

**Д.Ю. МУРОМЦЕВ, В.А. ПОГОНИН**

# **СИСТЕМЫ ЭНЕРГОСБЕРЕ- ГАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ**

**◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆**

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

Д.Ю. МУРОМЦЕВ, В.А. ПОГОНИН

# СИСТЕМЫ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

*Допущено Учебно-методическим объединением вузов по образованию в области автоматизированного машиностроения (УМО АМ) в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки дипломированных специалистов «Автоматизированные технологии и производства»*



---

Тамбов  
Издательство ТГТУ  
2006

УДК 681.51.54(681.5.017)  
ББК 6965.92я73  
М91

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
*И.И. Пасечников*

Доктор физико-математических наук, профессор  
*С.М. Дзюба*

**Муромцев Д.Ю., Погонин В.А.**

М91 Системы энергосберегающего управления: Учеб. пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2006. 92 с.

Приведены теоретические положения проектирования систем оптимального управления динамическими объектами с учетом возможных состояний функционирования в процессе эксплуатации. Результаты полного анализа составляют основу базы знаний экспертной системы, которая используется при автоматизированном проектировании алгоритмического обеспечения систем управления. Большое практическое значение имеют методики выполнения работ по проектированию систем управления, приведенные в конце каждой главы.

Предназначено для студентов дневного и заочного отделений специальностей 210201, 220301, а также магистрантов и обучающихся по системе дистанционного образования при изучении дисциплин «Основы автоматики и системы автоматического управления», «Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов», «Анализ технических систем».

УДК 681.51.54(681.5.017)  
ББК 6965.92я73

ISBN 5-8265-0462-5

© Муромцев Д.Ю., Погонин В.А.,  
2006

© Тамбовский государственный  
технический университет  
(ТГТУ), 2006

Учебное издание

МУРОМЦЕВ Дмитрий Юрьевич,  
ПОГОНИН Василий Александрович

# СИСТЕМЫ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор Т.М. Глинкина  
Инженер по компьютерному макетированию Т.А. Сынова

Подписано к печати 26.05.2006.  
Формат 60 × 84/16. Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать офсетная.  
Объем: 5,35 усл. печ. л.; 5,30 уч.-изд. л.  
Тираж 100 экз. С. 294

Издательско-полиграфический центр  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, ул. Советская, 106, к. 14

## ВВЕДЕНИЕ

Одной из важнейших проблем человечества является экономия энергоресурсов. В связи с ростом цен на электроэнергию и топливо, усилением конкурентной борьбы между фирмами, производящими энергоемкое оборудование, транспортные средства и другие машины, а также учитывая сложность социально-экономической обстановки, актуальность задач экономии и рационального использования энергоресурсов с каждым годом возрастает [1 – 3]. Проблема экономии топливно-энергетических ресурсов занимает важное место в тематике работ научно-исследовательских организаций, проектных и промышленных фирм всех стран мира. Заметных успехов на практике в этом направлении достигли США, Канада, Япония и страны Западной Европы, в теоретических вопросах энергосбережения одно из ведущих мест занимает российская наука.

Количество потребляемых населением Земли энергоресурсов постоянно возрастает, однако эффективность использования их остается достаточно низкой. По данным Европейской комиссии ООН, уровень полезного использования энергоресурсов составляет лишь 40 %, доля полезного конечного использования топлива – менее 20 % [4]. Вместе с тем обостряется проблема загрязнения окружающей среды, быстро уменьшаются запасы высокоэнергетического сырья, и растет стоимость получения энергии.

Важным резервом в решении проблемы энерго- и ресурсосбережения является оптимальное по минимуму затрат энергии или топлива управление динамическими объектами, проектирование машин и аппаратов, которые при своем функционировании требуют меньших энергозатрат по сравнению с существующими аналогами.

Теоретические исследования и практические результаты показывают, что при оптимальном управлении (ОУ) уменьшение затрат энергии (расхода топлива) может достигать от 10 до 40 % по сравнению с традиционно используемыми управляющими воздействиями. Кроме того, в динамических режимах, характеризующихся меньшими энергетическими затратами, снижаются механические и тепловые нагрузки, что ведет к повышению долговечности и безопасности эксплуатации объектов.

Серьезным сдерживающим фактором в реализации оптимального энергосберегающего управления динамическими процессами является отсутствие алгоритмов синтеза управляющих воздействий в реальном времени, которые могут быть использованы простыми и дешевыми микропроцессорными устройствами. В каталогах алгоритмического и программного обеспечения отечественных и зарубежных фирм, поставляющих программные и технические средства для промышленной автоматизации (КРУГ, Техноконт, КРУИЗ, Север, Трейс Моуд, Matlab, Siemens, Schneider Electric, Omron, Motorola и др.), отсутствуют сведения об алгоритмах, минимизирующих затраты энергии или расход топлива.

В существующих SCADA системах и других программных средствах, используемых для проектирования систем автоматического управления и регулирования, предполагается стандартный набор алгоритмов: ПИ- и ПИД-регулирование, линейный квадратичный оптимальный регулятор, оптимальное быстродействие, нечеткий регулятор и некоторые другие, в которых не учитываются характерные для энергосберегающего управления ограничения, например, на лимит энергии или запас топлива. Ряд фирм в проспектах о своей продукции упоминают об энергосбережении и «мягком» пуске электродвигателей, однако используемые для этого алгоритмы не раскрываются и считаются ноу-хау фирмы.

Необходимо отметить, что разработка нового алгоритмического обеспечения для систем управления является наиболее интеллектуальным этапом проектирования. Для выполнения этого этапа привлекаются специалисты высокого класса. Только крупные фирмы могут позволить себе иметь подразделение по разработке и исследованию систем оптимального управления. Для получения алгоритмов энергосберегающего управления требуется проведение трудоемких исследований применительно к каждому новому объекту или новым режимам работы.

К наиболее энергоемким объектам относятся тепловые аппараты, машины с электроприводами, т.е. большинство видов технологических установок в машиностроительной, химической, металлургической, строительной и др. отраслях промышленности, а также перемещающиеся объекты и транспортные средства. Затраты на электроэнергию и различные виды топлива при эксплуатации этих объектов для большинства промышленных и сельскохозяйственных предприятий относятся к числу основных и становятся сопоставимыми с затратами на сырье. Миллионы разнообразных энергоемких объектов значительную долю времени работают в динамических режимах, это позволяет снижать их энергопотребление за счет оптимального управления в различных состояниях функционирования.

Эффект энергосбережения при использовании оптимального управления достигается за счет следующих факторов:

- реализация оптимальных траекторий изменения фазовых координат на всем временном интервале управления, например, для тепловых объектов оптимальная траектория изменения температуры обеспечивает сокращение временного участка с наибольшими потерями тепла в окружающую среду;
- оптимальное ведение динамических режимов при всех состояниях функционирования, т.е. в случае изменения модели динамики объекта или условий (исходных данных) задачи управления оперативно (в реальном времени) находится новое решение, и реализуются энергосберегающие управляющие воздействия для существующей ситуации;
- достижения задаваемого конечного значения вектора фазовых координат точно в требуемый момент времени, которое, в свою очередь, выбирается оптимальным;
- использование оптимальной стратегии реализации энергосберегающего управления (программной, позиционной или другой) для каждого состояния функционирования;
- замена обычных автоматических регуляторов энергосберегающими, которые устраняют значительные отклонения регулируемой величины от заданного значения с минимумом затрат энергии (расхода топлива);
- создание локальных и бортовых систем энергосберегающего управления на базе простых и дешевых микропроцессорных устройств.

Для создания систем энергосберегающего управления требуется решить комплекс теоретических задач, основными из них являются:

- полный анализ задач оптимального управления для типовых моделей динамики энергоемких объектов, различных видов минимизируемых функционалов и стратегий реализации управляющих воздействий, ограничений на управления и фазовые координаты, встречающиеся в реальных условиях;
- оперативный (в реальном масштабе времени) синтез энергосберегающих управляющих воздействий;

- идентификация моделей динамических режимов, в том числе нелинейных и с временным запаздыванием по каналам управления, пригодных для использования в системах энергосберегающего управления;
- принятие обоснованных решений при проектировании систем энергосберегающего управления, в том числе выбор вида модели динамики объекта, стратегии реализации управляющих воздействий, программно-технических средств и др.

Учебное пособие состоит из нескольких частей, относящихся к различным разделам следующих дисциплин: «Основы автоматики и системы автоматического управления», «Аналитическое конструирование оптимальных регуляторов», «Анализ технических систем», «Основы проектирования радиоэлектронных средств», «Экспертные системы», предусмотренные стандартом по направлениям 210200 – «Проектирование и технология ЭС», 657900 – «Автоматизированные технологии и производства».

Авторы будут благодарны за все замечания и пожелания, сделанные по настоящему учебному пособию.

## 1 ЭНЕРГОЕМКИЕ ОБЪЕКТЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Класс энергоемких объектов включает различные виды тепловых аппаратов, машин с электроприводами, двигающихся устройств и транспортных средств. Миллионы этих объектов функционируют на промышленных предприятиях, в сферах обслуживания и жизнеобеспечения населения. Как объекты управления они имеют свои особенности, которые необходимо учитывать в задачах оптимального управления.

### 1.1 ХАРАКТЕРИСТИКА ЭНЕРГОЕМКИХ ОБЪЕКТОВ

Тепловые процессы являются наиболее энергоемкими и распространенными процессами в химической, металлургической, машиностроительной, строительной, пищевой и других отраслях промышленности. Нефтеперерабатывающая и нефтехимическая отрасли занимают первое место, а химическая – второе место по потреблению тепла, что составляет соответственно 12,6 и 11,0 % от общего потребления тепла в народном хозяйстве [5 – 7]. Затраты на электроэнергию и различные виды топлива (теплоносителей) для большинства предприятий этих отраслей относятся к числу основных и становятся сопоставимыми с затратами на сырье. Значительная доля энергозатрат приходится на нагревательные установки, теплообменники, печи, реакторы и другие аппараты, в которых протекают тепловые процессы. Многие технологические процессы протекают в тепловых аппаратах периодического действия.

Традиционно снижение энергетических затрат на производстве в процессах нагрева достигается за счет:

- а) повышения производительности технологического оборудования, уменьшения его простоев в рабочем состоянии;
- б) повышения надежности электротермических аппаратов;
- в) улучшения теплоизоляции [8 – 14].

Важным резервом снижения энергопотребления является оптимальное управление динамическими режимами с учетом изменяющихся состояний функционирования. Теоретические исследования показывают, что при оптимальном управлении снижение энергозатрат в динамических режимах 20 % и более при условии, что используются алгоритмы синтеза ОУ в реальном времени, реализуемые простыми и дешевыми микропроцессорными устройствами. Наибольший эффект энергосбережения при оптимальном управлении тепловыми аппаратами достигается за счет следующих факторов:

- 1) оптимальное управление динамическими режимами при нагреве тел;
- 2) обеспечение достижения требуемой температуры точно в назначенное время (исключаются потери «заблаговременного» нагрева);
- 3) устранение отклонений регулируемой величины (режим стабилизации) от заданного значения с минимумом затрат энергии;
- 4) использование резервов своевременного отключения энергоносителей (например, за счет остаточного тепла разогретого электронагревателя).

Для оценки ожидаемого эффекта от оптимального управления тепловым объектом широко используется эксергетический анализ [6, 15]. Этот подход позволяет определить необратимые потери энергии при теплообмене, в частности потери в окружающую среду, потери, когда вследствие неравенства тепловых эквивалентов теплоносителей возникают неодинаковые изменения температур горячего и холодного теплоносителей, и др.

Тепловые аппараты классифицируются по разным признакам. Для решения задач энергосберегающего управления, в которых первостепенное значение имеют задания минимизируемого функционала и выбор стратегии управления, важную роль играет классификация объектов по виду используемого энергоносителя и особенностям режимов работы.

Основные классы тепловых объектов, различающиеся видом энергоносителя и соответственно минимизируемого функционала  $F$ , представлены на рис. 1.1. Из приведенной схемы видно, что большое число тепловых объектов используют один вид энергоносителя. Например, в электрических печах сопротивления, электроводонагревателях, сушилках и др. аппаратах используется электронагрев и в качестве функционала здесь будет рассматриваться минимум затрат энергии ( $I_3$ ) [16, 17]. Широкий класс тепловых объектов в качестве теплоагентов используют пар, высокоорганические теплоносители, а также продукты сжигания жидкого или газообразного топлива. К таким объектам относятся теплообменники, бойлеры, пе-

чи для нагрева жидких продуктов, выпарные установки, сушилки и т.п. Здесь в качестве функционала берется расход «топлива» ( $I_T$ ) [18 – 20].

Наряду с рассмотренными объектами, для которых минимизируются или только затраты энергии, или только расход топлива, назовем их монообъектами, в последнее время начинают получать распространение так называемые гибридные объекты. В задачах энергосберегающего управления гибридными объектами используются комбинированные функционалы в виде взвешенной суммы затрат энергии и расхода топлива или различных видов топлива. К таким объектам относятся водогрейные котлы, отопительные и нагревательные системы и др. Здесь следует выделить два типа гибридных объектов (рис. 1.1) – объекты, в которых одновременно могут использоваться различные энергоносители, и объекты, в которых используемые энергоносители только чередуются во времени. К гибридным объектам близко примыкают тепловые аппараты с электроприводом.

**НА РИС. 1.2 ПРЕДСТАВЛЕНА КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕПЛОВЫХ ОБЪЕКТОВ, РАЗЛИЧАЮЩИХСЯ РЕЖИМАМИ РАБОТЫ, СТЕПЕНЬЮ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ ОТ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ, А ТАКЖЕ НАЛИЧИЕМ ВОЗМУЩАЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ. ЭТИ ФАКТОРЫ ИМЕЮТ БОЛЬШОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПРИ ВЫБОРЕ СТРАТЕГИИ  $S$  РЕАЛИЗАЦИИ ОУ [21 – 23], А ТАКЖЕ ПОЗВОЛЯЮТ СДЕЛАТЬ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ О ВОЗМОЖНОМ ЭФФЕКТЕ ОТ ОПТИМИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ. ТАК, ДЛЯ ОБЪЕКТОВ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ (СУШИЛЬНЫЕ ШКАФЫ, БОЙЛЕРЫ, ВЫПАРНЫЕ АППАРАТЫ, АВТОКЛАВЫ) ЦЕЛЕСООБРАЗНО ИСПОЛЬЗОВАТЬ ПРОГРАММНЫЕ СТРАТЕГИИ  $S_{пр}$ , А ДЛЯ ОБЪЕКТОВ НЕПРЕРЫВНОГО ДЕЙСТВИЯ (ПЕЧИ, БАРАБАННЫЕ СУШИЛКИ, РЕКТИФИКАЦИОННЫЕ УСТАНОВКИ) НЕОБХОДИМО СОЧЕТАТЬ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ (АР) ПРИ МАЛЫХ ИЗМЕНЕНИЯХ РЕГУЛИРУЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ С ОПТИМАЛЬНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ ПРИ ЗНАЧИТЕЛЬНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ.**

Наибольший эффект от энергосберегающего управления следует ожидать для объектов периодического действия со слабой теплоизоляцией. Как показывают эксперименты, снижение значения функционала здесь может достигать от 15 до 30 % по сравнению с традиционным нагревом.

Многие тепловые объекты приходится рассматривать на множестве состояний функционирования [24]. Это, прежде всего, многоцелевые аппараты, в которых происходят изменения фазового состава, структурные переходы и т.п. Для этих объектов приходится вводить модели, отражающие все состояния функционирования. Особый класс объектов управления составляют тепловые аппараты с распределенными параметрами, например, многозонные электрические печи, сушилки, ректификационные колонны и др.

По результатам краткого рассмотрения особенностей тепловых аппаратов применительно к задачам управления можно выделить кластер объектов, для которого наиболее целесообразно применение энергосберегающего управления. К этому кластеру относятся:

- 1) объекты, у которых время пребывания в динамических режимах составляет существенную часть общего времени работы (не менее 5 %);
- 2) объекты, динамические режимы которых могут быть описаны системой обыкновенных дифференциальных уравнений, а также дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [25];
- 3) объекты с управляемыми тепловыми процессами, т.е. для которых можно реализовывать рассчитанные управляющие воздействия.

Следует отметить, что в настоящее время практически отсутствуют тепловые аппараты, в том числе и водонагреватели, с бортовыми контроллерами, которые в реальном времени решают задачи синтеза энергосберегающего управления динамическими режимами.

На многих промышленных предприятиях более 50 % всей потребляемой мощности расходуется на работу электроприводов. С позиции задач оптимального управления в рассматриваемом классе объектов можно выделить машины с одним электроприводом, многоприводные машины, аппараты с нагревательными элементами и электроприводом, перемещающиеся объекты, использующие один источник энергии, и гибридные объекты, использующие различные источники энергии.

К машинам с одним электроприводом относятся различного рода смесители, насосы, вентиляционные установки и т.д. В этих машинах с помощью электропривода осуществляется движение рабочих органов производственного механизма. Машины с одним электроприводом делятся на машины с групповым приводом и однодвигательным приводом. В первом случае один электродвигатель приводит в движение группу производственных машин, во втором – каждая производственная машина приводится в движение отдельным, связанным только с ней электродвигателем.

В машинах с несколькими приводами каждый рабочий орган приводится в движение отдельным электродвигателем. Характерным для многодвигательного привода является наличие того или иного вида связи между отдельными электродвигателями.

Системы автоматического управления электроприводами выполняют следующие функции.

1 Автоматический разгон, торможение и реверсирование, а также поддержание постоянства угловой скорости (частоты вращения) электродвигателей при изменениях нагрузки с невысокой точностью, ограниченной жесткостью характеристик.

2 Автоматическое задание и поддержание заданной угловой скорости двигателя или другой переменной с высокой точностью в статике и динамике.

3 Слежение за вводимыми в систему электропривода сигналами.

4 Программное автоматическое управление машинами и механизмами.

5 Автоматическое управление промышленными механизмами и комплексами машин, обеспечивающее автоматический выбор целесообразных режимов работы.

6 Автоматическое управление комплексами машин и механизмов, объединенных общим технологическим процессом.

В технологических установках применяются электродвигатели (ЭД) постоянного и переменного тока. ЭД постоянного тока, в свою очередь, делятся на ЭД с независимым, параллельным, последовательным и смешанным возбуждением, а ЭД переменного тока – на ЭД асинхронного типа с фазным ротором, с короткозамкнутым ротором и ЭД синхронного типа [26 – 28].

В табл. 1.1 приведены типы электроприводов и примеры аппаратов, в которых они используются, а также доля времени, приходящегося на динамические режимы работы.

Анализируя таблицу, можно сделать вывод, что создание системы оптимального энергосберегающего управления динамическими режимами работы электроприводов является актуальной задачей для многих отраслей промышленности. Наибольший эффект решение данной задачи может принести в подъемно-транспортном оборудовании и в смешивающих аппаратах реверсивного действия, так как динамические режимы здесь занимают значительную часть времени и электромеханическая система содержит комплекс электроприводов. Работа подъемно-транспортного механизма связана с особенностями самого механизма и его электропривода. Применение той или иной системы управления электроприводом определяется требованиями технологии и режимом работы. Такими особенностями типовых подъемно-транспортных механизмов являются: необходимость обеспечения интенсивных, но плавных переходных процессов; взаимосвязь в подъемно-транспортном оборудовании многомассовой механической части, характеризуемой упругими связями, с электрической частью; необходимость учета люфта в механической части при пуске реверсивных электроприводов и др. [29].

## 1.1 Использование электродвигателей в промышленности



Тип электродвигателя	Область применения	Время работы в динамических режимах, %
1) Постоянного тока	транспорт	5 – 40
а) независимого возбуждения	управление исполнительными устройствами	10 – 20
б) другие	мешалки	
2) Переменного тока	подъемно-транспортное оборудование	10 – 30
а) асинхронные с фазным ротором	транспортные транспортеры, сепараторы	20 – 50
б) асинхронные с короткозамкнутым ротором		2 – 10
в) синхронные	вентиляторы	5 – 20
		1 – 5

Наиболее массовыми динамическими объектами являются транспортные средства. Важной особенностью управления такими объектами является наличие жестких ограничений, связанных с требованиями безопасности. К ним относятся ограничения на скорость и ускорение при движении, запас топлива и др. [30, 31]. При этом допустимые значения изменения фазовых координат зависят от состояний функционирования, которые отражают изменения нагрузки, дорожного покрытия, т.е. факторы, влияющие на параметры модели динамики. Поэтому управляющее устройство движущимися объектами должно осуществлять:

- 1) синтез, в том числе совмещенный, оптимального ресурсосберегающего управления;
- 2) регистрацию и прогнозирование значений фазовых координат, управляющих воздействий и расхода топлива в пути следования;
- 3) определение вида и оценка параметров модели динамики.

Полигонные испытания микропроцессорного управляющего устройства, решающего задачи оптимального управления на автомобилях ВАЗ, и результаты имитационного моделирования показали, что его применение позволяет снизить расход топлива на 7 – 12 % в режимах движения с переменной скоростью. Устройство в реальном времени пересчитывает оптимальное управление при каждом переключении положения коробки передач и используется в режиме советчика водителю. Это же устройство испытывалось на модели электромобиля, экономия энергии в динамических режимах составила около 20 %. Алгоритмическое и программное обеспечение для микропроцессорных устройств управления движущимися объектами разрабатывались с помощью SCADA – системы Трейс Моуд [32].

Имитационное моделирование проводилось также для гибридных транспортных средств, использующих жидкое топливо и электроэнергию, оно показало, что в данном случае эффект ресурсосбережения при оптимальном управлении может достигать 40 %.

## 1.2 ЗАДАЧИ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Известно большое число постановок задач оптимального управления (ЗОУ) с минимизируемыми функционалами, учитывающими затраты энергии, расход топлива и их комбинации с другими составляющими [16 – 24, 33 – 41]. В общем виде простейшая задача энергосберегающего управления может быть сформулирована следующим образом.

Задаются: модель динамики объекта, например, в виде системы линейных дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = Az(t) + Bu(t), \quad t \in [t_0, t_k], \quad (1.1)$$

условия и ограничения на изменения вектора фазовых координат  $z$  и управление (скалярное)  $u$

$$z(t = t_0) = z^0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)^T, \quad z(t = t_k) = z^k = (z_1^k, z_2^k, \dots, z_n^k)^T, \quad (1.2)$$

$$\forall t \in [t_0, t_k]: \quad u(t) \in [u_n, u_b], \quad (1.3)$$

минимизируемый функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f_0(u(t)) dt . \quad (1.4)$$

Здесь  $A, B$  – матрицы параметров модели динамики;  $t_0, t_k$  – начало и конец временного интервала управления;  $z^0, z^k$  – начальное и конечное значения вектора  $z$ ;  $u_n, u_b$  – нижняя и верхняя границы изменения управления (в данной задаче скалярное);  $n$  – размерность вектора  $z$ .

Требуется для задаваемого массива исходных данных (реквизитов задачи)

$$R = (A, B, u_n, u_b, z^0, z^k, t_0, t_k) \quad (1.5)$$

определить такое ОУ  $u^*(t)$ , которое при выполнении условий и ограничений (1.1) – (1.3) доставляет минимум функционалу (1.4).

Функция  $f_0(u(t))$  определяет вид функционала и при минимизации затрат энергии записывается в виде [17, 18, 21]

$$I_{\text{э}} = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt , \quad (1.6)$$

а в случае расхода топлива [18, 19]

$$I_{\text{т}} = \int_{t_0}^{t_k} |u(t)| dt . \quad (1.7)$$

Задача (1.1) – (1.4) представляет собой ЗОУ с ограничением на управление, фиксированным временным интервалом и закрепленными концами траектории изменения вектора фазовых координат. В качестве первой компоненты вектора  $z$  применительно к тепловым объектам обычно рассматривается усредненная температура нагреваемого (охлаждаемого) тела, в качестве второй – скорость изменения температуры и т.д. Для объектов управления с электронагревом, а также машин с электроприводом управление  $u$  обычно представляет собой электрическое напряжение или силу тока, для других объектов это может быть расход сжигаемого топлива или теплоносителя (хладоагента).

Наряду с задачей (1.1) – (1.4) известно большое число других постановок задач оптимального управления. Применительно к энергосберегающему управлению динамическими объектами наибольший интерес представляют следующие задачи.

1 Задачи, в которых временной интервал управления  $[t_0, t_k]$  не фиксирован, а время  $t_k$  задается интервальным значением или ограничено, т.е.

$$t_k \in [t_{к.н}, t_{к.в}] \quad \text{или} \quad t_k \leq t_{к.доп} , \quad (1.8)$$

где  $t_{к.н}, t_{к.в}$  – нижняя и верхняя границы значений  $t_k$  соответственно,  $t_{к.доп}$  – допустимое значение  $t_k$ .

2 Задачи с интегральным ограничением на управление, в этом случае задается допустимый лимит использования электроэнергии ( $I_{\text{э.доп}}$ ) или запас топлива ( $I_{\text{т.доп}}$ ), т.е.

$$\int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt \leq I_{\text{э.доп}} , \quad (1.9)$$

$$\int_{t_0}^{t_k} |u(t)| dt \leq I_{\text{т.доп}} . \quad (1.10)$$

3 Задачи с комбинированными функционалами, например, минимизируются затраты энергии и время

$$I_{\text{э+б}} = \int_{t_0}^{t_k} (c_{\text{б}} + u^2(t)) dt \rightarrow \min_{u, t_k} ; \quad (1.11)$$

расход топлива и время

$$I_{\text{т+б}} = \int_{t_0}^{t_k} (c_{\text{б}} + |u(t)|) dt \rightarrow \min_{u, t_k} ; \quad (1.12)$$

расход топлива (управление  $u_t$ ) и затраты энергии (управление  $u_{\text{э}}$ ) для гибридных объектов

$$I_{T+\varepsilon} = \int_{t_0}^{t_k} (c_T |u_T(t)| + c_3 u_3^2(t)) dt \rightarrow \min_{u_T, u_3} \quad (1.13)$$

и т.д. Здесь  $c_6, c_3, c_T$  – соответствующие весовые коэффициенты.

4 Задачи с дополнительными ограничениями на траектории  $z(\cdot)$  изменения фазовых координат, например, скорость изменения температуры не должна превышать допустимого значения. Это ограничение может быть записано в виде

$$z(\cdot) = (z(t), t \in [t_0, t_k]) \in Z(\cdot), \quad (1.14)$$

где  $Z(\cdot)$  – допустимая область изменения траекторий фазовых координат.

5 Задачи с частично закрепленным правым концом  $z^k$  траектории изменения фазовых координат (см. (1.2)), например, для теплового аппарата первая компонента вектора  $z$  – температура может быть закреплена (или задана интервально), а вторая – не закреплена.

По способу реализации рассчитываемого оптимального управления выделяют два класса ЗОУ: задачи определения оптимальной программы изменения ОУ, т.е.

$$u^*(\cdot) = (u^*(t), t \in [t_0, t_k]), \quad (1.15)$$

и задачи определения синтезирующей функции для систем управления с обратной связью, т.е.

$$u^*(t) = s(z(t), t_k - t), \quad (1.16)$$

здесь ОУ в каждый момент времени рассчитывается в зависимости от текущего значения вектора фазовых координат и остаточного времени.

Достаточно подробно эти и другие задачи будут рассмотрены в других разделах.

### 1.3 СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Простейшие системы оптимального управления состоят из управляющего устройства (УУ) и объекта (О) управления [16, 21, 42 – 45]. На рис. 1.3, а показана структура системы оптимального управления (СОУ), которая реализует программную стратегию. Здесь на вход управляющего

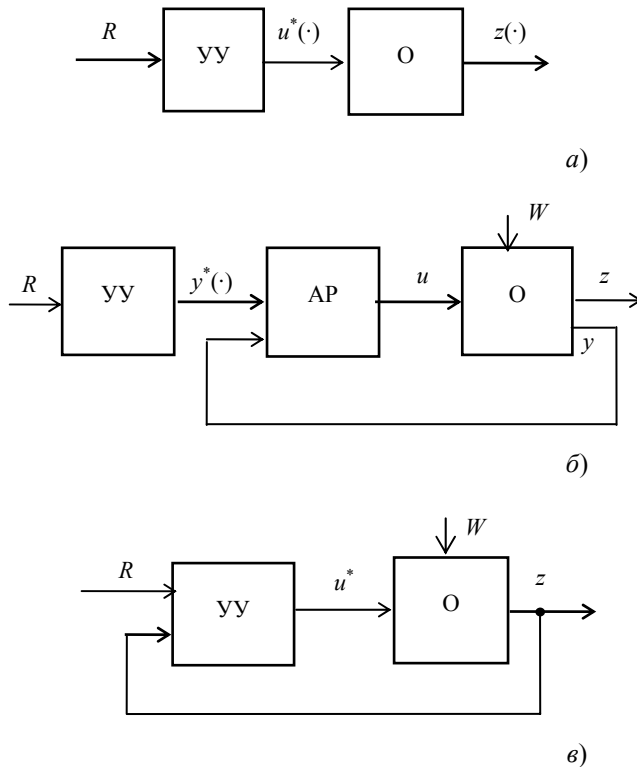


Рис. 1.3 Схемы простейших систем оптимального управления: управляющее устройство рассчитывает оптимальную программу  $u^*(\cdot)$  (а), оптимальную траекторию  $z^*(\cdot)$  (б), использует позиционную стратегию (в)

устройства подается массив исходных данных  $R$  (см. (1.5)), на основе которого УУ рассчитывает оптимальную программу (1.15). Разновидностью такой СОУ является включение в схему автоматического регулятора (АР) (рис. 1.3, б). Здесь управляющее устройство рассчитывает оптимальную программу измене-

ния, например, температуры  $y = z_1$ , отклонения от траектории  $y^*(\cdot) = (y^*(t), t \in [t_0, t_k])$  устраняются с помощью АР. Данная система используется для объектов, которые подвержены значительным возмущающим воздействиям  $W$ .

На рис. 1.3, в показана СОУ с обратной связью (оптимальный регулятор). В этом случае устройство реализует алгоритм в виде синтезирующей функции (1.16), т.е. УУ рассчитывает ОУ в каждый момент времени в зависимости от текущего значения фазовых координат  $z$  и остаточного времени  $t_k - t$ . Вид и параметры самой синтезирующей функции определяются значением массива исходных данных (1.5).

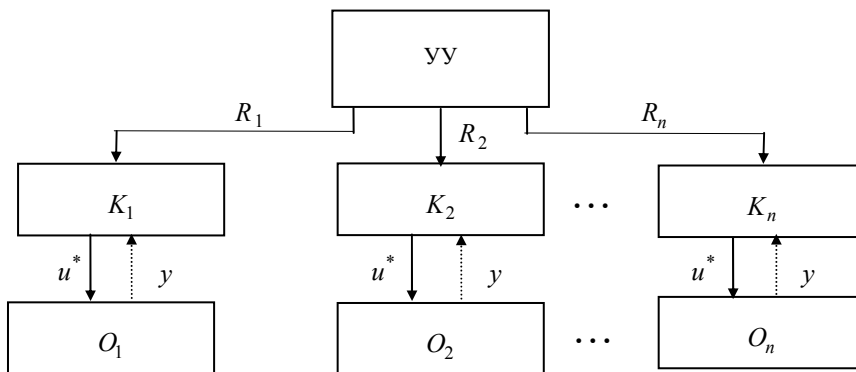
Важной особенностью приведенных на рис. 1.3 систем является то, что их анализ производится как систем с одним входом и одним выходом, т.е. это SISO-системы (Single – Input Single – Output) [46].

К другому классу СОУ относятся сложные территориально-распределенные системы управления, как правило, иерархической структуры (рис. 1.4). В этом случае УУ верхнего уровня вырабатывает исходные данные  $R_i$  или оптимальные программы (синтезирующие функции) для группы объектов ( $O_1 \dots O_n$ ). Управляющие воздействия для каждого объекта рассчитываются бортовыми контроллерами ( $K_1 \dots K_n$ ).

Задачи управления в этих системах обычно рассматриваются с позиций SISO-систем.

Многие энергоемкие технологические установки имеют несколько входов и несколько выходов, при этом каждый входной сигнал влияет на группу выходных сигналов. Примером такой установки является многозонная электрическая печь, в которой управление температурой в одной зоне влияет на температуры в соседних зонах (рис. 1.4). Такие системы относятся к классу систем со многими входами и многими выходами, т.е. MIMO-систем (Multi – Input Multi – Output).

Многие энергоемкие технологические установки имеют несколько входов и несколько выходов, при этом каждый входной сигнал влияет на группу выходных сигналов. Примером такой установки является многозонная электрическая печь, в которой управление температурой в одной зоне влияет на температуры в соседних зонах. Такие системы относятся к классу систем со многими входами и многими выходами, т.е. MIMO-систем (Multi – Input Multi – Output).



**Рис. 1.4** Схема территориально-распределенной системы оптимального управления

Все системы управления, решающие задачи энергосбережения, отличаются сложностью алгоритмического обеспечения, вместе с тем они должны использовать те же аппаратные и инструментальные средства, что и другие автоматизированные системы управления технологическими процессами (АСУ ТП).

За последние годы наметилась тенденция усложнения АСУ ТП и решаемых ими задач управления вследствие повышения требований к качеству ведения процессов, усложнения технологических объектов, возросших потребностей в решении интеллектуальных задач управления в реальном времени и задач планирования производства [47 – 51].

Представителями промышленных предприятий предъявляются жесткие требования к разработчикам систем управления, эти требования в первую очередь относятся к поддержке распределенных ресурсов, работе в сетевой среде и реальном времени, использовании многозадачных и многопользовательских режимов, интеграции с верхним уровнем управления, открытости и низкой цене.

В области проектирования АСУ ТП наметились следующие тенденции: многократное ускорение темпов работ, постоянно возрастающая степень унификации технических и программных средств, быстрый рост числа SCADA-пакетов, возрастающая роль стандартов при проектировании систем, быстрая смена поколений программно-технических комплексов как у зарубежных, так и отечественных фирм, быстрый рост внедряемых систем управления во всех отраслях народного хозяйства, в первую очередь, в нефтехимии, нефтепереработке, газовой промышленности, металлургии и энергетике [52].

Системы оптимального управления, алгоритмическое обеспечение которых предусматривает решение или использование решения задачи (1.1) – (1.4) с функционалами (1.6) – (1.7), будем называть системами энергосберегающего управления (СЭУ).

#### **1.4 МЕТОДИКА РАЗРАБОТКИ КОНЦЕПЦИИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ СИСТЕМ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ**

Выполнение первого этапа проектирования систем энергосберегающего управления, т.е. разработка концепции системы управления включает следующие виды работ.

1 Производится описание энергоемкого объекта, как объекта управления. При этом особое внимание уделяется следующим аспектам:

- описанию конструкции и возможности реализации оптимального управления;
- характеристике режимов работы;

- выявлению источников непроизводительных энергозатрат;
  - наличию моделей динамических режимов.
- 2 Выбирается предполагаемый вид минимизируемого функционала в соответствии с рекомендациями рис. 1.1.
  - 3 Выдвигается гипотеза о возможной стратегии реализации оптимального управления в соответствии с рекомендациями рис. 1.2.
  - 4 Формулируется первый вариант задачи энергосберегающего управления, включающий необходимые условия и ограничения (см. (1.1) – (1.16)).
  - 5 Рассматриваются возможные варианты схем системы энергосберегающего управления.
  - 6 Делается вывод о целесообразности продолжения работ по проектированию систем энергосберегающего управления и формированию перечня задач по проектированию систем.

## **2 ЗАДАЧИ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ СОСТОЯНИЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ**

---

В шестидесятых годах прошлого столетия появились известные фундаментальные работы Л.С. Понтрягина, Р. Беллмана, А.М. Летова, Р. Калмана, А.А. Красовского, после которых произошел определенный переход от частотных методов анализа и синтеза систем оптимального управления к решению аналогичных задач на основе математических моделей динамических режимов, описывающих поведение систем в пространстве значений фазовых координат [53 – 57]. Применявшиеся до этого методы логарифмических частотных характеристик, корневого годографа и другие уступили место как в теории, так и в практических расчетах новому направлению, названному аналитическим конструированием оптимальных регуляторов (АКОР). Отличительной особенностью АКОР является то, что модель движения объекта обычно задается системой линейных дифференциальных уравнений, а критерий качества выбирается в виде интегральной квадратичной функции вектора состояния и управляющих воздействий динамической системы.

В большинстве работ, посвященных АКОР, предполагается, что исследуемая система функционирует в соответствии с исходными данными, для которых решалась задача оптимального управления, т.е. при неизменных параметрах модели, граничных условиях и т.д. Однако при реальной эксплуатации могут происходить нарушения составных частей системы, изменяться задаваемые режимные параметры и другие атрибуты задачи управления. В связи с этим, повышение эффективности работы систем оптимального управления может быть достигнуто при решении задач анализа и синтеза с учетом возможных изменений состояний функционирования [24].

### **2.1 РАСШИРЕННОЕ МНОЖЕСТВО СОСТОЯНИЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ**

Эффективность функционирования любой системы определяется ее надежностными свойствами, условиями работы, воздействиями внешнего окружения и другими факторами, которые могут иметь детерминированную, вероятностную или нечеткую (расплывчатую) природу. Для комплексного учета всех этих факторов на основе интеграции множеств состояний работоспособности (МСР) с множеством состояний функционирования (МСФ) и нечетким множеством (НМ) вводится расширенное множество состояний функционирования (РМСФ).

Задачи определения вероятностей состояний работоспособности и функционирования, а также построения функций принадлежности НМ достаточно исследованы и освещены в научной литературе [58 – 62]. Однако вопросы их «стыковки» в один показатель – вероятность состояния РМСФ до настоящего времени не рассматривались.

Множество состояний работоспособности позволяет анализировать ситуации, связанные с отказами основного оборудования, технических и программных средств информационных систем, ошибками персонала и другими факторами, для которых накоплены достаточные статистические данные. Для расчета вероятностей состояний работоспособности (ВСР) как стационарных, так и нестационарных используются различные широко опробованные на практике методы [24, 58, 59]. Все они базируются на декомпозиции системы, построении моделей состояний работоспособности составных частей и всей системы, а затем решении систем уравнений или использовании рекуррентных формул.

Однако знание состояний работоспособности системы и вероятностей этих состояний во многих случаях недостаточно для определения рисков и прогнозирования показателей эффективности проектируемых систем в процессе реальной эксплуатации. Более полно возможные состояния функционирования при длительной эксплуатации системы отражает МСФ [24, 61]. В МСФ наряду с состояниями работоспособности учитываются смены режимов работы, связанные с новыми производственными заданиями, изменения постановок задач управления, интенсивности внешних воздействий и т.д. Структура МСФ аналогична МСР и для определения вероятностей состояний функционирования (ВСФ) используются практически те же методы.

Вместе с тем, ни МСР, ни МСФ не позволяют учитывать быстро меняющуюся обстановку внешнего окружения. Это может быть связано, например, с обострением конкурентной борьбы, изменением запросов потребителей, цен на энергоносители, сырье, а также другими факторами, для которых нет достаточного статистического материала, и они могут быть описаны лишь на качественном уровне. Для описания такого рода ситуаций при оперативном принятии решений используются нечеткие множества (НМ) [60, 62]. Математический аппарат анализа НМ существенно отличается от методов МСР и МСФ. Поэтому для комплексного учета всех факторов требуется введение обобщенного или расширенного множества состояний функционирования (РМСФ) системы.

**Определение 2.1.** Расширенным множеством состояний функционирования системы называется множество ситуаций при реальной эксплуатации, которое интегрированно учитывает как состояния работоспособности и состояния функционирования самой системы, так и возможные ситуации внешнего окружения.

Вводимое РМСФ должно обладать следующими свойствами: комплексно учитывать факторы надежности, внутренней среды и внешнего окружения системы; каждое состояние РМСФ должно характеризоваться одним показателем, имеющим вероятностную природу и удовлетворяющим условию нормировки; состав РМСФ и вероятности состояний со временем могут изменяться.

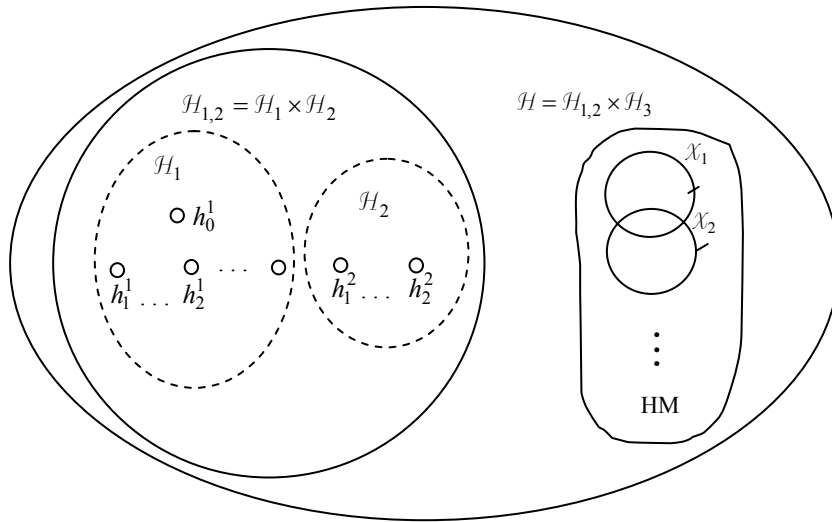
Сравнительная характеристика множеств состояний работоспособности, множества состояний функционирования и нечетких множеств приведена в табл. 2.1. Как видно из таблицы, наиболее существенными отличиями НМ от МСР и МСФ, которые необходимо учитывать при интеграции этих множеств, являются то, что в нечетких множествах нет строгой границы между отдельными состояниями, а также не выполняются условия нормировки при вероятностной трактовке возможных ситуаций.

## 2.1 СОСТАВЛЯЮЩИЕ РМСФ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Характеристики множеств	МСР	МСФ	НМ
Границы между состояниями	Четкие (состояния несовместимые, исключают друг друга)		Размытые (состояния совместимые)
Характеристика состояния	Вероятность		Функция принадлежности
Условия нормировки	Выполняются		Не выполняются
Моменты времени переходов между состояниями	Случайны	Могут быть неслучайными	Неопределенны
Число элементов множества во время эксплуатации	Постоянно	Может значительно измениться	Меняется
Исходные данные для расчета вероятностей	Показатели надежности частей и схема обслуживания	Дополнительно к данным для МСР могут задаваться вероятности отдельных состояний	Функции принадлежности, высказывания экспертов

Схематично структура РМСФ  $\mathcal{H}$  показана на рис. 2.1. Здесь использованы следующие обозначения:  $\mathcal{H}_1 = \{h_i^1, i = 0, 12, \dots\}$  – множество состояний работоспособности;  $\mathcal{H}_2 = \{h_i^2, i = 12, \dots\}$  – множество производственных ситуаций;  $\mathcal{H}_3 = \{h^3\}$  – дискретное множество, получаемое из нечетких множеств  $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \dots$  с применением процедуры, аналогичной лингвистической аппроксимации [62].

Рассмотренная структура множества  $\mathcal{H}$  позволяет для его введения использовать метод анализа иерархий [63]. На верхнем уровне иерархии располагаются состояния  $h^1 \in \mathcal{H}_1$ . На втором уровне каждому состоянию  $h_i^1$  соответствует подмножество  $H_i^{1,2} \subset \mathcal{H}_{1,2}$ , элементы которого имеют вид  $h_{i1}^{1,2} = (h_i^1, h_1^2)$ ,  $h_{i2}^{1,2} = (h_i^1, h_2^2)$  и т.д. На третьем уровне располагаются подмножества  $H_{ij} \subset \mathcal{H}$ , т.е.  $H_{ij} = \{h_{i,j,1} = (h_{i,j}^{1,2}, h_j^3), h_{i,j,2} = (h_{i,j}^{1,2}, h_i^3), \dots\}$ . В этом случае мощность множества  $\mathcal{H}$  равна произведению мощностей множеств  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  и  $\mathcal{H}_3$ , т.е.  $|\mathcal{H}| = \prod_{i=1}^3 |\mathcal{H}_i|$ .



**Рис. 2.1** Качественное представление составляющих расширенного множества состояний функционирования

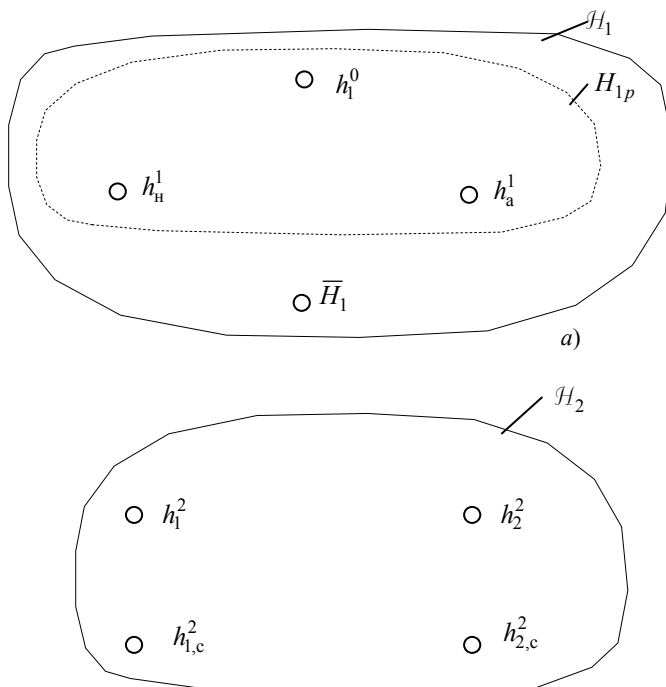
Серьезные трудности при введении множества  $H$  для сложных технических систем связаны с большой мощностью МСР  $H_1$  и соответственно МСФ  $H_{1,2}$ . Для преодоления этих трудностей в множестве  $H_1$  выделяются наиболее вероятные состояния, которые не ведут к критическим последствиям, они образуют подмножество  $H_1$ . Остальные состояния, в том числе и критические, объединяются в подмножество  $\bar{H}_1$ . Аналогичное выделение подмножеств, в случае необходимости, производится для МСФ  $H_{1,2}$ .

**Пример 2.1.** Для введения РМСФ рассмотрим систему управления прецизионной многосекционной электрической печью, различные модификации печи используются на предприятиях электронного профиля для производства элементной базы. Основными частями, определяющими работоспособность печи и на которые приходится наибольшее число отказов, являются нагревательные элементы (НЭ) и устройства автоматического контроля и управления температурными режимами в секциях. В простейшем случае и в предположении, что каждый элемент имеет только два состояния работоспособности – нормальная работа и отказ, МСР печи  $H_1$  имеет структуру, которая приведена на рис. 2.2, а. Здесь  $h_0^1$  – состояние полной работоспособности, т.е. нет отказавших НЭ и устройств автоматики,  $h_n^1$  – состояние с одним отказавшим НЭ,  $h_a^1$  – состояние с отказавшим устройством автоматики в одной секции,  $\bar{H}_1$  – подмножество состояний с двумя и более отказавшими элементами. Таким образом,  $H_{1p} = \{h_0^1, h_n^1, h_a^1\}$  и  $H_1 = H_{1p} \cup \bar{H}_1$ . Следует заметить, что при необходимости в подмножество  $H_{1p}$  могут быть включены состояния с двумя и более отказавшими элементами.

При введении МСФ дополнительно учитываются возможные отключения питающей сети и смены режимов работы при переходе на выпуск другой номенклатуры изделий. Для этого вводятся дополнительные гипотетические элементы – сеть с двумя состояниями и изделия в простейшем случае тоже с двумя состояниями. Множество  $V$  этих состояний приведено на рис. 2.2, б. Здесь  $h_i$  – состояния выпуска изделия  $i$ -го вида без отключения сети,  $h_{i,c}$  – состояние отключения сети при производстве  $i$ -го изделия.

МСФ  $H_{1,2}$  строится на основе декартова произведения множеств  $H_1$  и  $H_2$ , т.е.

$$H_{1,2} = H_1 \times H_2 = \{h_{0,1}^{1,2} = (h_0^1, h_{n1}^1), h_{0,2}^{1,2} = (h_0^1, h_{n2}^1), \dots, h_{\bar{H},2,c}^{1,2} = (\bar{H}_1, h_{n2,c}^1)\}.$$



б)

Рис. 2.2 Структуры множеств  $H_1$  (а) и  $H_2$  (б)

Фрагмент множества  $H_{1,2}$  приведен на рис. 2.3, его мощность определяется мощностями множеств  $H_1$  и  $H_2$ . Множество  $H_{1,2}$  содержит два состояния нормального функционирования:  $h_{0,1}^{1,2}$  (выпуск изделия первого вида при  $h_0^1$ ) и  $h_{0,2}^{1,2}$  (выпуск изделия второго вида при  $h_0^1$ ). В состояниях  $h_{n,i}^{1,2}$ ,  $i = 1, 2$  идет выпуск изделия  $i$ -го вида при одном отказавшем НЭ и т.д. Каждому состоянию  $h^{1,2} \in H_{1,2}$  соответствует вероятность  $p(h^{1,2})$ , причем выполняется условие нормировки, т.е.  $\sum_{h^{1,2} \in H_{1,2}} p(h^{1,2}) = 1$ .

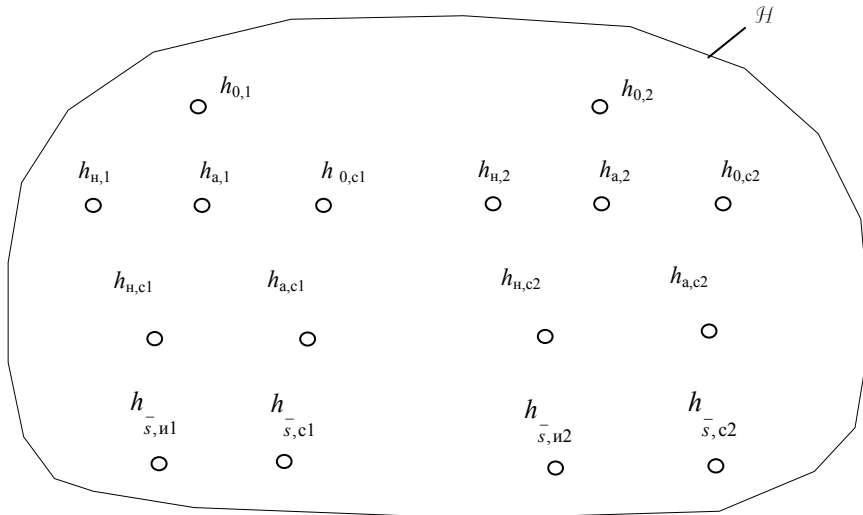


Рис. 2.3 Множество состояний функционирования

Для анализа состояний на рынке сбыта изделий используются НМ. Пусть ситуация на рынке оценивается с помощью нечетких чисел и спрос на продукцию задается нечеткими числами  $(\chi_m, \Delta\chi_n, \Delta\chi_v)$ , приведенными в табл. 2.2 и на рис. 2.4. Здесь  $\chi_m$  – максимальное значение (центр),  $\Delta\chi_n, \Delta\chi_v$  – величины нечеткости слева и справа соответственно,  $\mu$  – функция принадлежности, причем спрос, равный 1, соответствует 100 % продаж изделий. Для рассматриваемого момента времени с использованием данных экспертов определяется нечеткое число  $\eta = (\eta_m, \Delta\eta_n, \Delta\eta_v)$ , характеризующее спрос на изделия в настоящее время. Пусть по данным экспертов  $\eta = (0,7; 0,3; 0,2)$ , это число показано на рис. 2.4 пунктиром.

2.2 Нечеткие числа, характеризующие уровни спроса продукции на рынке

Описание	Нечеткое число
Высокий, $\chi_v$	(1; 0,4; 0)
Средний, $\chi_{cp}$	(0,5; 0,2; 0,2)
Низкий, $\chi_n$	(0; 0; 0,4)



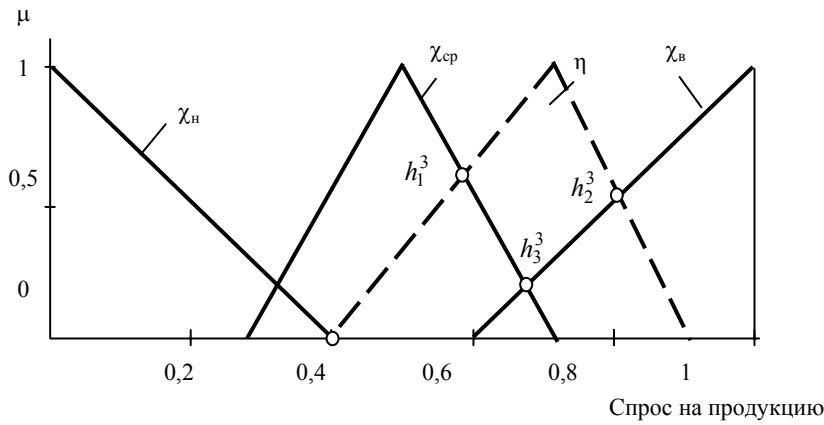


Рис. 2.4 Нечеткие числа  $\chi$  и  $\eta$ , характеризующие спрос на продукцию

Построение РМСФ в данном примере на основе множеств  $\mathcal{H}_{1,2}$  и  $\mathcal{H}_3$  выполняется следующим образом. С использованием операций нечеткой логики и нормировки определяется множество  $\mathcal{H}_3$  с дискретными состояниями и вероятности этих состояний. К дискретным состояниям переход осуществляется на основе процедуры лингвистической аппроксимации с показателями  $\max\{\mu_{\chi_n} \wedge \mu_{\eta}\} = 0$ ,  $\max\{\mu_{\chi_{сп}} \wedge \mu_{\eta}\} = 0,6$ ,  $\max\{\mu_{\chi_v} \wedge \mu_{\eta}\} = 0,5$ ,  $\max\{\mu_{\chi_v} \wedge \mu_{\chi_{сп}} \wedge \mu_{\eta}\} = 0,17$ .

Так как  $\mu_{\chi_n} \wedge \mu_{\eta} = 0$ , то множество  $\mathcal{H}_3$  содержит три состояния  $\mathcal{H}_3 = \{h_1^3, h_2^3, h_3^3\}$ , при этом  $h_1^3$  соответствует среднему спросу  $\chi_{сп}$ ,  $h_2^3$  —  $\chi_v$  и  $h_3^3$  — одновременно  $\chi_v$  и  $\chi_{сп}$ .

Эквиваленты вероятностей этих состояний соответственно равны:

$$\tilde{p}(h_1^3) = \frac{\max\{\mu_{\chi_{сп}} \wedge \mu_{\eta}\}}{\sum_{\chi} \max\{\mu_{\chi} \wedge \mu_{\eta}\}} = 0,472;$$

$$\tilde{p}(h_2^3) = \frac{\max\{\mu_{\chi_v} \wedge \mu_{\eta}\}}{\sum_{\chi} \max\{\mu_{\chi} \wedge \mu_{\eta}\}} = 0,394;$$

$$\tilde{p}(h_3^3) = \frac{\max\{\mu_{\chi_v} \wedge \mu_{\chi_{сп}} \wedge \mu_{\eta}\}}{\sum_{\chi} \max\{\mu_{\chi} \wedge \mu_{\eta}\}} = 0,134.$$

Окончательно РМСФ  $\mathcal{H}$  получается по аналогии с  $\mathcal{H}_{1,2}$ , т.е.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{1,2} \times \mathcal{H}_3 = \left\{ h_{0,1,сп} = (h_{0,1}^{1,2}, h_1^3), h_{0,1,н} = (h_{0,1}^{1,2}, h_2^3), \dots \right. \\ \left. \dots, h_{\bar{H}_{1,2,c,(сп,н)}} = (h_{\bar{H}_{1,2,c}}^{1,2}, h_3^3) \right\}.$$

Полученное множество  $\mathcal{H}$  обладает требуемыми свойствами, в частности, для каждого состояния могут быть определены вероятность и эффективность функционирования. Это позволяет оценить эффективность системы с учетом всего комплекса факторов, воздействующих на работу исследуемой системы. Усредненная эффективность  $\bar{E}$  функционирования технологической установки на РМСФ определяется по формуле

$$\bar{E} = \sum_{h \in \mathcal{H}} e(h)p(h),$$

где  $e(h)$ ,  $p(h)$  — эффективность работы в состоянии  $h$  и вероятность этого состояния соответственно.

## 2.2 СТРАТЕГИИ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Введение расширенного множества состояний функционирования увеличивает число возможных вариантов стратегий, реализующих оптимальное управление. В дальнейшем множеством  $\mathcal{H}$  будем обозначать как все РМСФ, так и отдельные подмножества, характерные для рассматриваемой ситуации.

В разд. 1.3 были рассмотрены две основные стратегии реализации ОУ – программная  $S_{пр}$  и позиционная  $S_{пз}$  (см. (1.15) и (1.16)). В случае позиционной стратегии при расчете ОУ в каждый момент времени  $t$  учитывается текущее значение вектора фазовых координат  $z(t)$  и «оставшееся» время  $t_k - t$ , здесь  $t_k$  – конец временного интервала управления.

В процессе реализации ОУ на временном интервале  $[t_0, t_k]$  возможны изменения переменной состояния функционирования  $h \in \mathcal{H}$ . В общем случае эти изменения могут быть связаны с изменением значений компонентов массива исходных данных  $R$ , например, параметров модели объекта, границ  $u_n, u_b$  для управления  $u$ , времени  $t_k$  и др., а также с изменением самой ЗОУ, например, изменением вида минимизируемого функционала, введением дополнительных ограничений и т.д. В зависимости от характера использования управляющим устройством информации о значении  $h(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  будем различать следующие виды стратегий.

**Определение 2.2.** Программная стратегия называется некорректируемой на множестве  $\mathcal{H}$ , если оптимальная программа  $u^*(\cdot) = (u^*(t), t \in [t_0, t_k])$ , рассчитанная к моменту времени  $t_0$  при состоянии функционирования  $h(t_0) = h_0$ , сохраняется при любых изменениях значения  $h$  на временном интервале  $[t_0, t_k]$ . Программная стратегия называется корректируемой на множестве  $\mathcal{H}$ , если оптимальная программа  $u^*(t)$  пересчитывается при каждом изменении  $h(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$ . Данные стратегии будем обозначать  $S_{пр.нк}$  и  $S_{пр.к}$ .

По аналогии с  $S_{пр.нк}$  и  $S_{пр.к}$  дается определение позиционной некорректируемой стратегии  $S_{пз.нк}$  и корректируемой  $S_{пз.к}$ .

Системы управления, использующие стратегии  $S_{пр.к}$  и  $S_{пз.к}$ , должны включать устройства идентификации значений  $h(t)$ . Эти системы относятся к классу адаптивных систем.

**Определение 2.3.** Программная стратегия называется частично или условно корректируемой на множестве  $\mathcal{H}$ , если оптимальная программа  $u^*(t)$ , рассчитанная к моменту времени  $t_0$  при состоянии  $h(t_0) = h_0$ , сохраняется без изменения, пока значения  $h(t)$  не выходят за пределы некоторого подмножества  $H_0 = \{h_0, h_1, \dots\}$ , и программа пересчитывается, если  $h(t)$  выходит за пределы  $H_0$ . Данную стратегию обозначим  $S_{пр.чк}$ .

Аналогично определяется позиционная частично корректируемая стратегия  $S_{пз.чк}$ .

Наряду с основными стратегиями  $S_{пр}$  и  $S_{пз}$  возможно использование комбинированной стратегии  $S_{км}$ , когда, например, на начальной части временного интервала применяется  $S_{пр}$ , а затем происходит «переключение» на  $S_{пз}$ . Комбинированные стратегии характерны для систем переменной структуры.

Используя определения 2.2 и 2.3, нетрудно ввести понятия комбинированных некорректируемой  $S_{км.нк}$ , корректируемой  $S_{км.к}$  и частично корректируемой  $S_{км.чк}$  стратегий.

Наряду с рассмотренными применяется много других стратегий, например, программные стратегии с автоматическим регулятором, устраняющим отклонения от оптимальной траектории  $y^*(\cdot)$  выходной переменной, позиционные стратегии, использующие прогнозирование изменения фазовых координат и др. [21, 44, 48, 64].

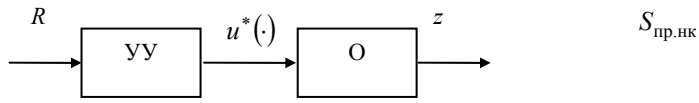
На рис. 2.5 для ряда систем приведены упрощенные структурные схемы и соответствующие стратегии, отражающие специфику оптимального управления на множестве  $\mathcal{H}$ . В системе, схема которой представлена на рис. 2.5, а, может использоваться только стратегия  $S_{пр.нк}$ . Здесь управляющее устройство (УУ) по данным массива реквизитов  $R(h_0)$  рассчитывает оптимальную программу  $u^*(\cdot)$  изменения управляющих воздействий на объект (О). Даная стратегия применяется, когда вероятность изменения функционирования на временном интервале  $[t_0, t_k]$  мала, влияние возмущающих воздействий на изменение фазовых координат незначительно.

Программные стратегии  $S_{пр.к}$  и  $S_{пр.чк}$  могут использоваться системой, схема которой показана на рис. 2.5, б. В этом случае при изменении переменной  $h$  и соответственно массива исходных данных  $R$ , управляющее устройство пересчитывает оптимальную программу. В системе предусмотрена обратная связь по переменной  $h$ , для этого используется идентификатор переменной состояния функционирования – Ид $h$ . В круглых скобках на рис. 2.5, б указана стратегия  $S_{пр.нк}$ , которая может использоваться при нарушении работы Ид $h$ .

Стратегии  $S_{пз.нк}$  и  $S_{км.нк}$  предусматривают наличие обратной связи по вектору фазовых координат  $z$ . Схема системы оптимального управления (рис. 2.5, в) содержит идентификатор вектора  $z$  – Ид $z$ . Данные стратегии используются, когда на объект оказывают влияние возмущающие воздействия, а состояния функционирования изменяются редко. Заметим, что системы, реализующие позиционные стратегии, часто называют оптимальными регуляторами.

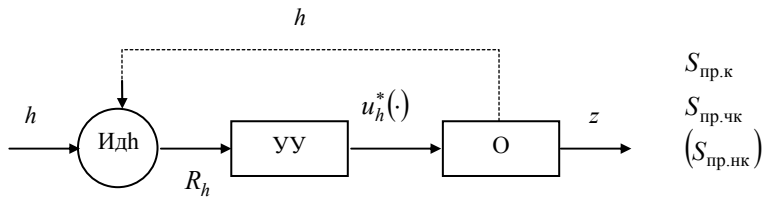
Схема системы оптимального управления со стратегиями  $S_{пз.к}$ ,  $S_{пз.чк}$ ,  $S_{км.к}$ ,  $S_{км.чк}$  представлена на рис. 2.5, г. Данные стратегии учитывают как влияние возмущающих воздействий, так и изменение переменной  $h$ .

Программная стратегия с автоматическим регулятором  $(S_{пр.нк} + AP) = S_{пру.нк}$ ,  $S_{пру.к}$ ,  $S_{пру.чк}$  используется в системах, схемы которых приведены на рис. 2.5, д и е. В данном случае управляющее устройство рассчитывает оптимальную траекторию изменения выходной переменной  $y$ , которая является заданием для автоматического регулятора.



$S_{пр.нк}$

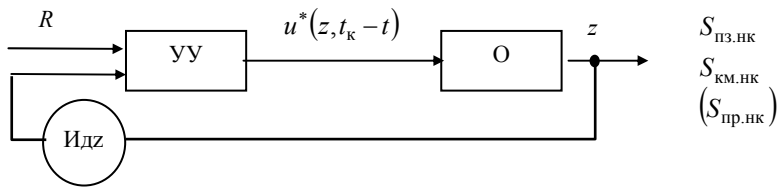
a)



$S_{пр.к}$

$S_{пр.чк}$   
 $(S_{пр.нк})$

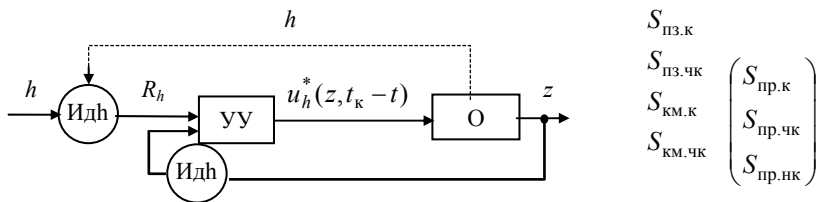
б)



$S_{пз.нк}$

$S_{км.нк}$   
 $(S_{пр.нк})$

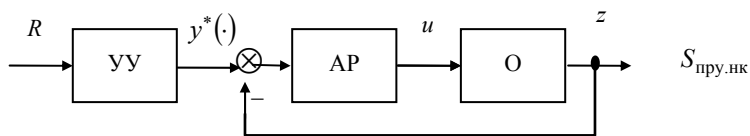
в)



$S_{пз.к}$

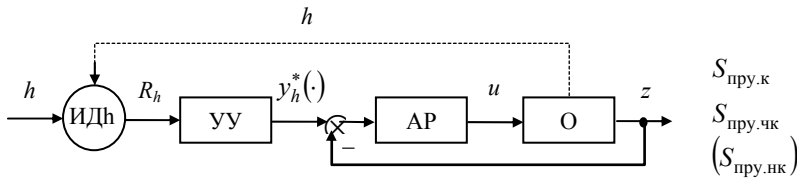
$S_{пз.чк}$   
 $S_{км.к}$   
 $S_{км.чк}$   $\left( \begin{matrix} S_{пр.к} \\ S_{пр.чк} \\ S_{пр.нк} \end{matrix} \right)$

г)



$S_{пру.нк}$

д)



e)

**Рис. 2.5 Структурные схемы систем оптимального управления и стратегии реализации ОУ на МСФ:**

УУ – управляющее устройство; О – объект управления; АР – автоматический регулятор; Идh, Идz – идентификаторы соответственно значений  $h$  и  $z$

Важной задачей при проектировании систем оптимального управления является выбор наиболее целесообразной стратегии реализации ОУ из рассмотренного множества стратегий.

При выборе стратегии учитываются следующие обстоятельства:

- разрабатывается новая система ОУ или усовершенствуется существующая система автоматического управления, например, автоматический программный регулятор;
- на сколько часто изменяются условия задачи ОУ;
- имеется ли возможность контролировать изменения фазовых координат и значений переменной  $h$ ;
- каковы допустимые стоимость и сроки проектирования системы управления;
- разработаны ли алгоритмы для расчета программ и синтезирующих функций.

В зависимости от характера изменения переменной  $h$  и возможности идентификации ее значений на временном интервале управления  $[t_0, t_k]$  можно выделить четыре основных класса  $\sigma_i, i = \overline{1, 4}$ , систем оптимального управления на множестве  $\mathcal{H}$  [40].

**Определение 2.4.** СОУ принадлежит к первому классу  $\sigma_1$ , если при реальной эксплуатации системы значение переменной  $h$  к моменту времени  $t_0$  известно и сохраняется постоянным на временном интервале  $[t_0, t_k]$ .

Изменения  $h$  в таких системах, обозначим их СОУ1, происходят между временными интервалами реализации ОУ. Примерами СОУ1 являются надежные системы управления простыми аппаратами периодического действия, для которых интервалы  $[t_0, t_k]$  незначительны.

**Определение 2.5.** СОУ принадлежит ко второму классу систем на множестве  $\mathcal{H}$ , если значение переменной  $h$  на временном интервале  $[t_0, t_k]$  постоянно, но неизвестно, известными могут быть подмножество состояний  $H(t_0) \overset{\Delta}{=} H_0 \in \mathcal{H}$  и вероятности отдельных состояний  $p(h), h \in H_0$ .

Системы данного класса (СОУ2) аналогичны стохастическим системам и системам с дифференциальными включениями [65]. Примерами СОУ2 являются системы, в которых отсутствуют Идh, а отдельные компоненты массива  $R$  могут иметь различные значения.

**Определение 2.6.** СОУ принадлежит к третьему классу систем на множестве  $\mathcal{H}$ , если значение переменной  $h$  на временном интервале  $[t_0, t_k]$  может изменяться, при этом значение  $h(t)$  в каждый момент времени  $t \in [t_0, t_k]$  известно.

Динамические режимы СОУ3 могут описываться дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью [27]. Примерами СОУ3 являются системы, содержащие устройства диагностики для идентификации значений  $h$ .

**Определение 2.7.** СОУ принадлежит к четвертому классу систем на множестве  $\mathcal{H}$ , если значение переменной  $h$  на временном интервале  $[t_0, t_k]$  может изменяться, при этом информация об изменении  $h$  либо отсутствует, либо не может быть учтена управляющим устройством.

В СОУ4 могут быть известны  $h(t_0)$  или  $H(t_0)$ , а также модель изменения значений  $h$ , позволяющая имитировать возможные траектории  $h(\cdot) = (h(t), t \in [t_0, t_k])$ .

Представленные на рис. 2.5 стратегии могут эффективно использоваться в СОУ1 и СОУ3. Эти стратегии практически не пригодны для систем второго и четвертого классов, так как здесь точное значение переменной  $h$  неизвестно. Определенный эффект энергосбережения в СОУ2 и СОУ4 может дать использование стратегий гарантированного управления.

**Определение 2.8.** Программная стратегия применительно к СОУ2 называется гарантированной на подмножестве  $\mathcal{H}$ , если она позволяет определить программу  $u(\cdot/H)$ , которая обеспечивает решение ЗОУ  $\forall h \in H$ . Данную стратегию обозначим  $S_{пр.г}(H)$ .

Аналогично дается определение стратегиям  $S_{пз.г}(H)$  и  $S_{км.г}(H)$ .

**Определение 2.9.** Программная стратегия применительно к СОУ2 называется вероятностной на множестве  $\mathcal{H}$ , если она рассчитывает программу  $u^*(\cdot/h_{\max})$ , которая оптимальна для значения переменной  $h$ , имеющей максимальную вероятность, т.е.  $p(h_{\max}) = \max\{h \in \mathcal{H}\}$ . Эта стратегия обозначается  $S_{пр}(h_{\max})$ . Таким же образом определяются стратегии  $S_{пз}(h_{\max})$  и  $S_{км}(h_{\max})$ .

**Определение 2.10.** Программная стратегия применительно к СОУ4 называется гарантированной на подмножестве  $H(\cdot)$  траекторий  $h(\cdot) = (h(t), t \in [t_0, t_k])$ , если она позволяет рассчитывать программу  $u(\cdot / H(\cdot))$ , которая обеспечивает решение ЗОУ  $\forall h(\cdot) \in H(\cdot)$ . Такую стратегию обозначим  $S_{пр.г}(H(\cdot))$ .

Аналогично дается определение стратегиям  $S_{пз.г}(H(\cdot))$  и  $S_{км.г}(H(\cdot))$ .

**Определение 2.11.** Программная стратегия применительно к СОУ4 называется вероятностной на множестве траекторий  $h(\cdot) \in \mathcal{H}(\cdot)$ , если она рассчитывает программу  $u^*(\cdot / \bar{h}(\cdot))$ , которая оптимальна для наиболее вероятной или усредненной траектории  $\bar{h}(\cdot)$ , определяемой методом имитационного моделирования. Обозначим эту стратегию  $S_{пр}(\bar{h}(\cdot))$ .

Аналогично определяются стратегии  $S_{пз}(\bar{h}(\cdot))$  и  $S_{км}(\bar{h}(\cdot))$ .

Выбор наиболее предпочтительной стратегии должен производиться с учетом класса СОУ на множестве  $\mathcal{H}$ , а также факторов эффективности в конкретной ситуации. К таким факторам обычно относятся экономия энергозатрат, точность, надежность, робастность и стоимость. В табл. 2.3 приведены группы альтернативных вариантов стратегий для различных ситуаций.

Следует заметить, что выделенные четыре класса систем на множестве  $\mathcal{H}$  не охватывают всего многообразия, которое может иметь место на практике. В частности, возможны промежуточные варианты, когда в одних ситуациях система проявляет свойства одного класса, а в других – другого.

Таблица 2.3

Класс СОУ	Стратегии			
	Экономия энергозатрат	Точность	Надежность, робастность	Стоимость
СОУ1	$S_{км.нк}$ $S_{пз.нк}$	$S_{пз.нк}$ $S_{км.нк}$ $S_{пру.нк}$	$S_{пз.нк}$ $S_{пру.нк}$	$S_{пр.нк}$ $S_{пру.нк}$
СОУ2	$S_{км.г}(H)$ $S_{км}(h_{max})$	$S_{пз.г}(H)$ $S_{км.г}(H)$	$S_{пз}(h_{max})$ $S_{пр}(h_{max})$ $S_{пр.г}(H)$	$S_{пр}(h_{max})$ $S_{пр.г}(H)$
СОУ3	$S_{пз.к}$ $S_{км.к}$	$S_{пз.к}$ $S_{км.к}$ $S_{пру.к}$	$S_{пр.чк}$ $S_{пз.чк}$	$S_{пр.к}$ $S_{пр.чк}$
СОУ4	$S_{км.г}(H(\cdot))$ $S_{км}(\bar{h}(\cdot))$	$S_{пз.г}(H(\cdot))$ $S_{км.г}(H(\cdot))$	$S_{пз}(\bar{h}(\cdot))$ $S_{пр}(\bar{h}(\cdot))$ $S_{пр.г}(H(\cdot))$	$S_{пр}(\bar{h}(\cdot))$ $S_{пр.г}(H(\cdot))$

### 2.3 МОДЕЛИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Решение задач анализа и синтеза энергосберегающего управления в автоматизированном режиме требует многократного использования формализованного описания исследуемых ЗОУ с учетом всех их особенностей. Для краткого и точного представления математической постановки конкретной задачи оптимального управления вводится понятие модели ЗОУ.

**Определение 2.12.** Моделью ЗОУ называется кортеж, который содержит условные обозначения ключевых компонентов, входящих в математическую постановку задачи оптимального управления, и позволяет однозначно идентифицировать задачу всем лицам, участвующим в проектировании систем энергосберегающего управления и программных средств для автоматизированного проектирования. К ключевым компонентам относятся модель динамики объекта, минимизируемый функционал, стратегия реализации ОУ, а также накладываемые ограничения и условия.

В общем виде постановка ЗОУ (1.1) – (1.4) включает модель объекта  $M$  (1.1), вид минимизируемого функционала  $F$  (1.4), стратегию реализации ОУ  $S$  (1.15), (1.16) и ряд ограничений и условий  $O$  (1.2), (1.3). Поэтому для данного класса ЗОУ может быть использована модель в виде кортежа  $K$  из четырех символов [66]

$$K = \langle M, F, S, O \rangle, \quad (2.1)$$

при этом

$$M \in \mathcal{M}, \quad F \in \mathcal{F}, \quad S \in \mathcal{S}, \quad O \in \mathcal{O},$$

здесь  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{S}$ ,  $\mathcal{O}$  – множества соответственно моделей объекта управления, видов функционала, стратегий реализации ОУ и особенностей задачи.

В кортеже (2.1) первые места занимают модель объекта управления  $M$  и функционал  $F$ , которые определяют вид гамильтониана, а следовательно, и возможные виды функций ОУ [53]. В случае функционала (1.6) вид функции ОУ и ее параметры однозначно определяет массив исходных данных (1.5).

В качестве примера приведем математическую постановку ЗОУ, определяемую кортежем  $\langle \text{ДАЗ}, \mathcal{E}, \text{Пр}, \text{О} \rangle$ , т.е.

$$M = \text{ДАЗ: } \begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{z}_2(t); \\ \dot{z}_2 = a_1 z_1(t) + a_2 z_2(t) + bu(t - \tau); \end{cases} \quad (2.2)$$

$$F = \mathcal{E}: I_3 = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt \rightarrow \min_u; \quad (2.3)$$

$$S = \text{Пр: } u^*(\cdot) = (u^*(t), t \in [t_0, t_k]); \quad (2.4)$$

$$O = O_1: \forall t \in [t_0, t_{kh}]: u(t) \in [u_n, u_b], \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt \leq I_{\text{доп}}, \quad (2.5)$$

$$z(t_0) = z^0 = (z_1^0, z_2^0)^T, \quad z(t_k) = z^k = (z_1^k, z_2^k)^T, \quad (2.6)$$

здесь (2.2) – модель динамики объекта в виде двойного аperiodического звена с запаздыванием по каналу управления, сокращенно ДАЗ ( $a_1, a_2, b$  – параметры модели,  $\tau$  – время запаздывания); (2.3) – минимизируемый функционал в виде затрат энергии  $I_3$ ; (2.4) – ОУ ищется в виде оптимальной программы  $u^*(\cdot)$  и (2.5), (2.6) – особенностью данной задачи является ограничение на управление в каждый момент времени и интегральное на лимит энергии, а также закрепление концов траектории изменения фазовых координат и фиксирование временного интервала управления.

Массив исходных данных, соответствующий модели ЗОУ <ДАЗ, Э, Пр, О>, имеет следующий вид:

$$R = (a_1, a_2, b, \tau, u_n, u_b, z_1^0, z_2^0, z_1^k, z_2^k, t_0, t_k, I_{\text{доп}}). \quad (2.7)$$

По существу модель (2.1) является идентификатором, сокращенным обозначением математической постановки ЗОУ. В этом контексте термин модель часто в дальнейшем будет опускаться, т.е. будут использоваться выражения, например, ЗОУ <ДАЗ, Э, Пр, О>.

**Определение 2.13.** Модель ЗОУ в виде кортежа (2.1) называется простой (элементарной), если для его компонентов выполняются следующие условия:

- динамика объекта представлена одним дифференцируемым уравнением (в векторно-матричной форме);
- вид минимизируемого функционала сохраняется на всем временном интервале управления;
- используется одна стратегия реализации ОУ либо  $S_{\text{пр}}$ , либо  $S_{\text{пз}}$ ;

г) управление ограничено, в каждый момент времени концы траектории изменения фазовых координат закреплены и временной интервал фиксирован.

**Определение 2.14.** Модель ЗОУ, которая отличается от простой тем, что четвертый компонент кортежа  $K$  включает другие ограничения или условия, называется моделью ЗОУ с дополнительными ограничениями.

Дополнительные ограничения могут быть ограничениями на лимит энергии (запас топлива), скорости изменения управления, фазовых координат и т.п.

**Определение 2.15.** Модель ЗОУ, в которой на временном интервале управления изменяются компоненты  $M, F, S$  кортежа  $K$ , называется сложной.

Например, в задаче энергосберегающего программного управления разогревом теплового аппарата при малых температурах используется модель двойного интегрирования (ДИ), а затем динамика описывается моделью ДА. В этом случае сложная модель ЗОУ записывается в виде <ДИ + ДА, Э, Пр, О>.

В процессе реальной эксплуатации систем управления происходят изменения компонентов массива  $R$ , поэтому для оперативного проектирования систем энергосберегающего управления необходимо решать задачи полного анализа ОУ на множестве состояний функционирования (МСФ) [67].

**Определение 2.16.** Под полным анализом простой ЗОУ  $\langle M, F, S, O \rangle$  понимается определение условий существования решений задачи, возможных видов функций ОУ, получение аналитических соотношений для определения видов функций ОУ и расчета их параметров, а также значений функционала и траекторий изменения фазовых координат для всех возможных значений массива исходных  $R$ .

Таким образом, задача полного анализа или анализа на МСФ формулируется следующим образом. Задаются: модель объекта, вид функционала, стратегия и ограничения для всех возможных значений массива  $R$ . Требуется определить область существования решений ЗОУ, все возможные виды функций ОУ, соотношения для нахождения вида функции ОУ и расчета ее параметров в некотором пространстве значений массива  $R$ . В данной задаче под МСФ понимается множество всех значений массива  $R$ . Результатом выполнения полного анализа простой ЗОУ является объем знаний, достаточный для оперативного решения ЗОУ при любых исходных данных. Этот объем знаний представляет собой по существу модель всех возможных решений для конкретной  $\langle M, F, S, O \rangle$ .

**Определение 2.17.** Результаты полного анализа простой ЗОУ  $K = \langle M, F, S, O \rangle$  будем называть моделью расчетного пространства и обозначать  $KR = \langle \langle M, F, S, O \rangle \rangle$ .

В ряде случаев пользователю не требуется вся модель  $KR$ , а нужна только ее часть, например, для использования в контроллере для ограниченной области значений массива  $R$  применительно к конкретному объекту управления. В этом случае может использоваться часть (фрагмент) модели  $KR$ .

**Определение 2.18.** Фрагментом модели  $KR$ , соответствующим некоторому множеству  $R = \{R_1, R_2, \dots\}$ , называется ее часть  $Kr$ , необходимая для расчета ОУ для задаваемого множества исходных данных.

Следует заметить, что массивы  $R$  могут задаваться интервальными значениями компонентов, в этом случае  $\mathcal{R}$  имеет континуальную природу.

Таким образом, задачу полного анализа ОУ на МСФ можно рассматривать как задачу создания фрагмента вычислительного пространства  $\mathcal{W}$ . ЗОУ, для которых выполнен полный анализ ОУ на МСФ, будем называть базовыми. Для базовых задач становится возможным решение задач оперативного синтеза ОУ, т.е. для исследуемого кортежа  $K$  известно расчетное пространство  $\mathcal{W}$ , задается массив реквизитов  $R$  и стратегия  $S$ , требуется за допустимое время определить вид и параметры функции ОУ.

Задача синтеза алгоритмического обеспечения энергосберегающих управляющих устройств заключается в выделении части вычислительного пространства, которая необходима для того, чтобы контроллер по массиву исходных данных (1.5) сам определял вид функции ОУ и ее параметры.

По аналогии с рассмотренными в разд. 2.2 четырьмя классами управления на МСФ (СОУ1, ..., СОУ4) вводятся четыре класса ЗОУ. Понятию простой ЗОУ (определение 2.13) соответствует задача первого класса (ЗОУ1). Здесь значение переменной  $h$  известно, ему соответствует массив  $R_h$ , и оно не изменяется на временном интервале  $[t_0, t_k]$ . Принадлежность модели ЗОУ к другим классам в основном содержится в информации о модели динамики и стратегии реализации ОУ. Например, модель  $\langle \text{ДИ} + \text{ДА} + \text{ДА}, \mathcal{E}, S_{\text{пр.к}}, O \rangle$  предполагает, что ЗОУ относится к третьему классу, модель  $\langle \text{ДИ}, \mathcal{E}, S_{\text{пз.г}}(H), O \rangle$  – ко второму, а модель  $\langle \text{ДА}, \mathcal{E}, S_{\text{км}(h(\cdot))}, O \rangle$  – к четвертому.

## 2.4 ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ

Разработанные модели  $KR$ , содержащие результаты полного анализа ЗОУ, образуют вычислительное пространство  $\mathcal{W}$ , которое позволяет решать широкий круг прямых и обратных задач оптимального управления на множестве  $\mathcal{H}$ .

**Определение 2.19.** Задачи, в которых по задаваемым значениям исходных данных  $R$  и информации о МСФ с использованием моделей  $KR$  рассчитываются  $u^*(\cdot)$ ,  $z^*(\cdot)$ ,  $J^*$  и другие результаты решения исследуемой ЗОУ, будем называть прямыми. Возможные результаты решения ЗОУ обозначим  $\mathcal{Y}$ , а множество операторов алгоритмов решения прямых задач –  $\mathcal{I}$ .

Таким образом, решения прямых задач можно представить отображением

$$\mathcal{I}: KR \times R \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad (2.8)$$

здесь  $KR$ ,  $R$  – множества соответственно моделей  $KR$  и значений массива  $R$ .

**Определение 2.20.** Задачи, в которых, используя результаты решения прямых задач  $\mathcal{Y}$ , модели  $KR$ , информацию о множестве  $\mathcal{H}$ , определяются необходимые изменения в модели  $K$  и массиве данных  $R$ , будем называть обратными.

Решения обратных задач условно можно представить в виде

$$\Omega: KR \times \mathcal{Y} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K} \times R, \quad (2.9)$$

где  $\Omega$  – оператор (алгоритмы) решения обратных задач;  $\mathcal{K}$  – множество моделей ЗОУ  $K$ .

Под необходимыми изменениями модели ЗОУ  $K$  и массива  $R$  в определении 2.20 понимается, какой из компонентов надо изменить в постановке ЗОУ или в исходных данных, чтобы разрабатываемая СОУ удовлетворяла необходимым требованиям, например, по точности, устойчивости, надежности и т.п. В общем случае для выполнения этих требований может потребоваться внесение изменений в множество  $\mathcal{H}$ . В общем случае решение обратной задачи может быть связано с многократным решением прямой задачи (2.8).

При разработке программных средств, обеспечивающих автоматизированное проектирование СЭУ, в частности модулей базы знаний экспертной системы, предусматривается, чтобы они обеспечивали решение как прямых, так и обратных задач при синтезе алгоритмического обеспечения систем управления. Наиболее часто решаются следующие обратные задачи.

- 1 Определение исходных данных  $R$ , при которых решение ЗОУ существует.
- 2 Обеспечение требуемого запаса практической устойчивости замкнутой системы энергосберегающего управления с позиционной стратегией.
- 3 Определение значения минимизируемого функционала  $I$  не ниже требуемого за счет увеличения времени  $t_k$  или изменения других компонентов массива  $R$ , например, для выполнения ограничения на лимит энергии или запас топлива (см. (1.9), (1.10)).

Для автоматизированного решения прямых и обратных задач энергосберегающего управления используется вычислительное пространство  $\mathcal{W}$ , которое позволяет в несколько раз сокращать сроки проектирования алгоритмического обеспечения управляющих устройств. Вычислительным пространством для решения прямых и обратных задач оптимального управления на МСФ называется пространство  $\mathcal{W}$ , которое определяется множествами  $\mathcal{K}$ ,  $KR$ ,  $R$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{Y}$  и двумя операторами  $\mathcal{I}$ ,  $\Omega$  в виде алгоритмов решения прямых и обратных задач, т.е.

$$\mathcal{W} = (\mathcal{K}, KR, R, \mathcal{H}, \mathcal{Y}; \mathcal{I}, \Omega).$$

Для разработки вычислительного пространства широко используются различные методы, прежде всего это принцип максимума Понтрягина, методы динамического программирования Беллмана и аналитического конструирования оптимальных регуляторов [53 – 57]. В качестве примера фрагментов вычислительного пространства (2.9) для автоматизированного решения задач оптимального регулирования при квадратичном функционале могут рассматриваться функции  $lqr$ , системы Matlab [68]. Серьезным недостатком используемого здесь математического аппарата является невозможность учета разного рода ограничений в постановке ЗОУ и, прежде всего, ограничений на управление.

Наряду с известными классическими методами в настоящее время применяется большое число методов, учитывающих специфические особенности объектов управления [69 – 72] и др. К сожалению, большинство из этих методов не позволяют решать ЗОУ в реальном времени при изменяющихся исходных данных. Одной из особенностей динамических процессов является то, что они практически никогда не протекают в идентичных условиях. При реальной эксплуатации могут изменяться начальные и конечные значения вектора  $z$ , параметры модели и даже ее вид и т.д. Поэтому рассчитанные оптимальные программы изменения управления без их корректировки не дают ожидаемого эффекта энергосбережения. Кроме того, большинство методов расчета ОУ не могут быть реализованы простыми микропроцессорными устройствами. В связи с этим большое значение приобретает создание математического аппарата, позволяющего синтезировать оптимальное управляющее воздействие в реальном времени простыми микропроцессорными средствами. Это дает возможность создавать дешевые бортовые системы энергосберегающего управления.

Большими возможностями обладает метод решения прямых и обратных задач оптимального управления, представляющий комбинацию принципа максимума, динамического программирования и метода синтезирующих переменных [73, 74]. Этот метод обеспечивает синтез оптимального управления многостадийными процессами в объектах, модели динамики которых имеют вид дифференциальных уравнений с разрывной правой частью.

## 2.5 МЕТОДИКА ЭСКИЗНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ СИСТЕМ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ (СЭУ)

На данном этапе вводится множество состояний функционирования СЭУ, конкретизируются модель ЗОУ и структурная схема системы. Эти работы выполняются в такой последовательности.

1 Вводится расширенное множество состояний функционирования проектируемой СЭУ. Для этого:

1.1 Производится декомпозиция исследуемой системы на части, и вводятся состояния работоспособности частей.

1.2 Строится МСР системы с учетом резервирования и схемы обслуживания, т.е. возможностей ремонтной службы, приоритетов при устранении отказов и т.д. В множестве  $H_1$  выделяются два подмножества  $H_{1p}$  и  $\bar{H}_1$ .

1.3 Строится множество  $H_2$ , отражающее возможные производственные и эксплуатационные ситуации  $\cup$ , которые могут иметь место при функционировании системы.

1.4 Вводится МСФ  $H_{1,2}$  как декартово произведение  $(H_{1p} \cup \bar{H}_1) \times H_2$ .

1.5 На основе нечетких множеств, характеризующих внешнее окружение системы, вводится дискретное множество  $H_3$ .

1.6 Строится РМСФ  $H = H_{1,2} \times H_3$ .

2 Определяется класс СОУ и конкретизируется стратегия реализации оптимального управления с учетом введенного множества состояний функционирования.

3 Записывается модель ЗОУ и математическая постановка задачи управления. В качестве модели ЗОУ целесообразно использовать одну из моделей, содержащихся в базе знаний экспертной системы «Энергосберегающее управление динамическими объектами».

4 Корректируется схема системы энергосберегающего управления.

## 3 АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Анализ оптимального управления охватывает широкий круг задач, связанных с исследованиями вопросов существования решения, устойчивости, определения возможных видов функций оптимального управления и др. В настоящем разделе для решения задач анализа будет использован в основном математический аппарат принципа максимума и метода синтезирующих переменных [39, 43, 44, 75].

### 3.1 МЕТОД СИНТЕЗИРУЮЩИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Метод синтезирующих переменных предполагает введение некоторого синтезирующего вектора, размерность которого значительно меньше размерности массива исходных данных для численного решения ЗОУ, который однозначно определяет вид и параметры функции оптимального управления.

Пусть для линейного объекта, динамика которого описывается моделью

$$\dot{z} = Az(t) + Bu(t), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T, \quad B = (0; \dots; 0; b)^T, \quad (3.1)$$

решается ЗОУ, заключающаяся в переводе объекта на заданном интервале времени  $[t_0, t_k]$  из начального состояния  $z^0$  в конечное  $z^k$ , т.е.

$$z(t_0) = z^0 \rightarrow z(t_k) = z^k, \quad (3.2)$$

при ограничении на управление

$$t \in [t_0; t_k], \quad u(t) = [u_n; u_b], \quad (3.3)$$

минимуме функционала



$$I(z(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_k} f_0(z, u, t) dt \rightarrow \min_u \quad (3.4)$$

и исходных данных, образующих массив реквизитов

$$R = (A, B, u_n, u_b, z^0, z^k, t_0, t_k). \quad (3.5)$$

Большое значение для оперативного решения ЗОУ имеет установление соответствия между функцией ОУ  $u_j^*(t/d)$  и массивом данных  $R$ , т.е. определения вида  $j$  и массива параметров  $d$  функции ОУ по значениям компонентов массива  $R$ . Для получения такого соответствия вводится понятие вектора синтезирующих переменных  $l$  и массива синтезирующих параметров  $\lambda$ , которые образуют синтезирующий вектор  $L$  и зависят от компонентов массива реквизитов  $R$ . Значение вектора  $L$  изменяется на временном интервале управления  $[t_0, t_k]$  с изменением значений  $z(t)$  и остаточного времени  $t_k - t$ . Вместе с тем значения  $l$  и  $\lambda$  могут скачкообразно изменяться в моменты времени смены состояний функционирования [59, 76].

**Определение 3.1.** Вектор переменных  $l$  и массив параметров  $\lambda$  называются синтезирующими, если они однозначно определяют вид и параметры ОУ задачи (3.1) – (3.4) для заданного массива реквизитов (3.5). Пространство значений  $l$  называется синтезирующим пространством, а пространство значений  $L = (l, \lambda)$  – расширенным синтезирующим пространством.

Пусть для конкретного функционала (3.4) имеется  $\nu$  видов функций ОУ. Функции  $u_i^*(t)$  и  $u_j^*(t)$ ,  $i, j \in \{1, \dots, \nu\}$ , могут различаться числом интервалов непрерывности (моментов переключения) и т.д.

**Определение 3.2.** Область значений вектора  $L$ , для которых задача (3.1) – (3.4) имеет решение при функции управления  $u_j^*(t)$ , называется областью существования ОУ  $j$ -го вида и обозначается  $K_j$ ,  $j = \overline{1, \nu}$ . Объединение областей  $K_j$  образует область  $K$  существования решения задачи (3.1) – (3.4), т.е.  $K = \bigcup_{j=1}^{\nu} K_j$ . Области, соответствующие областям  $K$  и  $K_j$  в синтезирующем пространстве для фиксированных значений  $\lambda$ , обозначим  $K^\lambda$  и  $K_j^\lambda$ ; таким образом, области  $K$  и  $K_j$  строятся в пространстве компонент синтезирующего вектора  $L$ , а  $K^\lambda$  и  $K_j^\lambda$  являются их сечениями.

Области  $K^\lambda$  и  $K$  представляют собой разновидности множеств достижимости [18, 77]. Граничные поверхности областей  $K$  и  $K^\lambda$  обозначим соответственно  $P$  и  $P^\lambda$ . В основе метода синтезирующих переменных лежат следующие теоремы [75].

**Утверждение 3.1.** Если в ЗОУ (3.1) – (3.4): а) собственные значения матрицы  $A$  вещественные; б) для рассматриваемого функционала (3.4) управление  $u^*(\cdot)$  (в случае его существования) единственно, то  $n$ -вектор

$$l = (l_1; \dots; l_n)^T = \frac{1}{b} (z^k - e^{A(t_k - t_1)} z^0) \quad (3.6)$$

и массив  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ ,  $m \leq n$ , собственных значений матрицы  $A$  являются синтезирующими, при этом поверхность  $P^\lambda$  задается уравнениями:

$$l_n = u_b \int_{t_0}^{\tau_1^{(L_{n-1})}} \Phi_{n,n}(t_k - t) dt + u_n \int_{\tau_1^{(L_{n-1})}}^{\tau_2^{(L_{n-1})}} \Phi_{n,n}(t_k - t) dt + \dots + u'_{\text{гр}} \int_{\tau_{n-1}^{(L_{n-1})}}^{t_k} \Phi_{n,n}(t_k - t) dt; \quad (3.7)$$

$$l_n = u_n \int_{t_0}^{\tau_1^{(L_{n-1})}} \Phi_{n,n}(t_k - t) dt + \dots + u''_{\text{гр}} \int_{\tau_{n-1}^{(L_{n-1})}}^{t_k} \Phi_{n,n}(t_k - t) dt; \quad (3.8)$$

$$L_{n-1} = (l_1; \dots; l_{n-1}; \lambda); \quad (3.9)$$

$$l_i \in [l_i^H(L), l_i^B(L)], \quad (3.10)$$

причем значениям  $L \in P \subset K$  (за исключением значений  $L$ , принадлежащих (3.7) и (3.8) одновременно с учетом границ (3.10)) соответствуют управления вида оптимального быстрогодействия, т.е.

$$u_{\text{гр}}^*(t) = \begin{cases} u_b, & t \in [t_0; \tau_1']; \\ u_n, & t \in [\tau_1^{(n)}; \tau_1']; \\ \dots \\ u'_{\text{гр}}, & t \in [\tau_1'_{n-1}; t_k]; \end{cases} \quad u'_{\text{гр}} = \begin{cases} u_n & \text{при } n - \text{четном,} \\ u_b & \text{при } n - \text{нечетном} \end{cases} \quad (3.11)$$

или

$$u_{\delta^n}^*(t) = \begin{cases} u_H, & t \in [t_0; \tau_1^n]; \\ u_B, & t \in [\tau_1^n; \tau_2^n]; \\ \dots \\ u_{ГР}^n, & t \in [\tau_{n-1}^n; t_k]; \end{cases} \quad u_{ГР}^n = \begin{cases} u_B & \text{при } n - \text{четном,} \\ u_H & \text{при } n - \text{нечетном,} \end{cases} \quad (3.11a)$$

здесь  $\tau_1^n(L_n - 1)$ ,  $\tau_2^n(L_n - 1)$  – функции значений массива  $(L_n - 1)$ , определяемые из уравнений (3.11), (3.11a);  $\Phi_{n,n}(t_k - t)$  – элемент матрицы  $\exp[A(t_k - t)]$ ;  $l_i^{H(B)}(L)$  – границы изменения  $l_i$  в уравнениях (3.7) и (3.8). Конкретное использование соотношений (3.7), (3.8) приведено в примере 3.1.

Действительно, вектор  $L$ , определяемый (3.6), легко преобразуется в вектор

$$V(t_k - t_0) = \int_{t_0}^{t_k} e^{-At} b u(t) dt, \quad (3.12)$$

используемый при определении множества достижимости в фазовом пространстве [77]. Для этого достаточно положить  $t_0 = 0$ ,  $z_i^k = 0$ ,  $i = \overline{1, n}$  и умножить  $l$  на  $b e^{-At_k}$ . Таким образом, с помощью  $l$  можно задавать множество значений  $z(t_0) = z^0$ , из которых достигаются  $z(t_k) = z^k$  за время управления  $t_k - t_0$ .

Заметим, что при выполнении условия а) имеет место (см., например, [78]):

$$e^{At} = \sum_{k=1}^s \sum_{i=0}^{m_k-1} t^i e^{\lambda_k t} \chi_{ki},$$

здесь  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, s}$  – различные собственные значения матрицы  $A$ ;  $m_k$  – кратность  $\lambda_k$  как нуля минимального многочлена  $A$ ;  $\chi_{ki}$  – матрицы с постоянными элементами, зависящими только от  $A$ .

Предположим, что некоторому значению  $\bar{l} \in K$  соответствуют два управления  $u_1^*(\cdot)$  и  $u_2^*(\cdot)$ , обеспечивающих перевод из  $z_0$  в  $z_k$  за время  $(t_k - t_0)$  и различающихся видом функции  $u_i^*(\cdot)$  или значениями ее параметров. Однако в силу условия б) для конкретного функционала  $I$  это невозможно, поэтому вектор  $l$  и массив  $\lambda$  с учетом (3.12) являются синтезирующими. Существование ОУ видов (3.11), (3.11a) для задачи (3.1) – (3.4) известно [18, 53, 79].

Справедливость (3.7), (3.8) для уравнений (3.11), (3.11a) можно показать, записав уравнение Коши для первых  $(n - 1)$  компонент вектора  $z$ . В этом случае для управления (3.11) получаем следующую систему  $(n - 1)$  уравнений:

$$l_i = u_B \int_{t_0}^{\tau_1} \Phi_{i,1}(t_k - s) ds + u_H \int_{\tau_1}^{\tau_2} \Phi_{i,1}(t_k - s) ds + u_{ГР}^n \int_{\tau_{n-1}}^{t_k} \Phi_{i,1}(t_k - s) ds, \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (3.13)$$

Решая данные уравнения относительно  $\tau_i$ ,  $i = \overline{1, n-1}$ , получаем

$$\tau_i = f_i(l_1, \dots, l_{n-1}; \lambda), \quad i = \overline{1, n-1}. \quad (3.14)$$

Подставив (3.14) с учетом (3.9) в уравнение вида (3.13) при  $i = n$ , приходим к (3.7). Аналогично, с использованием уравнения (3.11a), получаем уравнение (3.8).

Интервалы (3.10) изменения  $l_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ , получаются подстановкой пределов изменения  $\tau_i$  в функции (3.14).

То, что поверхность  $P$ , задаваемая уравнениями (3.7), (3.8), является поверхностью области  $K$ , можно показать, используя прием, с помощью которого доказывается теорема о  $n$  интервалах [79]. В соответствии с этим приемом, если значению  $L$  соответствует управление  $u_{\delta^n}^*(\cdot)$  (см. (3.11) или (3.11a)), то для того же или меньшего времени  $t_k - t_0$  и равенства других компонент  $R$  не существует другого вида управления, обеспечивающего перевод объекта из  $z^0$  в  $z^k$ . Из (3.6), (3.12) видно, что с увеличением  $t_k - t_0$  при прочих равных условиях значения компонент вектора  $L$  уменьшаются. Следовательно, на поверхности  $P$  может иметь место лишь управление вида  $u_{\delta^n}^*(\cdot)$ . Полученный результат о поверхности  $P$  следует также из леммы о границе области достижимости [77].

**Следствие 3.1.1.** Область  $K^\lambda$ , ограниченная поверхностью  $P^\lambda$ , выпукла, симметрична относительно начала координат, замкнута и «растет» с увеличением временного интервала  $t_k - t_0$  и параметра  $b$ , а также расширением границ управления.

Данные свойства вытекают из «подобия» области  $K$  и множества достижимости [18, 77]. Выпуклость  $K^\lambda$  легко показать, рассматривая линейную комбинацию значений  $L$ , т.е. если  $L', L'' \in K^\lambda$ , то и  $[\mu L' + (1 - \mu)L''] \in K^\lambda$ ,  $\mu \in [0, 1]$ . Для симметричности  $K^\lambda$  должно выполняться условие, если  $L' \in K$ , то и  $-L' \in K^\lambda$ . Это свойство наглядно проявляется при

рассмотрении примера 3.1. Замкнутость  $K$  и  $K^\lambda$  показывается аналогично замкнутости множества достижимости. Последнее свойство понимается в том случае, что если  $t'_k - t_0 > t'' - t_0$ , то  $K^\lambda(t'_k) \subset K^\lambda(t''_k)$  и т.д.

**Следствие 3.1.2.** Вектор  $l$  и массив  $\lambda$  однозначно определяют вид и параметры ОУ при следующих наиболее распространенных в практических задачах энергосберегающего управления функционалах:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt \rightarrow \min, & I_T &= \int_{t_0}^{t_k} |u(t)| dt \rightarrow \min; \\ I_{\text{кв}} &= \int_{t_0}^{t_k} \left( \sum_{i=1}^n c_i z_i^2(t) + cu^2(t) \right) dt \rightarrow \min; \\ I_6 &= t_k - t_0 \rightarrow \min, & I_{6T} &= c(t_k - t_0) + \int_{t_0}^{t_k} |u(t)| dt \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Для функционалов  $I_T, I_{6T}$  следствие 3.1.2 справедливо в областях  $K_j$ , где оптимальное управление единственно; для областей, в которых управление не единственно,  $l$  и  $\lambda$  задают параметры одного из возможных видов оптимального управления.

Доказательства существования и единственности ОУ, при функционалах  $I_3, I_T, I_{\text{кв}}, I_6, I_{6T}$  для некоторых объектов приведены в работах [18, 19, 53, 79].

Практическое значение результатов утверждения 3.1 состоит в том, что без определения вида ОУ с помощью уравнений (3.7), (3.8) и соотношений (3.10), (3.14) можно непосредственно по значениям массива реквизитов  $R$  проверить, существует ли решение задачи (3.1) – (3.4) для любого из функционалов (3.15) или нет. Основная трудность здесь получение соотношений (3.7), (3.8), (3.10), (3.14) для каждого нового вида объекта управления, кроме того, поверхность  $P$  изменяется при смене значений массива  $R$ . С целью устранения последнего обстоятельства целесообразно перейти к рассмотрению базовой задачи [24, 39], для которой поверхность  $P$  инвариантна к изменению компонентов  $R$ .

**Определение 3.3.** Базовой или нормированной для множества исходных задач (3.1) – (3.4), определяемого возможными значениями реквизитов  $R$ , называется следующая задача:

$$\begin{cases} \dot{Z} = \bar{A}Z(T) + \bar{B}U(T) + \bar{B}_0, & T \in [0; T_k]; \\ \bar{B} = (0; \dots, 0, \bar{b})^r, & \bar{B}_0 = (0; \dots, 0, \bar{b}_0)^r; \\ Z(0) = z^0 \rightarrow Z(T_k) = z^k, & |U(T)| \leq U_{\text{гр}}; \\ J(Z(\cdot), U(\cdot)) = \int_0^{T_k} F_0(Z, U, T) dt \rightarrow \min, \end{cases} \quad (3.16)$$

соответствующие области существования которой обозначим через  $\bar{K}, \bar{K}_i, \bar{K}^\lambda, \bar{K}_i^\lambda, i=1, v$ .

Задача (3.16) характеризуется нормированием границ управления и временного интервала. Нетрудно показать, что любую задачу ОУ вида (3.1) – (3.4) можно свести к задаче (3.16), используя простые соотношения. Например, при

$$T_k = 2, \quad U_{\text{гр}} = 1 \quad (3.17)$$

расчет параметров и переменных задачи (3.16) производится по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= 0,5(t_k - t_0)A; & \bar{B} &= 0,25(u_b - u_n)(t_k - t_0)B; & T &= 2 \frac{t - t_0}{t_k - t_0}; \\ \bar{B}_0 &= 0,26(u_b + u_n)(t_k - t_0)B; & U &= \frac{2u - u_b - u_n}{u_b - u_n}; \\ F_0(Z, U, T) &= \frac{2}{t_k - t_0} f_0(z, u, t). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Переход от ОУ  $U^*(T)$  задачи (3.16), (3.17) к реальному управлению производится с использованием простых соотношений

$$u^* = 0,5[U^*(u_b - u_n) + u_b + u_n], \quad t = t_0 + 0,5T(t_k - t_0). \quad (3.19)$$

**Утверждение 3.2.** Если в задаче (3.1) – (3.4) с функционалами  $I_3, I_T, I_{\text{кв}}$  выполняется первое условие утверждения 3.1, а также значения  $t_k - t_0, z^0, z^k$  конечны, причем  $t_k \neq t_0, z^k \neq z^0$ , то существуют синтезирующий  $n$  вектор  $l$  и массив  $\lambda$ , для которых области существования  $\bar{K}^\lambda$  и  $\bar{K}_i$  обладают следующими свойствами:

– области  $\bar{K}, \bar{K}^\lambda$  и  $\bar{K}_i^\lambda, i=1, v$ , инвариантны изменениям реквизитов задачи  $z^0, z^k, t_0, t_k, B, u_n, u_b$ , а области  $\bar{K}, \bar{K}^\lambda$  не зависят от вида функционала;

– область  $\bar{K}$  в пространстве  $\bar{L} = (\bar{l}, \bar{\lambda})$  для каждого вида функционала (3.15) изоморфна (в смысле расположения областей  $\bar{K}_j, j = \overline{1, v}$ ) области  $K$  в пространстве  $L$ , при этом между значениями  $\bar{L}$  и  $L$  имеет место однозначное соответствие.

Для доказательства свойства инвариантности достаточно показать, что оно выполняется для базовой задачи (3.16). Так как у базовой задачи временной интервал и границы для управления постоянны, а именно эти реквизиты определяют размеры областей существования ОУ, то для задачи (3.16) области  $\bar{K}, \bar{K}^\lambda, \bar{K}_j, j = \overline{1, v}$ , постоянны. Действительно, для задачи (3.16), используя формулу Коши, можно записать:

$$\frac{1}{b} \left( z_i^k - \sum_{j=1}^n \bar{\Phi}_{i,j}(2) z_i^0 - \bar{b}_0 \int_0^2 \bar{\Phi}_{i,n}(2-T) dT \right) = \int_0^2 \bar{\Phi}_{i,n}(2-T) U(T) dT, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.20)$$

здесь  $\bar{\Phi}_{i,j}(T)$  – компонент матрицы  $e^{\bar{A}T}$ .

На основании (3.12) и (3.20) можно получить систему уравнений, связывающих компоненты  $L, \Lambda$  и  $U(T)$  задачи (3.16), например, в виде

$$\bar{l}_i = \int_0^2 e^{-\Lambda_i T} U(T) dT, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.21)$$

здесь предполагается, что характеристические числа  $\Lambda_i$  матрицы  $\bar{A}$  различные.

С помощью уравнений (3.18) задача (3.1) – (3.4) при любых реквизитах может быть преобразована к базовой. Независимость областей  $\bar{K}, \bar{K}^\Lambda$  от вида функционала следует непосредственно из (3.20), (3.21).

Одинаковое число областей  $\bar{K}_j, \bar{K}_j^\Lambda$  для конкретного вида функционала вытекает из соответствия сопряженной системы уравнений принципа максимума для задачи (3.1) – (3.4) и задачи (3.16). При этом, если характеристическое уравнение для матрицы  $A$  имеет только действительные корни (условие а) утверждения 3.1), то это сохраняется и для соответствующих корней базовой задачи, а следовательно, и для корней сопряженных систем с переменными  $\psi_i(t)$  и  $\bar{\psi}_i(t), i = \overline{1, n}$ , принципа максимума применительно к задачам (3.1) – (3.4) и (3.16) (см., например, [53]). Следовательно,

$$\psi_i(t) = \sum_{v=1}^n c_{iv} e^{\lambda_v t}, \quad \bar{\psi}_i(t) = \sum_{v=1}^n \bar{c}_{iv} e^{\bar{\lambda}_v t}, \quad i = \overline{1, n},$$

здесь постоянные  $c_{iv}$  и  $\bar{c}_{iv}$  определяются решением соответствующих граничных задач и выражаются через значения компонент векторов  $l$  и  $L$ . Выражая  $u_j^*(t)$  и  $U_j^*(t)$  через  $\psi_i(t)$  и  $\bar{\psi}_i(t), i = \overline{1, n}$ , для конкретного вида функционала, нетрудно убедиться в изоморфности областей  $\bar{K}$  и  $K$ .

Однозначное соответствие между  $l$  и  $L$  нетрудно показать, выразив вектор  $L$  непосредственно через компоненты массива  $R$  с использованием равенств (3.18).

**Следствие 3.2.1.** Поверхности  $\bar{P}, P$  областей  $\bar{K}$  и  $K$  применительно к задачам (3.1) – (3.4) и (3.16) не зависят от вида функционала, т.е. сохраняются неизменными для функционалов  $I_3, I_T, I_{KB}$ .

**Следствие 3.2.2.** Область  $\bar{K}$  есть объединение непересекающихся областей  $\bar{K}_j, j = \overline{1, v}$ , при этом  $v$  зависит только от вида функционала и значений компонент матрицы  $A$ , а границы областей  $\bar{K}_j$  определяются значениями  $\bar{l}, \bar{\lambda}$ .

**Следствие 3.2.3.** Вид и параметры ОУ задачи (3.1) – (3.4) однозначно определяются значениями вектора  $\bar{l}$  и массива  $\bar{\lambda}$ , в свою очередь, рассчитываемыми по реквизитам  $R$ .

**Следствие 3.2.4.** Область  $\bar{K}^\lambda$ , ограниченная поверхностью  $\bar{P}^\lambda$ , обладает свойствами выпуклости, симметричности относительно начала координат и замкнутости, отмеченными следствием 3.1.1.

На основе результатов утверждения 3.2 можно построить области  $\bar{K}, \bar{K}^\lambda$  и  $\bar{K}_j^\lambda, j = \overline{1, v}$ , не зависящие от значений  $z^0, z^k, t_0, t_k, B, u_n, u_v$ , и использовать эти области для анализа и синтеза ОУ задачи (3.1) – (3.4) при любых реквизитах  $R$ . Это позволяет области  $\bar{K}_j^\lambda$  держать в памяти управляющих ЭВМ или контроллеров, что открывает широкие возможности для решения задач анализа и синтеза ОУ в реальном времени.

**Пример 3.1.** В качестве примера введения вектора синтезирующих переменных и использования утверждений 3.1, 3.2 рассмотрим модель ЗОУ < АИ, Э, Пр, О >. Здесь динамика объекта управления описывается линейным дифференциальным уравнением второго порядка с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

минимизируемый функционал – затраты энергии  $I_3$ , стратегия реализации ОУ – программная (Пр), управление (скалярное) ограничено, концы фазовой траектории закреплены, временной интервал  $t \in [t_0, t_k]$  фиксирован (0).

Объект с такими матрицами  $A, B$  называют интегратором с аperiodическим звеном (АИ) или реальным двойным интегратором (РДИ) [18, 80]. Для рассматриваемого объекта

$$\exp[A(t-t_0)] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{a_2}(\exp[a_2(t-t_0)]-1) \\ 0 & \exp[a_2(t-t_0)] \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Таким образом, модели ЗОУ < АИ, Э, Пр, О > соответствует следующая постановка задачи

$$(AI) \quad \begin{cases} \dot{z}_1 = z_2(t), \\ \dot{z}_2 = a_2 z_2(t) + bu(t), \quad t \in [t_0, t_k], \end{cases}$$

$$(Э) \quad I_3 = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt \rightarrow \min_u, \quad (3.24)$$

$$(Пр) \quad u^* = (u^*(t), \quad t \in [t_0, t_k]),$$

$$(O) \quad \begin{cases} \forall t \in [t_0, t_k]: u(t) \in [u_n, u_b], \\ z_i(t_0) = z_i^0; \quad z_i(t_k) = z_i^k, \quad i=1, 2. \end{cases}$$

Данная задача, кроме иллюстрированного характера, имеет самостоятельное значение. Она часто встречается при управлении тепловыми аппаратами, электродвигателями, движущимися объектами и гироскопическими системами [18, 19, 81, 82].

Для численного решения ЗОУ задается массив исходных данных (реквизитов)

$$R = (a_2, b, u_n, u_b, z_1^0, z_2^0, z_1^k, z_2^k, t_0, t_k), \quad (3.25)$$

при этом с учетом (3.23)

$$\begin{aligned} z_1^k &= z_1^0 + \frac{z_2^0}{a_2} (e^{a_2(t_k-t_0)} - 1) + \frac{b}{a_2} \int_{t_0}^{t_k} (e^{a_2(t_k-s)} - 1) u(s) ds, \\ z_2^k &= e^{a_2(t_k-t_0)} z_2^0 + b \int_{t_0}^{t_k} e^{a_2(t_k-s)} u(s) ds. \end{aligned} \quad (3.26)$$

В соответствии с (3.6) утверждения 3.1

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{a_2}{b} (z_1^k - z_1^0) - \frac{z_2^0}{b} (e^{a_2(t_k-t_0)} - 1) = \int_{t_0}^{t_k} (e^{a_2(t_k-s)} - 1) u(s) ds, \\ l_2 &= \frac{1}{b} z_2^k - z_2^0 e^{a_2(t_k-t_0)} = \int_{t_0}^{t_k} e^{a_2(t_k-s)} u(s) ds. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Учитывая особенности матричной экспоненты  $\exp[A(t-t_0)]$ , удобно вместо  $l_1$  использовать  $l_1 = l_2 - l_1$ , т.е.

$$l_1' = \frac{1}{b} (z_2^k - z_2^0) - \frac{a_2}{b} (z_1^k - z_1^0) = \int_{t_0}^{t_k} u(s) ds. \quad (3.28)$$

В этом случае вектор синтезирующих переменных  $l$  и синтезирующий параметр  $\lambda$ :

$$l = (l_1', l_2), \quad \lambda = a_2. \quad (3.29)$$

Соотношения для поверхности  $P$  получаются с использованием подстановки  $u_6^*(t)$  (см. (3.11)) в выражения для  $l_1', l_2$ , т.е.

$$l_1'(u_{\delta'}) = \int_{t_0}^{t_k} u_{\delta'}(t) dt = \int_{\tau_0}^{\tau_1'} u_B dt + \int_{\tau_1'}^{t_k} u_H dt = \tau_1'(u_B - u_H) - u_B t_0 + u_H t_k, \quad (3.30)$$

$$l_2'(u_{\delta'}) = \int_{t_0}^{\tau_1''} u_H dt + \int_{\tau_1''}^{t_k} u_B dt = \tau_1''(u_H - u_B) - u_H t_0 + u_B t_k$$

или

$$\tau_1' = \frac{l_1'(u_{\delta'}) - u_H t_k + u_B t_0}{u_B - u_H}, \quad \tau_1'' = \frac{l_1'(u_{\delta'}) - u_B t_k + u_H t_0}{u_H - u_B}. \quad (3.30a)$$

В результате соотношения, задающие поверхность  $P$ , принимают следующий вид:

$$l_2(u_{\delta'}) = u_B \int_{\tau_0}^{\tau_1'} e^{a_2(t_k - s)} ds + u_H \int_{\tau_1'}^{t_k} e^{a_2(t_k - s)} ds =$$

$$= \frac{u_B}{a_2} e^{a_2(t_k - t_0)} - \frac{u_H}{a_2} + \frac{u_H - u_B}{a_2} e^{a_2 \left( t_k - \frac{l_1(u_{\delta'}) - u_H t_k + u_B t_0}{u_B - u_H} \right)}$$
(3.31)

и аналогично

$$l_2(u_{\delta''}) = \frac{u_H}{a_2} e^{a_2(t_k - t_0)} - \frac{u_B}{a_2} + \frac{u_B - u_H}{a_2} e^{a_2 \left( t_k - \frac{l_1(u_{\delta''}) - u_B t_k + u_H t_0}{u_H - u_B} \right)}. \quad (3.31a)$$

Изменению  $\tau_1$  в пределах от  $t_0$  до  $t_k$  соответствует область значений  $l_1'$  от  $u_H(t_k - t_0)$  до  $u_B(t_k - t_0)$ , т.е.

$$l_1' \in [u_H(t_k - t_0); u_B(t_k - t_0)]. \quad (3.32)$$

Соответственно границы изменения  $l_2$  определяются равенствами

$$\tau_1 = t_0: \quad l_2(u_{\delta'}) = \frac{u_B}{a_2} e^{a_2(t_k - t_0)} - \frac{u_H}{a_2} + \frac{u_H - u_B}{a_2} e^{a_2(t_k - t_0)} = \frac{u_H}{a_2} (e^{a_2(t_k - t_0)} - 1),$$

$$l_2(u_{\delta''}) = \frac{u_H}{a_2} e^{a_2(t_k - t_0)} - \frac{u_B}{a_2} + \frac{u_B - u_H}{a_2} e^{a_2(t_k - t_0)} = \frac{u_B}{a_2} (e^{a_2(t_k - t_0)} - 1);$$

$$\tau_1 = t_k: \quad l_2(u_{\delta'}) = \frac{u_B}{a_2} (e^{a_2(t_k - t_0)} - 1), \quad l_2(u_{\delta''}) = \frac{u_H}{a_2} (e^{a_2(t_k - t_0)} - 1),$$

т.е.

$$l_2 \in \left[ \frac{u_H}{a_2} (e^{a_2(t_k - t_0)} - 1); \frac{u_B}{a_2} (e^{a_2(t_k - t_0)} - 1) \right]. \quad (3.32a)$$

Переходя к базовой (нормированной) ЗОУ с временем  $T \in [0; 2]$   $U^{(T)} \in [-1; 1]$ , получаем

$$\dot{Z}_1 = \bar{a} Z_2(T),$$

$$\dot{Z}_2 = \bar{a}_2 Z_2(T) + \bar{b} U(T) + \bar{b}_0, \quad T \in [0; 2],$$

$$\bar{I}_3 = \int_0^2 U^2(T) dT \rightarrow \min;$$

$$U^*(\cdot) = (U^*(T), T \in [0; 2]),$$

$$\forall T \in [0; 2]: \quad U(T) \in [-1; 1], \quad (3.33)$$

$$Z_i(0) = z_i^0, \quad Z_i(2) = z_i^k, \quad i = 1, 2,$$

где

$$\bar{a} = 0,5(t_k - t_0), \quad \bar{a}_2 = 0,5 a_2(t_k - t_0),$$

$$\bar{b} = 0,25 b(t_k - t_0)(u_B - u_H), \quad \bar{b}_0 = 0,25 b(t_k - t_0)(u_B + u_H).$$

Для численного решения базовой ЗОУ задается массив данных

$$\bar{R} = (\bar{a}, \bar{a}_2, \bar{b}, \bar{b}_0, z_1^0, z_2^0, z_1^k, z_2^k). \quad (3.34)$$

Так как матрице  $\bar{A}$  соответствует матричная экспонента

$$\exp[\bar{A}T] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\bar{a}}{\bar{a}_2} (e^{\bar{a}_2 T} - 1) \\ 0 & e^{\bar{a}_2 T} \end{pmatrix}, \quad (3.35)$$

то вектор синтезирующих переменных  $L = (L_1, L_2)$  и параметр  $\Lambda$  соответственно равны

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{b} (z_2^k - z_2^0) - \frac{\bar{a}_2}{b\bar{a}} (z_1^k - z_1^0) - 2 \frac{\bar{b}_0}{b} = \int_0^2 U(T) dT, \\ L_2 &= \frac{1}{b} (z_2^k e^{-2\bar{a}_2} - z_2^0) + \frac{\bar{b}_0}{b\bar{a}_2} (e^{-2\bar{a}_2} - 1) = \int_0^2 e^{-\bar{a}_2 T} U(T) dT, \\ \Lambda &= \bar{a}_2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Следует заметить, что в качестве  $L_2$  может рассматриваться также

$$L_2' = \frac{1}{b} (z_2^k - z_2^0 e^{2\bar{a}_2}) - \frac{\bar{b}_0}{b\bar{a}_2} (e^{2\bar{a}_2} - 1) = \int_0^2 e^{\bar{a}_2(2-T)} U(T) dT. \quad (3.37)$$

Для базовой ЗОУ соотношения для поверхности  $\bar{P}$ , аналогичные (3.31), (3.31a), (3.32), (3.32a), имеют вид:

$$L_2(u_{\sigma'}) = e^{2\bar{a}_2} (1 + e^{-2\bar{a}_2} - 2e^{-\bar{a}_2(L_1+2)/2}) / \bar{a}_2; \quad (3.38)$$

$$L_2(u_{\sigma''}) = e^{2\bar{a}_2} (2e^{-\bar{a}_2(2-L_1)/2} - e^{-2\bar{a}_2} - 1) / \bar{a}_2, \quad (3.38a)$$

при этом

$$L_1 \in [-2; 2], \quad L_2 \in [(1 - e^{2\bar{a}_2}) / \bar{a}_2; (e^{2\bar{a}_2} - 1) / \bar{a}_2]. \quad (3.39)$$

Для проверки существования решения ЗОУ при заданном массиве исходных данных  $R$  требуется рассчитать значения  $(L_1, L_2, \bar{a}_2)$  и затем определить, находится ли точка  $L_1, L_2$  внутри области, ограниченной линиями  $L_2(u_{\sigma'})$  и  $L_2(u_{\sigma''})$ .

Например, пусть

$$R = \begin{pmatrix} a_2 = -0,1; b = 0,2; u_n = -100; u_b = 100; \\ z_1^0 = 0; z_2^0 = 0; z_1^k = 1000; z_2^k = 0; t_0 = 0; t_k = 20 \end{pmatrix},$$

тогда в соответствии с формулами (3.18), (3.36)

$$\bar{a} = 10; \bar{a}_2 = -1; \bar{b} = 200; \bar{b}_0 = 0$$

и

$$L_1 = \frac{1}{200} \cdot 0 + \frac{1}{200 \cdot 10} 1000 - 0 = 0,5, \quad L_2 = 0.$$

При  $L_1 = 0,5$  и  $\bar{a}_2 = -1$  согласно (3.38), (3.39)

$$\begin{aligned} L_2(u_{\sigma'}) &= e^{-2} (1 + e^2 - 2e^{(0,5+2)/2}) / (-1) = -0,19; \\ L_2(u_{\sigma''}) &= 0,135(2,12 - 8,39) / (-1) = 0,847. \end{aligned}$$

Так как  $L_2 \in [-0,19; 0,847]$ , то решение ЗОУ при исходных данных  $R$  существует.

Как видно из примера 3.1, вместо рассмотрения ОУ в зависимости от значений компонентов массива  $R$  размерности, равной десяти (см. (3.20)), анализ методом синтезирующих переменных производится в трехмерном пространстве  $(L_1, L_2, \bar{a}_2)$ . Это позволяет визуализировать и хранить в базе знаний результаты анализа для различных моделей ЗОУ.

### 3.2 ПРОГРАММНАЯ СТРАТЕГИЯ

В данном разделе рассматриваются основные задачи полного анализа оптимального управления в виде программы  $u^*(\cdot) = (u^*(t), t \in [t_0, t_k])$ . К этим задачам относятся определение возможных видов функций  $u^*(t)$  для конкретных моде-

лей ЗОУ, получение соотношений для расчета параметров этих функций, определение границ существования функций ОУ различных видов и некоторые другие.

Определение видов функций ОУ производится с использованием принципа максимума [53]. Рассмотрим эту задачу применительно к модели объекта в нормированном виде (см. (3.33)) для  $n = 2$ , т.е.

$$\dot{Z} = \bar{A}Z(T) + \bar{B}\left(U(T) + \frac{\bar{b}_0}{b}\right) = \bar{F}(Z, U, T) = \begin{pmatrix} \bar{f}_1(Z, U, T) \\ \bar{f}_2(Z, U, T) \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

и функционала

$$\bar{I} = \int_0^2 \bar{f}_0(Z, U, T) dT \rightarrow \min_U. \quad (3.41)$$

В этом случае гамильтониан (функция Понтрягина) имеет вид:

$$\bar{H} = -\bar{f}_0 + \langle \bar{\Psi}, \bar{F} \rangle = -\bar{f}_0 + \bar{\Psi}_1 \bar{f}_1 + \bar{\Psi}_2 \bar{f}_2; \quad \bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2)^T, \quad (3.42)$$

где  $\bar{\Psi}_1(T)$ ,  $\bar{\Psi}_2(T)$  – промежуточные переменные (импульсы), аналогичные неопределенным множителям Лангража.

Возможные виды функций ОУ определяются из условия

$$\bar{H} = -\bar{f}_0 + \bar{\Psi}_1 \bar{f}_1 + \bar{\Psi}_2 \bar{f}_2 \rightarrow \max_U, \quad (3.43)$$

при этом функции  $\bar{\Psi}_i(T)$ ,  $i = 1, 2$ , находятся решением уравнений

$$\dot{\bar{\Psi}}_1 = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Z_1}; \quad \dot{\bar{\Psi}}_2 = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Z_2}, \quad (3.44)$$

или в векторно-матричной форме

$$\dot{\bar{\Psi}} = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Z} \stackrel{\Delta}{=} \tilde{A} \bar{\Psi}(T). \quad (3.44a)$$

Очевидно, решение (3.44a) имеет вид

$$\bar{\Psi}(T) = e^{\tilde{A}T} \bar{\Psi}(0), \quad \bar{\Psi} = (\bar{\Psi}_1(0), \bar{\Psi}_2(0))^T, \quad (3.45)$$

где  $\bar{\Psi}_i(0)$ ,  $i = 1, 2$  – начальные условия (константы).

**Определение 3.4.** Функции ОУ  $u_i^*(t)$  и  $u_j^*(t)$  относятся к разным видам, если они различаются числом параметров, а также при равном числе параметров, если последние находятся решением разных уравнений.

**Утверждение 3.3.** Если ЗОУ формулируется как задача (3.1) – (3.4), при функционале  $I_3$ , то возможные виды функций  $u^*(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  определяются из соотношения

$$U^*(T) = \begin{cases} -1, & \text{если } 0,5 \bar{b} \tilde{\Psi}_n(T) < -1; \\ \frac{\bar{b}}{2} \tilde{\Psi}_n(T), & \text{если } 0,5 \bar{b} \tilde{\Psi}_n(T) \in [-1; 1]; \\ 1, & \text{если } 0,5 \bar{b} \tilde{\Psi}_n(T) > 1, \end{cases} \quad (3.46)$$

полученного для соответствующей базовой ЗОУ (3.16), где  $\tilde{\Psi}_n(T)$  –  $n$ -я компонента вектора  $\tilde{\Psi}(t) = (\tilde{\Psi}_1(t), \dots, \tilde{\Psi}_n(t))^T$ , являющегося решением системы уравнений

$$\dot{\tilde{\Psi}} = (-1)A^T \tilde{\Psi}(t), \quad \tilde{\Psi}(t_0) = \tilde{\Psi}^0.$$

Доказательство утверждения непосредственно следует из принципа максимума и соотношений метода синтезирующих переменных.

**Определение 3.5.** При анализе ЗОУ  $\langle M, \exists, \text{Пр}, O \rangle$  вид функции ОУ, для которого

$$\forall T \in [0; 2]: U^*(T) = U_1^*(T) = \frac{\bar{b}}{2} \tilde{\Psi}_n(T) \in [-1; 1] \quad (3.47)$$

и число параметров  $U^*(T)$  равно  $n$ , будем называть первым или основным без переключений. Виды функций ОУ, отличающиеся от первого наличием участков с граничными значениями  $-1$  или  $1$ , будем называть основными с переключениями.



Наряду с основными видами функций ОУ возможны виды функций ОУ с числом параметров меньше  $n$ , точнее для этих функций имеются дополнительные условия для расчета параметров, например,

$$U^*(\cdot) = (U^*(\cdot) = 1; \quad U^*(T) = U_1^*(T), \quad T \in (0; 2])$$

и т.п. Функции этого вида могут быть использованы для определения границ областей видов функций ОУ.

**Определение 3.6.** Функции ОУ, для которых при определении параметров не требуется решать уравнения вида (3.21), будем называть полюсами.

Примерами полюсов являются ОУ вида

$$U_{n1}^*(T \cdot) = 1, \quad T \in (0; 2]; \quad U_{n2}^*(T \cdot) = -1, \quad T \in (0; 2] \text{ и др.}$$

**Пример 3.2.** Пусть решается ЗОУ (3.33), т.е.

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \bar{a} Z_2(T); \\ \dot{Z}_2 = \bar{a}_2 Z_2(T) + \bar{b} \left( U(T) + \frac{\bar{b}_0}{b} \right), \end{cases}$$

здесь

$$\begin{aligned} \bar{f}_1(Z, U, T) &= \bar{a} Z_2(T); \\ \bar{f}_2(Z, U, T) &= \bar{a}_2 Z_2(T) + \bar{b} \left( U(T) + \frac{\bar{b}_0}{b} \right) \end{aligned}$$

и

$$\bar{f}_0(Z, U, T) = \left( U(T) + \frac{\bar{b}_0}{b} \right)^2.$$

В этом случае условие (3.43) принимает вид

$$\begin{aligned} \bar{H} = & - \left( U(T) + \frac{\bar{b}_0}{b} \right)^2 + \bar{\Psi}_1(T) \bar{a} Z_2(T) + \\ & + \bar{\Psi}_2(T) \left[ \bar{a}_2 Z_2(T) + \bar{b} \left( U(T) + \frac{\bar{b}_0}{b} \right) \right] \rightarrow \max_U. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Предположим, что интервал  $[u_n, u_b]$ , ограничивающий скалярное управление, симметричный, т.е.  $|u_n| = u_b$ , тогда

$$\frac{\bar{b}_0}{b} = \frac{u_n + u_b}{u_n - u_b} = 0 \quad (3.49)$$

и

$$\bar{H} = -U^2 + \bar{\Psi}_1 \bar{a} Z_2 + \bar{\Psi}_2 (\bar{a} Z_2 + \bar{b} U) \rightarrow \max_U. \quad (3.49a)$$

Система уравнений (3.44) для нашего случая имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\bar{\Psi}}_1 = 0; \\ \dot{\bar{\Psi}}_2 = -\bar{a} \bar{\Psi}_1(T) - \bar{a}_2 \bar{\Psi}_2(T), \end{cases} \quad (3.50)$$

или

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{\Psi}}_1 \\ \dot{\bar{\Psi}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{a} & -\bar{a}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_1(T) \\ \bar{\Psi}_2(T) \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\bar{a} & -\bar{a}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.50a)$$

Заметим, что система дифференциальных уравнений (3.50) является сопряженной системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \bar{a} Z_2(T); \\ \dot{Z}_2 = \bar{a}_2 Z_2(T) \end{cases} \text{ при } \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{a} \\ 0 & \bar{a}_2 \end{pmatrix}$$

и

$$\tilde{A} = (-1) \bar{A}^T.$$

Матричная экспонента в (3.44a)

$$e^{\tilde{A}T} = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_{11}(T) & \tilde{\Phi}_{12}(T) \\ \tilde{\Phi}_{21}(T) & \tilde{\Phi}_{22}(T) \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

может быть определена с использованием обратного преобразования Лапласа, т.е.

$$e^{\tilde{A}T} = \mathcal{L}^{-1} \left[ \left( pE - \tilde{A} \right)^{-1} \right], \quad (3.52)$$

здесь  $E$  – единичная матрица;  $p$  – параметр преобразования Лапласа.

Для рассматриваемого примера корни характеристического уравнения матрицы  $(pE - \tilde{A})$  равны  $\tilde{p}_1 = \bar{a}_2$ ,  $\tilde{p}_2 = 0$ , следовательно,

$$e^{\tilde{A}T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\bar{a}}{\bar{a}_2} (e^{-\bar{a}_2 T} - 1) & e^{-\bar{a}_2 T} \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

Заметим, что матрица  $e^{\tilde{A}T}$  может быть получена транспонированием матрицы  $e^{\tilde{A}T}$ , заменой  $\exp[\bar{a}_2 T]$  на  $\exp[-\bar{a}_2 T]$  и введением  $\bar{a} = 0,5(t_k - t_0)$ .

Используя (3.53) и (3.50), получаем

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_1(T) &= \bar{\Psi}_1(0); \\ \bar{\Psi}_2(T) &= \frac{\bar{a}}{\bar{a}_2} (e^{-\bar{a}_2 T} - 1) \bar{\Psi}_1(0) + e^{-\bar{a}_2 T} \bar{\Psi}_2(0). \end{aligned} \quad (3.54)$$

Учитывая, что  $\bar{\Psi}_i(0)$ ,  $i = 1, 2$  – константы, можно записать

$$\bar{\Psi}_2(T) = c_0 + c_1 e^{-\bar{a}_2 T}, \quad (3.55)$$

где  $c_0, c_1$  – неизвестные (пока) постоянные.

Для выполнения условия (3.48а) дифференцированием  $\bar{H}$  по  $U$  получаем уравнение

$$-2U + \frac{\bar{b}}{2} \bar{\Psi}_2 = 0 \quad \text{или} \quad U = \frac{\bar{b}}{2} \bar{\Psi}_2. \quad (3.56)$$

С учетом ограничения на управление, используемое в базовой задаче (3.33), т.е.

$$\forall T \in [0; 2]: \quad U(T) \in [-1; 1],$$

получаем соотношение, определяющее возможные виды функций ОУ

$$U^*(T) = \begin{cases} -1, & \text{если } \frac{\bar{b}}{2} \bar{\Psi}_2(T) < -1; \\ \frac{\bar{b}}{2} \bar{\Psi}_2(T), & \text{если } \frac{\bar{b}}{2} \bar{\Psi}_2(T) \in [-1; 1]; \\ 1, & \text{если } \frac{\bar{b}}{2} \bar{\Psi}_2(T) > 1. \end{cases} \quad (3.57)$$

В соответствии с определением 3.5 и (3.55) функция ОУ первого вида записывается следующим образом

$$U_1^*(T) = \frac{\bar{b}}{2} \bar{\Psi}_2(T) = \frac{\bar{b}}{2} (c_0 + c_1 e^{-\bar{a}_2 T}) = C_1 + D_1 e^{-\bar{a}_2 T}, \quad (3.58)$$

здесь  $C_1, D_1$  – параметры ОУ, которые рассчитываются по известным значениям  $L_1, L_2, \bar{a}_2$  решением уравнений (3.36).

На основе (3.57), (3.58) и учитывая характер функции  $\exp[-\bar{a}_2 T]$ , получаем следующие семь основных видов функций нормированного ОУ с двумя параметрами:

$$\begin{aligned} U_1^*(T) &= C_1 + D_1 e^{-\bar{a}_2 T}, \quad T \in [0; 2]; \\ U_2^*(T) &= \begin{cases} U_2(T), & T \in [0, T_2]; \\ -1, & T \in [T_2, 2]; \end{cases} \\ U_3^*(T) &= \begin{cases} U_3(T), & T \in [0, T_3]; \\ 1, & T \in [T_3, 2]; \end{cases} \\ U_4^*(T) &= \begin{cases} 1, & T \in [0, T_4]; \\ U_4(T), & T \in [T_4, 2]; \end{cases} \\ U_5^*(T) &= \begin{cases} -1, & T \in [0, T_5]; \\ U_5(T), & T \in [T_5, 2]; \end{cases} \\ U_6^*(T) &= \begin{cases} 1, & T \in [0, T_7]; \\ U_6(T), & T \in [T_6, T_6']; \\ -1, & T \in [T_6', 2]; \end{cases} \\ U_7^*(T) &= \begin{cases} -1, & T \in [0, T_6]; \\ U_7(T), & T \in [T_7, T_7']; \\ 1, & T \in [T_7', 2]; \end{cases} \\ U_i(T) &= C_i + D_i e^{-\bar{a}_2 T}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

здесь  $T_i$ ,  $i = \overline{2, 3}$ ,  $T'_i$ ,  $i = \overline{6, 7}$  – моменты «переключения», т.е. перехода функции  $U_i(T)$  на граничное значение.

Следует заметить, что для основных видов функций ОУ с переключениями  $U_i^*(T)$ ,  $i=\overline{2,7}$ , число параметров сводится к двум с использованием дополнительных условий в точках «переключения»:

$$(T=0, U=1), (T_i=0, U=-1), (T_i=2, U=1), (T_i=0, U=-1).$$

Например, для ОУ второго вида, т.е.

$$U_2^*(T)=\begin{cases} 1, & T \in [0, T_2]; \\ C_2 + D_2 e^{-\bar{a}_2 T}, & T \in (T_2, 2], \end{cases}$$

дополнительное условие имеет вид

$$C_2 + D_2 e^{-\bar{a}_2 T_2} = 1$$

или

$$T_2 = \frac{1}{\bar{a}_2} \ln \left( \frac{1 - C_2}{D_2} \right),$$

т.е. момент «переключения»  $T_2$  выражается через параметры  $C_2, D_2$ .

Видам функций ОУ (3.59) соответствуют некоторые области  $G_1, G_2, \dots, G_7$  в пространстве синтезирующих переменных  $L_1, L_2, \bar{a}_2$ .

Помимо функций (3.59) имеются функции ОУ с одним параметром, уже рассмотренные в разд. 3.1 применительно к задаче оптимального быстрогодействия, т.е.

$$\begin{aligned} U_8^*(T) &= \begin{cases} 1, & T \in [0, T_8]; \\ -1, & T \in [T_8, 2]; \end{cases} \\ U_9^*(T) &= \begin{cases} -1, & T \in [0, T_9]; \\ 1, & T \in [T_9, 2], \end{cases} \end{aligned} \quad (3.60)$$

а также другие. К последним относятся функции, у которых момент «переключения»  $T_i$  совпадает со значением  $T=0$  или  $T=2$ . Например,  $T_2=0$ , в этом случае

$$U_{2(1)}^*(T) = \begin{cases} 1, & T=0; \\ C_2 + D_2 e^{-\bar{a}_2 T}, & T \in (0; 2]. \end{cases} \quad (3.61)$$

Так как при  $T=0$   $U_{2(1)}^*(0)=1$ , то  $C_2 + D_2 = 1$  и  $C_2 = 1 - D_2$ . Следовательно, можно записать

$$U_{2(1)}^*(T) = \begin{cases} 1, & T=0; \\ (1 - D_2) + D_2 e^{-\bar{a}_2 T}, & T \in (0; 2], \end{cases} \quad (3.61a)$$

и здесь неизвестен только один параметр  $D_2$ . Аналогично можно получить  $U_{3(1)}^*(T)$ ,  $U_{4(1)}^*(T)$  и т.д.

В соответствии с определением 3.6 наряду с полюсами

$$U_{п1}^*(T) = 1, \quad T \in [0; 2]; \quad (3.62a)$$

$$U_{п2}^*(T) = -1, \quad T \in [0; 2], \quad (3.62b)$$

имеются еще два полюса

$$U_{п3}^*(T) = \begin{cases} 1, & T=0; \\ U_{п3}(T), & T \in (0; 2); \\ -1, & T=2 \end{cases} \quad (3.62в)$$

и

$$U_{п4}^*(T) = \begin{cases} -1, & T=0; \\ U_{п4}(T), & T \in (0; 2); \\ 1, & T=2. \end{cases} \quad (3.62г)$$

Функциям ОУ  $U_{пi}^*(T)$ ,  $i=\overline{1,4}$  в пространстве  $(L_1, L_2, \bar{a}_2)$  соответствуют линии, а в сечениях  $\bar{a}_2 = \text{const}$  – точки.

На рис. 3.1 показаны граничные линии (сечения граничных поверхностей), разделяющие области существования функций ОУ различных видов при  $\bar{a}_2 = -1$ , а точками выделены места, соответствующие функциям  $U_{пi}^*$ ,  $i=\overline{1,4}$ . Как видно из рисунка, сечение области существования функции ОУ  $U_1^*(T)$  представляет собой параллелограмм со сторонами, соединяющими точки  $U_{пi}^*$ ,  $i=\overline{1,4}$ .

В общем случае соотношения для расчета параметров функций  $U_i^*(T)$  по значениям синтезирующих переменных получаются решением систем уравнений вида

$$L_j = \int_0^2 \overline{\Phi}_{j,n}(2-T)U_i^*(T)dT, \quad j=\overline{1, n}. \quad (3.63)$$

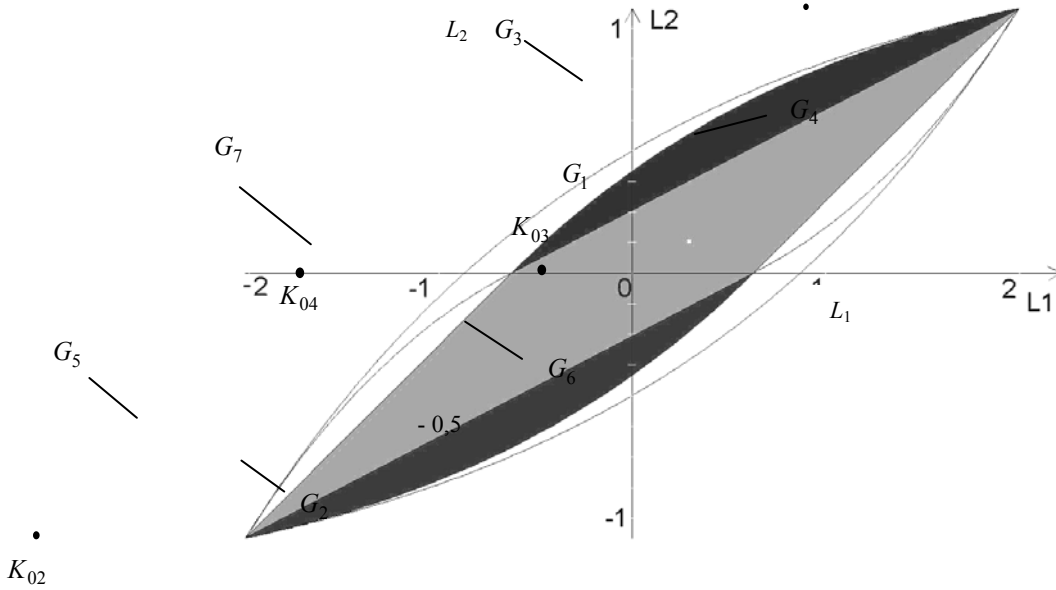


Рис. 3.1 Сечения областей существования видов ОУ модели <АИ, Э, Пр, О> при  $\bar{a}_2 = -1$

**Пример 3.3.** Для рассматриваемого объекта в примере 3.2 второго порядка параметры основных видов функций ОУ (3.59) определяются решением системы уравнений

$$L_1 = \int_0^2 U_i^*(T)dT; \quad L_2 = \int_0^2 e^{-\bar{a}_2 T} U_i^*(T)dT \quad (3.64)$$

и дополнительных условий типа  $T=0; U_i=1$ .

Расчет параметров  $C_1, D_1$  функции ОУ первого типа  $U_1^*(T)=C_1+D_1e^{-\bar{a}_2 T}$  может производиться по конечным формулам. Действительно, подставляя  $U_1^*(T)$  в (3.64) и интегрируя, получим систему линейных уравнений относительно  $C_1, D_1$ :

$$\begin{aligned} 2C_1 + \frac{1}{\bar{a}_2}(1 - e^{-2\bar{a}_2})D_1 &= L_1; \\ \frac{1}{\bar{a}_2}(e^{2\bar{a}_2} - 1)C_1 + \frac{1}{2\bar{a}_2}(e^{2\bar{a}_2} - e^{-2\bar{a}_2})D_1 &= L_2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

В результате параметры  $C_1, D_1$  в зависимости от значений  $L_1, L_2, \bar{a}_2$  рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} C_1 &= [0,5L_1(e^{2\bar{a}_2} - e^{-2\bar{a}_2}) - L_2(1 - e^{-2\bar{a}_2})] / \bar{a}_2 \Delta; \\ D_1 &= [2L_2 - L_1(e^{2\bar{a}_2} - 1)] / \bar{a}_2 \Delta, \end{aligned} \quad (3.66)$$

здесь

$$\Delta = \frac{1}{\bar{a}_2}(e^{2\bar{a}_2} - e^{-2\bar{a}_2}) - \frac{1}{\bar{a}_2^2}(e^{\bar{a}_2} - e^{-\bar{a}_2})^2$$

или

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{\bar{a}_2 L_1 - 2\bar{a}_2 L_2 (e^{2\bar{a}_2} - 1) - 1}{1 - \bar{a}_2 - e^{-2\bar{a}_2} - \bar{a}_2 e^{-2\bar{a}_2}}; \\ C_1 &= \frac{1}{2} L_1 - \frac{D_1}{2\bar{a}_2} (1 - e^{-2\bar{a}_2}). \end{aligned} \quad (3.66a)$$

Для пересчета параметров  $C_1, D_1$  в параметры  $d_0, d_1$  управления  $u_1^*(t) = d_0 + d_1 e^{-a_2(t-t_0)}$  в натуральном масштабе используются формулы (3.19).

$$d_0 = \frac{u_B - u_H}{2} C_1 + \frac{u_H + u_B}{2}, \quad d_1 = \frac{u_B - u_H}{2} D_1.$$

Пусть имеет место функция ОУ  $U_3^*(T)$ ,  $T \in [0; 2]$  (см. (3.59)). В этом случае с учетом условия  $U_3^*(T_3)=1$  и формул (3.64) получаем три уравнения:

$$C_3 + D_3 e^{-\bar{a}_2 T_3} = 1; \quad (3.67a)$$

$$C_3 T_3 - \frac{D_3}{\bar{a}_2} (e^{-\bar{a}_2 T_3}) = L_1 - 2 + T_3; \quad (3.67б)$$

$$C_3 (1 - e^{-\bar{a}_2 T_3}) + \frac{1}{2} D_3 (1 - e^{-\bar{a}_2 T_3}) = \bar{a}_2 L_2 + e^{-2\bar{a}_2} - e^{-\bar{a}_2 T_3}. \quad (3.67в)$$

Используя равенства (3.67a) и (3.67б), определяем зависимости

$$D_3 = \bar{a}_2 \frac{L_1 - 2}{1 - e^{-\bar{a}_2 T_3} (1 + \bar{a}_2 T_3)}; \quad (3.68a)$$

$$C_3 = 1 - \bar{a}_2 e^{-\bar{a}_2 T_3} \frac{L_1 - 2}{1 - e^{-\bar{a}_2 T_3} (1 + \bar{a}_2 T_3)}. \quad (3.68б)$$

Подставляя (3.68a), (3.68б) в (3.67в), определяем соотношение для расчета  $T_4$ , т.е.

$$\frac{(e^{-\bar{a}_2 T_3})^2}{1 - e^{-\bar{a}_2 T_3} (1 + \bar{a}_2 T_3)} = \frac{\bar{a}_2 L_2 + e^{-2\bar{a}_2} - 1}{\bar{a}_2 (0,5L_1 - 1)}. \quad (3.69)$$

Если компоненты массива  $R$  равны

$$a_2 = -0,8, \quad b = -0,02, \quad u_H = -2, \quad u_B = 2, \quad z_1^0 = 1, \quad z_2^0 = 1, \\ z_1^k = 2,3, \quad z_2^k = 0, \quad t_0 = 0, \quad t_k = 5,$$

тогда согласно (3.36)

$$L_1 = -0,4; \quad L_2 = 10 \quad \text{и} \quad \bar{a}_2 = -2.$$

В результате  $T_3 = 1,844$ ,  $C_3 = -0,769$ ,  $D_3 = 0,044$ , т.е.

$$U_3^*(T) = \begin{cases} -0,769 + 0,044 e^{2T}, & T \in [0; 1,844); \\ 1, & T \in [1,844; 2] \end{cases}$$

или

$$u_3^* = \begin{cases} -1,5376 + 0,0855 e^{0,8t}, & t \in [0; 4,61); \\ 2, & t \in [4,61; 5]. \end{cases}$$

В заключение отметим, что при возрастании размерности вектора фазовых координат увеличиваются число видов функции ОУ, а также их параметров. Пример возможных функций для объекта, динамика которого описывается дифференциальным уравнением третьего порядка, рассмотрен в [83].

### 3.3 ПОЗИЦИОННАЯ СТРАТЕГИЯ

Полученные в разделах 3.1, 3.2 результаты во многом могут быть использованы в задачах анализа оптимального управления с позиционной стратегией, т.е. в задачах оптимального регулирования. В настоящее время эти задачи обычно решаются методами динамического программирования и аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) [55, 56]. Наряду с несомненными достоинствами этим методам присущ и ряд недостатков. Так, применение метода динамического программирования связано с большим объемом вычислений, особенно для нелинейных объектов, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью. Основным недостатком АКОР является то, что получаемые зависимости оптимального управления от текущих значений фазовых координат практически не учитывают ограничения на управляющие воздействия. Поэтому с точки зрения минимизации затрат энергии реализуемая динамика энергоемкого объекта не всегда является строго оптимальной.

Основными задачами анализа энергосберегающих оптимальных регуляторов (ЭОР) являются следующие:

- 1) нахождение областей существования различных видов синтезирующих функций и соотношений для расчета их параметров;
- 2) определение условий устойчивости замкнутой системы оптимального управления (СОУ);

3) получение соотношений (для границ областей), выполнение которых обеспечивает соблюдение наложенных ограничений на изменение фазовых координат и управление;

4) исследование влияния режимных параметров регулирования и, прежде всего, временного интервала квантования, на показатели эффективности СОУ.

В настоящем разделе определение видов синтезирующих функций, нахождение областей существования различных видов этих функций, расчет их параметров выполняются с использованием принципа максимума и метода синтезирующих переменных [84]. При исследовании устойчивости замкнутой СОУ учитывается влияние возможных состояний функционирования.

Пусть ЭОР должен обеспечивать реализацию задачи оптимального управления линейным объектом с использованием позиционной стратегии при ограничении на управление, закрепленными концами траектории изменения фазовых координат и фиксированным временным интервалом, т.е.  $\langle M, \Phi, \text{Пз}, O \rangle$ . В задачах с позиционной стратегией вместо вектора  $z$  используется отклонение текущих значений  $z(t)$  от задаваемого или конечного значения  $z(t_k)$ . В этом случае при функционале  $I_3$  ЗОУ записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [t_0, t_k]; \\ \forall t \in [t_0, t_k]: u(t) &\in [u_n, u_b]; \\ x(t_0) &= x^0, \quad x(t_k) = x^k; \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$I_3 = \int_{t_0}^{t_k} u^2(t) dt,$$

где  $A, B$  – матрицы параметров модели объекта соответствующих размерностей;  $u_n, u_b$  – нижняя и верхняя границы изменения управления;  $x^0, x^k$  – начальное и конечное значения вектора  $x$ , обычно  $x^k = (0, \dots, 0)^T$ .

Начальные исходные данные ЗОУ (3.70) представляют собой массив

$$R_0 = (A, B, u_n, u_b, x^0, x^k, t_0, t_k). \quad (3.71)$$

При анализе ЗОУ необходимо определить возможные виды синтезирующих функций  $S$ , которые используются для расчета оптимальных по критерию  $I_3$  управляющих воздействий  $u^*$  в каждый момент времени  $t$  в зависимости от текущего значения  $x(t)$  и остаточного времени  $\tau = t_k - t$  при исходных данных  $R_0$ , т.е.

$$u^*(t) = S(x(t), \tau; R_0).$$

Вопросы определения видов функций ОУ при программном управлении рассмотрены в разд. 3.2. На основе этих результатов и в предположении, что собственные числа матрицы  $A$  вещественные и разные, имеет место следующее утверждение.

**Утверждение 3.4.** Если для задаваемых в момент времени  $t$  исходных данных  $R_t = (f, u_n, u_b, z^t, z^k, t_0, t_k)$  решение ЗОУ (3.70) существует и функция  $\Psi_n(t)$  (см. (3.46)) имеет монотонный характер изменения, то возможны пять видов синтезирующей функции  $S(z(t), \tau; R_t)$ :

$$S_j(z_t, \tau; R_t) = \sum_{i=0}^n d_{ij}(R_t), \quad j = 1, 2, 3; \quad (3.72)$$

$$S_4(z_t, \tau; R_t) = S_b(z_t, \tau; R_t) = u_b, \quad S_3(z_t, \tau; R_t) = S_n(z_t, \tau; R_t) = u_n,$$

где  $d_{ij}(R_t)$  – параметры функции ОУ при программном управлении;  $f$  – данные в массиве  $R_t$ , содержащие информацию о виде модели динамики и ее параметрах.

Сокращение числа видов при позиционной стратегии по сравнению с программной непосредственно следует из того, что при программной стратегии функции  $u_4^*(t)$  и  $u_6^*(t)$  начинаются со значения  $u_b$ , а  $u_5^*(t)$  и  $u_7^*(t)$  с  $u_n$  (см. (3.59)).

**Следствие утверждения 3.4.1.** Аналитическое выражение синтезирующей функции можно получить, используя формулы расчета параметров программного ОУ для скорректированного в момент времени  $t$  значения вектора синтезирующих переменных  $L_t$ .

**Пример 3.4.** Для модели ЗОУ  $\langle \text{АИ}, \text{Э}, \text{Пр}, O \rangle$  функция  $f$  в массиве  $R_t$  содержит информацию о параметрах  $a_2, b$ . Массиву  $R_t = (a_2, b, u_b, u_n, z_1(t), z_2(t), z_1^k, z_2^k, t, t_k)$  соответствуют значения синтезирующих переменных

$$L_1(t) = \frac{4}{b\Delta u\tau} \left( z_2^k - z_2(t) - a_2(z_1^k - z_1(t)) - 2 \frac{u_b + u_n}{\Delta u} \right);$$

$$L_2(t) = \frac{4}{b\Delta u\tau} \left( z_2^k - z_2(t)e^{a_2\tau} - 2 \frac{u_b + u_n}{a_2\Delta u\tau} (e^{a_2\tau} - 1) \right);$$

$$\lambda(t) = 0,5a_2\tau, \quad \Delta u = u_b - u_n.$$

В нормированном масштабе, т.е. для базовой ЗОУ, в этом случае для  $j=1$  синтезирующая функция определяется формулой

$$S_1(z_t, \tau, R_t) = C_1(R_t) + D_1(R_t),$$

где

$$D_1(R_t) = - \frac{L_1(t)(e^{-2\lambda(t)} - 1) + 2\lambda(t)L_2(t)e^{-2\lambda(t)}}{e^{-4\lambda(t)} - 1 + (e^{-2\lambda(t)} - 1)^2 / \lambda(t)};$$

$$C_1(R_t) = \left( L_1(t) + D_1(R_t) \frac{e^{-2\lambda(t)} - 1}{\lambda(t)} \right) / 2.$$

Вопросы определения вида синтезирующей функции по значениям  $R_0$  и  $R_t$  рассматриваются в следующем разделе.

### 3.4 УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Важной задачей анализа оптимального управления, реализуемого с применением позиционной стратегии, является исследование вопросов устойчивости.

В процессе реальной эксплуатации отдельные компоненты массива  $R$  могут отклоняться от первоначальных (в момент времени  $t_0$ ) значений, при этом энергосберегающий регулятор (ЭР) должен обеспечивать достижение конечного состояния объекта  $z^k$  за допустимое время, т.е. замкнутая система оптимального регулирования должна обладать устойчивостью.

При исследовании устойчивости систем оптимального регулирования с учетом возможных изменений технических параметров и исходных данных при функционировании используется ряд подходов. К ним относятся рассмотрение технической устойчивости, устойчивости вида «ограниченный вход вызывает ограниченный выход», стохастической устойчивости и устойчивости систем со случайными параметрами, устойчивости терминальных систем управления и др. [85 – 89].

В настоящем разделе устойчивость систем энергосберегающего регулирования рассматривается на множестве  $\mathcal{H}$  состояний функционирования (МСФ) с использованием математического аппарата метода синтезирующих переменных. ЗОУ в состоянии функционирования  $h$  и синтезирующую функцию  $S_h$  для линейного объекта при закрепленных концах фазовой траектории, фиксированном временном интервале  $[t_0, t_{kh}]$ , ограничении на управление и минимизируемом функционале  $I_3$  в виде затрат энергии запишем в виде:

$$\dot{z} = A_h z(t) + B_h u(t), \quad t \in [t_0, t_{kh}];$$

$$z(t_0) = z_{0h}, \quad z(t_{kh}) = z_{kh};$$

$$\forall t \in [t_0, t_{kh}]: u(t) \in [u_{nh}, u_{bh}]; \quad (3.73)$$

$$I_3 = \int_{t_0}^{t_{kh}} u^2(t) dt;$$

$$u^*(t) = S_h(z(t), \tau), \quad \tau = t_{kh} - t,$$

где  $z_{0h}, z_{kh}$  – начальное и конечное значения траектории вектора  $z$  в состоянии  $h$  и т.д.

Существование решения ЗОУ (3.73), вид и параметры синтезирующей функции при  $t = t_0$  определяются начальным значением массива исходных данных

$$R_{0h} = (A_h, B_h, u_{nh}, u_{bh}, z_{0h}, z_{kh}, t_0, t_{kh}),$$

а в текущий момент времени  $t \in [t_0, t_{kh}]$

$$R_h = (A_h, B_h, u_{nh}, u_{bh}, z(t), z_{kh}, t, t_{kh}).$$

При необходимости массив  $R_h$  может рассматриваться как вектор, а множество его значений – как векторное пространство. Изменение фазовых координат замкнутой системы оптимального управления (СОУ) в состоянии  $h$  описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = A_h z(t) + B_h S(z(t), \tau; R_{0h}).$$

Будем полагать, что выполняются следующие допущения.

- 1 Объект полностью управляем, т.е. для всех состояний  $h$  матрица управляемости имеет ранг  $n$ .
- 2 Собственные значения матрицы  $A_h$  вещественные для всех значений  $h$ .
- 3 При отсутствии возмущающих воздействий и шаге дискретизации по времени, стремящемся к нулю, значения фазовых траекторий при программной и позиционной стратегиях для одинаковых значений  $R_h$  совпадают.
- 4 Массив исходных данных  $R_h$  может быть заменен вектором синтезирующих переменных, значения которого в каждый момент времени, как и значение  $R_h$ , однозначно определяет вид функции оптимального управления (ОУ) и ее параметры (как при программной, так и позиционной стратегиях).

Требуется получить условия устойчивости замкнутых СОУ в терминах синтезирующих переменных при возможных изменениях переменной состояния функционирования  $h$ . Далее подстрочный индекс  $h$  у массива  $R$ , его компонентов и вектора  $L$  будет использоваться лишь в случаях, когда необходимо отразить специфику изменения состояний функционирования.

В зависимости от характера изменения переменной  $h$  и возможности идентификации ее значений на временном интервале  $[t_0, t_{kh}]$  в разд. 2.2 выделены четыре класса СОУ на МСФ. Соответствующие этим классам уравнения динамики замкнутых систем управления имеют вид:

- применительно к системам первого класса (СОУ1), для которых значение  $h$  известно и постоянно (изменения  $h$  могут происходить вне интервала  $[t_0, t_{kh}]$ ), здесь

$$\dot{z} = A_h z(t) + B_h S_h(z(t), \tau; R_{0h}), \quad t \in [t_0, t_{kh}], \quad h \in \mathcal{H}; \quad (3.74)$$

- для систем второго класса (СОУ2), у которых значение  $h$  также постоянно, но неизвестно и в предположении  $\forall h \in \mathcal{H} : t_{kh} = t_k, z_{kh} = z_k$  имеет место

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_{\mathcal{H}} z(t) + B_{\mathcal{H}} S_{\mathcal{H}}(z(t), \tau; R_{\mathcal{H}}^0), \quad t \in [t_0, t_k]; \\ A_{\mathcal{H}} &= \{A_h, h \in \mathcal{H}\}, \quad B_{\mathcal{H}} = \{B_h, h \in \mathcal{H}\}; \\ R_{\mathcal{H}}^0 &\in \mathcal{R}_{\mathcal{H}}^0 = \{R_{0h}, h \in \mathcal{H}\}; \end{aligned} \quad (3.75)$$

- для систем третьего класса (СОУ3), у которых значение  $h$  может изменяться и известно на интервале  $[t_0, t_{kh}]$ , в этом случае

$$\dot{z} = \begin{cases} A_{h_1} z(t) + B_{h_1} S_{h_1}(z(t), \tau; R_{h_1}), & t \in [t_0, t_{h_1}); \\ \dots & \\ A_{h_k} z(t) + B_{h_k} S_{h_k}(z(t), \tau; R_{h_k}), & t \in [t_{h_{k-1}}, t_{kh}]; \end{cases} \quad (3.76)$$

- для систем четвертого класса (СОУ4), у которых значение  $h$  также может изменяться на интервале  $[t_0, t_{kh}]$ , но в отличие от СОУ3 неизвестно, для этих систем

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A_{\mathcal{H}(\cdot)} z(t) + B_{\mathcal{H}(\cdot)} S_{\mathcal{H}(\cdot)}(z(t), \tau; R_{\mathcal{H}(\cdot)}^0), \quad t \in [t_0, t_{kh}]; \\ A_{\mathcal{H}(\cdot)} &= \{A_{h(\cdot)}, h(\cdot) \in \mathcal{H}(\cdot)\}, \quad B_{\mathcal{H}(\cdot)} = \{B_{h(\cdot)}, h(\cdot) \in \mathcal{H}(\cdot)\}, \end{aligned} \quad (3.77)$$

здесь  $\mathcal{H}, \mathcal{H}(\cdot)$  – соответственно множества значений переменной состояний функционирования  $h$  и траекторий  $h(\cdot)$  на интервале  $[t_0, t_{kh}]$ ;  $S_{\mathcal{H}}, S_{\mathcal{H}(\cdot)}$  – синтезирующие функции, используемые оптимальным регулятором (ОР) на множествах  $\mathcal{H}$  и  $\mathcal{H}(\cdot)$ ;  $R_{\mathcal{H}}^0, R_{\mathcal{H}(\cdot)}^0$  – исходные данные ЗОУ соответственно в  $S_{\mathcal{H}}$  и  $S_{\mathcal{H}(\cdot)}$ .

Под изменением  $h$  при анализе устойчивости понимается изменение любого из компонентов массива  $R$ , а, следовательно, и вектора  $L$ , за исключением текущего времени  $t$ , играющего роль  $t_0$ , и значения  $z(t)$ .

Для СОУ1 (см.(3.74)) устойчивость сначала рассматривается применительно к каждому известному состоянию  $h$ , а затем делается вывод об устойчивости на МСФ.

**Определение 3.7.** В качестве начального состояния СОУ1 будем рассматривать значение вектора  $L_{0h}$ , тогда изменение  $z$  замкнутой системы при  $t \in [t_0, t_{kh}]$  определяется уравнением

$$\dot{z} = A_h z(t) + B_h S(z(t), \tau; L_{0h}). \quad (3.78)$$

Значение  $L_{0h}$  лишь в идеальном случае соответствует реальному начальному состоянию СОУ. В действительности параметры  $A_h, B_h$  модели объекта, границы  $u_{nh}, u_{bh}$  изменения управления и другие компоненты  $R_{0h}$  имеют отклонения, характеризующие внутренние свойства системы (неточность используемой математической модели, реальное значение  $u_{bh}$  и т.д.). Обозначим вектор отклонений задаваемого  $R_{0h}$  от реального через  $\Delta R_{0h}$ , а норму последнего через  $\|\Delta R_{0h}\|$ .

**Определение 3.8.** Замкнутая СОУ1 называется устойчивой в состоянии  $h$  при данных  $R_{0h}$  (и отсутствии внешних возмущающих воздействий), если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , зависящее от  $R_{0h}$ , что из условия  $\|\Delta R_{0h}\| < \delta$  сле-



дует  $\|\tilde{z}(t_{kh}) - z_h^k\| < \varepsilon$ , здесь  $\tilde{z}(t_{kh})$  – фактическое значение вектора  $z$  в конечный момент времени. Значение  $\varepsilon$  определяется допустимой погрешностью вывода объекта на требуемое значение  $z_h^k$ .

Таким образом, в данном определении устойчивости в качестве входа рассматривается массив исходных данных  $R_0$ . Задача исследования устойчивости здесь тесно связана с задачей построения области достижимости [18, 22].

**Определение 3.9.** СОУ1 устойчива на МСФ  $\mathcal{H}$ , если она устойчива  $\forall h \in \mathcal{H}$ .

**Утверждение 3.5.** СОУ1 в состоянии  $h$  при отсутствии возмущений устойчива, если  $L_{0h} \in \mathcal{L}_c$ , и устойчива на МСФ, если  $\forall h \in \mathcal{H}: L_{0h} \in \mathcal{L}_c$ .

Это непосредственно следует из определения 3.7, допущений 3, 4 и определения области  $\mathcal{L}_c$  существования решения ЗОУ.

**Определение 3.10.** СОУ1 в состоянии  $h$  находится на границе устойчивости, если значение  $L_{0h} \in \mathcal{G}(\mathcal{L}_c)$ , и СОУ1 неустойчива, если  $L_{0h} \notin \mathcal{L}_c$ , здесь  $\mathcal{G}(\mathcal{L}_c)$  – граница области  $\mathcal{L}_c$ .

Исследования устойчивости СОУ1 в пространстве  $\mathcal{L}$  применительно к линейным объектам второго порядка показали, что для устойчивых СОУ при  $t \rightarrow t_{kh}$  отношение  $L_{1h}(t)/L_{2h}(t)$  стремится к некоторому постоянному значению, при котором  $u^*(t) = \text{const}$ .

На рис. 3.2, а показаны примеры траекторий  $L(\cdot) = (L(t) = (L_1(t), L_2(t)), t \in [t_0, t_k])$  устойчивой СОУ1, динамика объекта здесь описывается моделью двойного интегратора [18, 22, 40]. На рисунке приведены пять траекторий  $L(t)$ , «стартовых» (начало обозначено знаком  $\circ$ , окончание –  $\square$ ) в пяти областях  $\mathcal{L}_i, i = \overline{1, 5}$ , с различными видами синтезирующих функций.

Если  $L_0 \notin \mathcal{L}_c$ , то цель управления не достигается, т.е.  $z(t_k) \neq z_k$  (синтезирующая функция в этом случае принимала граничное значение). На рис. 3.2, б показаны две траектории  $L(t)$ , начинающиеся при  $L_0 \notin \mathcal{L}_c$ .

СОУ2 (см.(3.75)) представляют собой разновидность стохастических систем [65]. Входом для них является векторная дискретная случайная величина  $R_{\mathcal{H}}^0$ . Движение замкнутой СОУ2 согласно (3.75) и функциональной связи вектора  $L$  от массива  $R$  может быть описано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = \mathcal{A}_{\mathcal{H}} z(t) + \mathcal{B}_{\mathcal{H}} S_{\mathcal{H}}(z(t), \tau; L_{\mathcal{H}}^0), \quad \tau = t_k - t, \quad (3.79)$$

где  $L_{\mathcal{H}}^0$  – значение вектора  $L$ , вычисляемое по данным  $R_{\mathcal{H}}^0$ .

В качестве  $L_{\mathcal{H}}^0$  для СОУ2 используется значение  $L_h$ , соответствующее наиболее вероятному состоянию функционирования  $h$  или подмножеству  $H \subset \mathcal{H}$ , для которого при всех  $h \in H$  синтезирующая функция  $S_{\mathcal{H}}(z(t), \tau; L_{\mathcal{H}}^0)$  имеет один вид.

**Определение 3.11.** СОУ2 называется устойчивой относительно  $R_{\mathcal{H}}^0$ , если  $\forall R_{0h} \in \mathcal{R}_{\mathcal{H}}^0$  при  $t \rightarrow t_k$  значение  $z(t_k; R_{0h}) \rightarrow z^k$ . Если хотя бы при одном  $\forall R_{0h} \in \mathcal{R}_{\mathcal{H}}^0$  уравнение (3.79) приводит систему в точку  $z(t_k; R_{0h})$ , отличающуюся от  $z_k$  на недопустимую величину, то СОУ2 неустойчива. Здесь  $z(t_k; R_{0h})$  – значение при исходных данных  $R_{0h}$ .

**Утверждение 3.6.** СОУ2 устойчива относительно  $\mathcal{R}_{\mathcal{H}}^0$ , если выполняются следующие условия:

а)  $\forall h \in \mathcal{H}: L_{0h} \in \mathcal{L}_c$ ;

б) существует значение  $L_{\mathcal{H}}^0$  такое, что синтезирующая функция  $S_{\mathcal{H}}(z(t), \tau; L_{\mathcal{H}}^0) \forall L_h^0 \in \mathcal{L}_{\mathcal{H}}^0$  обеспечивает  $z(t_k; L_{\mathcal{H}}^0)$ , отличающееся от  $z_k$  на допустимую величину.

Следует заметить, что значение  $L_{\mathcal{H}}^0$  может быть не равно ни одному из элементов множества  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}^0 = \{L_{0h}, h \in \mathcal{H}\}$ . Для нахождения  $L_{\mathcal{H}}^0$  можно использовать некоторые граничные элементы  $\mathcal{L}_{\mathcal{H}}^0$ .

**Определение 3.12.** Пусть имеется некоторое значение  $\overline{L}_{\mathcal{H}}^0$ , полученное усреднением  $L_h^0, h \in \mathcal{H}$ , тогда значения  $L_{\text{нн}}^0(z_1)$  и  $L_{\text{нв}}^0(z_1)$  назовем соответственно нижним и верхним значениями по координате  $z_1$ , если

$$z_1(t_k; \overline{L}_{\mathcal{H}}^0) - z_1(t_k; L_{\text{нн}}^0(z_1)) = \max_h, \quad z_1(t_k; L_{\text{нв}}^0(z_1)) - z_1(t_k; \overline{L}_{\mathcal{H}}^0) = \max_h,$$

здесь  $z_1(t_k; L_{\beta}^0)$  – значения  $z_1(t_k)$ , полученные при синтезирующей функции  $S_{\mathcal{H}}(z(t), \tau; L_{\beta}^0), \beta \in \{\mathcal{H}, h_{\text{н}}, h_{\text{в}}\}$ .

Аналогично, если требуется, вводятся понятия  $L_{\text{нн}}^0(z_2), L_{\text{нв}}^0(z_2)$  и т.д. В ряде случаев граничные значения можно определить достаточно легко, например, если при изменении  $h$  меняется только параметр  $b_h$  в матрице  $B_h$ .

**Утверждение 3.7.** Пусть СОУ2 должна быть устойчива в смысле выполнения условий на допустимость отклонений по координате  $z_1$ , тогда если получено  $L_{jj}^0$ , обеспечивающее отличие  $z_1(t_k; L_{hn}^0(z_1))$  и  $z_1(t_k; L_{hb}^0(z_1))$  от  $z_{1k}$  на допустимую величину, то СОУ2 будет устойчива.

Естественным образом для СОУ2 может быть введено понятие устойчивости с вероятностью  $P_y$ , когда система устойчива для некоторого подмножества состояний  $H_y \subset \mathcal{H}$  и  $\text{Вер}\{h \in H_y\} = P_y$ . На рис. 3.3, а применительно к объекту двойного интегрирования показаны значения  $L_{0h}$   $h \in \{h_1, h_2, h_3\}$ , соответствующие начальным исходным данным  $R_{0h}$ , при которых замкнутая СОУ2 устойчива. Все три значения  $L_{0h}$  принадлежат области устойчивости  $\mathcal{L}_y \subset \mathcal{L}_c$ , изменения  $h$  связаны с отклонением параметра  $b$  от начального значения на 5 %.

Если  $L_{0h} \notin \mathcal{L}_y$ , то цель управления не достигается и траектория  $L(t)$  выходит за пределы  $\mathcal{L}_c$ . На рис. 3.3, б МСФ включает четыре состояния, три значения  $L_{0h} \in \mathcal{L}_y$  и одно расположено за пределами  $\mathcal{L}_y$  (при 80 %  $b$ ). Если предположить, что значения  $h$  равновероятны, то замкнутая СОУ2 устойчива с вероятностью  $P_y = 0,75$ . Рассмотрение устойчивости СОУ2 исключительно важно при решении задач гарантированного оптимального управления на МСФ [90, 91].

Входом для замкнутой СОУ3 согласно (3.76) является траектория изменяющегося массива исходных данных, на интервале  $t \in [t_0, t_k]$

$$R_h(\cdot) = (R_{h_1}, t \in [t_0, t_{п1}); R_{h_2}, t \in [t_{п1}, t_{п2}); \dots; R_{h_k}, t \in [t_{п,к-1}, t_k]), \quad (3.80)$$

где  $t_{пi}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$  – моменты переключения состояний  $h$ ;  $k$  – число состояний функционирования на интервале  $[t_0, t_{kh}]$ . Траектории (3.80) соответствует траектория в пространстве синтезирующих переменных.

Выделяют два вида СОУ3, различающиеся характером изменения переменной  $h$ . В системах первого вида изменение  $h$  происходит при достижении одной из фазовых координат некоторого заранее известного значения. Для теплового объек-

та таким значением может быть температура нагреваемого тела, например, до температуры «переключения»  $z_1^{n1}$  динамика теплового процесса описывается одной моделью (с матрицами параметров  $A_{h_1}, B_{h_1}$ ), а при температуре выше  $z_1^{n1}$  – другой моделью (с матрицами  $A_{h_2}, B_{h_2}$ ). Движение такой СОУЗ первого вида определяется системой уравнений

$$\dot{z} = \begin{cases} A_{h_1} z(t) + B_{h_1} S_{h_1}(z(t), \tau_1; L_{h_1}), & z_1 \in [z_1^0, z_1^{n1}); \\ \dots & \dots \\ A_{h_k} z(t) + B_{h_k} S_{h_k}(z(t), \tau_k; L_{h_k}), & z_1 \in [z_1^{nk-1}, z_1^k], \end{cases} \quad \tau_i = t_{pi} - t, \quad i = \overline{1, k}, \quad (3.81)$$

здесь  $t_{pi} = t(z_1^{ni})$  – время достижения значения  $z_1^{ni}$ ;  $L_{h_i}$  – значение  $L$  в момент времени  $t(z_1^{ni-1})$ .

Как видно из (3.81), для СОУЗ первого вида число «переключений» значений  $h$  заранее можно определить по величине интервала  $[z_1^0, z_1^k]$ . В СОУЗ второго вида изменения  $h$  имеют случайную природу. Для таких СОУ число «переключений»  $h$  и время до переключения является случайными величинами.

**Определение 3.13.** СОУЗ называется устойчивой относительно траектории  $R_{h(\cdot)}$  (см. (3.80)), если при  $t \rightarrow t_k$  значение  $z(t_k; R_{h(\cdot)}) \rightarrow z_k$ .

**Утверждение 3.8.** Замкнутая СОУЗ устойчива относительно траектории  $R_{h(\cdot)}$ , если выполняется условие:

$$\forall h_i \in \{h_1, h_2, \dots, h_k\}: \quad L_{h_i}(t_{pi-1}) \in \mathcal{L}_c, \quad (3.82)$$

здесь  $t_{p0} = t_0$ .

Значения  $L_{h_i}(t_{pi-1})$  в соотношении (3.82) для систем первого вида определяются с использованием промежуточных значений  $z^{ni}$  и  $t_{pi}$  (см. (3.81)). Для СОУЗ второго вида в расчете  $L_{h_i}(t_{pi-1})$  используются только конечные значения  $z^k$  и  $t_k$ . На рис. 3.4 приведен пример изменения  $L(t)$  для устойчивой СОУЗ, когда объект в состоянии  $h_1$  описывается моделью двойного интегратора, а в состоянии  $h_2$  – дифференциальным уравнением первого порядка (апериодическое звено). Пунктир на рис. 3.4 соответствует моменту  $t_{p1}$  «переключения» состояния функционирования.

При рассмотрении устойчивости систем четвертого класса (СОУ4) изменение  $h$  описывается множеством траекторий  $R_{h(\cdot)}$  вида (3.80), т.е.

$$\mathcal{R}_{H(\cdot)} = \{R_{h(\cdot)}, h(\cdot) \in H(\cdot)\}.$$

Так как для СОУ4 значения  $h$  не идентифицируются, то в результате используется синтезирующая функция  $S_{H(\cdot)}(z(t), \tau; L_{h_1}^0)$ , соответствующая некоторому начальному состоянию  $h_1$ . Движение системы в этом случае описывается уравнением

$$\dot{z} = \mathcal{A}_{H(\cdot)} z(t) + \mathcal{B}_{H(\cdot)} S_{H(\cdot)}(z(t), \tau; L_{h_1}^0), \quad \tau = t_k - t. \quad (3.83)$$

Если начальное состояние неизвестно, то выбирается  $S_{H(\cdot)}(z(t), \tau; L_{H(\cdot)}^0)$ , аналогично тому, как делалось для СОУ2.

СОУ4 называется устойчивой относительно  $R_{H(\cdot)}$ , если при  $t \rightarrow t_k$  значение  $\tilde{z}(t_k) \rightarrow z_k$ . Проверка устойчивости СОУ4 встречает серьезные трудности. Здесь могут использоваться два подхода. Первый связан с имитационным моделированием. В данном случае задается граф изменения состояний функционирования, в соответствии с которым имитируются возможные траектории  $h(\cdot)$  изменения переменной  $h$ , затем для каждой траектории  $h(\cdot)$  рассчитываются  $z(\cdot/h(\cdot))$ . По результатам имитации оценивается вероятность достижения цели управления, т.е.  $z(t_k) = z_k$ , а, следовательно, и вероятность  $P_y$  того, что система устойчива.

Второй подход предполагает применение свойства включаемости [92]. Если для объекта на МСФ выполняются условия включаемости, т.е. можно определить границы воронки решений системы (3.83) при любых траекториях  $h(\cdot)$ , то для проверки устойчивости СОУ4 можно использовать результаты, полученные для СОУ2.

### 3.5 МЕТОДИКА АНАЛИЗА ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ

Анализ оптимального управления является важной частью выполнения технического проекта, а именно разработки математического и алгоритмического обеспечения систем энергосберегающего управления. Предполагается, что для выполнения анализа известны модель динамических режимов, исходные данные для численного решения ЗОУ в различных состояниях функционирования. Кроме того исследуемая модель ЗОУ содержится в базе знаний экспертной системы. Анализ ОУ выполняется в диалоговом режиме и включает следующие этапы.

1. Определяется, для всех ли возможных исходных данных на МСФ решение ЗОУ существует, т.е. будут ли выполняться условия устойчивости системы управления при реальной эксплуатации. Если условия устойчивости не выполняются или не обеспечивается требуемый запас устойчивости, то исходные данные корректируются решением обратных задач.

2. Определяются возможные виды функций ОУ для полученных исходных данных и проверяется правильность выбора стратегии реализации ОУ.

3. Используя аналитические и численные значения траекторий изменения управления и фазовых координат, проверяется выполнение всех ограничений, содержащихся в математической постановке ЗОУ.

4. Оценивается эффект энергосбережения от использования оптимального управления. При этом учитываются возможные затраты (потери) энергии на техническую реализацию СЭУ.

5. Выписываются необходимые соотношения для расчета энергосберегающих управляющих воздействий, т.е. формулы расчета параметров функций ОУ, соотношения для границ областей используемых функций ОУ и др.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии рассмотрен математический аппарат и алгоритмическое обеспечение, которые позволяют решать задачи анализа оптимального управления объектами на множестве состояний функционирования, т.е. когда в процессе управления могут изменяться параметры модели динамики, границы изменения управления, конечные значения фазовых координат и др.

Приводятся примеры полного анализа оптимального управления различными динамическими объектами. Анализ включает определение видов функции оптимального управления, получение условий существования решения задачи, определение соотношений для границ областей видов функций оптимального управления в пространстве синтезирующих переменных и алгоритмы для оперативного расчета параметров управляющих воздействий.

Разработана структура расширенного множества состояний функционирования технических систем, которое комплексно учитывает состояния работоспособности частей системы, производственные ситуации и состояние внешнего окружения, характеризуемого нечетким множеством. Предложена методика построения расширенного множества состояний функционирования с дискретными состояниями, которые характеризуются показателем вероятностной природы, удовлетворяющим условию нормировки.

Рассмотрены различные стратегии и структурные схемы систем оптимального управления. Формализованы модели постановок задач оптимального управления на множестве состояний функционирования и модели расчетного пространства. Сформулированы прямые и обратные задачи энергосберегающего управления.

Полученные результаты анализа оптимального управления на множестве состояний функционирования служат основой базы знаний для широкого круга задач разработки алгоритмического обеспечения систем энергосберегающего управления различными динамическими объектами. Показано, что использование метода синтезирующих переменных при решении анализа позволяет представлять результаты по конкретной модели ЗОУ в компактном виде, т.е. эти результаты можно оперативно использовать в последующем для любых значений исходных данных во всех задачах с одинаковой моделью, функционалом и стратегией реализации ОУ.

Показано, что комбинация принципа максимума, динамического программирования и метода синтезирующих переменных позволяет оперативно решать задачи оптимального управления объектами, динамика которых описывается дифференциальными уравнениями с разрывной правой частью.

Численные примеры решения задач энергосберегающего управления показывают, что затраты энергии при оптимальном управлении динамическими режимами снижаются на 8 – 20 %.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Кириллин В.А. Энергетика. Главные проблемы. М.: Энергетика, 1985. 87 с.
- 2 Рэй Д. Экономия энергии в промышленности: Пер. с англ. М., 1985. 212 с.
- 3 Ядыкин И.Б. Вопросы системного проектирования автоматизированных систем учета энергоресурсов // Системные проблемы качества, математического моделирования и информационных технологий: Материалы Международной конф. и Российской науч. шк. М.: НИИ «Автоэлектроника», 1999. Ч. 7. С. 124 – 126.
- 4 Пяткин А.М., Шадрухин И.А. Экономия энергоресурсов: резервы и факторы эффективности. М.: Знаки, 1982. 64 с.
- 5 Степанов В.С. Анализ энергетического совершенства технологических процессов. Новосибирск: Наука, 1984. 85 с.
- 6 Сажин Б.С., Булеков А.П. Эксергетический метод в химической технологии. М.: Химия, 1992. 208 с.
- 7 Резников А.Н., Резников Л.А. Тепловые процессы в технологических системах. М.: Машиностроение, 1990. 288 с.
- 8 Михайлов В.В. и др. Рациональное использование топлива и энергии в промышленности. М., 1978. 224 с.
- 9 Аджиев М.Э. Энергосберегающие технологии. М., 1990. 64 с.
- 10 Аракелов В.Е., Кремер А.И. Методические вопросы экономии энергоресурсов. М.: Энергоатомиздат, 1990. 188 с.
- 11 Ятров С.Н. Энергосберегающие технологии в СССР и за рубежом: Аналитический альбом. М., 1991. 288 с.
- 12 Коновалов В.И., Коваль А.М. Пропиточно-сушильное и клеепромазочное оборудование. М.: Химия, 1989. 224 с.
- 13 Кафаров В.В., Мешалкин В.П., Гурьева Л.В. Оптимизация теплообменных процессов и систем. М.: Энергоатомиздат, 1988. 192 с.
- 14 Ценгер Ф.Г. Проектирование тепловой изоляции электростанций и тепловых сетей. Л.: Энергия, 1972. 198 с.
- 15 Данилов О.Л., Леончик Б.И. Экономия энергии при тепловой сушке. М.: Энергоатомиздат, 1986. 156 с.
- 16 Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы. М.: Высшая школа, 1989. 263 с.
- 17 Олейников В.А., Зотов Н.С., Пришвин А.М. Основы оптимального и экстремального управления: Учеб. пособие для студентов вузов. М.: Высшая школа, 1969. 296 с.
- 18 Атанс М., Фабл П. Оптимальное управление. М.: Машиностроение, 1968. 764 с.
- 19 Лейтман Дж. Введение в теорию оптимального управления. М.: Наука, 1968. 192 с.

- 20 Флюгге-Лотц Й., Марбах Г. Оптимальное управление в некоторых системах угловой ориентации при различных критериях качества // *Техническая механика*. 1963. № 2. С. 38 – 54.
- 21 Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. М.: Наука, 1987. 712 с.
- 22 Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение: Пер. с англ. / Под ред. д-ра техн. наук, проф. Ю.И. Топчиева. М.: Машиностроение, 1972. 544 с.
- 23 Сейдж Э.П., Уайт Ч.С. Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982.
- 24 Муромцев Ю.Л., Ляпин Л.Н., Попова О.В. Моделирование и оптимизация технических систем при изменении состояний функционирования. Воронеж: ВГУ, 1992. 164 с.
- 25 Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
- 26 Смирнова В.П., Разинцев В.И. Проектирование и расчет автоматизированных приводов. М.: Машиностроение, 1990. 368 с.
- 27 Герасимьяк Р.П. Динамика асинхронных электроприводов крановых механизмов. М.: Энергоатомиздат, 1986. 168 с.
- 28 Чистов В.П., Бондаренко В.Н., Святославский В.А. Оптимальное управление электрическими приводами. М.: Энергия, 1968. 232 с.
- 29 Сухинин Б.В., Ловчаков В.И., Сурков В.В., Краснов К.В. Аналитическое конструирование регулятора для следящей системы с люфтом. Информатика // *Машиностроение*. 1998. № 3. С. 66 – 69.
- 30 Микропроцессорные системы автоведения электроподвижного состава / Л.А. Баранов, Л.М. Головичер, Е.В. Ерофеев, В.М. Максимов; Под ред. Л.А. Баранова. М.: Транспорт, 1990. 272 с.
- 31 Механика космического полета (проблемы оптимизации) / Г.Л. Гродзовский, Ю.Н. Иванов, В.В. Токарев. М.: Наука, 1975. 704 с.
- 32 ТРЕЙС МОУД. Графическая инструментальная система для разработки АСУ. Версия 5.0: Руководство пользователя // AdAstra Research Group, Ltd. 1998. 771 с.
- 33 Бодров В.И., Громов Ю.Ю., Матвейкин В.Г. Метод решения задач оптимального управления в классе нечетких множеств. Тамбов: ТИХМ, 1988. 6 с.
- 34 Бодров В.И., Кулаков Ю.В., Шамкин В.Н. Оптимизация статических режимов работы воздухоразделительных установок низкого давления при переменном потреблении продуктов разделения // *Химическая промышленность*. 1993. № 1 – 2. С. 66 – 71.
- 35 Теория автоматического управления: Учеб. для вузов по спец. «Автоматика и телемеханика». В 2 ч. Ч. 2: Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления / А.А. Воронов, Д.П. Ким, В.М. Лохан и др.; Под ред. А.А. Воронова. М.: Высшая школа, 1986. 504 с.
- 36 Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 432 с.
- 37 Ногин В.Д., Протодяконов И.О., Евлампиев И.И. Основы теории оптимизации: Учеб. пособие для студентов вузов / Под ред. И.О. Протодяконова. М.: Высшая школа, 1986. 384 с.
- 38 Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972. 544 с.
- 39 Ляпин Л.Н., Муромцев Ю.Л. Анализ и оперативный синтез оптимального управления в задаче двойного интегратора на множестве состояний функционирования // *Техническая кибернетика: Изв. АН СССР*. 1990. № 3. С. 57 – 64.
- 40 Ляпин Л.Н., Муромцев Ю.Л., Попова О.В. Оптимальный по минимуму затрат энергии регулятор объекта двойного интегрирования // *Техническая кибернетика: Изв. РАН*. 1992. № 2. С. 3946.
- 41 Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978. 464 с.
- 42 Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник. В 5 т. 2-е изд., перераб. и доп. Т. 3: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 656 с.
- 43 Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник. В 5 т. 2-е изд., перераб. и доп. Т. 3: Синтез регуляторов систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 656 с.
- 44 Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник. В 5 т. 2-е изд., перераб. и доп. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 656 с.
- 45 Чаки Ф. Современная теория управления // *Нелинейные, оптимальные и адаптивные системы*. М.: Мир, 1975. 424 с.
- 46 Гудвин Г.К., Гребне С.Ф., Сальгадо М.Э. Проектирование систем управления. М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2004. 911 с.
- 47 Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления: Учебник / Под ред. Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 744 с.
- 48 Пупков К.А., Коньков В.Г. Интеллектуальные системы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. 348 с.
- 49 Радкевич В.В. Системы управления объектами газовой промышленности. М.: Серебряная нить, 2004. 440 с.
- 50 Люггер Джордж Ф. Искусственный интеллект: стратегии и методы решения сложных проблем. М.: Издательский дом «Вильямс», 2003. 864 с.
- 51 Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах. М.: Наука, 1990. 292 с.
- 52 Корнеева А.И. Тенденция развития системной автоматизации технологических процессов // *Приборы и системы управления*. 1998. № 8. С. 51 – 56.
- 53 Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969. 384 с.
- 54 Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
- 55 Беллман Р. Динамическое программирование. М.: Изд-во иностранной литературы, 1960. 400 с.
- 56 Легов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов // *Автоматика и телемеханика*. № 4. С. 436 – 441; 1960. № 5. С. 561 – 568; 1960. № 6. С. 661 – 665; 1961. № 4. С. 425 – 435; 1962. № 11. С. 1405 – 1413.
- 57 Красовский А.А. Обобщение задачи аналитического конструирования регуляторов при заданной работе управляющих и управляющих сигналов // *Автоматика и телемеханика*. 1969. № 7. С. 7 – 17.
- 58 Гнеденко Б.Ф., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 275 с.

- 59 Муромцев Ю.Л. Определение границ эффективности и работоспособности сложных систем // Автоматика и телемеханика. 1988. № 4. С. 164 – 176.
- 60 Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976. 165 с.
- 61 Муромцев Ю.Л. Безаварийность и диагностика нарушений в химических производствах. Методы, модели, алгоритмы. М.: Химия, 1990. 144 с.
- 62 Прикладные нечеткие системы: Пер. с япон. / К. Асаи, Д. Ватада, С. Иваи и др.; Под ред. Т. Терано, К. Асаи, М. Сугено. М.: Мир, 1993. 368 с.
- 63 Таха Хэмди А. Введение в исследование операций. М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. 912 с.
- 64 Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981. 288 с.
- 65 Аоки М. Оптимизация стохастических систем. М.: Наука, 1971. 424 с.
- 66 Муромцев Д.Ю., Орлов В.В. Информационно-технологическая среда проектирования интеллектуальных контроллеров // Компьютерная хроника. 1997. № 12. С. 3 – 8.
- 67 Муромцев Д.Ю. Оперативный синтез энергосберегающего управления для линейных систем с запаздыванием на множестве состояний функционирования // Труды ТГТУ: Сб. науч. ст. молодых ученых и студентов. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 1999. Вып. 4. С. 47 – 50.
- 68 Дьяконов В., Круглов В. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем: Специальный справочник. СПб.: Питер, 2002. 448 с.
- 69 Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965. 474 с.
- 70 Вигак В.М. Оптимальное управление нестационарными температурными режимами. Киев: Наукова думка, 1979. 395 с.
- 71 Липов В.Я., Паршин Г.Н., Селезнев Ю.Н. Оптимизация электропечей непрерывного действия. М.: Энергоатомиздат, 1989.
- 72 Муромцев Д.Ю., Муромцев Ю.Л., Орлова Л.П. Синтез энергосберегающего управления многостадийными процессами комбинированным методом // Автоматика и телемеханика. 2002. № 3. С. 169 – 178.
- 73 Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975. 684 с.
- 74 Муромцев Ю.Л., Ляпин Л.И., Сатина Е.В. Метод синтезирующих переменных при оптимальном управлении линейными объектами // Приборостроение: Изв. вузов. 1993. № 11 – 12. С. 19 – 25.
- 75 Теоретические основы исследования сложных систем с учетом надежности: Учеб. пособие / Ю.Л. Муромцев, Л.Н. Ляпин, В.Н. Грушев, В.Н. Шамкин. М.: Московский институт химического машиностроения, 1987. 116 с.
- 76 Формальский А.М. Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами. М.: Наука, 1974.
- 77 Калман Р., Фалб П., Арби М. Очерки по математической теории систем: Пер. с англ. М.: Мир, 1971. 400 с.
- 78 Фельдбаум А.А. Основы теорий оптимальных автоматических систем. М.: Наука, 1966.
- 79 Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования. Кн. 1: Математическое описание, анализ устойчивости и качества систем автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. М.: Машиностроение, 1967.
- 80 Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования САР. М.: Машиностроение, 1989. 752 с.
- 81 Пельпер Д.С. и др. Гироскопические системы. М.: Высшая школа, 1988. 424 с.
- 82 Муромцев Д.Ю., Аль-Наджар Г.М. Виды функций энергосберегающего управления в задаче тройного интегратора // Труды ТГТУ: Сб. науч. ст. молодых ученых и студентов. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. Вып. 13. С. 149 – 153.
- 83 Муромцев Д. Ю., Губанов Р.А. Энергосберегающий оптимальный многофункциональный регулятор // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2001. Т. 7, № 1. С. 20 – 34.
- 84 Летов А.М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. М., 1962.
- 85 Заде Л., Дезоер Ч. Теория линейных систем (Метод пространства состояний). М.: Наука, 1970.
- 86 Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969.
- 87 Кореневский Д.Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии. Киев: Наукова думка, 1989.
- 88 Барский В.Е. Формирование устойчивых на конечном интервале времени терминальных систем управления // Техническая кибернетика. 1990. № 2.
- 89 Муромцев Ю.Л., Ляпин Л.Н. О гарантированном оптимальном управлении на множестве состояний функционирования // В кн.: Динамика неоднородных систем. М.: ВНИИСИ, 1989.
- 90 Муромцев Ю.Л., Ляпин Л.Н. Гарантированная оптимальная программа управления на множестве состояний функционирования // Автоматика и телемеханика. 1993. № 3.
- 91 Муромцев Ю.Л., Ляпин Л.Н. Включаемость сложных систем // Сб. трудов. М.: ВНИИСИ, 1988. Вып. 14.
- 92 Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974.
- 93 Муромцев Ю.Л., Орлова Л.П. Энергосберегающее управление с учетом ошибок измерения // Компьютерная хроника. 2001. № 5. С. 67 – 75.
- 94 Артемова С.В., Муромцев Д.Ю., Грибков А.Н. Прогнозирование и компенсация возмущения в системах оптимального управления // Вестник Тамбовского государственного технического университета. 2003. Т. 9, № 4. С. 632 – 637.

---

ВВЕДЕНИЕ .....	3
1 ЭНЕРГОЕМКИЕ ОБЪЕКТЫ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ .....	6
1.1 Характеристика энергоемких объектов .....	6
1.2 Задачи энергосберегающего управления .....	13
1.3 Системы оптимального управления .....	16
1.4 Методика разработки концепции при проектировании систем энергосберегающего управления .....	19
2 ЗАДАЧИ ЭНЕРГОСБЕРЕГАЮЩЕГО УПРАВЛЕНИЯ НА МНОЖЕСТВЕ СОСТОЯНИЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ .....	21
2.1 Расширенное множество состояний функционирования .....	21
2.2 Стратегии и структурные схемы систем оптимального управления .....	29
2.3 Модели задач оптимального управления .....	37
2.4 Прямые и обратные задачи .....	40
2.5 Методика эскизного проектирования систем энергосберегающего управления (СЭУ) .....	43
3 АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ .....	44
3.1 Метод синтезирующих переменных .....	44
3.2 Программная стратегия .....	57
3.3 Позиционная стратегия .....	67
3.4 Устойчивость системы оптимального регулирования .....	70
3.5 Методика анализа энергосберегающего управления .....	82
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	83
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	85

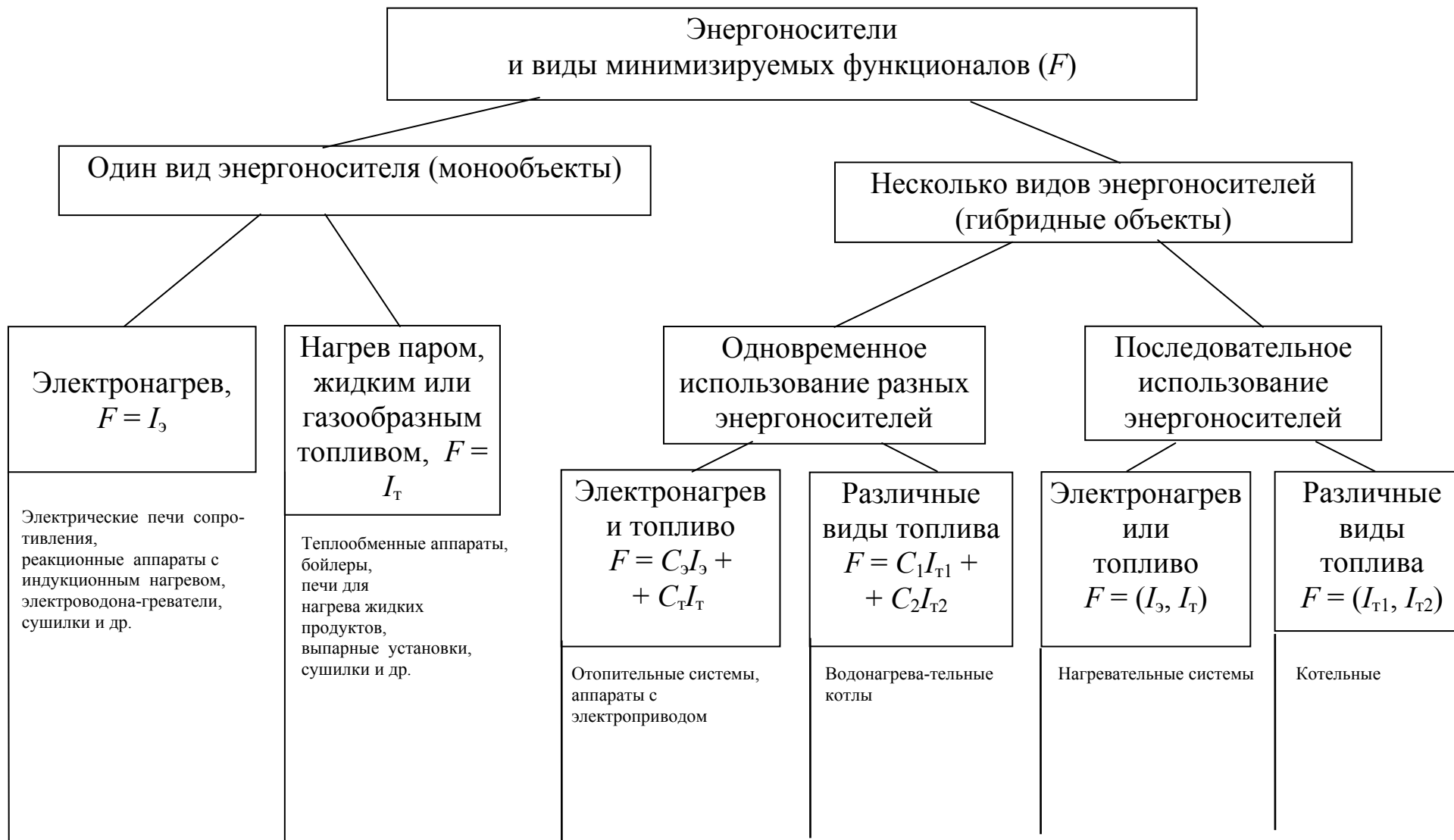


Рис. 1.1 Классификация тепловых объектов по видам минимизируемых функционалов в задачах энергосбережения ( $I_э$  – затраты энергии;  $I_т$  – расход топлива;  $c_i$  – весовые коэффициенты)





Рис. 1.2 Классификация тепловых объектов по режимам работы, определяющим стратегии реализации ОУ ( $S_{пр.к}$ ,  $S_{пр.нк}$  – программные стратегии корректируемая и некорректируемая соответственно;  $S_{пз}$  – позиционная стратегия; AP – автоматический регулятор)

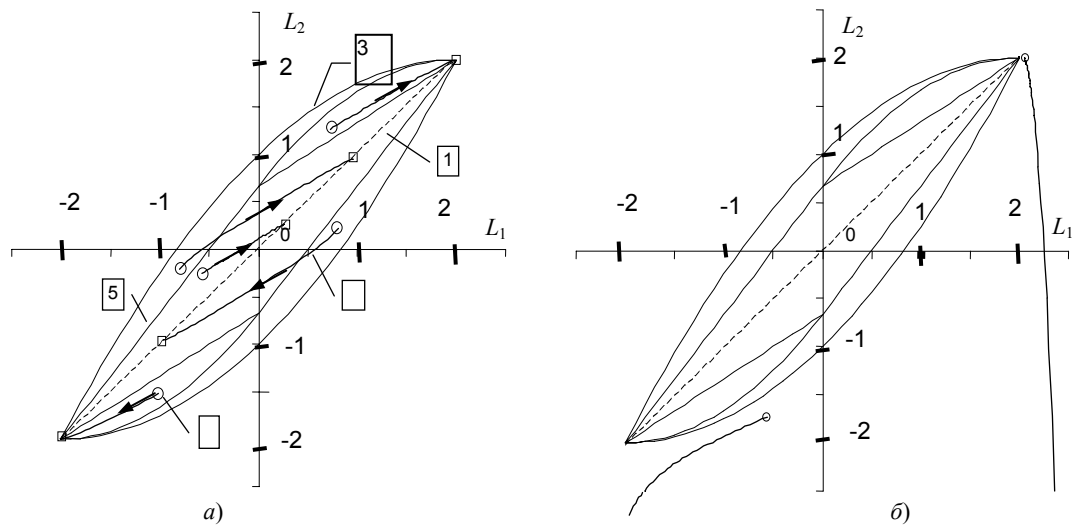


Рис. 3.2 Траектория изменения  $L(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  для устойчивой (а) и неустойчивой (б) системы оптимального регулирования

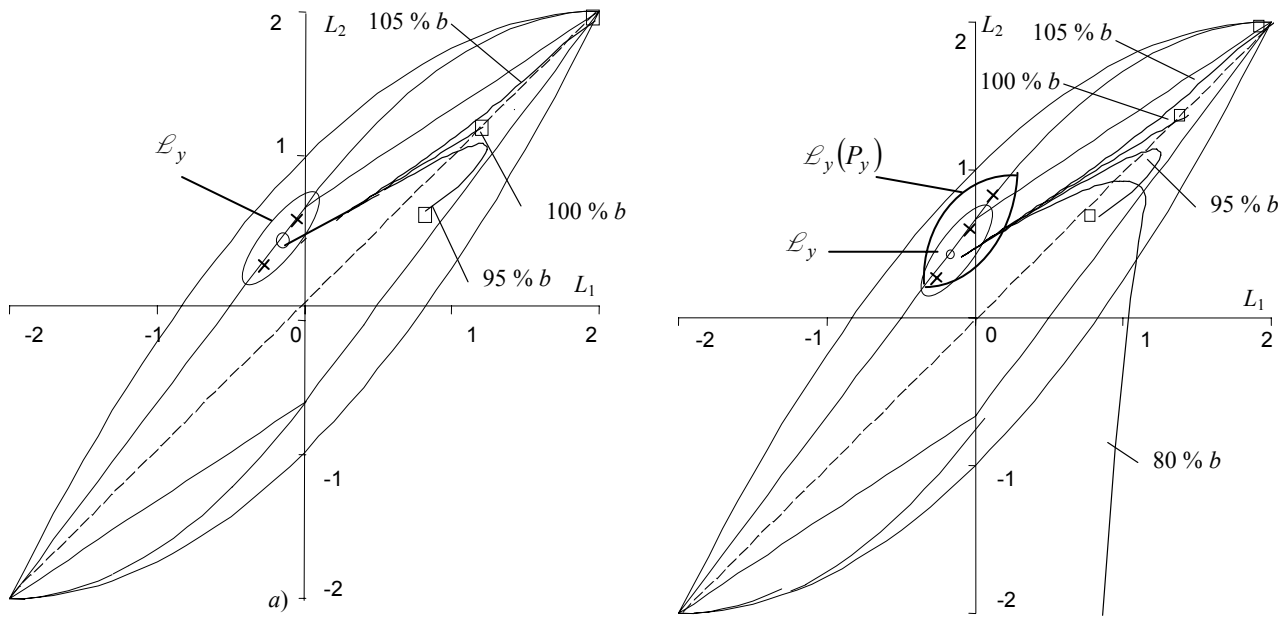


Рис. 3.3 Область устойчивости  $\mathcal{E}_y$  для COU2 (a) и устойчивость с вероятностью  $P_y$  (б)

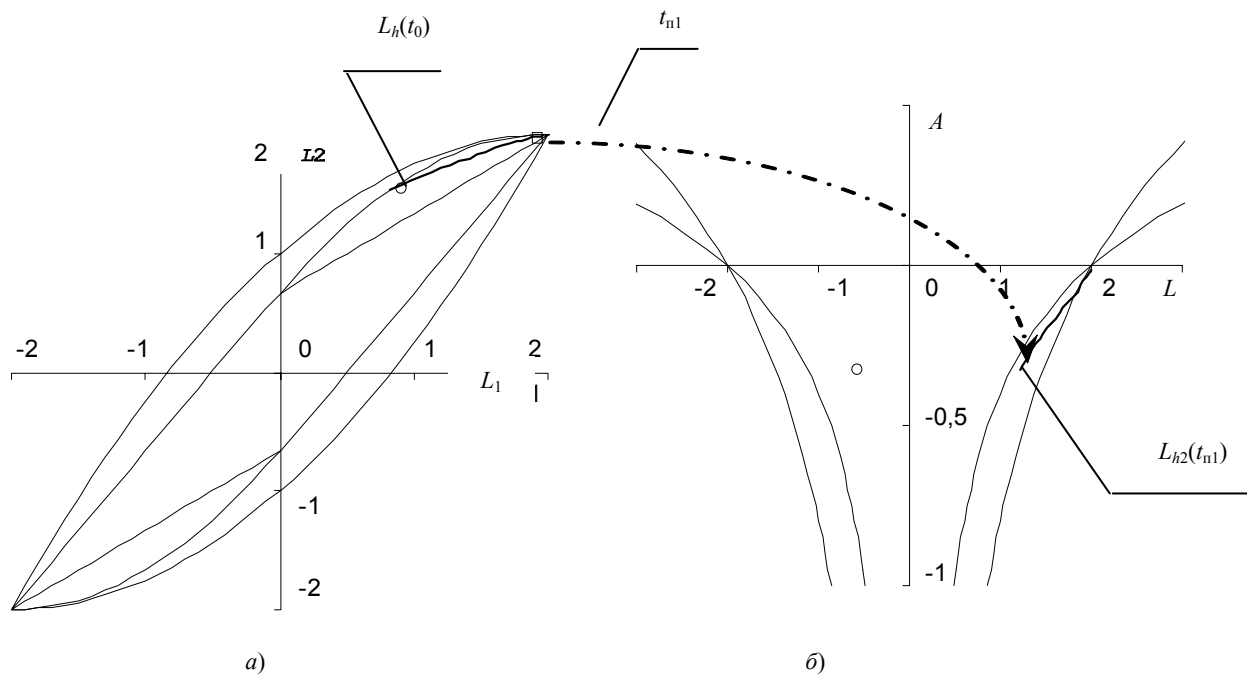


Рис. 3.4 Изменение вектора  $L(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  для устойчивой СОУЗ