решения (6.36) и (6.55) имеют две составляющие

$$\begin{aligned}
T(x, \tau) - T_0 &\approx \frac{qR}{\lambda} \left[\frac{a\tau}{R^2} + \frac{1}{6} \left[3 \left(\frac{x}{R} \right)^2 - 1 \right] \right] = \\
&= \frac{q}{c\rho R} \tau + \frac{1}{6} \frac{qR}{\lambda} \left[3 \left(\frac{x}{R} \right)^2 - 1 \right]; \quad (6.36h)
\end{aligned}$$

$$T(x, \tau) - T_0 = K\tau - \frac{q_0}{\lambda} x + \frac{K}{2a} x^2, \quad (6.55a)$$

первая из которых зависит только от времени τ в первой степени, а вторая – только от пространственной координаты x .

Благодаря тому, что первые составляющие этих решений (6.36h) и (6.55a), имеющие вид:

– в случае (6.36h)

$$\frac{q}{c\rho R} \tau;$$

– в случае (6.55a)

$$K\tau = \frac{q_0 \tau}{[c\rho R + c_m \rho_m (R_1 - R)]},$$

линейно зависят от времени τ в первой степени, после наступления регулярного режима второго рода (при $\tau > \tau^*$) графики функций $T(x, \tau)$ на рис. 6.7, б и на рис. 6.8, б представляют собой прямые линии. В связи с тем, что остальные слагаемые (6.36h) и (6.55a) зависят только от координаты x , графики $T(x, \tau)$, представленные на рис. 6.7, а, во все моменты времени (после наступления регулярного режима второго рода) при $\tau > \tau^*$ представляет собой определенную функцию пространственной координаты x :

– в случае (6.36h)

$$T_{1y}(x) = \frac{1}{6} \frac{qR}{\lambda} \left[3 \left(\frac{x}{R} \right)^2 - 1 \right];$$

– в случае (6.55a)

$$T_{2y}(x) = -\frac{q_0}{\lambda} x + \frac{K}{2a} x^2.$$

Каждая из этих функций $T_{1y}(x)$ и $T_{2y}(x)$ остаются одними и теми же на протяжении всего регулярного режима второго рода, перемещаясь во времени вдоль оси температур T вверх так, как это показано на рис. 6.7, а и на рис. 6.8, а.

Поэтому регулярный режим второго рода часто называют квазистационарным режимом, имея в виду что функции $T_{1y}(x)$ и $T_{2y}(x)$ описывают как бы независящие от времени ("квазистационарные") распределения температур по пространственной координате x внутри исследуемых образцов.

В отличие от других ранее обсуждавшихся в гл. 2 – 5 и в параграфе 6.2 методов теплофизических измерений, рассматриваемые в данном параграфе 6.3 методы регулярного режима второго рода позволяют исследовать зависимость теплофизических свойств $\lambda = \lambda(T)$, $c\rho = c\rho(T)$, $a = a(T)$ от температуры T . Такая возможность является ценным достоинством рассматриваемых методов регулярного режима второго рода.

В основу методов регулярного режима второго рода были положены линейные математические модели (6.32) – (6.35) и (6.48) – (6.54), предполагающие постоянство измеряемых теплофизических свойств a , λ и $c\rho$ исследуемых материалов (т.е. независимость a , λ и $c\rho$ от температуры T).

В ходе реальных экспериментов измеряемые теплофизические свойства оказываются существенно зависящими от температуры T . Поэтому регистрируемые в процессе экспериментов температурные зависимости $T(R, \tau)$ и $T(0, \tau)$ получаются не в виде прямых линий, показанных на рис. 6.7, б и на рис. 6.8, б, а имеют вид монотонных кривых линий, представленных на рис. 6.9, б.

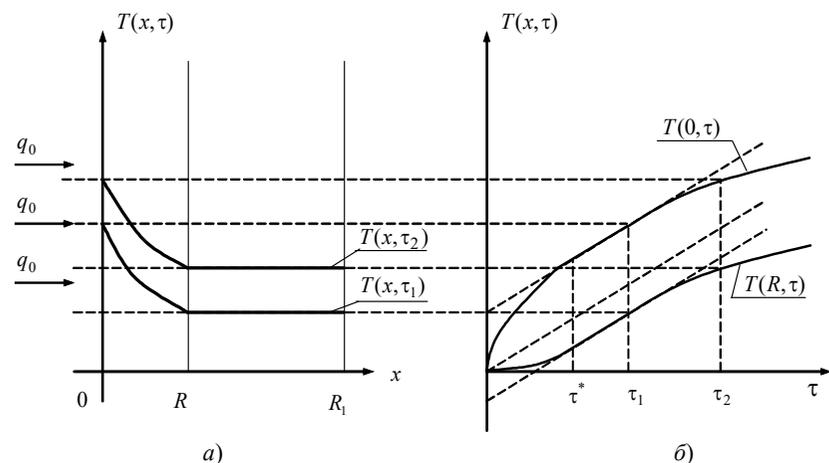


Рис. 6.9 Графическая иллюстрация к осуществлению метода монотонного нагрева в случае, когда теплофизические свойства зависят от температуры:
a – схема используемой двухслойной системы;
б – характер изменения температур в процессе реального эксперимента

Таким образом, рассмотренные выше в п. 6.3.1 и п. 6.3.2 методы регулярного режима второго рода представляют собой некоторый "идеальный" вариант, чрезвычайно редко реализуемый на практике, так как у большинства исследуемых материалов искомые теплофизические свойства a , λ , $c\rho$ не являются постоянными, а существенно зависят от температуры T :

$$\lambda = \lambda(T), \quad c\rho = c\rho(T), \quad a = a(T).$$

В связи с этим, для экспериментального исследования зависимостей теплофизических свойств $\lambda = \lambda(T)$, $c\rho = c\rho(T)$, $a = a(T)$ в широких диапазонах температур T , наиболее часто используют так называемые методы монотонного режима.

Один из вариантов применения метода монотонного режима для измерения удельной теплоемкости, лежащий в основе принципа действия прибора ИТ-С-400, был рассмотрен в параграфе 3.2.

Ниже приведено описание принципа действия, устройства и работы серийно выпускавшегося прибора ИТ- λ -400, предназначенного для измерения теплопроводности λ методом монотонного режима.

6.3.3.1 СХЕМА УСТРОЙСТВА ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ МЕТОДА МОНОТОННОГО РЕЖИМА

Для измерения теплопроводности в измерителе использован [22] метод динамического λ -калориметра, теоретическое обоснование которого изложено в [3, 23].

Схема системы ИТ- λ -400А, представляющая собой серийно выпускавшийся прибор ИТ- λ -400, подключенный на кафедре «Автоматизированные приборы и системы» Тамбовского государственного технического университета к компьютеру и сети Интернет, представлен на рис. 6.10.

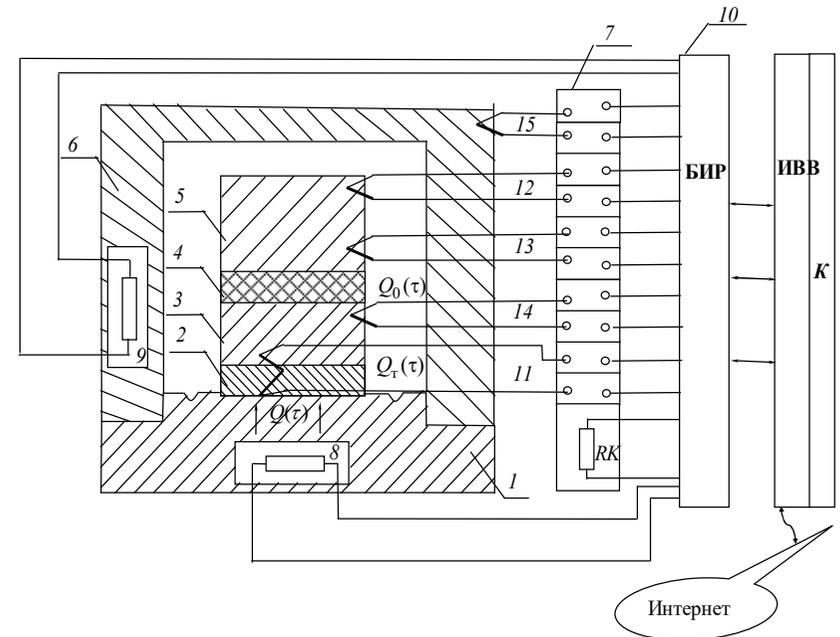


Рис. 6.10 Упрощенная схема компьютеризированной системы ИТ- λ -400А

Тепловая схема системы [22] включает в себя основание 1, в котором установлен электронагреватель 8, обеспечивающий подвод интегрального теплового потока $Q(\tau)$ к пластине-тепломеру 2, пластине контактной 3, испытуемому образцу 4 и стержню 5. Стержень 5 и пластина контактная 3 изготовлены из меди, обладающей высокой теплопроводностью, поэтому перепады температур на них незначительны. Охранный колпак 6 с встроенным в него электронагревателем 9 входит

в состав адиабатической системы. Эта система обеспечивает автоматическое поддержание нулевой разности температур (измеряемой термопарами 12, 15) между медным стержнем 5 и охранным колпаком 6.

За счет высокой теплопроводности меди, из которой изготовлены пластина контактная 3 и стержень 5, установленные в них термопары 14 и 13 обеспечивают измерение (с достаточной для практических потребностей точностью) температур соответственно на нижней и на верхней поверхностях образца 4, а при дифференциальном включении этих термопар 13 и 14, их суммарный сигнал пропорционален перепаду температур на образце

$$E_{13-14} = A(T)\vartheta_0,$$

где ϑ_0 – перепад температур на образце 4; $A(T)$ – чувствительность используемой термопары, зависящая от температуры T .

Один спай дифференциальной термопары 11 установлен в нижней части пластины 2, а второй спай – в нижней части медной пластины 3. Суммарный сигнал дифференциальной термопары 11 пропорционален

$$E_{11} = A(T)\vartheta_T$$

перепаду ϑ_T температур на пластине-тепломере 2.

Свободные концы всех термопар 11 – 15 выведены на специальную колодку 7. Для автоматического введения поправок на изменение температуры свободных концов термопар 11 – 15, на колодке 7 установлен термометр сопротивления RK , измеряющий температуру этой колодки. Терморезистор RK в приборе ИТ-λ-400 является элементом мостовой схемы потенциометра (используемого для измерения сигналов термопар 11 – 15), за счет чего обеспечивается автоматическое введение поправки на температуру свободных концов термопар.

Блок измерения и регулирования 10, предназначенный для измерения сигналов термопар 11 – 15 и для управления напряжениями питания электронагревателей 8, 9, обеспечивает как ввод измерительной информации в компьютер K через интерфейс ввода-вывода ИВВ, так и управление ходом эксперимента. При необходимости управление процессом эксперимента может осуществляться в режиме удаленного доступа через Интернет.

6.3.3.2 ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕТОДА МОНОТОННОГО РЕЖИМА

Интегральный (суммарный) тепловой поток $Q_T(\tau)$, проходящий через среднее сечение пластины-тепломера 2, частично поглощается ею и далее идет на разогрев пластины контактной 3, образца 4 и стержня 5.

Размеры системы выбраны таким образом, чтобы количества тепла, аккумулируемые образцом 4 и пластиной 2, были в 5 – 10 раз меньше количества тепла, поглощаемого медным стержнем 5. В этом случае распределение температуры в образце 4 и в пластине 2 оказываются близкими к линейному (стационарному), все детали (элементы) системы разогреваются с близкими скоростями, а для интегральных тепловых потоков $Q_0(\tau)$ и $Q_T(\tau)$ для любого уровня температуры справедливы формулы:

$$Q_0(\tau) = \frac{\vartheta_0 S}{p} = \left(\frac{1}{2} C_0 + C_c \right) b; \quad (6.60)$$

$$Q_T(\tau) = K_T^* \vartheta_T = \left(\frac{1}{2} C_T + C_n + C_0 + C_c \right) b, \quad (6.61)$$

где $Q_0(\tau)$ – интегральный тепловой поток, проходящий через образец 4 и поглощаемый стержнем 5, Вт; ϑ_0 – перепад температуры на образце 4, К, измеряемый термопарами 13 и 14; p – тепловое сопротивление, $\text{м}^2\text{К/Вт}$, между пластиной контактной 3 и стержнем 5; C_T, C_n, C_0, C_c – полные теплоемкости, Дж/к, пластины-тепломера 2, пластины контактной 3, образца 4 и стержня 5; S – площадь поперечного сечения образца 4, м^2 ; ϑ_T – перепад температуры, К, на пластине-тепломере 2, измеряемый дифференциальной термопарой 11; K_T^* – коэффициент пропорциональности, характеризующий эффективную проводимость пластины-тепломера 2, Вт/К; b – скорость разогрева измерительной ячейки, К/с.

Примечания. Ранее в пп. 6.3.1 и 6.3.2 скорость изменения температуры обозначалась символом K . В случае идеального осуществления метода регулярного режима второго рода эта величина строго постоянна $K = \text{const}$. При практической реализации метода монотонного режима скорость изменения температуры оказывается величиной переменной, а не постоянной. Чтобы подчеркнуть эту особенность, при рассмотрении закономерностей метода монотонного режима для обозначения скорости разогрева измерительной ячейки вместо обозначения K используют символ b .

Тепловое сопротивление p между контактной пластиной 3 и стержнем 5 определяется по формуле

$$p = p_0 + p_k, \quad (6.62)$$

где p_0 – тепловое сопротивление образца 4, $\text{м}^2\text{К}/\text{Вт}$; p_k – поправка, учитывающая тепловые сопротивления контактов образца 4 с пластиной 3 и стержнем 5, а также неидентичность и тепловые сопротивления заделки термопар 13 и 14, $\text{м}^2\text{К}/\text{Вт}$.

Тепловое сопротивление p_0 образца определяется соотношением

$$p_0 = \frac{h}{\lambda}, \quad (6.63)$$

где h – толщина образца, м ; λ – теплопроводность образца, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$.

На основании формул (6.60) – (6.63) были получены [3, 22, 23] рабочие расчетные формулы для вычисления теплового сопротивления образца и его теплопроводности:

$$p_0 = \frac{\vartheta_0 S (1 + \sigma_c)}{\vartheta_T K_T} - p_k; \quad (6.64)$$

$$\lambda = \frac{h}{p_0}, \quad (6.65)$$

где ϑ_0 – перепад температуры (на образце 4), измеряемый термопарами 13 и 14; ϑ_T – перепад температуры (на пластине-тепломере 2), измеряемый дифференциальной термопарой 11; S – площадь поперечного сечения образца 4; $K_T = K_T^* \frac{C_c}{\left(\frac{1}{2}C_T + C_{\text{п}} + C_c\right)}$ –

скорректированное значение тепловой проводимости пластины-тепломера 2; $\sigma_c = \frac{C_0}{2(C_0 + C_c)}$ – поправка, учитывающая

ориентировочное значение полной теплоемкости C_0 образца; $C_T, C_{\text{п}}, C_0, C_c$ – полные теплоемкости, $\text{Дж}/\text{К}$, пластины-тепломера 2, пластины контактной 3, образца 4 и стержня 5, причем

$$C_0 = c_0(T) m_0;$$

$$C_c = c_{\text{м}}(T) m_c,$$

$c_{\text{м}}(T), c_0(T)$ – удельная теплоемкость меди и ориентировочное значение удельной теплоемкости образца, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$, зависящие температуры $T, \text{К}$; m_0, m_c – масса образца 4 и масса стержня 5, кг .

Параметры $K_T = K_T(T)$ и $p_k = p_k(T)$, входящие в (6.64), (6.65), не зависят от свойств образца и являются «постоянными» характеристиками измерителя теплопроводности ИТ- λ -400.

Определение $K_T = K_T(T)$ и $p_k = p_k(T)$ проводят в специально организованных градуировочных экспериментах с образцовыми мерами из кварцевого стекла и из меди, входящими в комплект поставки серийного прибора ИТ-λ-400.

Если в ходе предварительных градуировочных экспериментов определены зависимости $K_T = K_T(T)$ и $p_k = p_k(T)$, то для вычисления искомой теплопроводности по формулам (6.64), (6.65) необходимо на различных уровнях температуры T_i ($i = 1, 2, \dots, n$) измерить значения перепадов температуры:

– на тепломере

$$\vartheta_{Ti} = \vartheta_T(T_i);$$

– на образце

$$\vartheta_{0i} = \vartheta_0(T_i).$$

Подставив соответствующие каждому уровню температуры T_i значения величины $K_{Ti} = K_T(T_i)$, $p_{ki} = p_k(T_i)$, $\vartheta_{Ti} = \vartheta_T(T_i)$, $\vartheta_{0i} = \vartheta_0(T_i)$ в формулы (6.64) и (6.65), получают множество значений λ_i , соответствующих температурам T_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Искомую зависимость $\lambda = \lambda(T)$ теплопроводности от температуры представляют в виде таблицы пар значений

$$(\lambda_i, T_i), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n,$$

по которым легко может быть построен график или получена аналитическая зависимость, например в виде полинома первого или второго порядка:

$$\lambda = \beta_0 + \beta_1 T;$$

$$\lambda = \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 T^2.$$

6.3.3.3 ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИЗМЕРЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ ИТ-λ-400А

Положенный в основу работы системы ИТ-λ-400А метод монотонного режима позволяет в процессе одного эксперимента получить температурную зависимость теплопроводности $\lambda = \lambda(T)$.

Блок 10 измерения и регулирования (БИР) обеспечивает нагрев измерительного устройства (см. рис. 6.10) со средней скоростью около $b \approx 0,1$ К/с и автоматическое регулирование нулевой разности температур между стержнем 5 и охранным колпаком 6. Скорость разогрева определяется величиной начального напряжения питания, подаваемого на нагреватель 8, и скоростью изменения во времени этого напряжения. Источником регулируемого напряжения питания нагревателя 8 служит лабораторный автотрансформатор, движок

которого перемещается по заданной программе реверсивным электродвигателем с редуктором. Лабораторный автотрансформатор и электродвигатель с редуктором, входящие в состав блока 10 измерения и регулирования (БИР), на рис. 6.10 не показаны.

Для автоматического поддержания адиабатических условий используются термопары 12 и 15, установленные соответственно в стержне 5 и в охранном колпаке 6. Эти термопары 12 и 15 включены встречно, их суммарный сигнал равен нулю, если температура охранного колпака 6 равна температуре стержня 5. Сигнал разбаланса с дифференциально включенных термопар 12, 15 поступает на вход двухпозиционного регулятора (выполненного на базе электронного усилителя), осуществляющего (в зависимости от знака сигнала разбаланса) включение или отключение напряжения питания нагревателя 9, встроенного в охранный колпак 6. Двухпозиционное регулирование позволяет на протяжении всего эксперимента поддерживать равными температуры стержня 5 и охранного колпака 6 с погрешностью не более 0,3 К.

Для измерения температур использованы хромель-алюмелевые термопары 11–15 с диаметром электродов 0,2 мм. Электроды термопар в горячей зоне изолированы керамическими двухканальными трубками диаметром около 1 мм. Для повышения механической прочности керамические двухканальные изоляторы армированы трубками из нержавеющей стали.

Использованный в приборе ИТ- λ -400 тепломер выполнен в виде двух пластин 2 и 3 и смонтирован на медном основании 1. Рабочим слоем тепломера является пластина 2 из нержавеющей стали 12Х18Н9Т. Для увеличения теплового сопротивления и снижения теплоемкости в этой пластине высверлены отверстия и профрезерованы канавки. Основание 1, пластина 2 и медная пластина 3 спаяны друг с другом и снабжены шестиспайным хромель-алюмелевым термостолбиком (батарея из трех дифференциальных термопар). Для установки термостолбика в основании 1 и в пластинах 2, 3 предусмотрены отверстия (на рис. 6.10 эти отверстия и термостолбик не показаны).

Предусмотрена возможность охлаждения до температуры $-125\text{ }^{\circ}\text{C}$ ядра измерительного устройства прибора ИТ- λ -400 за счет использования жидкого азота.

Измерение теплопроводности λ исследуемого материала в заданном диапазоне температур осуществляют в следующем порядке.

1 Изготавливают образец из исследуемого материала в виде цилиндра (диска) диаметром $\varnothing 15 \pm 0,3$ мм с высотой h в пределах $h = 0,5 \dots 5$ мм.

Высоту h образца выбирают в зависимости от ожидаемого значения теплопроводности λ в соответствии с табл. 6.1.

6.1 Рекомендуемая высота образца в зависимости от ожидаемой теплопроводности

λ , Вт/(м·К)	0,1...0,3	0,3...0,5	0,5...1,0	1,0...2	более 2
$h \cdot 10^{-3}$, м	0,5...1,0	1...2	2...3	3...5	5

Плоские поверхности образца в виде диска должны быть либо притерты шлифовальным порошком на контрольной плите, либо обработаны на плоскошлифовальном станке до шероховатости не хуже $R_z^{0,63}$. Фаски на краях дисков не допускаются.

2 Изготовленный испытуемый образец 4 устанавливают на пластину контактную 3 и сверху поджимают стержнем 5 с помощью (не показанных на рис. 6.10) специального стержня и пружины.

Опускают колпак 6 и (с использованием жидкого азота) доводят температуру ядра (включающего в себя пластины 2, 3, образец 4 и стержень 5) до заданного начального значения.

3 После достижения необходимой начальной температуры начинают проведение активной стадии эксперимента.

В процессе эксперимента блок измерения и регулирования (БИР) по команде компьютера К осуществляет монотонный нагрев измерительного устройства со скоростью $b \approx 0,1$ К/с. Одновременно по сигналам термопар 11–15 измеряют и регистрируют температуры пластины 3 и стержня 5, а также температурные перепады ϑ_0 на образце и ϑ_T на тепломере. Характер изменения этих температур показан на рис. 6.11.

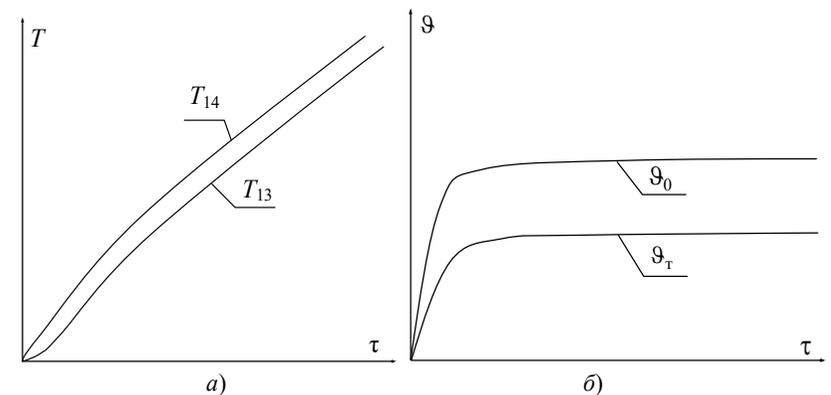


Рис. 6.11 Изменение температуры в процессе осуществления метода монотонного режима:

a – температуры пластины 3 и стержня 5, измеряемые термопарами 14 и 13;
 b – перепады температуры ϑ_T на пластине тепломера и ϑ_0 на образце

4 Активную стадию эксперимента прекращают после достижения заданного значения предельной температуры на несколько градусов ниже температуры деструкции исследуемого материала.

5 Осуществляют обработку полученных экспериментальных данных по формулам (6.64) и (6.65).

6.4 ИЗМЕРЕНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДОВ РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ТРЕТЬЕГО РОДА

Регулярный режим третьего рода устанавливается в исследуемом образце по истечении некоторого промежутка времени после того момента, когда на этот образец начал действовать источник гармонических колебаний температуры.

6.4.1 ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ СОЗДАНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ИССЛЕДУЕМЫЕ ОБРАЗЦЫ

Гармонические воздействия могут осуществляться различными способами [3].

Если исследуемое вещество сжимаемо (газ, жидкость в окологренической зоне), то объемный гармонический источник легко реализуется за счет принудительного периодического изменения объема образца в адиабатическом режиме взаимодействия с окружающей средой [3].

При исследовании теплофизических свойств электропроводных материалов (в частности, металлов) используют [3] гармоническое воздействие за счет пропускания электрического тока, изменяющегося по синусоидальному закону, непосредственно через образец, изготовленный, например, в виде стержня или проволоки.

Локальные гармонические воздействия на образец можно создать [3] с помощью конвективной среды, принудительно омывающей поверхность образца. Необходимый синусоидальный закон изменения температуры этой конвективной среды может быть сформирован специальным теплообменником-калорифером [3].

Гармоническое тепловое воздействие на поверхность образца способны создавать полупроводниковые термоэлектрические батареи, использующие эффект Пельтье в основе своего принципа действия. Для этого достаточно запитать так называемый элемент Пельтье синусоидальным током необходимой частоты, обеспечив термостатирование его тыльной грани. Тогда на активной поверхности элемента Пельтье возникают гармонические колебания, позволяющие

создать знакопеременный тепловой поток [3].

Наиболее часто применяют электрические источники джоулевой теплоты в виде электронагревателей, обеспечивающих создание гармонических воздействий в широком диапазоне температур и тепловых потоков [3]. При использовании таких источников следует учитывать их существенный недостаток – они способны генерировать пульсирующие тепловые потоки лишь одного направления [3]. Иначе говоря, в электрических нагревателях гармонический тепловой поток всегда действует на фоне постоянной составляющей. Из-за этого гармонические колебания и температурные волны чаще всего накладываются на монотонно растущее температурное поле образца, что обуславливает определенные ограничения [3] на эксплуатационные возможности методов регулярного режима третьего рода.

Важным преимуществом гармонических тепловых воздействий (по сравнению с другими) является возможность изменять в широком диапазоне частоту колебаний, что существенно расширяет возможности выбора оптимальных режимных параметров эксперимента, а также позволяет снизить возмущающее влияние теплообмена боковых поверхностей образца с окружающей средой [3]. В ходе эксперимента удастся достаточно просто регистрировать фазовый сдвиг температурных волн во времени, что также создает свои определенные преимущества [3], так как главной измеряемой величиной становится время, являющееся одной из наиболее точно измеряемых физических величин.

6.4.2 ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТЕЙШЕГО МЕТОДА РЕГУЛЯРНОГО РЕЖИМА ТРЕТЬЕГО РОДА ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ

Рассмотрим полуограниченный образец из исследуемого материала в декартовой системе координат (см. рис. 6.12). Пусть плоская поверхность этого образца при $x = 0$ подвергается тепловому воздействию так, что температура этой поверхности совершает установившиеся во времени гармонические колебания

$$T(0, \tau) = \bar{T} + \vartheta_{\max} \cos(\omega\tau), \quad (6.66)$$

где \bar{T} – средняя температура, вблизи которой происходят гармонические колебания температуры поверхности при $x = 0$; $\vartheta_{\max} = |T(0, \tau) - \bar{T}|_{\max}$ – амплитуда колебаний, представляющая собой максимальную (по абсолютной величине) разность между изменяющейся во времени температурой поверхности $T(0, \tau)$ и средней температурой \bar{T}

полубесконечного образца; $\omega = \frac{2\pi}{\tau_0}$ – угловая частота гармонических колебаний, рад/с; τ_0 – период гармонических колебаний, с; τ – время, с.

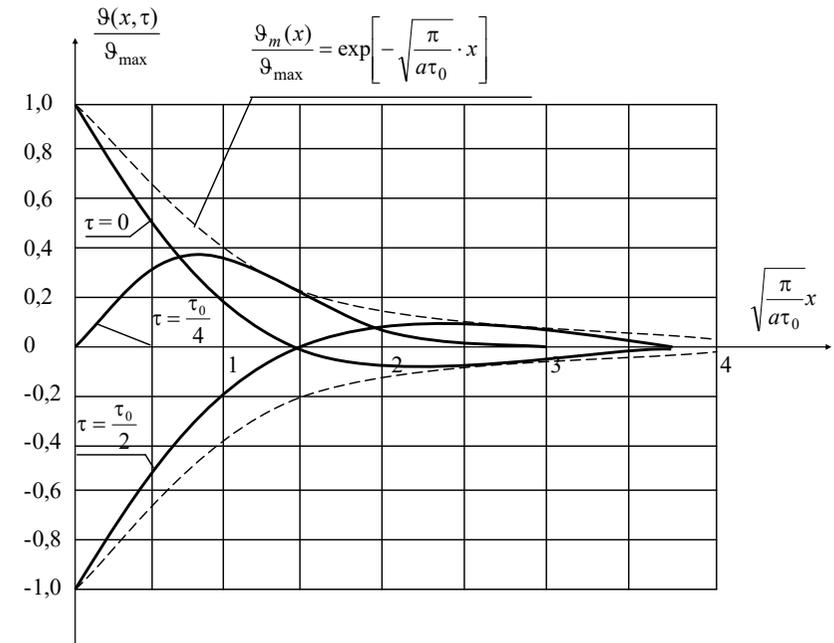


Рис. 6.12 Плоские температурные волны в полуограниченном пространстве в декартовой системе координат

Если ввести величину $\vartheta(x, \tau) = T(x, \tau) - \bar{T}$, представляющую собой отклонение температуры $T(x, \tau)$ в точке с координатой x в момент времени τ от средней температуры \bar{T} , то формула (6.66) примет вид

$$\vartheta(0, \tau) = \vartheta_{\max} \cos\left(\frac{2\pi}{\tau_0} \tau\right). \quad (6.66a)$$

По истечении некоторого промежутка времени, определяемого значением критерия Фурье $Fo = \frac{a\tau}{x^2} \geq 0,5$, влияние начального распределения температуры в теле перестает проявляться [12, 24, 25]. Тогда температура в более глубоких слоях исследуемого полуограниченного образца (при $x > 0$) также (после наступления

установившегося режима работы) начинает изменяться по закону гармонических колебаний около среднего значения температуры $\bar{T} = \text{const}$ (что соответствует $\bar{\vartheta} = 0$) с той же частотой ω , но с уменьшенной амплитудой $\vartheta_m = \vartheta_m(x)$ и с определенным сдвигом по фазе (см. рис. 6.13).

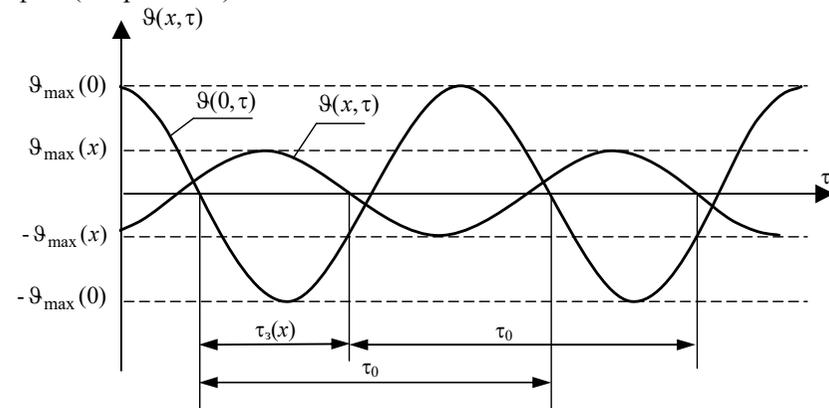


Рис. 6.13 Гармонические колебания температуры $\vartheta(x, \tau)$ в полуграничном образце на его поверхности при $x = 0$ и на расстоянии x от этой поверхности

Величина сдвига по фазе $\varphi = 2\pi \frac{\tau_3(x)}{\tau_0}$, вычисляемая по экспериментально измеренному времени запаздывания $\tau_3(x)$, и отношение амплитуд $\frac{\vartheta_m(x)}{\vartheta_{\max}}$ таких гармонических колебаний

определяются:

– расстоянием от обогреваемой (по закону (6.66а) гармонических колебаний) поверхности образца до точки x , в которой осуществляется измерение температуры;

– частотой $\omega = \frac{2\pi}{\tau_0}$ задаваемых гармонических колебаний

поверхности образца;

– коэффициентом температуропроводности a материала образца.

С увеличением расстояния x сдвиг фаз возрастает, а с увеличением коэффициента температуропроводности – уменьшается. Отношение

амплитуд гармонических колебаний $\frac{\vartheta_m(x)}{\vartheta_{\max}}$ уменьшается с увеличением расстояния x и возрастает с увеличением коэффициента теплопроводности a .

Такой режим установившихся во времени гармонических колебаний называют регулярным режимом третьего рода [3, 8, 12, 14, 24, 25].

6.4.3 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПОЛУОГРАНИЧЕННОМ ИССЛЕДУЕМОМ ОБРАЗЦЕ В РЕЖИМЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Температурное поле $T(x, \tau)$ в полуограниченном образце (в точке с координатой x в момент времени τ) описывается краевой задачей теплопроводности:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < \infty; \quad (6.67)$$

$$T(x, 0) = T_n = \text{const}; \quad (6.68)$$

$$T(0, \tau) = \bar{T} + \vartheta_{\max} \cos(\omega\tau); \quad (6.69)$$

$$T(\infty, \tau) = \bar{T} = \text{const}, \quad (6.70)$$

где T_n – начальное распределение температур в исследуемом образце; \bar{T} – среднее значение температуры образца после достижения режима, установившегося во времени гармонических колебаний с угловой частотой $\omega = \frac{2\pi}{\tau_0}$; ϑ_{\max} – амплитуда гармонических колебаний при $x = 0$; τ_0 – период гармонических колебаний.

Если перенести начало температурной шкалы в точку \bar{T} , то вместо температуры $T(x, \tau)$ следует ввести новую физическую величину

$$\vartheta(x, \tau) = T(x, \tau) - \bar{T},$$

представляющую собой отклонение температуры $T(x, \tau)$ от средней температуры \bar{T} исследуемого образца. Тогда краевая задача теплопроводности (6.67) – (6.70) примет вид:

$$\frac{\partial \vartheta(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 \vartheta(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad \tau > 0, \quad 0 < x < \infty; \quad (6.67a)$$

$$\vartheta(x, 0) = T_H - \bar{T} = \text{const}; \quad (6.68a)$$

$$\vartheta(0, \tau) = \vartheta_{\max} \cos(\omega \tau); \quad (6.69a)$$

$$\vartheta(\infty, \tau) = 0. \quad (6.70a)$$

По истечении достаточно большого промежутка времени ($Fo > 0,5$), влияние начального распределения температуры (6.68a) в образце перестает проявляться. При этом начальное условие (6.68a) можно будет считать имеющим вид

$$\vartheta(x, 0) = 0. \quad (6.68b)$$

Процедура получения математического решения краевой задачи (6.67a), (6.68b), (6.69a), (6.70a) подробно рассмотрена в [24]. Это решение имеет вид

$$\begin{aligned} \vartheta(x, \tau) &= \vartheta_m(x) \cos\left(\omega \tau - \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}} x\right) = \\ &= \vartheta_{\max} \exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}} x\right] \cos\left(\omega \tau - \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}} x\right), \end{aligned} \quad (6.71)$$

где $\vartheta_m(x) = \vartheta_{\max} \exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}} x\right]$ – функция, определяющая зависимость амплитуд $\vartheta_m(x)$ гармонических колебаний от пространственной координаты x ; $\vartheta_{\max} = \vartheta_m(0)$ – амплитуда (максимальная) гармонических колебаний на поверхности образца при $x = 0$.

Примеры распределений температуры по безразмерной координате $\bar{x} = \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}} x$ для различных моментов времени $\tau = 0$, $\tau = \tau_0/4$

и $\tau = \tau_0/2$, рассчитанных по формуле (6.71), приведены на рис. 6.12.

Анализ решения (6.71) позволяет сформулировать следующие особенности установившегося гармонического температурного поля в исследуемом образце [24]:

– в любой момент времени распределение температуры в массиве образца получается в виде волны, амплитуда которой уменьшается (затухает) с глубиной (рис. 6.12); уменьшение амплитуды

температурной волны с увеличением глубины определяется зависимостью

$$\vartheta_m(x) = \vartheta_{\max} \exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}} x\right], \quad (6.71a)$$

причем, при $x \rightarrow \infty$ амплитуда $\vartheta_m(x)$ стремится к нулю (см. рис. 6.12);

– в каждый последующий момент времени распределение температуры в массиве исследуемого образца выражается новой волнистой линией, которая оказывается сдвинутой в глубину массива (см. рис. 6.12) по направлению пространственной координаты x ; с учетом такого смещения температурные волны можно рассматривать движущимися от места их возбуждения на поверхности (при $x = 0$) в глубину x массива исследуемого образца.

Скорость распространения температурной волны можно вычислить путем деления длины волны на полный период τ_0 гармонических колебаний температуры.

Длина волны $\lambda_{\text{волн}}$, в свою очередь, может быть найдена как величина расстояния x между двумя последовательными максимумами функции (6.71) при $\tau = 0$ и $\tau = \tau_0$.

Принимая во внимание, что множитель (6.71a), входящий в решение (6.71), монотонно убывает при увеличении координаты x , расстояние между двумя последовательными максимумами функции (6.71) определяется условием

$$\cos\left(\omega\tau - \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}} x\right) = 1. \quad (6.71b)$$

Учитывая, что $\omega = \frac{2\pi}{\tau_0}$, последнее тригонометрическое уравнение

может быть представлено в виде

$$\frac{2\pi}{\tau_0} \tau - \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}} x = 0. \quad (6.71c)$$

откуда следует, что в момент времени $\tau = 0$ максимум функции (6.71) достигается при $x = 0$, а в момент времени $\tau = \tau_0$ – соответственно

$$x = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}} = 2\sqrt{\pi a \tau_0}.$$

Таким образом, длина волны равна

$$\lambda_{\text{волн}} = 2\sqrt{\pi a \tau_0}. \quad (6.72)$$

Скорость $c_{\text{волн}}$ распространения температурной волны определяется как отношение длины волны $\lambda_{\text{волн}}$ к периоду τ_0 гармонических колебаний, т.е.

$$c_{\text{волн}} = \frac{\lambda_{\text{волн}}}{\tau_0} = 2\sqrt{\frac{\pi a}{\tau_0}}. \quad (6.73)$$

Благодаря тому, что множитель (6.71a), входящий в решение (6.71), не зависит от времени τ и довольно быстро стремится к нулю при возрастании x , возбужденная на поверхности образца температурная волна сравнительно быстро затухает в глубине массива исследуемого образца.

Глубину заметного проникновения температурной волны вовнутрь образца можно вычислить на основании (6.71), рассматривая только максимальные отклонения температуры, соответствующие выполнению условия (6.71b). С учетом условия (6.71b) из (6.71) получаем выражение (6.71a), которое можно переписать в виде

$$\frac{\vartheta_m(x)}{\vartheta_{\text{max}}} = \exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x\right]. \quad (6.71d)$$

Глубину проникновения $x_{\text{пр}}$ температурной волны принято вычислять исходя из условия, что амплитуда $\vartheta_m(x)$ при $x = x_{\text{пр}}$ должна быть равна 0,01 максимальной амплитуды ϑ_{max} на поверхности образца при $x = 0$. Тогда на основании (6.71d) получаем уравнение

$$\exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_{\text{пр}}\right] = 0,01,$$

откуда следует

$$-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_{\text{пр}} = \ln 0,01;$$

$$\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_{\text{пр}} = \ln 100;$$

$$x_{\text{пр}} = \frac{\ln 100}{\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}} = \frac{\ln 100}{\sqrt{\pi}}\sqrt{a\tau_0}$$

или

$$x_{\text{пр}} \approx 2,6\sqrt{a\tau_0}. \quad (6.74)$$

Из последнего соотношения следует следующее:

– толщина слоя $x_{\text{пр}}$ заметных колебаний температуры внутри

образца будет тем больше, чем продолжительней период τ_0 колебаний температуры на поверхности;

– температурные волны большой частоты $\omega = \frac{2\pi}{\tau_0}$ способны

проникать в образец лишь на небольшую глубину $x_{\text{пр}}$;

– толщина слоя $x_{\text{пр}}$ заметных колебаний температуры внутри образца будет тем значительнее, чем больше коэффициент теплопроводности a материала образца.

После рассмотрения изложенных выше основных представлений о распространении температурных волн в массиве полубесконечного образца из исследуемого материала постараемся получить расчетные соотношения для вычисления искомого коэффициента теплопроводности a по экспериментально измеренной информации.

6.4.3.1 ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ПО ОТНОШЕНИЮ АМПЛИТУД ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ, ИЗМЕРЕННЫХ В ДВУХ ТОЧКАХ ОБРАЗЦА

Если в процессе эксперимента осуществить измерение амплитуд ϑ_{max} и $\vartheta_m(x)$ на поверхности образца (при $x=0$) и на некоторой глубине x_1 внутри образца, то на основании соотношения (6.71d) получаем

$$\begin{aligned} \exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_1\right] &= \frac{\vartheta_m(x_1)}{\vartheta_{\text{max}}}; \\ -\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_1 &= \ln \frac{\vartheta_m(x_1)}{\vartheta_{\text{max}}}; \\ \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_1 &= \ln \frac{\vartheta_{\text{max}}}{\vartheta_m(x_1)}; \end{aligned}$$

$$\frac{\pi x_1^2}{a\tau_0} = \left[\ln \frac{\vartheta_{\max}}{\vartheta_m(x_1)} \right]^2;$$

$$a = \frac{\pi x_1^2}{\tau_0 \left[\ln \frac{\vartheta_{\max}}{\vartheta_m(x_1)} \right]^2}. \quad (6.75)$$

Для того чтобы вычислить коэффициент температуропроводности a по формуле (6.75), необходимо в ходе эксперимента измерить:

- амплитуды $\vartheta_{\max} = \vartheta_m(0)$ и $\vartheta_m(x_1)$ при $x = 0$ и $x = x_1$;
- период τ_0 гармонических колебаний температур;
- расстояние x_1 , между двумя датчиками температуры, измеряющими амплитуду температуры $\vartheta_m(0)$ на поверхности при $x = 0$ и амплитуду температуры $\vartheta_m(x_1)$ в точке $x = x_1$.

Если в ходе эксперимента измеряют амплитуды $\vartheta_m(x_1)$ и $\vartheta_m(x_2)$ на расстояниях x_1 и x_2 от поверхности образца, то на основании (6.71d) получаем

$$\frac{\vartheta_m(x_1)}{\vartheta_m(x_2)} = \frac{\exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_1\right]}{\exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_2\right]}.$$

Если потребовать что $x_2 > x_1$, то получаем соотношение

$$\frac{\vartheta_m(x_1)}{\vartheta_m(x_2)} = \exp\left[\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}(x_2 - x_1)\right],$$

откуда следует формула для вычисления коэффициента температуропроводности

$$a = \frac{\pi(x_2 - x_1)^2}{\tau_0 \left[\ln \frac{\vartheta_m(x_1)}{\vartheta_m(x_2)} \right]^2}. \quad (6.75a)$$

Формула (6.75a) по своей форме практически не отличается от

формулы (6.75).

Во многих случаях оказывается проще измерить две амплитуды гармонических колебаний на расстояниях x_1 и x_2 от поверхности образца, чем измерять непосредственно амплитуду колебаний температуры самой поверхности образца. В этом случае формула (6.75a) оказывается удобнее, чем формула (6.75).

Расчетная формула (6.75a) имеет еще одно достоинство по сравнению с формулой (6.75).

Если для возбуждения гармонических колебаний температуры в исследуемом образце применяют (см. рис. 6.14) периодические колебания типа «меандр» или в виде последовательности прямоугольных импульсов, то при обработке исходных данных эти периодические колебания температуры поверхности образца (в виде прямоугольных импульсов) приходится раскладывать в ряд Фурье и расчетным путем находить амплитуду ϑ_1 первой гармоники, которую затем приходится подставлять в качестве ϑ_{\max} в формулу (6.75).

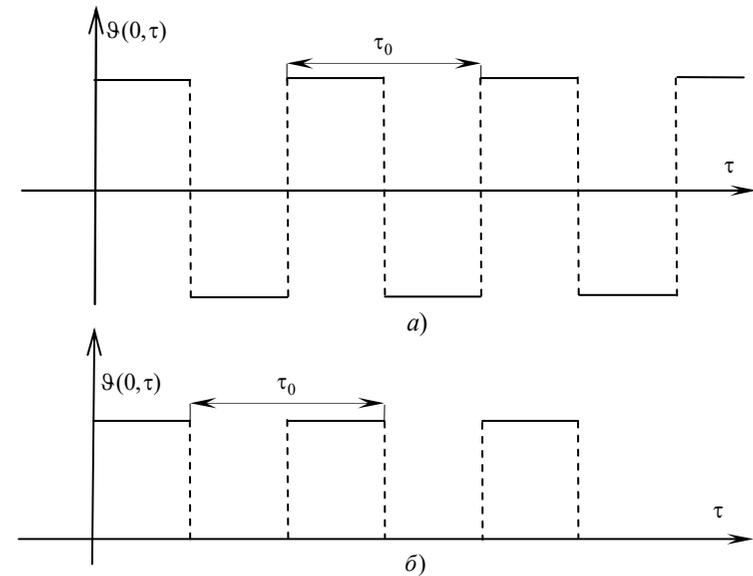


Рис. 6.14 Примеры возбуждающих воздействий на поверхность исследуемого образца:

a – типа «меандр»; *б* – в виде последовательности прямоугольных импульсов

Если же вместо амплитуд колебаний температуры на поверхности при $x = 0$ и внутри образца при $x > 0$ осуществить измерение амплитуд

колебаний температуры в двух точках при $x = x_1$ и $x = x_2$, то в силу сильных фильтрующих свойств процесса теплопроводности в исследуемом образце, вторая, третья и все последующие гармоники (члены ряда Фурье), соответствующие все более высоким частотам

$\omega_2 = \frac{2\pi}{\tau_{02}}$, $\omega_3 = \frac{2\pi}{\tau_{03}}$ и т.д., будут иметь глубину проникновения

$x_{\text{пр}2} = 2,6\sqrt{a\tau_{02}}$, $x_{\text{пр}3} = 2,6\sqrt{a\tau_{03}}$ меньшую, чем глубина проникновения первой гармоники $x_{\text{пр}} = 2,6\sqrt{a\tau_0}$.

При правильном выборе координат $x = x_1$ и $x = x_2$ установки датчиков температуры, измеренные в этих точках $x = x_1$ и $x = x_2$ колебания температуры не будут содержать ни одной высшей гармоники, т.е. будут описываться первым членом ряда Фурье, получающегося при разложении периодических колебаний прямоугольной формы, воздействующих на внешнюю поверхность образца.

Таким образом, основным достоинством расчетной формулы (6.75а) является то, что при правильном выборе числовых значений координат $x = x_1$ и $x = x_2$ отпадает необходимость разложения в ряд Фурье периодического возбуждающего воздействия на поверхность образца, что существенно упрощает обработку экспериментальных данных.

6.4.3.2 ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ПО ВЕЛИЧИНЕ СДВИГА ФАЗ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ДВУХ ТОЧКАХ ОБРАЗЦА

Если в процессе эксперимента зарегистрировать возбуждающие гармонические колебания

$$\vartheta(0, \tau) = \vartheta_{\text{max}} \cos(\omega\tau)$$

на поверхность образца при $x = 0$ и гармонические колебания (6.71)

$$\vartheta(x_1, \tau) = \vartheta_{\text{max}} \exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_1\right] \cos\left(\omega\tau - \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_1\right),$$

происходящими на глубине $x = x_1$ от поверхности образца, то сдвиг по фазе φ между этими двумя гармоническими колебаниями (см. рис. 6.13) может быть вычислен по формуле

$$\varphi = 2\pi \frac{\tau_3(x_1)}{\tau_0}, \quad (6.76)$$

где τ_0 – период гармонических колебаний; $\tau_3(x)$ – запаздывание во времени гармонических колебаний на глубине $x = x_1$ по сравнению с гармоническими колебаниями на поверхности образца при $x = 0$.

Из формулы (6.71) следует, что сдвиг по фазе φ равен

$$\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}} x_1,$$

откуда получаются расчетные соотношения для вычисления коэффициента теплопроводности

$$a = \frac{\pi x_1^2}{\tau_0 \varphi^2}. \quad (6.77)$$

Сравнивая (6.77) с (6.75) получаем

$$\varphi^2 = \left[\ln \left(\frac{\vartheta_{\max}}{\vartheta_m(x_1)} \right) \right]^2 \quad \text{или} \quad \varphi = \ln \left(\frac{\vartheta_{\max}}{\vartheta_m(x_1)} \right),$$

т.е. сдвиг по фазе гармонических колебаний температуры между точками с координатами $x=0$ и $x = x_1$ однозначно связан с отношением амплитуд гармонических колебаний, измеренных в этих же точках.

Достоинством измерения сдвига фаз является то, что при подстановке соотношения (6.76) в (6.77) получается соотношение

$$a = \frac{\pi}{\tau_0 \left[2\pi \frac{\tau_3(x_1)}{\tau_0} \right]^2} x_1^2 = \frac{x_1^2 \tau_0}{4\pi [\tau_3(x_1)]^2}, \quad (6.77a)$$

из которого следует, что для вычисления коэффициента теплопроводности a достаточно измерить линейный размер x_1 , период колебаний τ_0 и временное запаздывание τ_3 . Как известно, в настоящее время наиболее точно могут быть измерены именно линейные размеры и время. Поэтому формула (6.77), представленная в виде (6.77a), предоставляет возможность осуществления достаточно точного вычисления коэффициента теплопроводности по непосредственно измеренным физическим величинам x_1 , τ_0 и τ_3 . Если в

ходе эксперимента осуществить измерение температуры в двух точках, то в точке $x = x_1$ температура будет изменяться по закону

$$\vartheta(x_1, \tau) = \vartheta_{\max} \exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_1\right] \cos\left(\omega\tau - \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_1\right),$$

а в точке $x = x_2$, соответственно, по закону

$$\vartheta(x_2, \tau) = \vartheta_{\max} \exp\left[-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_2\right] \cos\left(\omega\tau - \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_2\right).$$

Сравнивая два последних соотношения, получаем, что сдвиг по фазе между гармоническими колебаниями температуры в точках $x = x_1$ и $x = x_2$ равен

$$\varphi = -\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_1 - \left(-\sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}x_2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a\tau_0}}(x_2 - x_1),$$

откуда следует расчетная формула

$$a = \frac{\pi(x_2 - x_1)^2}{\tau_0\varphi^2}. \quad (6.77b)$$

Принимая во внимание (6.76), получаем, что сдвиг по фазе в точке $x = x_1$ по отношению к гармоническим колебаниям температуры поверхности при $x = 0$ равен

$$\varphi\Big|_{x=x_1} = 2\pi \frac{\tau_3(x_1)}{\tau_0},$$

а, соответственно, в точке $x = x_2$

$$\varphi\Big|_{x=x_2} = 2\pi \frac{\tau_3(x_2)}{\tau_0}.$$

Тогда сдвиг по фазе между гармоническими колебаниями в точках с координатами $x = x_1$ и $x = x_2$ будет равен

$$\Phi \Big|_{x_2, x_1} = 2\pi \frac{\tau_3(x_2) - \tau_3(x_1)}{\tau_0} = 2\pi \frac{\bar{\tau}_3(x_2, x_1)}{\tau_0},$$

где $\bar{\tau}_3(x_2, x_1) = \tau_3(x_2) - \tau_3(x_1)$ – время запаздывания гармонических колебаний в точке $x = x_2$ по сравнению с гармоническими колебаниями в точке $x = x_1$.

Подставив последнее соотношение в формулу (6.77b), получаем

$$a = \frac{(x_2 - x_1)^2 \tau_0}{4\pi [\bar{\tau}_3(x_2, x_1)]^2}. \quad (6.77c)$$

Последнее расчетное соотношение показывает, что измерение коэффициента температуропроводности a в рассматриваемом случае сводится к измерению разности двух геометрических размеров $(x_2 - x_1)$, периода τ_0 гармонических колебаний и времени запаздывания $\bar{\tau}_3(x_2, x_1) = \tau_3(x_2) - \tau_3(x_1)$.

6.4.4 ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ИЗМЕРЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ОБРАЗЦА ИССЛЕДУЕМОГО МАТЕРИАЛА

Можно рекомендовать следующий примерный порядок осуществления измерительных операций:

1 Из исследуемого материала изготавливают плоский образец (см. рис. 6.15) с такой толщиной H , чтобы глубина $x_{пр}$ проникновения температурной волны в глубину образца, вычисленная по формуле (6.74) была в 1,5–2 раза меньше толщины H этого образца, т.е. $H \geq (1,5 \dots 2)x_{пр}$.

С учетом (6.74) получается, что толщина H образца должна быть $H \geq (1,5 \dots 2)2,6\sqrt{a\tau_0}$. На расстоянии $x = x_1$ и $x = x_2$ от рабочей поверхности $x = 0$ образца размещают датчики температуры, например, термодпары. Эти термодпары могут быть введены в массив образца, например, через отверстия 1 и 2, просверленные вдоль изотермических поверхностей температурного поля, создаваемого в исследуемом материале внешним гармоническим воздействием.

2 При подготовке к эксперименту на левую (рабочую) поверхность исследуемого образца (при $x = 0$) помещают источник 3 внешнего гармонического воздействия, например, электронагреватель

или элемент Пельтье. Внешнюю (нерабочую) сторону образца (при $x = H$) защищают от воздействия окружающей среды слоем 4 высокоэффективной изоляции.

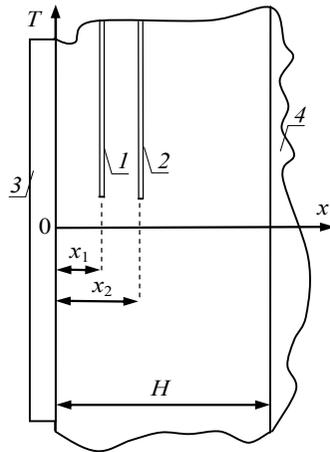


Рис. 6.15 Примерный вид образца из исследуемого материала

3 После завершения подготовки исследуемого образца к эксперименту, начинают активную стадию эксперимента. При этом на рабочую поверхность исследуемого образца (при $x = 0$) подают периодическое температурное воздействие и на протяжении всей активной стадии эксперимента регистрируют температуры $T(x_1, \tau)$ и $T(x_2, \tau)$ в точках с координатами $x = x_1$ и $x = x_2$.

О наступлении установившегося во времени регулярного режима третьего рода судят по достижению постоянных значений амплитуд гармонических колебаний.

4 После наступления регулярного режима третьего рода определяют среднее значение температуры \bar{T} исследуемого образца,

например, по формуле
$$\bar{T} = \frac{[T(x_2, \tau)]_{\max} - [T(x_2, \tau)]_{\min}}{2},$$
 где

$[T(x_2, \tau)]_{\max}$, $[T(x_2, \tau)]_{\min}$ – максимальное и минимальное значения температуры в точке $x = x_2$. После этого измеренные значения температур $T(x_1, \tau)$ и $T(x_2, \tau)$ представляют в виде физических величин $\vartheta(x_1, \tau) = T(x_1, \tau) - \bar{T}$ и $\vartheta(x_2, \tau) = T(x_2, \tau) - \bar{T}$.

5 После обработки экспериментальных данных определяют амплитуды $\vartheta_m(x_1)$ и $\vartheta_m(x_2)$ гармонических колебаний в точках с координатами $x = x_1$ и $x = x_2$ и(или) величину времени запаздывания $\bar{\tau}_3(x_2, x_1)$ гармонических колебаний в точке $x = x_2$ по сравнению с точкой $x = x_1$, а искомый коэффициент температуропроводности a вычисляют по формулам (6.75а) и (6.77с).

6.4.5 ОЦЕНКА ПРЕДЕЛЬНЫХ И СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ

Расчетные соотношения для вычисления предельной $(\delta a)_{пр}$ и среднеквадратичной $(\delta a)_{ск}$ оценок погрешностей измерения коэффициента температуропроводности (в случае использования экспериментальных данных о величинах амплитуд $\vartheta_m(x_1)$ и $\vartheta_m(x_2)$ гармонических колебаний в точках с координатами $x = x_1$ и $x = x_2$) получаются на основе расчетной формулы (6.75)

$$a = \frac{\pi(x_2 - x_1)^2}{\tau_0 \left[\ln \frac{\vartheta_m(x_1)}{\vartheta_m(x_2)} \right]^2}.$$

После логарифмирования получаем

$$\ln a = \ln \pi + 2 \ln(x_2 - x_1) - \ln \tau_0 - 2 \ln \left[\ln \frac{\vartheta_m(x_1)}{\vartheta_m(x_2)} \right].$$

Вычисление дифференциала от левой и правой частей дает

$$\frac{da}{a} = 2 \frac{d(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{d\tau_0}{\tau_0} - \frac{2}{\ln \left[\frac{\vartheta_m(x_1)}{\vartheta_m(x_2)} \right]} \left\{ \frac{d \ln \vartheta_m(x_1)}{d \vartheta_m(x_1)} d \vartheta_m(x_1) - \frac{d \ln \vartheta_m(x_2)}{d \vartheta_m(x_2)} d \vartheta_m(x_2) \right\},$$

где принято во внимание, что

$$\frac{d\pi}{\pi} = 0 \quad \text{и} \quad \ln \left[\frac{\vartheta_m(x_1)}{\vartheta_m(x_2)} \right] = \ln \vartheta_m(x_1) - \ln \vartheta_m(x_2).$$

После изменения всех знаков « \leftarrow » на знаки « $+$ » и замены дифференциалов на абсолютные погрешности измерения соответствующих физических величин:

$$da \approx \Delta a, \quad d(x_2 - x_1) \approx \Delta(x_2 - x_1) \approx 2\Delta x, \quad d\tau_0 \approx \Delta\tau_0;$$

$$d\vartheta_m(x_1) \approx \Delta\vartheta_m(x_1) = \Delta\vartheta_m, \quad d\vartheta_m(x_2) \approx \Delta\vartheta_m(x_2) = \Delta\vartheta_m,$$

получаем

$$\left(\frac{\Delta a}{a} \right)_{\text{пр}} = 2 \left[\frac{2\Delta x}{(x_2 - x_1)} \right] + \left(\frac{\Delta\tau_0}{\tau_0} \right) +$$

$$+ \frac{2}{[\ln \vartheta_m(x_1) - \ln \vartheta_m(x_2)]} \left\{ \frac{d \ln \vartheta_m(x_1)}{d\vartheta_m(x_1)} \Delta\vartheta_m + \frac{d \ln \vartheta_m(x_2)}{d\vartheta_m(x_2)} \Delta\vartheta_m \right\}$$

или

$$(\delta a)_{\text{пр}} = 2\delta(x_2 - x_1) + \delta\tau_0 + \frac{2}{\ln \left[\frac{\vartheta_m(x_1)}{\vartheta_m(x_2)} \right]} \left\{ \frac{\Delta\vartheta_m}{\vartheta_m(x_1)} + \frac{\Delta\vartheta_m}{\vartheta_m(x_2)} \right\}, \quad (6.78)$$

где принято во внимание, что

$$\frac{d \ln \vartheta_m(x_1)}{d\vartheta_m(x_1)} = \frac{1}{\vartheta_m(x_1)}, \quad \frac{d \ln \vartheta_m(x_2)}{d\vartheta_m(x_2)} = \frac{1}{\vartheta_m(x_2)}$$

и использовано обозначение $\delta(x_2 - x_1) = \frac{2\Delta x}{x_2 - x_1}$ относительной погрешности измерения расстояния $(x_2 - x_1)$.

Оценка среднеквадратичной погрешности $(\delta a)_{\text{ск}}$ измерения коэффициента температуропроводности a получается на основе (6.78) в виде

$$(\delta a)_{\text{ск}} = \sqrt{4[\delta(x_2 - x_1)]^2 + (\delta\tau_0)^2 + \frac{4 \left\{ \left[\frac{\Delta\vartheta_m}{\vartheta_m(x_2)} \right]^2 + \left[\frac{\Delta\vartheta_m}{\vartheta_m(x_1)} \right]^2 \right\}}{\left\{ \ln \left[\frac{\vartheta_m(x_1)}{\vartheta_m(x_2)} \right] \right\}^2}}. \quad (6.78a)$$

Из соотношений (6.78) и (6.78a) видно, что наибольший вклад в результирующую погрешность измерения коэффициента температуропроводности a вносит значительная по величине абсолютная погрешность $\Delta\vartheta_m$ измерения амплитуд гармонических колебаний $\vartheta_m(x_2)$ и $\vartheta_m(x_1)$ соответственно в точках $x = x_2$ и $x = x_1$. Абсолютные погрешности Δx и $\Delta\tau_0$ значительно более точно измеряемых величин, а именно, разности $(x_2 - x_1)$ геометрических размеров и периода τ_0 гармонических колебаний, вносят меньший вклад в результирующую погрешность измерения коэффициента температуропроводности.

Получим расчетные соотношения для вычисления оценок погрешностей $(\delta a)_{\text{пр}}$ и $(\delta a)_{\text{ск}}$ в случае измерения сдвига фаз, сводящегося к измерению времени запаздывания $\bar{\tau}_3(x_2, x_1)$ гармонических колебаний в точке x_2 по отношению к гармоническим колебаниям в точке x_1 .

Основываясь на расчетной формуле (6.77с), имеющей вид

$$a = \frac{(x_2 - x_1)^2 \tau_0}{4\pi [\bar{\tau}_3(x_2, x_1)]^2},$$

после логарифмирования

$$\ln a = 2 \ln(x_2 - x_1) + \ln \tau_0 - \ln(4\pi) - 2 \ln \bar{\tau}_3(x_2, x_1)$$

и вычисления дифференциала

$$\frac{da}{a} = 2 \frac{d(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} + \frac{d\tau_0}{\tau_0} - \frac{d(4\pi)}{4\pi} - 2 \frac{d\bar{\tau}_3(x_2, x_1)}{\bar{\tau}_3(x_2, x_1)},$$

принимая во внимание, что $d(4\pi) = 0$, поменяв знак « \leftarrow » на знак « \rightarrow » и

используя замены дифференциалов на соответствующие абсолютные погрешности измерения физических величин

$$d(x_2 - x_1) \approx 2\Delta x, \quad d\bar{\tau}_3(x_2, x_1) \approx 2\Delta\tau, \quad d\tau_0 \approx \Delta\tau,$$

получаем

$$\left(\frac{\Delta a}{a}\right)_{\text{пр}} = 2 \frac{2\Delta x}{(x_2 - x_1)} + \frac{\Delta\tau}{\tau_0} + 2 \frac{2\Delta\tau}{\bar{\tau}_3(x_2, x_1)}$$

или

$$(\delta a)_{\text{пр}} = 2\delta(x_2 - x_1) + \delta\tau_0 + 2\delta\bar{\tau}_3. \quad (6.79)$$

На основании (6.79) получается оценка среднеквадратичной погрешности измерения коэффициента температуропроводности

$$(\delta a)_{\text{ск}} = \sqrt{4(\delta(x_2 - x_1))^2 + (\delta\tau_0)^2 + 4(\delta\bar{\tau}_3)^2}. \quad (6.79a)$$

Сравнивая формулу (6.79) с (6.78), а также формулу (6.79a) с (6.78a), можно сделать вывод, что при измерении сдвига фаз (или времени запаздывания $\bar{\tau}_3(x_2, x_1)$ между точками x_2 и x_1) результирующие погрешности $(\delta a)_{\text{пр}}$ и $(\delta a)_{\text{ск}}$ определения коэффициента температуропроводности a должны быть меньше, чем в случае измерения амплитуд гармонических колебаний $\vartheta_m(x_1)$ и $\vartheta_m(x_2)$ в этих же точках x_2 и x_1 .

На практике применяют большое количество методов и устройств, пригодных для измерения не только коэффициента температуропроводности a , но и многих других теплофизических свойств, например, позволяющих измерять теплопроводность λ , объемную теплоемкость c_p и коэффициент тепловой активности $b = \sqrt{\lambda c_p}$.

Большинство этих методов имеют значительно более сложные математические модели (по сравнению с моделью, рассмотренной в

п. 6.4.3). При необходимости с теоретическими основами и практическими вопросами применения таких методов можно разобраться по монографиям [1, 3, 7, 8, 12 – 14, 17, 24 – 26].

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ОСНОВЫ ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	5
1.1 Понятие о температурном поле	5
1.2 Основной закон теплопроводности Фурье	7
1.3 Дифференциальное уравнение теплопроводности	10
1.4 Начальные условия краевых задач теплопроводности	14
1.5 Граничные условия краевых задач теплопроводности	14
1.6 Основные представления о прямых и обратных краевых задачах теплопроводности	19
2 ПЕРВОНАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ И ПРИБОРАХ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВЕЩЕСТВ	23
2.1 Организация эксперимента при измерении теплофизических свойств веществ	23
2.2 Классификация методов и приборов для измерения теплофизических свойств	24
3 ОСНОВЫ КАЛОРИМЕТРИИ	30
3.1 Адиабатическая калориметрия	30
3.2 Основы измерения теплоемкости методом монотонного нагрева	34
3.3 Основы микрокалориметрии	38
4 СТАЦИОНАРНЫЕ МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ	43
4.1 Теоретические основы стационарного метода плоского слоя	43
4.2 Теоретические основы стационарного метода цилиндрического слоя	58
4.3 Теоретические основы стационарного метода шарового слоя	68
4.4 Источники погрешностей измерения теплопроводности стационарными методами	73

5	МЕТОДЫ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ТЕОРИИ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ИССЛЕДУЕМОМ ОБРАЗЦЕ	88
5.1	Метод плоского мгновенного источника тепла	88
5.2	Метод линейного мгновенного источника тепла	102
6	НЕСТАЦИОНАРНЫЕ МЕТОДЫ РЕГУЛЯРНЫХ РЕЖИМОВ ПЕРВОГО, ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО РОДА	118
6.1	Основные сведения о регуляризации температурных полей в образцах простой формы	118
6.2	Метод регулярного режима первого рода	124
6.3	Методы теплофизических измерений, основанные на закономерностях регулярного режима второго рода	150
6.4	Измерение теплофизических свойств веществ с применением методов регулярного режима третьего рода	181

