

В.Ф. КАЛИНИН, В.М. ИВАНОВ

# Теоретическая электротехника

МОСКВА  
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"  
2004

В.Ф. КАЛИНИН, В.М. ИВАНОВ

Теоретическая  
электротехника

**"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"**


**В.Ф. КАЛИНИН, В.М. ИВАНОВ**

# **ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА**

*Допущено УМО по образованию в области энергетики и электротехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 140200(551700) – "Электроэнергетика"*

---

МОСКВА  
"ИЗДАТЕЛЬСТВО МАШИНОСТРОЕНИЕ-1"  
2004

УДК 621.391.1 (076)  
ББК 21я73-5  
К17

Рецензенты:

Заслуженный изобретатель РФ,  
доктор технических наук, профессор  
*В.Н. Чернышов*

Доктор физико-математических наук, профессор  
*В.А. Федоров*

**Калинин В.Ф., Иванов В.М.**

К17 Теоретическая электротехника: Практикум. М.: "Изд-во Машиностроение-1", 2004. 268 с.

Содержит краткий теоретический материал по электрическим и магнитным цепям и сигналам, электрическим цепям с распределенными параметрами, основам теории электромагнитного поля и прикладной электродинамики, включает ключевые задачи с решениями и методическими указаниями по каждому разделу и соответствует программе подготовки инженеров-электриков, бакалавров, магистров электротехнических специальностей.

Предназначен для практических занятий и самостоятельной работы по дисциплине «Теоретическая электротехника».

УДК 621.391.1 (076)

ББК ← 21я73-5

ISBN 5-94275-149-8

© Калинин В.Ф., Иванов В.М., 2004

© "Издательство Машиностроение-1", 2004

Учебное издание

КАЛИНИН Вячеслав Федорович,  
ИВАНОВ Владимир Михайлович

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Практикум

Редактор З.Г. Чернова  
Инженер по компьютерному макетированию Е.В. Кораблева

Подписано к печати 25.11.2004  
Формат 60×84/16. Гарнитура Times. Бумага офсетная. Печать офсетная  
Объем: 15,58 усл. печ. л.; 15,55 уч.-изд. л.  
Тираж 400 экз. С. 737<sup>М</sup>

"Издательство Машиностроение-1",  
107076, Москва, Стромьинский пер., 4

Подготовлено к печати и отпечатано в издательско-полиграфическом центре  
Тамбовского государственного технического университета  
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

## ПРЕДИСЛОВИЕ

---

---

За последние годы теоретическая электротехника (ТЭ), оставаясь базовой дисциплиной в подготовке специалистов по электроэнергетике, значительно расширила свой спектр из-за большого количества специальностей. При этом практические навыки в освоении ТЭ могут быть усилены внедрением в учебный процесс развивающихся информационных технологий и научных изысканий даже на уровне кафедральных и университетских работ.

Авторы старались придерживаться основных положений и архитектуры курса «Теоретическая электротехника» с учетом изменений и коррекций учебных программ и стандартов, связанных с развитием электротехнической и радиоэлектронной промышленности.

В книгу включены все разделы изучаемой дисциплины с кратким описанием теоретических представлений и расчетными формулами, решениями и методическими указаниями. Структура книги традиционная, изложение материала по главам соответствует читаемому на протяжении многих лет теоретическому курсу по электротехнике в Тамбовском государственном техническом университете для электротехнических и родственных специальностей.

В учебном пособии приведены приложения в виде справочных материалов, достаточных для самостоятельного решения всех задач, применена терминология и условные обозначения в соответствии с действующими стандартами.

Многолетний опыт работы со студентами различных форм обучения позволил авторам апробировать практикум как в дистанционном, так и в дополнительном инженерном образовании соответствующих специальностей.

Авторы выражают искреннюю признательность сотрудникам и преподавателям кафедры «Электрооборудование и автоматизация» Тамбовского государственного технического университета за техническую помощь в создании практикума, а также глубокую благодарность рецензентам, доктору технических наук, профессору В.Н. Чернышову, доктору физико-математических наук, профессору В.А. Федорову за внимательный просмотр книги, сделанные полезные замечания и предложения, позволившие улучшить ее содержание.

# 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

Идеализированной называют электрическую цепь, которую получают из реальной электрической цепи при замене каждого реального элемента его упрощенной моделью, составленной из идеализированных элементов.

К идеализированным элементам относятся: активное сопротивление, индуктивность, емкость, источник напряжения и источник тока.

Активное сопротивление – идеализированный пассивный элемент, в котором электрическая энергия необратимо преобразуется в другой вид энергии, например, в тепловую, механическую или световую.

Зависимость между током и напряжением на активном сопротивлении подчиняется закону Ома:

$$U = Ri \text{ или } ir = GU,$$

где  $G = \frac{1}{R}$  проводимость.

Мгновенная мощность сопротивления

$$P = Ui = Ri^2 = GU^2. \quad (1.1)$$

Электрическая энергия, поступающая в сопротивление,

$$W(t) = \int_{-\infty}^t P dt = R \int_{-\infty}^t i^2 dt = G \int_{-\infty}^t U^2 dt > 0. \quad (1.2)$$

Емкость – идеализированный пассивный элемент электрической цепи, обладающий свойством запасать энергию электрического поля.

Мгновенные значения тока и напряжения на емкости связаны соотношениями

$$i = C \frac{dU}{dt}; \quad U = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt. \quad (1.3)$$

Мгновенная мощность емкости

$$P = Ui = CU \frac{dU}{dt}. \quad (1.4)$$

Энергия, запасенная емкостью,

$$W(t) = \int_{-\infty}^t P dt = C \int_0^U UdU = C \frac{U^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (1.5)$$

Индуктивность – идеализированный пассивный элемент электрической цепи, обладающий свойством запасать энергию магнитного поля.

Мгновенные значения тока и напряжения на индуктивности связаны соотношениями

$$U = -E = L \frac{di}{dt}; \quad i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t U dt. \quad (1.6)$$

Мгновенная мощность индуктивности

$$P = Ui = Li \frac{di}{dt}. \quad (1.7)$$

Энергия, запасенная индуктивностью,

$$W(t) = \int_{-\infty}^t P dt = L \int_0^i idi = \frac{Li^2}{2} = \frac{\Psi^2}{2L}. \quad (1.8)$$

Идеальный источник напряжения (источник ЭДС) представляет собой идеализированный активный элемент, напряжение на зажимах которого не зависит от величины протекающего через него тока (рис. 1.1).

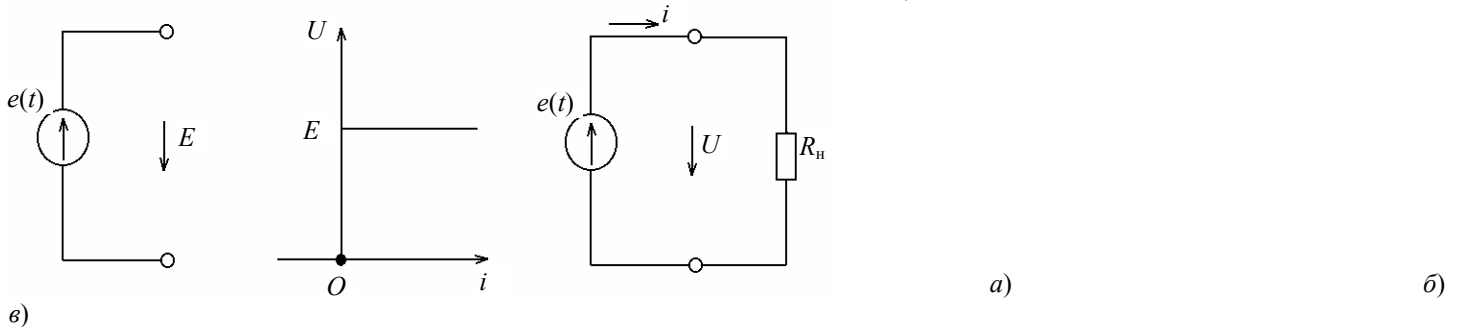


Рис. 1.1. Идеальный источник напряжения:

а – условное графическое обозначение; б – внешняя характеристика источника постоянного тока; в – идеальный источник напряжения с нагрузкой

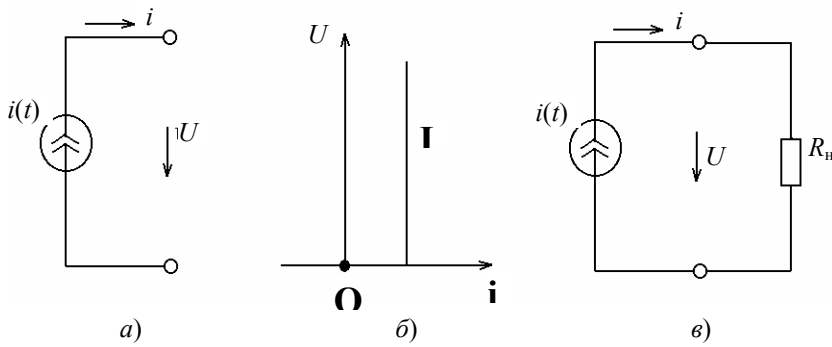


Рис. 1.2. Идеальный источник тока:

а – условное графическое обозначение; б – внешняя характеристика источника постоянного тока; в – идеальный источник тока с нагрузкой  
Ток и мощность в нагрузке

$$i = \frac{U}{R_n} = \frac{1}{R_n} e(t); P = \frac{1}{R_n} U^2 = \frac{1}{R_n} e(t). \quad (1.9)$$

Идеальный источник тока (источник тока) – это идеализированный активный элемент, ток которого не зависит от величины напряжения на его зажимах (рис. 1.2).

Напряжение и мощность в нагрузке

$$U = R_n i = R_n i(t); P = R_n i^2 = R_n i^2(t). \quad (1.10)$$

Первый закон Кирхгофа устанавливает связь между токами ветвей в каждом из узлов цепи: алгебраическая сумма мгновенных значений токов всех ветвей, подключенных к каждому из узлов электрической цепи, в любой момент равна нулю:

$$\sum_k i_k = 0, \quad (1.11)$$

где  $k$  – номер ветви, подключенной к рассматриваемому узлу.

Второй закон Кирхгофа устанавливает связь между напряжениями ветвей, входящих в любой произвольный контур: алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений всех ветвей, входящих в любой контур электрической цепи, в каждый момент времени равна нулю:

$$\sum_k U_k = 0, \quad (1.12)$$

где  $k$  – номер ветвей, входящих в рассматриваемый контур.

Уравнение по второму закону Кирхгофа можно составить и для напряжений элементов, входящих в ветви данного контура.

Алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на элементах любого контура в каждый момент времени равна алгебраической сумме ЭДС источников напряжений, действующих в этом контуре.

$$\sum_i U_i = \sum_j E_j, \quad (1.13)$$

где  $U_i$  – напряжение каждого из элементов рассматриваемого контура за исключением напряжений источников ЭДС;  $E_j$  – ЭДС источников напряжений, действующих в контуре.

Мгновенное значение величины напряжения (тока), изменяющееся с течением времени по синусоидальному или косинусоидальному закону

$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \psi) = U_m \sin(\omega t + \psi_1), \quad (1.14)$$

где  $\psi_1 = \psi + \frac{\pi}{2}$ ;  $U_m$  – амплитуда или максимальное значение гармонической функции, ее размерность совпадает с размерностью гармонической функции;  $(\omega t + \psi)$  – аргумент, называется мгновенной (полной) фазой;  $\psi$  – начальная фаза;  $\omega$  – скорость изменения мгновенной (полной) фазы – угловая частота.

Период  $T$ , угловая частота  $\omega$  и частота  $f$  связаны соотношением

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}; f = \frac{1}{T}.$$

Действующее значение  $I$  периодического тока  $i(t)$  численно равно значению постоянного тока  $I$ , при протекании которого за время  $T$  выделится такое же количество энергии, как и при протекании тока  $i(t)$  за то же время.

Действующее значение гармонической функции в  $\sqrt{2}$  раз меньше ее амплитуды:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m. \quad (1.15)$$

Действующим значением периодической функции  $a(t)$  называется среднеквадратическое значение этой функции за период  $T$

$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [a(t)]^2 dt}. \quad (1.16)$$

Среднее значение синусоидально изменяющегося тока (напряжения) на положительном полупериоде

$$I = \frac{2}{\pi} I_m = 0,637 I_m; \quad U = \frac{2}{\pi} U_m = 0,637 U_m.$$

Если к сопротивлению приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону

$$u = \sqrt{2} U_r \cos(\omega t + \psi_u),$$

то ток определяется

$$i = \frac{u}{R} = \frac{\sqrt{2} U_r \cos(\omega t + \psi_u)}{R}. \quad (1.17)$$

Мгновенная мощность

$$P = ui = U_r I_r + U_r I_r \cos 2(\omega t + \psi). \quad (1.18)$$

Среднее значение мощности сопротивления за период

$$P = U_r I_r.$$

Если к емкости приложено гармоническое напряжение  $u = \sqrt{2} U_C \sin(\omega t + \psi)$ , то ток имеет вид

$$i = C \frac{du}{dt} = \sqrt{2} U_C \omega C \sin(\omega t + \psi_u + \frac{\pi}{2}). \quad (1.19)$$

Мгновенная мощность емкости

$$P = ui = U_C I_C \sin 2(\omega t + \psi_u). \quad (1.20)$$

Энергия, запасенная в емкости,

$$W_C = \frac{Cu^2}{2} = \frac{CU_C^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_u)]. \quad (1.21)$$

Если ток индуктивности изменяется по гармоническому закону  $i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi_i)$ , то напряжение на индуктивности

$$\begin{aligned} u &= L \frac{di}{dt} = \omega L \sqrt{2} I \cos(\omega t + \psi_i) = \\ &= \sqrt{2} \omega L I \sin(\omega t + \psi_i + \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Мгновенная мощность на индуктивности

$$P = ui = U_L I_L \sin 2(\omega t + \psi_i). \quad (1.22)$$

Энергия, запасенная в индуктивности,

$$W_L = \frac{Li^2}{2} = \frac{LI_L^2}{2} [1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)]. \quad (1.23)$$

Если цепь, состоящая из последовательно соединенных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ , включена на синусоидально изменяющееся напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

то по ней проходит ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi),$$

где

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad (1.24)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \quad (1.25)$$

$\omega L = X_L$  – индуктивное сопротивление;  $\frac{1}{\omega C} = X_C$  – емкостное сопротивление;  $\omega L - \frac{1}{\omega C} = X = X_L - X_C$  – реактивное сопротивление;

$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$  – полное сопротивление.

Если цепь, состоящая из параллельно соединенных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$ , включена на синусоидально изменяющееся напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u),$$

то по ней проходит ток

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi + \varphi),$$

где

$$I_m = U_m Y = U_m \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}; \quad (1.26)$$



$$\varphi = \arctg = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{R};$$

$\frac{1}{R} = g$  – активная проводимость;  $\omega C = b_C$  – проводимость емкости;  $\frac{1}{\omega L} = b_L$  – проводимость индуктивности;  $\omega C - \frac{1}{\omega L} = b$  – реактивная проводимость;  $Y = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}$  – входная проводимость.

### 1.1. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

#### Контрольные вопросы

1. Что называется электрической цепью?
2. Что понимается под положительным направлением тока?
3. Что понимается под терминами сопротивление, индуктивность, емкость?
4. Что понимается под терминами источник тока, источник напряжения?
5. Какие элементы потребляют электромагнитную энергию и почему?
6. Сформулируйте первый и второй законы Кирхгофа и поясните их физический смысл и порядок применения.

#### Задачи

1.1.1. По какому закону должно изменяться напряжение, приложенное к катушке отклоняющей системы электронно-лучевой трубки, чтобы ток катушки изменялся по закону  $i = 10t$  А. Параметры катушки: индуктивность 300 мГн, активное сопротивление 3 Ом.

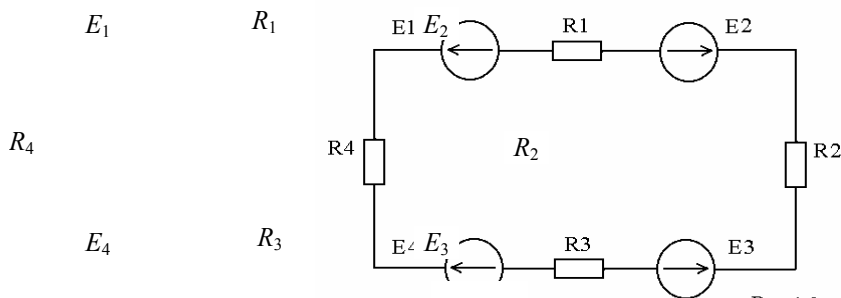


Рис. 1.3

1.1.2. Определить ток в электрической цепи и его направление, если известны следующие параметры цепи (рис. 1.3):  $E_1 = 5$  В,  $E_2 = 12,5$  В,  $E_3 = 6,25$  В,  $E_4 = 5$  В,  $R_1 = 4$  Ом,  $R_2 = 2$  Ом,  $R_3 = 5$  Ом,  $R_4 = 1,5$  Ом.

1.1.3. На рис. 1.4 изображена схема с фотодиодом и указаны токи в двух плечах моста:  $I_{ac} = 100$  мА,  $I_{ad} = 3$  мА. Определить ток  $I$ .

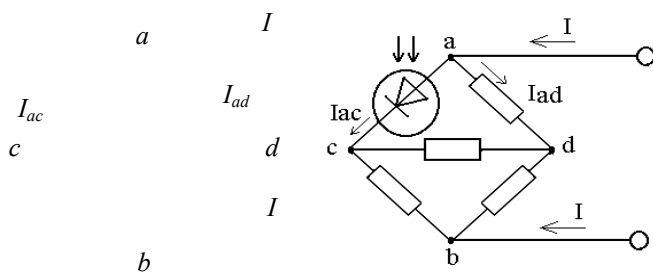
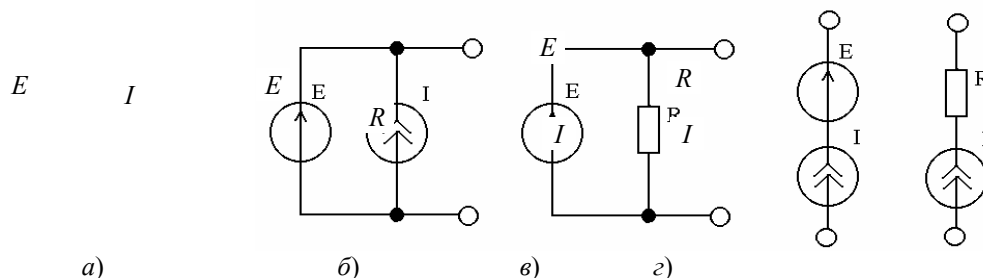


Рис. 1.4

1.1.4. Записать аналитическое выражение для внешних характеристик источников электрической энергии, схемы которых приведены на рис. 1.5.



1.1.5. Внешняя характеристика источника ЭДС задана на рис. 1.6. Составить схему замещения цепи и определить ЭДС источника  $E$ , внутреннее его сопротивление  $R_i$  и сопротивление нагрузки  $R_n$ , если ток  $I = 2$  А.

$U, B$

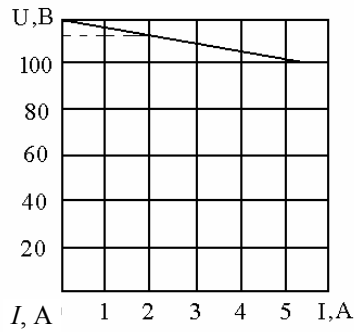


Рис. 1.6

1.1.6. На рис. 1.7 изображена внешняя характеристика источника питания. Составить схемы замещения цепи с источником ЭДС и тока и определить их параметры.

$U, B$

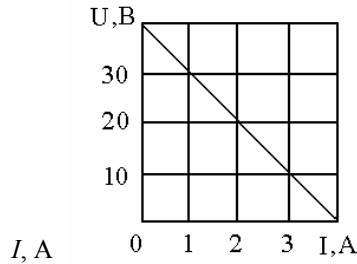


Рис. 1.7

1.1.7. Емкость  $C = 1$  мкФ, имеющая электрический заряд  $q = 0,1$  мКл, в момент времени  $t = 0$  начинает разряжаться через сопротивление  $R = 1$  кОм. Ток сопротивления изменяется по закону  $i = 0,1e^{-10^3 t}$  А. Рассчитать напряжение на емкости и энергию, запасенную в ней, в моменты времени  $t = 0, t = 1$  мс. Найти энергию, рассеянную в сопротивлении к моменту времени  $t = 1$  мс.

1.1.8. Начиная с момента времени  $t = 0$ , через сопротивление  $R = 20$  Ом протекает ток  $i = 100e^{-2 \cdot 10^6 t} - 50e^{-0,5 \cdot 10^6 t}$  мА. Определить зависимость от времени напряжения на сопротивлении, мгновенной мощности сопротивления и энергии, рассматриваемой в сопротивлении.

1.1.9. Решить задачу 1.8 при  $i = 1 - e^{-10^6 t}$  мА.

1.1.10. Ток индуктивности  $L = 1$  мкГн изменяется по закону  $i_L = 0,2 \sin(10^6 t + 0,4\pi)$  А. Определить напряжение на индуктивности.

1.1.11. На входе электрической цепи (рис. 1.8) действует постоянное напряжение  $U = 120$  В. Определить ток в электрической цепи, показания вольтметров  $V_1$  и  $V_2$  и величины сопротивлений  $R_1$  и  $R_2$ , если мощности, выделяемые на сопротивлениях  $R_1$  и  $R_2$ , соответственно равны  $P_1 = 100$  Вт,  $P_2 = 200$  Вт.

1.1.12. В схеме цепи (рис. 1.9) определить напряжение  $U_{ab}$ . Значение ЭДС и сопротивлений указаны соответственно в

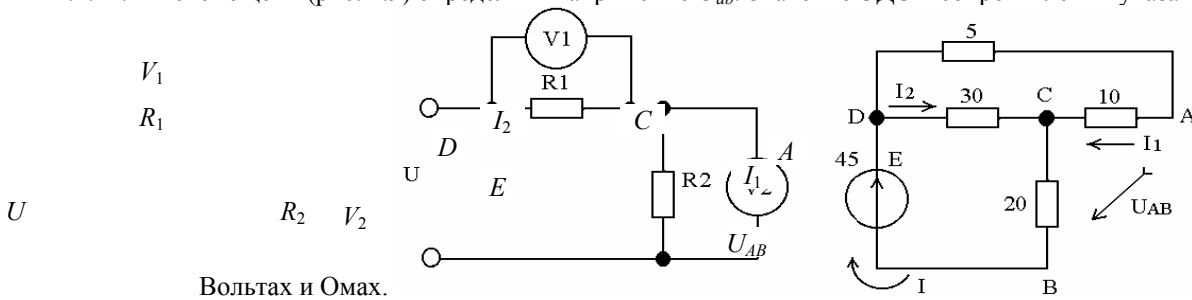


Рис. 1.8

Рис. 1.9

1.1.13. Определить, как изменятся показания приборов в электрической цепи, если уменьшить величину сопротивления  $R_3$ , а все остальные параметры цепи считать неизменными (рис. 1.10).

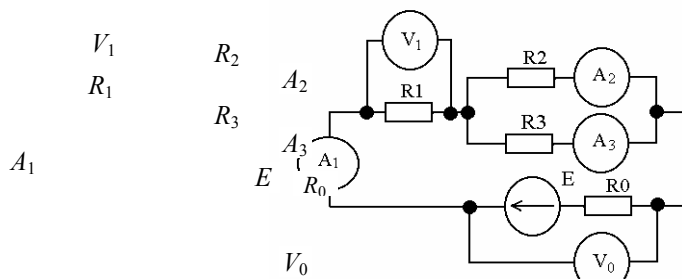


Рис. 1.10

1.1.14. Мощность, потребляемая электрической цепью (рис. 1.11), равна  $P = 300$  Вт. На зажимах электрической цепи  $U = 60$  В,  $R_2 = 15$  Ом,  $R_3 = 5$  Ом. Определить величину сопротивления  $R_1$  и токи через  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ .

1.1.15. Определить токи  $I_1$  и  $I_3$ , напряжение и мощности цепи (рис. 1.12), если заданы сопротивления резисторов  $R_1 = 12$  Ом,  $R_2 = 30$  Ом,  $R_3 = 20$  Ом и ток  $I_2 = 2$  А.

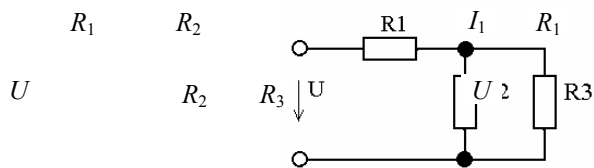


Рис. 1.11

Рис. 1.11

Рис. 1.12

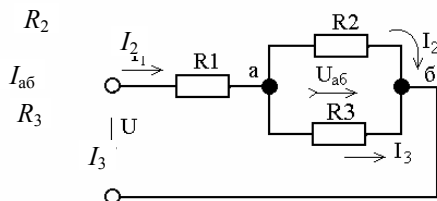


Рис. 1.12

### Ответы, решения и методические указания

1.1.1.  $U = 3 + 30t$  В.

1.1.2.  $I = 0,5$  А, по часовой стрелке.

1.1.3. В соответствии с первым законом Кирхгофа  $I_a = I_{ac} + I_{ad} = 0,1 + 3 = 3,1$  мА. Отсюда  $I = -I_a = -3,1$  мА, т.е. истинное направление тока противоположно указанному на схеме.

1.1.4. К зажимам цепей (рис. 1.5, а, б) подключен источник последовательно, напряжение на зажимах равно ЭДС. Внешняя характеристика данных цепей совпадает с внешней характеристикой источника ЭДС  $U = E$ . Ток внешних зажимов цепей (рис. 1.5, в, г) при любом напряжении на них равен току источника тока, следовательно, внешняя характеристика этих цепей совпадает с внешней характеристикой источника тока.

1.1.5. Схема замещения цепи изображена на рис. 1.13, а.  $E = U_{x.x.} = 120$  В при  $I = 2$  А,  $U = 115$  В.

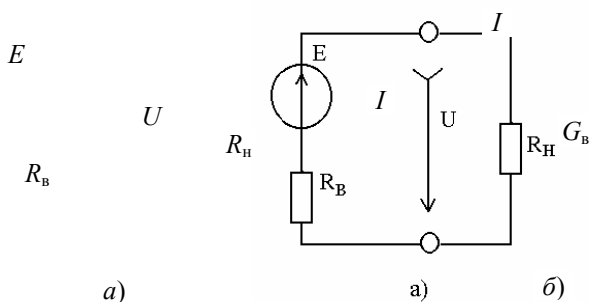
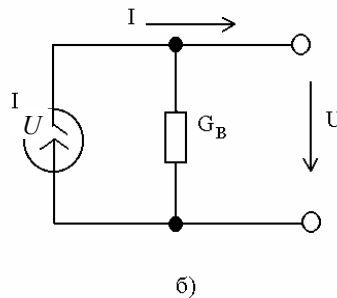


Рис. 1.13

Рис. 1.13



В соответствии с уравнением  $U = E - IR_i$  определяем  $R_i = (E - U)/I = 2,5$  Ом,  $U = R_n$ ;  $R_n = 57,5$  Ом.

1.1.6.  $E = Ux = 40$  В;  $I = 4$  А;  $R\theta = 10$  Ом;  $G = 0,1$  см. Схемы замещения приведены на рис. 1.13, а, б.

1.1.7. В произвольный момент времени  $t > t_0$

$$U_C = U_C(0) - \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C dt; \quad \omega_C = \frac{CU^2}{2}.$$

Для  $t_0$ :  $U_C(t_0) = 9(t_0)/C = 100$  В;  $\omega_C(t_0) = 5$  мДж, для  $t = t_1$   $U_C(t_1) = 36,8$  В;  $\omega_C(t_1) = 0,677$  мДж.

Энергия, выделившаяся в сопротивлении на интервале  $[t_0; t_1]$ , может быть определена из выражения  $\omega_R(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} Ri_R^2 dt$

или на основании закона сохранения энергии  $\omega_R(t_1) = \omega_C(t_0) - \omega_C(t_1) = 4,32$  мДж.

1.1.8. Напряжение на сопротивлении  $U = iR = 2e^{-2 \cdot 10^6 t} - e^{-0,5 \cdot 10^6 t}$  В. Мгновенная мощность сопротивления

$$P = Ui = 200e^{-4 \cdot 10^6 t} - 200e^{-2,5 \cdot 10^6 t + 50 \cdot 10^6 t} \text{ мВт.}$$

Энергия, выделившаяся в сопротивлении к моменту времени  $t$ ,

$$\omega = \int_{t_0=0}^t P dt = 20 - 50e^{-4 \cdot 10^6 t} + 80e^{-2,5 \cdot 10^6 t} - 50e^{-10^6 t} \text{ нДж.}$$

1.1.9.  $U = 20(1 - e^{-10^6 t})$  мВ;  $P = 20(1 - e^{-10^6 t} + e^{-2 \cdot 10^6 t})$  мкВт;

$$\omega = 10(10^6 t + 2e^{-10^6 t} - 0,5e^{-2 \cdot 10^6 t} - 1,5) \text{ пДж.}$$

1.1.10.  $U = 0,2 \cos(10^6 t + 0,04\pi)$  В.

1.1.11.  $I = 2,5$  А;  $U_1 = 40$  В;  $U_2 = 80$  В;  $R_1 = 16$  Ом;  $R_2 = 32$  Ом.

1.1.12. Для определения  $U_{ab}$  нужно найти токи  $I$  и  $I_1$ . Резистивные элементы с сопротивлениями 5 и 10 Ом соединены последовательно, а с сопротивлением 30 Ом – параллельно. Зная токи  $I$  и  $I_1$ , для контура  $ABCA$  составляем уравнение по второму закону Кирхгофа.  $U_{ab} = 40$  В.

1.1.13.  $A_1 \uparrow$ ;  $V_1 \uparrow$ ;  $V_0 \downarrow$ ;  $A_2 \downarrow$ ;  $A_3 \uparrow$ .

Показания:  $A_1$  – увеличатся;  $V_1$  – увеличатся;  $V_0$  – уменьшатся;  $A_2$  – уменьшатся;  $A_3$  – увеличатся.

1.1.14.  $R_1 = 8,25$  Ом;  $I_1 = 5$  А;  $I_2 = 1,25$  А;  $I_3 = 3,75$  А.

1.1.15.  $I_1 = 5$  А;  $I_3 = 3$  А;  $U = 120$  В,  $P = 600$  Вт.

## 1.2. ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ИДЕАЛИЗИРОВАННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### Контрольные вопросы

1. Поясните способы представления гармонической функции.
2. Что понимается под действующим значением переменного тока? Каким образом можно определить действующее значение гармонической функции?
3. Каковы фазовые соотношения между напряжением и током в цепи с активным сопротивлением, в цепи с емкостью, в цепи с индуктивностью?
4. Что называется полным сопротивлением и проводимостью электрической цепи? Написать их аналитические выражения.
5. Какова разница между активной, реактивной и полной мощностями? В каких единицах они выражаются?

### Задача

1.2.1. Определить амплитуду, действующее значение, частоту, угловую частоту и начальную фазу гармонического напряжения и тока, графики которых представлены на рис. 1.14.

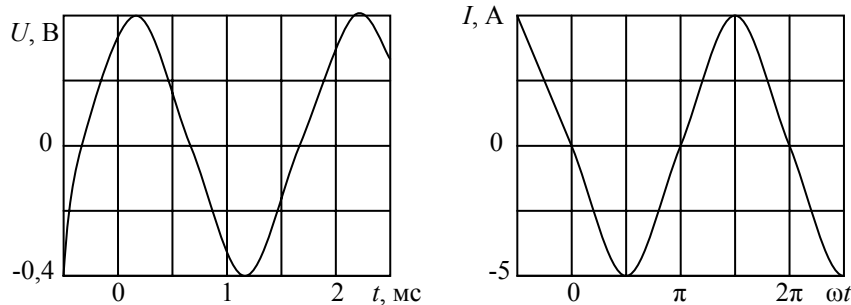


Рис.

1.2.2. Найти амплитуду, действующее значение, частоту, угловую частоту и начальную фазу следующих гармонических напряжений, построить кривые напряжений и их векторные диаграммы.

а)  $U_1 = 5 \cos(10^4 t + 60^\circ)$  В;

б)  $U_2 = 5\sqrt{2} \cos(2\pi \cdot 10^4 t - 60^\circ)$  В;

в)  $U_3 = 4,24 \sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$  В.

1.2.3. К зажимам идеализированного пассивного элемента приложено напряжение  $U = 0,24 \cos(1885t + 74^\circ)$  мВ. Определить тип и параметры элементов, если

а)  $i = 2,8 \cos(1885t + 74^\circ)$  мкА;

б)  $i = 2,8 \cos(1885t + 164^\circ)$  мкА;

в)  $i = 2,8 \cos(1885t + 344^\circ)$  мкА.

1.2.4. В последовательной  $RL$  – цепи известны действующие значения напряжений на ее элементах:  $U_r = 5$  В;  $U_L = 3,12$  В. Вычислить действующее значение напряжения на входе цепи и сдвиг фаз между напряжением на входе и током в цепи. Начертить векторную диаграмму токов и напряжений.

1.2.5. К электрической цепи приложено напряжение, действующее значение которого  $U = 0,2$  В, действующее значение тока  $I = 0,1$  мА, частота  $f = 10^4$  Гц. Найти величину емкости  $C$  и написать выражения для мгновенных значений тока и напряжения. Начертить векторную диаграмму для данной цепи (рис. 1.15).

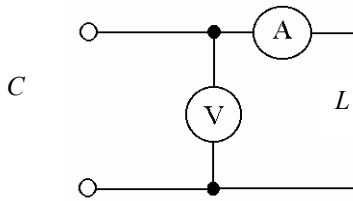


Рис. 1.15

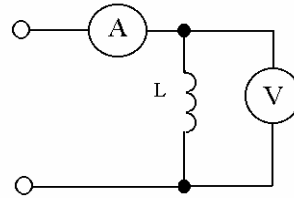


Рис. 1.16

1.2.6. Дана цепь с индуктивностью  $L = 0,01$  мГн. К цепи приложено напряжение  $U = 0,8\cos(9 \cdot 10^5 t + 1,3)$  В. Найти уравнение мгновенного значения тока в цепи и определить показания вольтметра и амперметра (рис. 1.16), если они проградуированы в действующих значениях. Начертить векторную диаграмму для данной цепи.

1.2.7. В электрической цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов  $R$  и  $L$ , протекает переменный ток с частотой  $f = 50$  Гц, индуктивность  $L = 0,0127$  Гн, сопротивление  $R = 3$  Ом, напряжение на зажимах цепи равно 150 В. Определить индуктивное сопротивление  $X_L$ , ток в цепи, активную, реактивную и полную мощности, энергию в катушке  $W_L$ , фазовый сдвиг между током и напряжением на входе.

1.2.8. К электрической цепи (рис.1.17) приложено напряжение  $U = 20$  В. Определить ток в общей части цепи, если  $R = 5$  Ом,  $X_L = 4$  Ом,  $X_C = 10$  Ом. Построить векторную диаграмму.

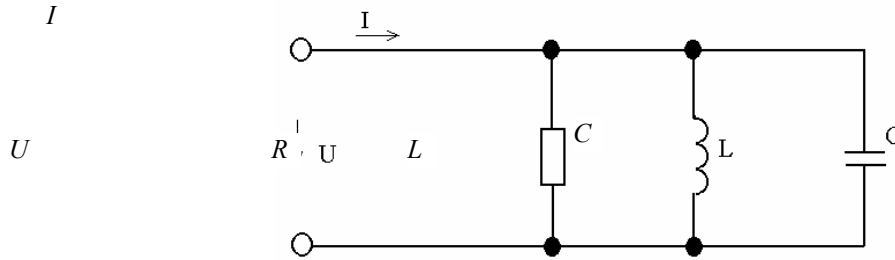


Рис. 1.17

1.2.9. На рис. 1.18 представлена осциллограмма тока и напряжения пассивного двухполюсника. Записать выражения для мгновенных значений напряжения и тока, приняв за начало отсчета точку 0. Найти величину напряжения и тока для момента  $t_1 = T/12$ . Построить векторную диаграмму.

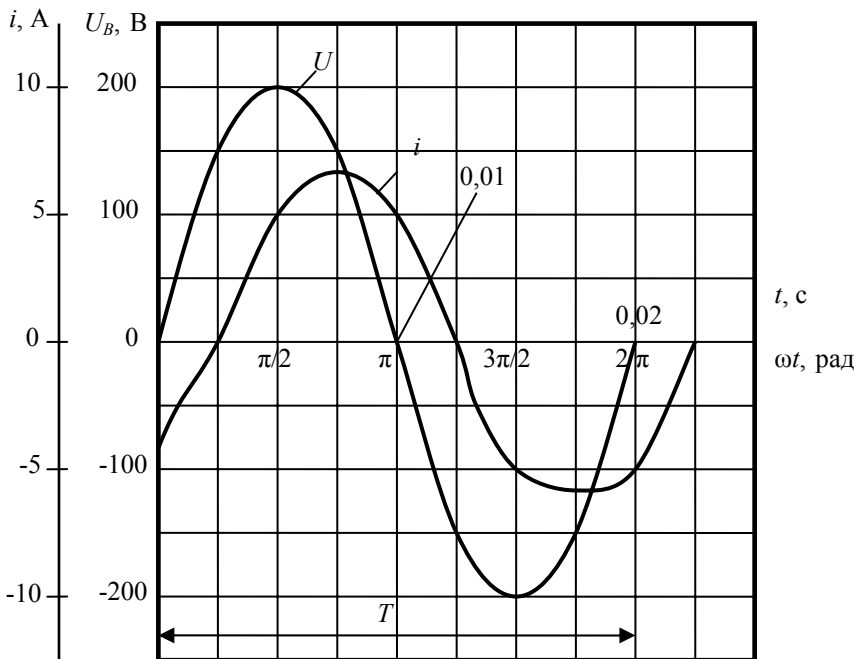


Рис. 1.18

1.2.10. К электрической цепи (рис. 1.19), состоящей из  $R_1 = 10$  Ом, катушки с  $L = 50$  мГн и активным сопротивлением  $R_2 = 5$  Ом, конденсаторов с  $C_1 = 400$  мкФ и  $C_2 = 300$  мкФ, приложено напряжение частотой 50 Гц. Ток в цепи  $I = 5$  А. Определить напряжение на каждом элементе, на зажимах цепи, сдвиг по фазе между током и напряжением на зажимах цепи и на катушке, активную мощность. Построить векторную диаграмму.

1.2.11.

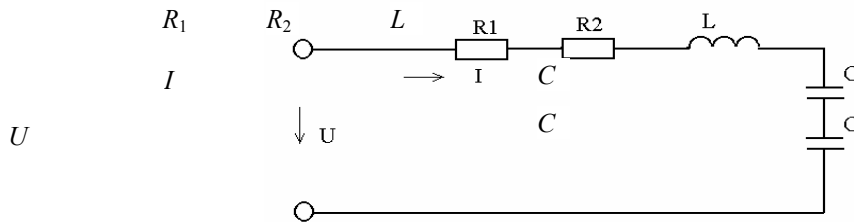


Рис. 1.19

1.2.12. По  $RC$ -цепи протекает синусоидальный ток с амплитудным значением  $I_m = 1,41$  А; частотой  $f = 50$  Гц. Определить мгновенное значение приложенного к зажимам напряжения  $U$ , напряжений на конденсаторе  $U_C$  и резисторе  $U_R$ , если  $R = 100$  Ом,  $C = 31,8$  мкФ. Построить графики мгновенных значений тока, приложенного к цепи напряжения и мощности.

1.2.13. К последовательно соединенным реостату сопротивлением  $R = 120$  Ом и конденсатору емкостью  $C = 30$  мкФ подведено напряжение  $U = 311 \sin 314t$  В. Вычислить полное сопротивление цепи, действующее значение напряжения и тока, мощность, расходуемую в цепи, реактивную мощность и разность фаз напряжения и тока.

1.2.14. На выводах цепи, состоящей из последовательно соединенных сопротивлений  $R = 50$  Ом и индуктивности  $L = 0,1$  Гн, задано напряжение  $U = \sqrt{2} \cdot 100 \sin \omega t$  В. Частота  $f = 50$  Гц. Вычислить полное сопротивление цепи и действующее напряжение на  $R$  и  $L$ , вывести выражение для синусоидального тока  $i(t)$ , построить кривые  $i(t)$ ,  $u(t)$  и напряжений на  $R$  и  $L$ .

1.2.15. К цепи, состоящей из последовательно соединенных резистора  $R = 3$  Ом, катушки индуктивности  $L = 80$  мГн и конденсатора  $C = 150$  мкФ, подключено напряжение  $U = 20$  В с частотой  $f = 50$  Гц. Найти ток, напряжение на каждом элементе цепи и мощность, расходуемую в ней. Построить векторную диаграмму.

1.2.16. Катушка, параметры которой  $R_1 = 10,5$  Ом,  $L = 382$  мкГн и конденсатор (с потерями), эквивалентные параметры которого  $R_2 = 3,5$  Ом,  $C = 0,533$  мкФ, соединены последовательно (рис. 1.20). Какое напряжение приложено к цепи, если амперметр показал ток  $I = 2,4$  А? Частота переменного тока  $f = 5$  кГц. Определить напряжения

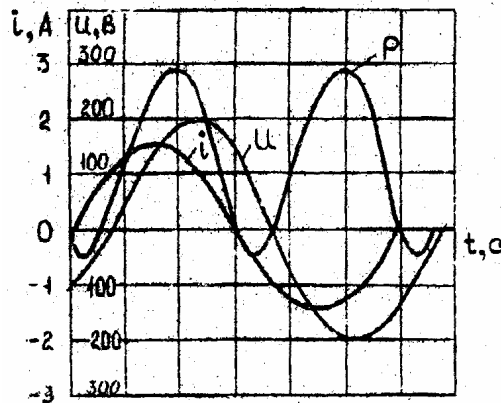


Рис. 1.20

на катушке  $U_k$  и конденсаторе с потерями  $U_{\text{конд}}$ , а также мощность, расходуемую на каждом из этих элементов. Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

### Ответы, решения и методические указания

1.2.1.  $U_m = 0,4$  В;  $U = 0,283$  В;  $T = 2$  мс;  $f = 0,5$  кГц;  $\omega = 3140$  с<sup>-1</sup>;  $\varphi = -45^\circ$ ;  $I_m = 5$  мА;  $I = 3,54$  мА;  $\varphi = 90^\circ$ .

1.2.2. При определении начальной фазы гармонического напряжения  $U_3$  необходимо перейти от синусоидальной функции времени к косинусоидальной  $\sin x = \cos(x - \pi/2)$ .

$U_{m1} = 5$  В,  $U_1 = 3,54$  В;  $f_1 = 1,59$  кГц;  $\omega_1 = 10\,000$  с<sup>-1</sup>;  $\varphi_1 = 60^\circ$ ;

$U_{m2} = 7,07$  В;  $U_2 = 5$  В;  $f_2 = 10$  кГц;  $\omega_2 = 6,28 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>;  $\varphi_2 = -60^\circ$ ;

$U_{m3} = 4,24$  В;  $U_3 = 3$  В;  $f_3 = 50$  кГц;  $\omega_3 = 100 \cdot \pi$  с<sup>-1</sup>;  $\varphi_3 = -60^\circ$ .

1.2.3. Если сдвиг по фазе между напряжением и током на зажимах идеализированного пассивного элемента цепи равен  $0, (-\pi/2)$  или  $\pi/2$ , то такими элементами являются соответственно сопротивление, емкость или индуктивность. Параметр элемента определяется из равенства его полного сопротивления ( $R, 1/\omega C$  или  $\omega L$ ) и полного входного сопротивления  $Z_{\text{вх}} = U/I$ :

а)  $R = 85,7$  Ом; б)  $C = 6,19$  мкФ; в)  $L = 45,5$  мГн.

1.2.4.  $U_{\text{вх}} = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = 5,89$  В;  $\varphi = \arctg \frac{U_L}{U_R} = 32^\circ$ .

1.2.5.  $C = 8$  мкФ.

1.2.6.  $I = 0,09 \sin(9 \cdot 10^5 t + 1,3)$  А;  $I = 0,063$  А;  $U = 0,57$  В.

1.2.7.  $S = 4500$  ВА;  $W_1 = 11,43$  Дж;  $\varphi = 54^\circ$ ;  $X_1 = 4$  Ом;  $I = 30$  А;  $P = 2700$  Вт;  $Q = 3600$  ВАр.

1.2.8.  $I_r = 4$  А;  $I_l = 5$  А;  $I_C = 2$  А;  $I = 5$  А.

1.2.9. При  $t_1 = T/12$ ;  $\omega t = \pi/6$ ;  $U = 200 \sin(\pi/6) = 100$  В;  $i = 6 \sin(-\pi/12) = -1,55$  А.

1.2.10.  $U = 76,5$  В;  $\varphi = -11^\circ$ ;  $U_{r1} = 50$  В;  $U_{l1} = 78,5$  В;  $U_{r2} = 25$  В;  $U_{C1} = 39,7$  В;  $U_{C2} = 53$  В;  $P_{r1} = 250$  Вт;  $P_{r2} = 125$  Вт;

$\varphi_1 = 72^\circ 10'$ .

1.2.11. Мгновенное значение тока в цепи  $i = 1,41 \sin 314t$  А,

Напряжения: на активном сопротивлении  $U_r = Ri = 141\sin 314t$  В, на емкости  $U_C = \frac{1}{C} \int idt = 141\sin(314t - 90^\circ)$  В, на входе цепи  $U = U_r + U_C = RI_m \sin \omega t - \frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = ZI_m \sin(\omega t + \varphi)$  В, где

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = 141 \text{ Ом}, \quad \operatorname{tg} \varphi = -1/\omega C/R = -1, \quad \varphi = -45^\circ.$$

Следовательно,  $U = 200\sin(314t - 45^\circ)$  В.

Мгновенное значение мощности в цепи

$$P = Ui = 100 - 141\cos(628t - 45^\circ) \text{ ВА.}$$

Графики мгновенных значений  $U, i, P$  приведены на рис. 1.20.

1.2.12.  $Z = 160 \text{ Ом}; \quad U = 220 \text{ В}; \quad I = 1,37 \text{ А}; \quad P = 226 \text{ Вт}; \quad Q = -210 \text{ ВАр}; \quad \varphi = -41^\circ 30'.$

1.2.13.  $Z = 59 \text{ Ом}, U_r = 85 \text{ В}, U_l = 53,4 \text{ В}, i = \sqrt{2} \cdot 1,7 \sin(\omega t - 32^\circ 10') \text{ А.}$

1.2.14.  $X_l = 25,2 \text{ Ом}; X_C = 21,2 \text{ Ом}; Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = 5 \text{ Ом}, I = 4 \text{ А}, \varphi = 53^\circ 10', U_r = 12 \text{ В}, U_l = 101 \text{ В}, U_C = 85 \text{ В}, P = 48 \text{ Вт.}$

1.2.15.  $U = 120 \text{ В}, U_{\text{кат}} = 38,2 \text{ В}, P_{\text{кат}} = 60,6 \text{ Вт}, U_{\text{конд}} = 144 \text{ В}, P_{\text{конд}} = 20,2 \text{ Вт.}$

## 2. АНАЛИЗ И РАСЧЕТ ПРОСТЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Каждой гармонической функции времени, например, напряжению

$$U(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

можно поставить в соответствие комплексное число, т.е.

$$U(t) \dots U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \dot{U}_m e^{j\omega t} = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) + jU_m \sin(\omega t + \varphi_u),$$

где  $\dot{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$  – комплексная амплитуда;  $U_m$  – модуль комплексного числа, равный амплитуде гармонического напряжения;  $\varphi_u$  – аргумент комплексного числа, равный начальной фазе гармонического напряжения;  $\operatorname{Re}\{U(t)\} = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$  – вещественная часть комплексного изображения;  $\operatorname{Im}\{U(t)\} = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$  – коэффициент при мнимой части комплексного изображения.

Линейным операциям над гармоническими функциями (оригиналами) соответствует следующие операции над их изображениями:

а) умножению оригинала на постоянное число соответствует умножению изображения данного оригинала на это же число

$$U_R = Ri \dots R\dot{I}_m e^{j\omega t};$$

б) суммированию оригиналов соответствует суммирование их изображений

$$U_1 + U_2 + \dots + U_n \dots (\dot{U}_{1m} + \dot{U}_{2m} + \dots + \dot{U}_{nm}) e^{j\omega t};$$

в) дифференцированию оригинала соответствует алгебраическая операция умножения изображения этого оригинала на множитель  $j\omega$ :

$$\frac{dU}{dt} \dots j\omega \dot{U}_m e^{j\omega t};$$

г) интегрированию оригинала соответствует алгебраическая операция деления изображения этого оригинала на оператор  $j\omega$ :

$$\int U dt \dots \frac{1}{j\omega} \dot{U}_m e^{j\omega t}.$$

Закон Ома в комплексной форме:

$$\dot{U}_m = z\dot{I}_m; \quad \dot{I}_m = \dot{Y}_m \dot{U}_m;$$

или  $\dot{U} = z\dot{I}; \quad \dot{I} = \dot{Y}\dot{U}.$

Первый закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum_{k=1}^n \dot{I}_{mk} = 0; \quad \sum_{k=1}^n \dot{I}_k = 0,$$

где  $k$  – номер ветви, подключенной к рассматриваемому узлу.

Второй закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\sum_{m=1}^l \dot{Q}^m = \sum_{m=1}^l \dot{E}^m; \quad \sum_{m=1}^l \dot{Q}^l = \sum_{m=1}^l \dot{E}^l,$$

где  $m$  – число пассивных элементов контура;  $n$  – число источников напряжения.

Комплексное сопротивление последовательной  $RLC$ -цепи

$$\dot{Z} = R + j(\omega L - 1/\omega C) = Ze^{j\varphi};$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}; \quad \varphi = \arctg(\omega L - 1/\omega C)/R.$$

Комплексная проводимость параллельной  $RLC$ -цепи:

$$\dot{Y} = G - j(1/\omega L - \omega C) = Ye^{j\varphi};$$

$$Y = \sqrt{G^2 + (1/\omega L - \omega C)^2}; \quad \varphi = \arctg(1/\omega L - \omega C)/G.$$

Комплексная мощность цепи

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = P + jQ = Se^{j\varphi} = S \cos \varphi + jS \sin \varphi,$$

где  $S$  – полная мощность;  $P$  – активная мощность;  $Q$  – реактивная мощность.

Уравнение баланса комплексных мощностей:

$$\sum_{k=1}^N \dot{E}_k \bar{\dot{I}}_k + \sum_{k=1}^M \dot{U}_k \bar{\dot{I}}_k = \sum_{k=1}^H \dot{I}_k \dot{Z}_k,$$

где  $N$  – число идеальных источников напряжения;  $M$  – число идеальных источников тока;  $H$  – число идеализированных пассивных элементов.

При расчете электрических цепей часто возникает необходимость преобразования схем этих цепей в более простые и удобные для расчета. Приемы преобразования схем одинаковы как для цепей постоянного, так и переменного тока.

### Последовательное соединение (рис. 2.1)

$$\dot{Z}_{\text{эк}} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \dots + \dot{Z}_n;$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 + \dot{U}_3 + \dots + \dot{U}_n.$$

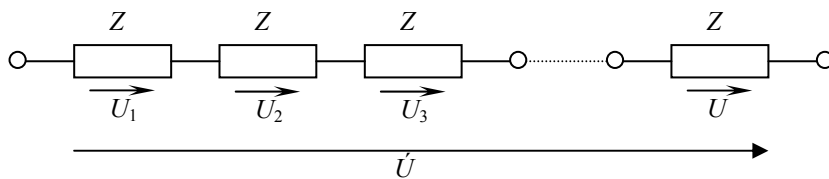


Рис. 2.1

### Параллельное соединение трех сопротивлений (рис. 2.2)

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_{\text{экв}} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 \dot{Z}_3};$$

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 + \dot{I}_3;$$

$$\dot{U} = \dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U}_3;$$

$$\dot{Y}_{\text{вх}} = \dot{Y}_1 + \dot{Y}_2 + \dot{Y}_3.$$

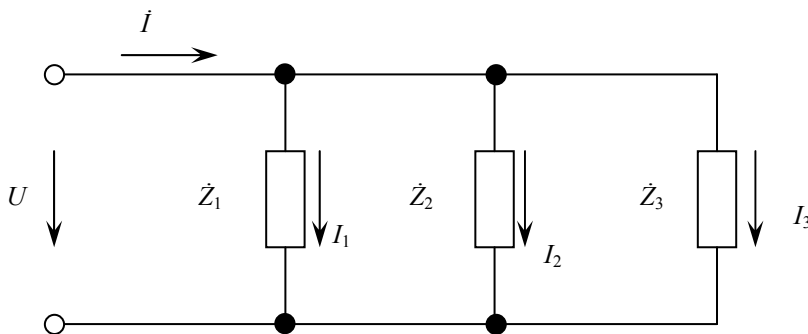


Рис. 2.2

### Смешанное соединение сопротивлений (рис. 2.3)

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}; \quad \dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\dot{Z}_{\text{вх}}}; \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}; \quad \dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3}.$$



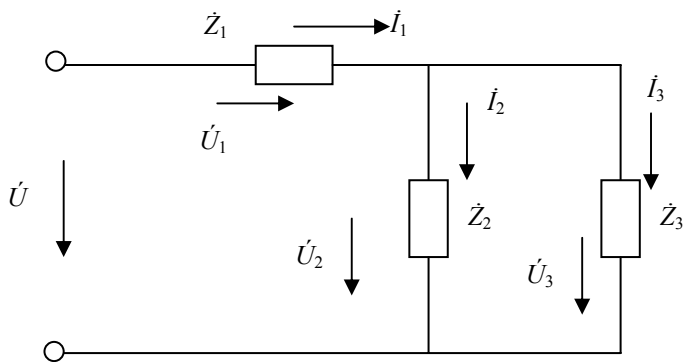


Рис. 2.3

Преобразование соединения треугольником в эквивалентную звезду (рис. 2.4)

$$\dot{Z}_1 = \frac{\dot{Z}_{12}\dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}; \quad \dot{Z}_2 = \frac{\dot{Z}_{12}\dot{Z}_{23}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}; \quad \dot{Z}_3 = \frac{\dot{Z}_{23}\dot{Z}_{31}}{\dot{Z}_{12} + \dot{Z}_{23} + \dot{Z}_{31}}.$$

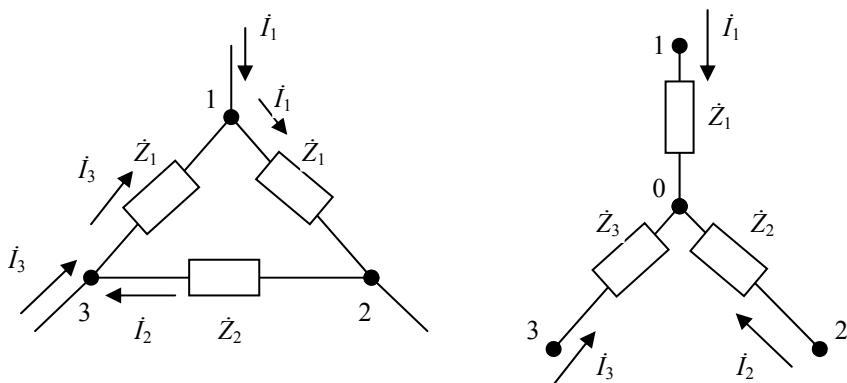


Рис. 2.4

В случае преобразования звезды в эквивалентный треугольник, сопротивления сторон последнего определяют из выражений

$$\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_1 + \dot{Z}_2 + \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_3}; \quad \dot{Z}_{23} = \dot{Z}_2 + \dot{Z}_3 + \frac{\dot{Z}_2\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1}; \quad \dot{Z}_{31} = \dot{Z}_3 + \dot{Z}_1 + \frac{\dot{Z}_3\dot{Z}_1}{\dot{Z}_2}.$$

При составлении уравнений индуктивно-связанных электрических цепей необходимо учитывать способы включения индуктивностей.

При согласном включении (рис. 2.5), где  $M$  – взаимная индуктивность.

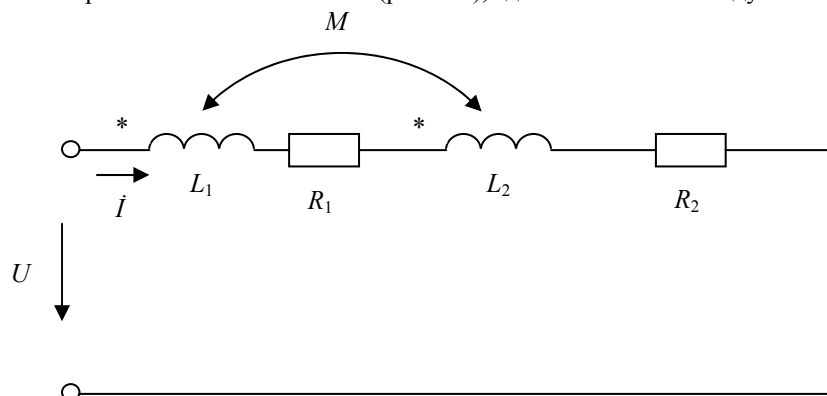


Рис. 2.5

Комплексное сопротивление взаимной индукции

$$\dot{Z}_M = j\omega M = jX_M, \quad \text{здесь } X_M = \omega M.$$

Реактивное сопротивление двух индуктивно-связанных катушек при их согласном включении

$$X_{\text{согл}} = \omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M = X_{L_1} + X_{L_2} + 2X_M.$$

При встречном включении (рис. 2.6)

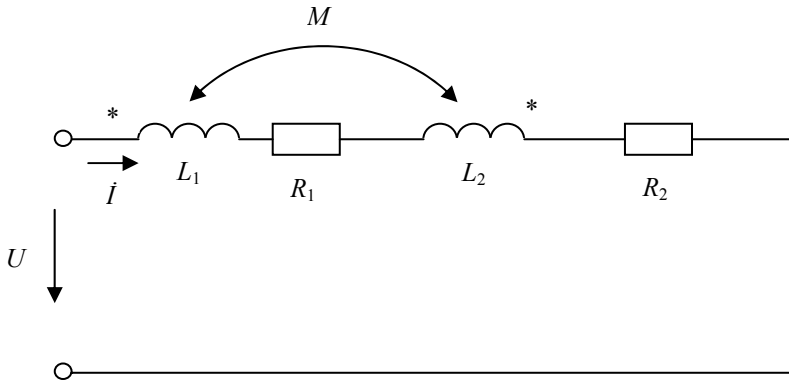


Рис. 2.6

$$\dot{U} = (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 - 2M)\dot{I};$$

$$L_{\text{встр}} = L_1 + L_2 - 2M.$$

Реактивное сопротивление встречно-включенных двух индуктивно-связанных катушек

$$X_{\text{встр}} = X_{L_1} + X_{L_2} - 2X_M.$$

При расчете разветвленных цепей с взаимной индукцией используют методы уравнений Кирхгофа, контурных токов и наложения.

При расчете в уравнениях, составленных по второму закону Кирхгофа, к напряжению на индуктивном элементе  $L \frac{di}{dt}$  необходимо добавить напряжение взаимной индукции  $\pm M \frac{di}{dt}$ . При этом напряжение взаимной индукции имеет знак плюс, если направление обхода индуктивного элемента и выбранное положительное направление тока в индуктивно-связанном элементе совпадают относительно одноименных зажимов этих элементов.

Уравнения в комплексной форме трансформатора без ферромагнитного сердечника (воздушный трансформатор) (рис. 2.7) при согласованном включении катушек будут иметь вид:

- для первичной цепи

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2;$$

- для вторичной цепи

$$0 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 + \dot{Z}_H \dot{I}_2.$$

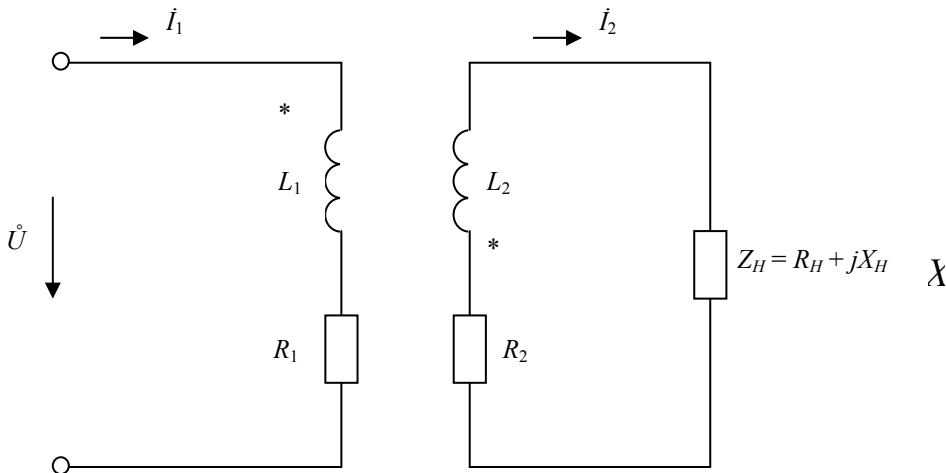


Рис. 2.7

Схема замещения без приведения числа витков, в которой разности  $L_1 - M$  и  $L_2 - M$  имеют физический смысл только при одинаковом числе витков первичной и вторичной обмоток, приведена на рис. 2.8.

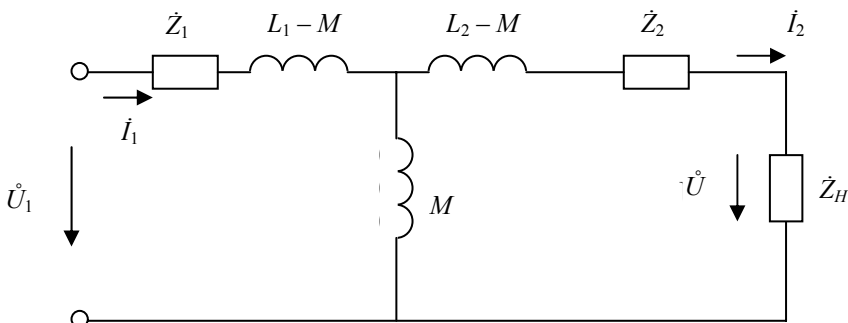


Рис. 2.8

Идеальный трансформатор ( $R_1 = R_2 = 0$ ;  $L_1 = L_2 = \infty$ ;  $M = \infty$   $K = \frac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}} = I$ ), включенный между нагрузкой и источником электроэнергии, изменяет сопротивление нагрузки  $Z_n$  пропорционально квадрату коэффициента трансформации  $n$ , т.е. осуществляет согласование сопротивлений.

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = n; \quad \dot{Z}_{\text{вх}1} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = n^2 \dot{Z}_2.$$

## 2.1. МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ АМПЛИТУД. ПРОСТЫЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

### Контрольные вопросы

1. В чем состоит идея расчета электрической цепи комплексным методом?
2. В чем заключается удобство комплексной формы расчета электрической цепи?
3. В каких формах может быть записано комплексное число?
4. Как переходят от мгновенных значений токов к комплексным и наоборот?
5. Что называется комплексной амплитудой синусоидальной функции? Написать выражения для комплексных амплитуд тока и напряжения.
6. Написать выражение для комплекса мгновенного значения напряжения.
7. Написать выражения комплексного сопротивления и комплексной проводимости для цепей с  $RL$ ,  $RC$ ,  $LC$  и  $RLC$ .
8. Чему равны модуль и аргумент комплексного сопротивления в последовательной цепи с  $RL$ ,  $RC$ ,  $LC$  и  $RLC$ ?
9. Чему равны модуль и аргумент комплексной проводимости в параллельной цепи с  $RL$ ,  $RC$ ,  $LC$ ,  $RLC$ ?
10. Написать уравнение, выражающее второй закон Кирхгофа для комплексных амплитуд (то же для первого закона Кирхгофа).
11. Как связаны сопротивления и проводимости одного и того же участка?
12. Записать и пояснить выражение для мощности в комплексной форме.

### Задачи

2.1.1. Записать в показательной, тригонометрической, алгебраической формах выражения комплексных действующих значений тока и напряжения, мгновенные значения которых равны

$$u = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 15^\circ) \text{ В};$$

$$i = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 20^\circ) \text{ А}.$$

2.1.2. По заданным комплексным изображениям гармонических функций найти комплексные амплитуды и записать уравнения мгновенных значений через косинус.

$$\dot{U}(t) = 90e^{j(314t - 50^\circ)} \text{ В};$$

$$\dot{E}(t) = 45e^{j(100t + 25^\circ)} \text{ В};$$

$$\dot{I}(t) = 100e^{j(25t + 60^\circ)} \text{ А}.$$

2.1.3. Для некоторой нагрузки напряжение на ее зажимах и ток в ней заданы в комплексной форме:

$$1) \dot{U} = (5 + j6) \text{ В}; \quad \dot{I} = (1 + j1,2) \text{ А};$$

$$2) \dot{U} = (50 + j60) \text{ В}; \quad \dot{I} = (2,5 + j3) \text{ А};$$

$$3) \dot{U} = (40 + j30) \text{ В}; \quad \dot{I} = (6 - j8) \text{ А};$$

$$4) \dot{U} = (60 + j80) \text{ В}; \quad \dot{I} = j20 \text{ А};$$

$$5) \dot{U} = 100e^{j30^\circ} \text{ В}; \quad \dot{I} = 5e^{j60^\circ} \text{ А}.$$

Определить  $\dot{Z}$ ,  $\dot{R}$ ,  $X$ ,  $\varphi$ ,  $P$ ,  $Q$ ,  $S$ .

2.1.4. Комплексное сопротивление цепи равно  $\dot{Z} = 3 + j5$  Ом. Вычислить активную и реактивную проводимости.

2.1.5. Напряжение на зажимах нагрузки и ток нагрузки заданы в виде комплексов действующих значений

$$\dot{U} = 120e^{j83^\circ 08'} \text{ В}, \quad \dot{I} = 2,4e^{j30^\circ} \text{ А}.$$

Определить сопротивление, коэффициент мощности, полную активную и реактивную мощности нагрузки.

2.1.6. К зажимам цепи, состоящей из последовательно включенных сопротивлений  $R = 40$  Ом и индуктивности  $L = 0,24$  мГн, приложено напряжение  $U = 100 \cos \omega t$  В. Определить комплексное входное сопротивление цепи  $Z_{\text{вх}}$  и комплексную амплитуду тока  $\dot{I}_m$ , если частота воздействия  $f_1 = 20$  Гц;  $f_2 = 20$  кГц.

2.1.7. В последовательной  $RL$  – цепи известны действующие значения напряжений на ее элементах:  $U_R = 5$  В;  $U_L = 3,12$  В. Вычислить действующее значение напряжения на входе цепи и сдвиг фаз между входным током и напряжением  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ .

2.1.8. В цепи, изображенной на рис. 2.9, заданы следующие параметры:  $U_{a, \delta} = 220$  В;  $R_1 = 1,5$  Ом;  $X_1 = 2,6$  Ом;  $R_2 = 29$  Ом;  $X_2 = 50$  Ом;  $R_3 = 6$  Ом;  $X_3 = 10$  Ом.

Определить комплексные токи в ветвях, напряжение на зажимах всей цепи, активные и реактивные мощности на участках и во всей цепи.

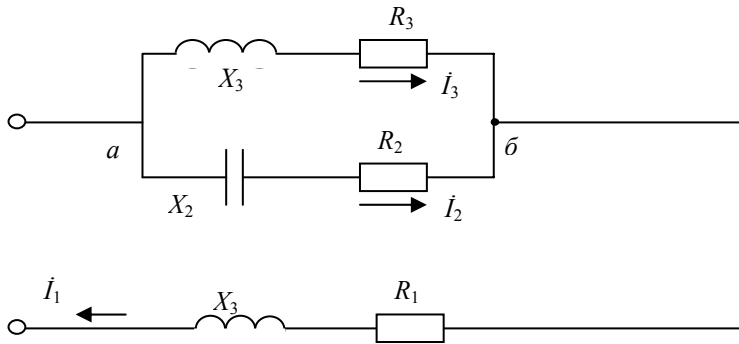


Рис. 2.9

2.1.9. К цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов  $R = 6$  Ом и  $C = 2$  мкФ, подведено синусоидальное напряжение  $U = 200$  В частотой  $f = 10$  кГц. Определить комплексное сопротивление цепи, рассчитать параметры эквивалентной схемы при параллельном соединении элементов.

2.1.10. В цепи (рис. 2.10) заданы параметры  $R = 50$  Ом,  $R_1 = 10$  Ом,  $X = 11$  Ом,  $X_1 = 25$  Ом. Каким активным сопротивлением  $R_2$  следует шунтировать сопротивление  $Z_1 = R_1 + jX_1$ , чтобы ток  $I_1$  отставал от приложенного напряжения на  $90^\circ$ ?

X

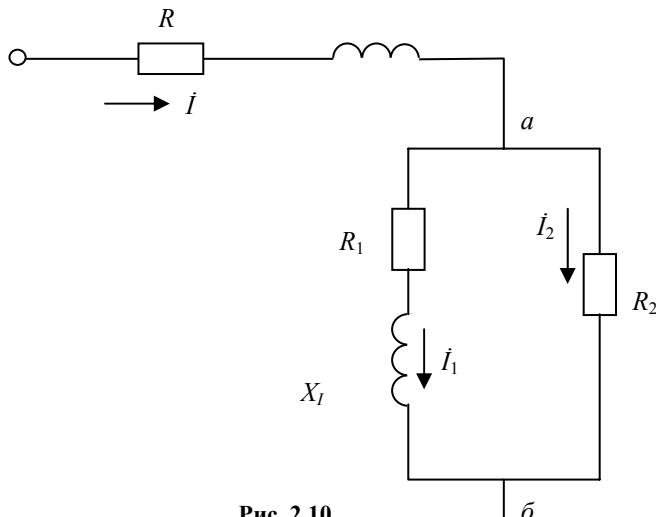
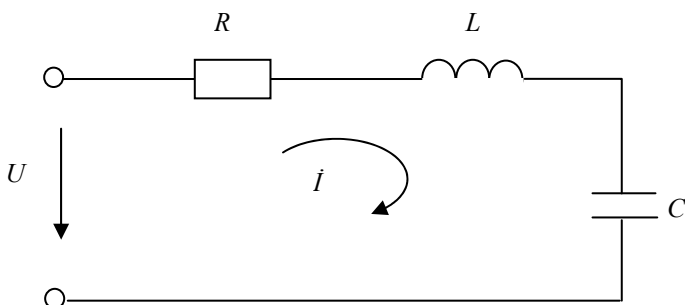


Рис. 2.10

2.1.11. Комплексное сопротивление нагрузки  $Z = (160 - j120)$  Ом. Мгновенное значение напряжения задано уравнением  $U = 200 \sin(\omega t + 25^\circ)$  В. Определить комплексную амплитуду тока и написать уравнение мгновенного значения тока.

2.1.12. К цепи, состоящей из последовательно соединенных  $R, L, C$  (рис. 2.11), приложено напряжение  $U = 14,14 \sin 314t$  В. Вычислить комплексные значения тока в цепи и напряжений на элементах  $R, L, C$ , если  $R = 20$  Ом,  $L = 100$  мГн,  $C = 50$  мкФ. Построить векторную диаграмму.



2.1.13. К электрической цепи (рис. 2.12) приложено напряжение  $U = 127$  В. Определить комплексные значения амплитуд напряжений на индуктивности и емкости и сдвиг по фазе между ними, если  $R_L = 10$  Ом,  $R_C = 1$  Ом,  $X_L = 50$  Ом,  $X_C = 30$  Ом.

Рис. 2.11

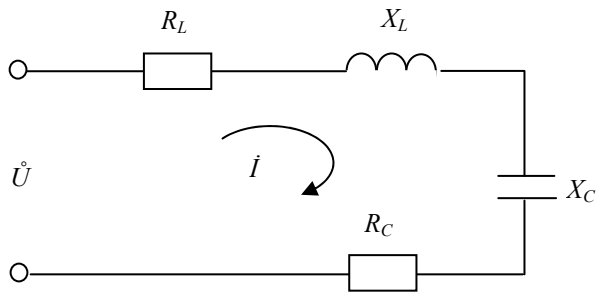


Рис. 2.12

2.1.14. К цепи, состоящей из последовательно соединенных элементов  $R = 6$  Ом и  $C = 2$  мкФ, подведено синусоидальное напряжение  $U = 200$  В, частотой  $f = 10$  кГц. Определить комплексное сопротивление цепи, рассчитать параметры эквивалентной схемы при параллельном соединении элементов.

2.1.15. В цепи изображенной на рис. 2.13, известны следующие параметры:  $U = 228\sin 1000t$  В,  $R_1 = 17,3$  Ом,  $L_1 = 10$  мГн,  $L_2 = 20$  мГн,  $R_3 = 5,77$  Ом,  $C_3 = 100$  мкФ. Определить комплексные токи во всех ветвях, построить векторную диаграмму токов.

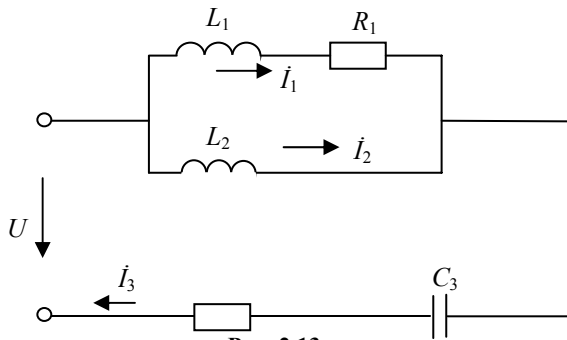


Рис. 2.13

2.1.16. К последовательно соединенным реостату сопротивление  $R = 120$  Ом, и конденсатору емкостью  $C = 30$  мкФ, подведено напряжение  $U = 311\sin 314t$  В. Вычислить полное сопротивление цепи, действующие значения напряжения и тока, мощность, расходуемую в цепи, реактивную мощность и разность фаз напряжения и тока. Построить векторную диаграмму напряжений и тока.

2.1.17. Индуктивная катушка, параметры которой  $R_1 = 10,5$  Ом,  $L = 382$  мкГн, и конденсатор (с потерями), эквивалентные параметры которого  $R_2 = 3,5$  Ом,  $C = 0,533$  мкФ, соединены последовательно (рис. 2.14). Какое напряжение  $U$  приложено к цепи, если амперметр показывает ток  $I = 2,4$  А? Частота переменного тока  $f = 5$  кГц. Определить напряжение на катушке  $U_{кат}$  и конденсаторе с потерями  $U_{конд}$ , а также мощность, расходуемую в каждом из этих элементов и построить векторную диаграмму напряжений.

Чему равна добротность катушки и добротность конденсатора? Определить угол потерь в конденсаторе.

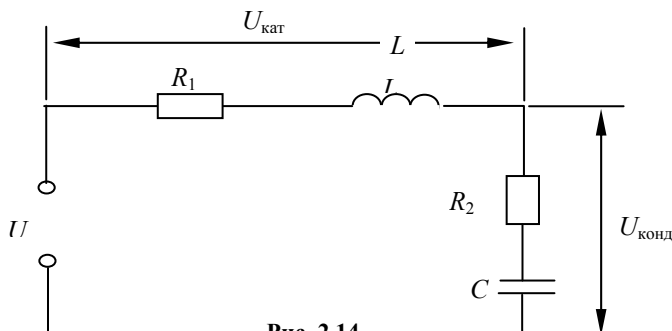


Рис. 2.14

2.1.18. Две последовательно соединенные катушки индуктивности с  $R_1, L_1$  и  $R_2, L_2$  и индуктивностью  $L_3$  присоединены параллельно к двум зажимам. Найти комплексное входное сопротивление цепи при  $R_1 = 100$  Ом,  $R_2 = 10$  Ом,  $L_1 = L_2 = L_3 = 1$  мГн,  $\omega = 10$  рад/с.

### Ответы, решения и методические указания

2.1.4.  $g = 8,8 \cdot 10^{-2}$  см;  $b = 14,7 \cdot 10^{-2}$  см.

2.1.5. Используя закон Ома для действующих значений, находим комплекс сопротивления нагрузки

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{120e^{j83^\circ 08'}}{2,4e^{j30^\circ}} = 50e^{j53^\circ 08'} = 30 + j40 \text{ Ом.}$$

Действительная часть этого комплекса равна активному сопротивлению, а коэффициент при мнимой части – реактивному сопротивлению:

$$R = 30 \text{ Ом; } X = 40 \text{ Ом} = X_L.$$

Коэффициент мощности цепи  $\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{30}{50} = 0,6$ ;  $\varphi = 53^\circ 08'$ .

### ОПРЕДЕЛЯЕМ КОМПЛЕКС ПОЛНОЙ МОЩНОСТИ

$$\tilde{S} = \dot{U} I^* = 120 e^{j83^\circ 08'} 2,4 + e^{-j30} = 288 e^{j53^\circ 08'} = 172,8 + j230,4 \text{ ВА.}$$

Модуль этого комплекса равен полной мощности, действительная часть выражает активную мощность коэффициента при мнимой части – реактивную мощность; следовательно,

$$S = 228 \text{ ВА}; \quad P = 172,8 \text{ Вт}; \quad Q = 230,4 \text{ ВАР.}$$

2.1.6. Комплексное входное сопротивление цепи  $Z'_{\text{вх}}$  равно сумме комплексных сопротивлений  $Z_L$  и  $Z_R$ , т.е.

$$\dot{Z}'_{\text{вх}} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_L = R + j\omega L.$$

Комплексная амплитуда тока  $\dot{I}_m = \dot{U}_m / \dot{Z}'_{\text{вх}}$  (закон Ома в комплексной форме).

2.1.7. Так как  $\dot{U}'_{\text{вх}} = \dot{U}_R + \dot{U}_L$  и  $\psi_{UL} - \psi_{UR} = 90^\circ$ , то

$$U_{\text{вх}} = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = 5,89 \text{ В}; \quad \varphi = \arctg \frac{U_L}{U_R} = 32^\circ.$$

2.1.8.  $j60^\circ$ ;  $\dot{I}_2 = 3,8 e^{j60^\circ} = 1,9 + j3,3 \text{ А}$ ;  $\dot{I}_3 = 19 e^{-j59^\circ} = 9,8 - j16,2 \text{ А}$ ;

$\dot{I}_1 = 11,7 - j12,9 = 17,5 e^{-j48^\circ} \text{ А}$ ;  $\dot{U} = 272 e^{j2^\circ} \text{ В}$ ;  $P_1 = 460 \text{ Вт}$ ;  $P_2 = 420 \text{ Вт}$ ;

$P_3 = 2150 \text{ Вт}$ ;  $P = 3030 \text{ Вт}$ .

$$Q_1 = 760 \text{ ВАР}; \quad Q_2 = -720 \text{ ВАР}; \quad Q_3 = 3600 \text{ ВАР}; \quad Q = 3640 \text{ ВАР.}$$

2.1.9.  $Z = R - jX_C = 6 - j7,96 \text{ Ом}$ ;  $g = 6 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ ;  $b = 8 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ ;  $R_3 = 16,6 \text{ Ом}$ ;  $C_3 = 1,27 \text{ мкФ}$ .

2.1.10.  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ .

2.1.11.  $\dot{I}_m = 1,1 e^{j62^\circ} \text{ А}$ ;  $i = 1,1 \sin(\omega t + 62^\circ)$ .

2.1.12.  $\dot{I} = 0,399 e^{j37^\circ} \text{ А}$ ;  $\dot{U}_R = 7,9 e^{j37^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{U}_L = 14,9 e^{j127^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{U}_R = 21 e^{-j53^\circ} \text{ В}$ .

2.1.13.  $\dot{U}_L = 285 e^{j18^\circ} \text{ В}$ ;  $\dot{U}_C = 170 e^{j18^\circ} \text{ В}$ ;  $\varphi = 151^\circ$ .

2.1.14.  $\dot{Z} = R - jX_C = 6 - j7,96 \text{ В}$ ;  $g = 6 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ ;  $b = 8 \cdot 10^{-2} \text{ см}$ ;  $R_3 = 16,6 \text{ Ом}$ ;  $C_3 = 1,27 \text{ мкФ}$ .

2.1.15.  $\dot{I}_1 = 10 e^{j30^\circ} \text{ А}$ ;  $\dot{I}_2 = 10 e^{-j30^\circ} \text{ А}$ ;  $\dot{I}_3 = 17,3 \text{ А}$ .

2.1.16.  $X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \cdot 30 \cdot 10^{-6}} = 106 \text{ Ом}$ ;

$$Z = \sqrt{X_C^2 + R^2} = \sqrt{120^2 + 106^2} = 160 \text{ Ом};$$

$$U = 311 / \sqrt{2} = 220 \text{ В}; \quad I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{160} = 1,37 \text{ А};$$

$$U_R = IR = 165 \text{ В}; \quad U_C = IX_C = 145 \text{ В};$$

$$P = I^2 R = 1,37^2 \cdot 120 = 226 \text{ Вт};$$

$$Q = -I^2 X_C = -1,37^2 \cdot 106 = -210 \text{ ВАР};$$

$$\text{tg} \varphi = -X_C / R = -\frac{106}{120} = -0,885; \quad \varphi = -41^\circ 30'.$$

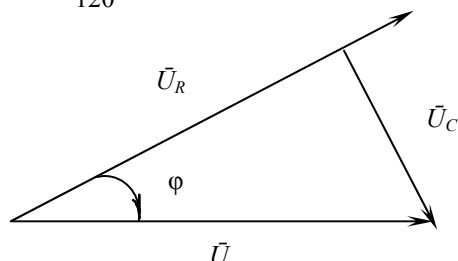


Рис. 2.15. Векторная диаграмма напряжений, тока

2.1.17. Добротность катушки – это величина, равная отношению

$$Q_L = \frac{\omega L}{R_l},$$

добротность конденсатора –  $Q_C = \frac{1}{\omega C R_2}$ .

Углом потерь называют угол  $\delta = \pi/2 - |\varphi|$ , где  $\varphi$  – разность фаз тока и напряжения на конденсаторе с потерями.

2.1.18.  $Z_{вх} = 6,16e^{j68,3^\circ}$  Ом.

## 2.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

### Контрольные вопросы

1. Чему равно эквивалентное комплексное сопротивление электрической цепи с последовательным соединением комплексных сопротивлений  $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dots, \dot{Z}_n$ ? Как определить общее активное сопротивление, индуктивность и емкость такой цепи?

2. Чему равен модуль комплексного сопротивления цепи, состоящей из двух последовательно соединенных комплексных сопротивлений

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1 \quad \text{и} \quad \dot{Z}_2 = R_2 + jX_2?$$

3. Чему равна эквивалентная комплексная проводимость электрической цепи, представляющей собой параллельное соединение комплексных проводимостей  $\dot{Y}_1, \dot{Y}_2, \dots, \dot{Y}_n$ ? Как определить общую активную проводимость, индуктивность и емкость такой цепи?

4. Пояснить, как понимать эквивалентность участков электрических цепей с последовательным и параллельным соединением элементов.

5. Вывести условие эквивалентности (при определенной частоте) активно-емкостных цепей с последовательным и параллельным соединением сопротивления и емкости.

6. В чем заключается условие эквивалентности генератора напряжения и генератора тока?

7. Привести пример, в котором требуется преобразовать «звезду» в «треугольник» или «треугольник» в «звезду».

8. Каково условие эквивалентности электрических цепей, соединенных по способу «звезда» и «треугольник»?

### Задачи

2.2.1. Выразить комплексные входные сопротивления цепей (рис. 2.16) через комплексные сопротивления их элементов.

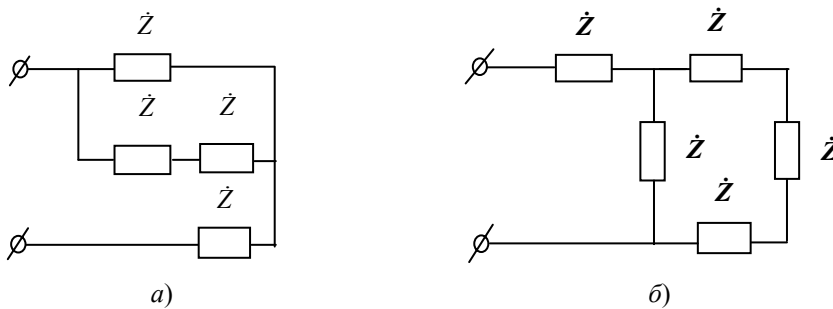


Рис. 2.16

2.2.2. Определить комплексное входное сопротивление и параметры схемы замещения цепей (рис. 2.17). Параметры элементов:

$$C_1 = 70 \text{ пФ}; \quad C_2 = 30 \text{ пФ}; \quad C_3 = 200 \text{ пФ}; \quad C_4 = 100 \text{ пФ};$$

$$C_5 = C_6 = C_7 = 300 \text{ пФ}; \quad L_1 = L_2 = \dots = L_6 = 8 \text{ мГн.}$$

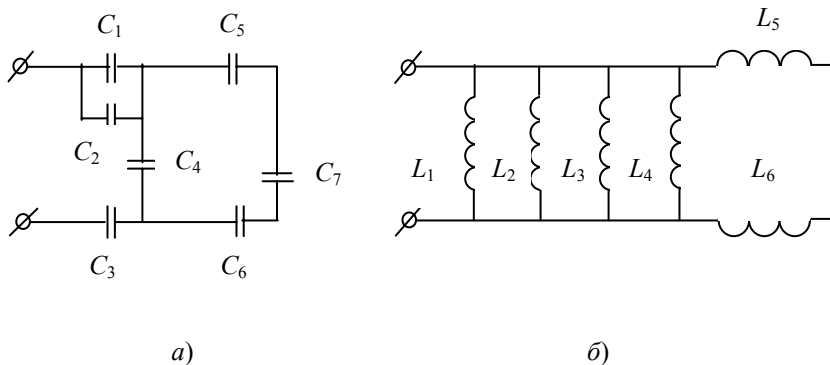


Рис. 2.17

2.2.3. Рассчитать комплексное входное сопротивление цепи (рис. 2.18) на частотах  $f_1 = 39,8$  кГц;  $f_2 = 79,6$  кГц;  $f_3 = 159$  кГц. Параметры элементов цепи:  $R_1 = R_2 = 1$  кОм;  $C_1 = C_2 = 0,5$  нФ;  $\alpha = 10$  мГн.

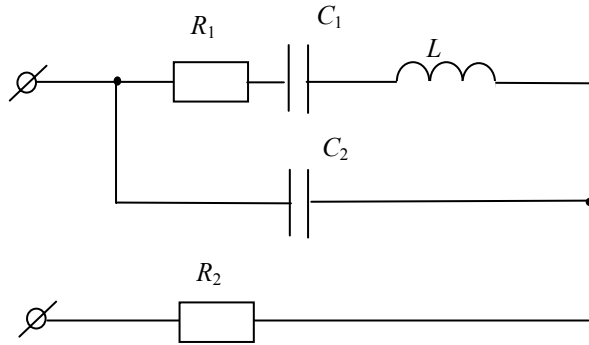


Рис. 2.18

2.2.4. Определить последовательную и параллельную схемы замещения цепи, рассмотренной в задаче 2.2.3.

2.2.5. Параллельный контур (рис. 2.19), состоящий из активного сопротивления  $R = 40$  Ом, индуктивности с сопротивлением  $X_L = 100$  Ом и емкости с  $X_C = 20$  Ом, подключен к источнику с ЭДС  $E = 30$  В через реактивное сопротивление  $X_1$ . Определить величину и характер этого сопротивления, если известно, что через него проходит ток  $\dot{I} = 12$  А.

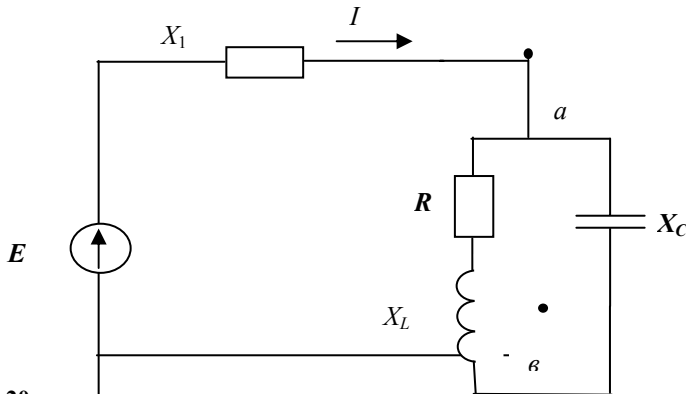


Рис. 2.20

2.2.6. Определить показания амперметра в электрической цепи (рис. 2.21), состоящей из источника  $E = 40$  В и сопротивлений  $R_1 = 30$  Ом;  $R_2 = 15$  Ом;  $R_3 = 6$  Ом;  $R_4 = 9$  Ом;  $R_5 = 2,25$  Ом.

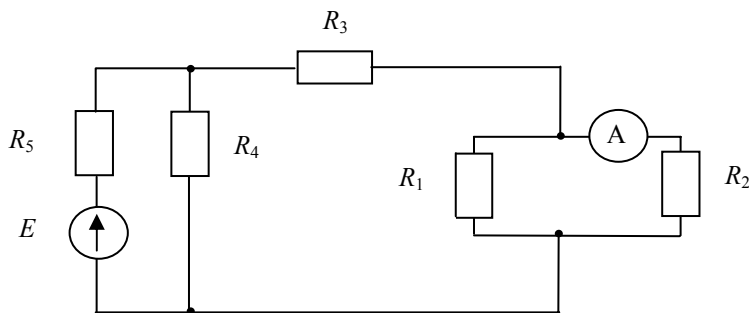


Рис. 2.21

2.2.7. В последовательной электрической цепи (рис. 2.22) известны следующие параметры:  $R_1 = 5$  Ом;  $X_{L1} = 10$  Ом;  $R_2 = 3$  Ом;  $X_{C2} = 15$  Ом;  $R_3 = 4$  Ом;  $X_{L3} = 21$  Ом. Определить эквивалентное комплексное сопротивление и его модуль. Пояснить, что комплексное сопротивление характеризует все свойства электрической цепи.

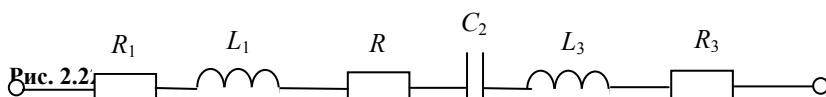


Рис. 2.22

2.2.8. В электрической цепи (рис. 2.23) требуется путем выбора реактивного сопротивления  $X_2$  сделать так, чтобы ток  $\dot{I}_2$  опережал по фазе ток  $\dot{I}_1$  на  $90^\circ$ . Определить величину  $X_2$ , если  $R_1 = 10$  кОм,  $R_2 = 15$  кОм,  $X_1 = 1,5$  кОм.



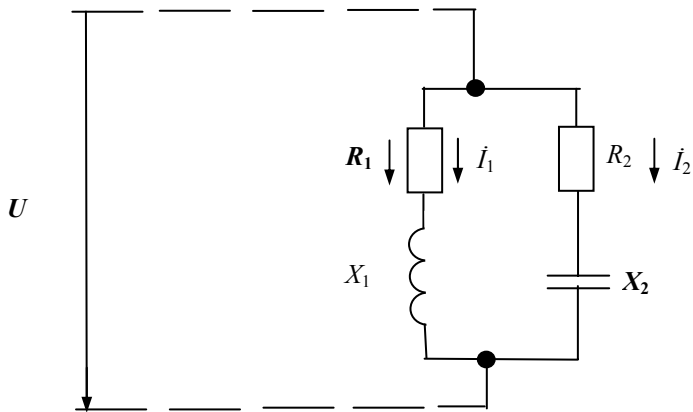


Рис. 2.23

2.2.9. Для последовательной цепи (рис. 2.24) из  $R = 6$  Ом и  $X = 8$  Ом построить эквивалентную параллельную схему и определить ее параметры  $R_{\text{экв}}$  и  $X_{\text{экв}}$ .

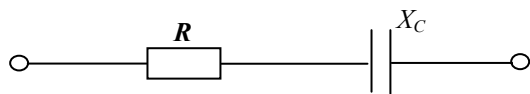


Рис. 2.24

2.2.10. В электрической цепи (рис. 2.25), представляющей параллельное соединение активного сопротивления  $R = 2$  Ом и емкости  $C = 0,191$  мкФ, определить параметры эквивалентной схемы с последовательным соединением  $R_{\text{экв}}$  и  $C_{\text{экв}}$  для частоты 1 МГц, 1,5 МГц, 2 МГц.

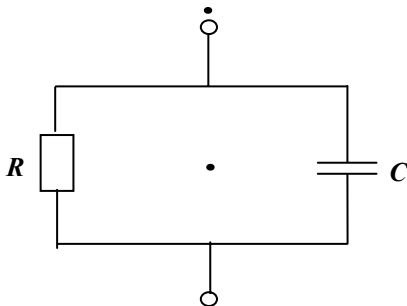


Рис. 2.25

2.2.11. Вычислить комплексное сопротивление электрической цепи при  $\omega = 314$  рад/с (рис. 2.26). Параметры цепи:  $R = 10$  Ом,  $L = 100$  мГн,  $C = 10$  мкФ.

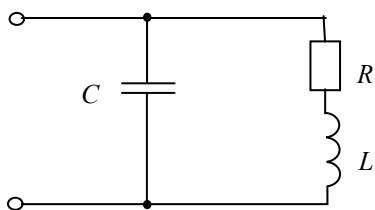


Рис. 2.26

2.2.12. В электрической цепи (рис. 2.24)  $R = 100$  Ом. Определить, какими должны быть параметры  $L$  и  $C$ , чтобы на частоте  $\omega = 10^5$  рад/с комплексное сопротивление цепи  $\dot{Z}_{\text{ц}} = 600$  Ом.

2.2.13. Нагрузка, состоящая из активного сопротивления с  $R = 10$  Ом и емкости  $C = 1/(30\omega)$ Ф, питается от источника с комплексной амплитудой  $\dot{U}_m = 100$  В через линию передачи с комплексным сопротивлением  $\dot{Z}_1 = 15 + j20$  Ом (рис. 2.27).

Определить комплексные амплитуды тока, потребляемого от источника, и напряжения, действующего на нагрузке.

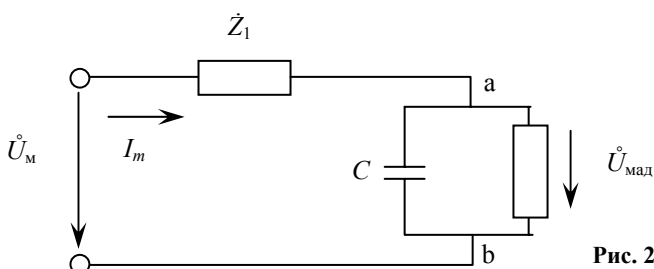


Рис. 2.27

2.2.14. Электрическая цепь состоит из двух параллельных ветвей, комплексные сопротивления которых

$$\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 40 + j30 \text{ Ом};$$

$$\dot{Z}_2 = R_2 - jX_2 = 80 - j150 \text{ Ом}.$$

Определить комплексное сопротивление и проводимость всей цепи при условии, что частота возрастает в 1,5 раза.  
 2.2.15. Сопротивление  $Z_{12} = 50 - j20 \text{ Ом}$ ,  $Z_{23} = 100 \text{ Ом}$ ,  $Z_{31} = 40 + j60 \text{ Ом}$  соединены «треугольником». Преобразовать данный «треугольник» в эквивалентную «звезду», т.е. определить сопротивления лучей «звезды»  $Z_1; Z_2; Z_3$ .

### Ответы, решения и методические указания

2.2.3. Комплексное сопротивление ветви, составленной из элементов

$$R_1, L \text{ и } C_1, \quad \dot{Z}_{\text{эКВ}} = \dot{Z}_{R1} + \dot{Z}_L + \dot{Z}_{C1}.$$

Комплексное сопротивление параллельно включенных ветвей

$$R_1, L, C_1 \text{ и } C_2, \quad \dot{Z}_{\text{эКВ}} = \dot{Z}_{\text{эКВ}1} \dot{Z}_{C2} / (\dot{Z}_{\text{эКВ}1} + \dot{Z}_{C2}).$$

Комплексное входное сопротивление всей цепи

$$\dot{Z}_{\text{ВХ}} = \dot{Z}_{R2} + \dot{Z}_{\text{эКВ}2},$$

где  $\dot{Z}_{R1} = \dot{Z}_{R2} = R$ ;  $\dot{Z}_L = j\omega L$ ;  $\dot{Z}_{C1} = \dot{Z}_{C2} = -j/\omega C$ .

2.2.4. Последовательная и параллельная схемы замещения цепи, входное комплексное сопротивление которой имеет резистивно-емкостной характер изображены на рис. 2.28.

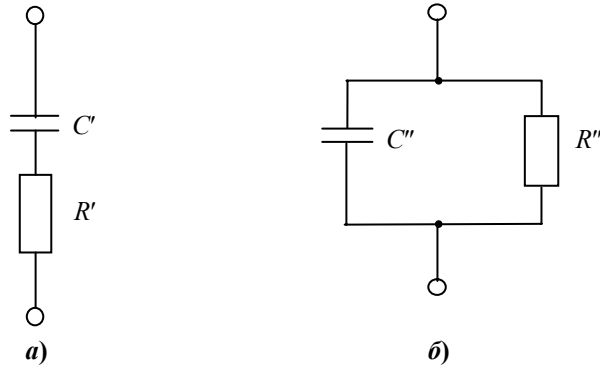


Рис. 2.28

Комплексное сопротивление последовательной цепи  $\dot{Z}_1 = R' - j/\omega c'$ .

Сравнивая его с известным сопротивлением цепи  $\dot{Z} = R - jX$ .

Определим параметры элементов последовательной схемы замещения:  $R' = R$ ;  $C' = -1/\omega X$ .

Комплексная входная проводимость параллельной схемы замещения  $\dot{Y}'' = 1/R'' + j\omega C''$ .

Сравнивая ее с входной проводимостью рассматриваемой цепи  $\dot{Y} = 1/\dot{Z} = g + jb$ , находим параметры элементов параллельной схемы замещения:  $R'' = 1/g$ ;  $C'' = b/\omega$ .

Параметры элементов последовательной и параллельной схем замещения цепи (рис. 2.29), имеющей резистивно-индуктивный характер входного комплексного сопротивления:  $R' = R$ ;  $L' = X/\omega$ ;  $R'' = 1/g$ ;  $L'' = 1/\omega b$ .

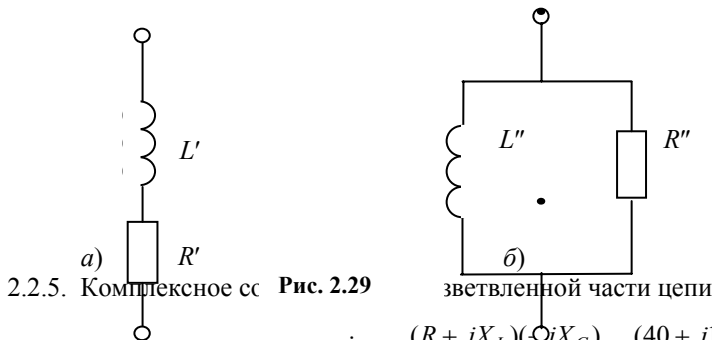


Рис. 2.29

2.2.5. Комплексное сопротивление

$$\dot{Z}_{ab} = \frac{(R + jX_L)(-jX_C)}{(R + jX_L) + (-jX_C)} = \frac{(40 + j100)(-j20)}{40 + j100 - j20} = 2 - j24 \text{ Ом}.$$

Таким образом

$$\dot{Z}_{ab} = R_{ab} + jX_{ab} = 2 - j24 \text{ Ом}.$$

Модуль полного сопротивления цепи  $Z = \frac{E}{I} = \frac{30}{12} = 2,5 \text{ Ом}$ .

$$Z = \sqrt{R_{ab}^2 + (X_1 + X_{ab})^2} = \sqrt{2^2 + (X_1 - 24)^2},$$

откуда  $(X_1 - 24)^2 = 2,25$  или  $X_1 - 24 = \pm 1,5 \text{ Ом}$ .

Возможны два решения задачи, когда искомое сопротивление имеет индуктивный характер и равно:  $X_1' = 25,5 \text{ Ом}$ ;  $X_1'' = 22,5 \text{ Ом}$ .

2.2.6. 1,2 А.

2.2.7.  $20I^{j53^\circ} \text{ Ом}$ .

2.2.8.  $-100 \text{ кОм}$ .

2.2.9.  $R_{\text{экв}} = 16,6 \text{ Ом}$ ;  $X_{\text{экв}} = 12,5 \text{ Ом}$ .

2.2.10.  $R_{\text{экв}} = 0,296 \text{ Ом}$ ;  $0,143 \text{ Ом}$ ;  $0,083 \text{ Ом}$ .

$C_{\text{экв}} = 0,224 \text{ мкФ}$ ;  $0,206 \text{ мкФ}$ ;  $0,199 \text{ мкФ}$ .

2.2.11.  $13,5 + j43,4 \text{ Ом}$ .

2.2.12. 2 мГн; 0,04 мкФ.

2.2.13.  $3,4I^{-j35^\circ} \text{ А}$ ;  $32I^{-j54^\circ} \text{ В}$ .

2.2.14.  $58,4I^{j21^\circ 35'}$  Ом;  $12 \cdot 10^{-2} I^{j21^\circ 35'}$  Ом.

2.2.15.  $18,5 + j7,7 \text{ Ом}$ ;  $23,1 - j15,4 \text{ Ом}$ ;  $26,5 + j26 \text{ Ом}$ .

### 2.3. ИНДУКТИВНО-СВЯЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

#### Контрольные вопросы

1. Поясните, чем определяется направление ЭДС взаимной индукции.
2. В чем состоят особенности расчета простых и сложных цепей при наличии в цепях взаимной индукции?
3. Записать для согласного последовательного включения индуктивно-связанных катушек уравнения по II-му закону Кирхгофа.
4. Для встречного включения индуктивно-связанных катушек изобразить векторную диаграмму напряжений.
5. Правило составления уравнений по II-му закону Кирхгофа для цепей с взаимной индукцией.
6. Идеальный трансформатор: расчетная схема и уравнения по II-му закону Кирхгофа для первичного и вторичного контуров.
7. Преобразование сопротивления нагрузки с помощью согласующего трансформатора.

#### Задачи

2.3.1. Составить уравнения электрического равновесия для определения токов ветвей цепи, изображенной на рис. 2.30.

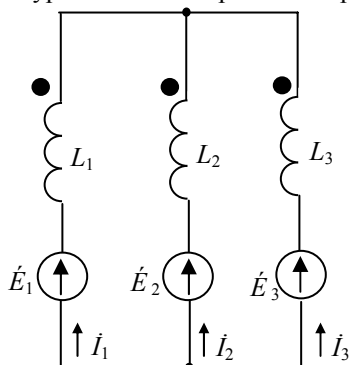
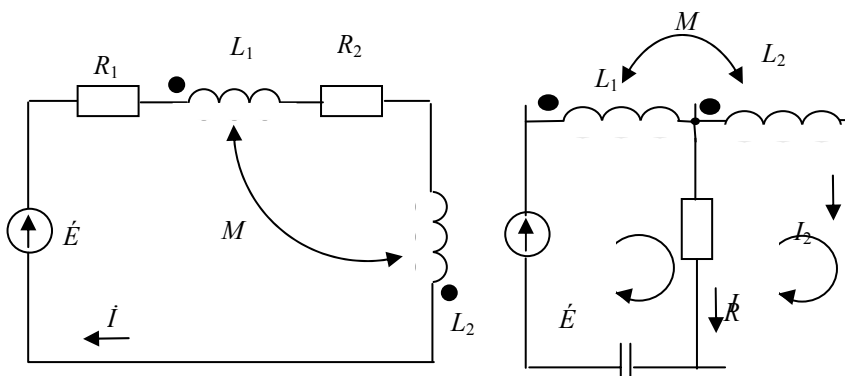
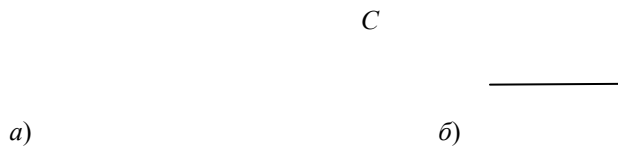


Рис. 2.30

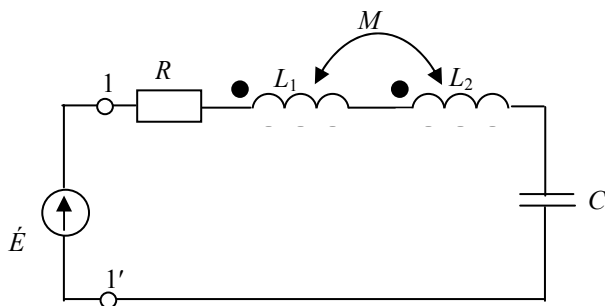
2.3.2. Составить системы уравнений электрического равновесия цепей, схемы которых приведены на рис. 2.31.





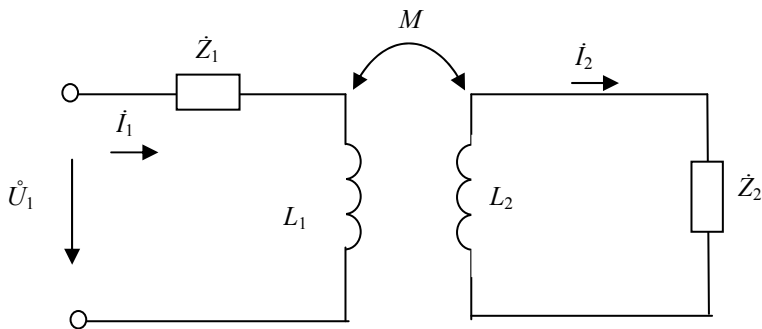
**Рис. 2.31**

2.3.3. На рис. 2.32 приведена схема цепи со следующими параметрами элементов:  $R = 5 \text{ кОм}$ ;  $C = 0,5 \text{ нФ}$ ;  $L_1 = 3 \text{ мГн}$ ;  $L_2 = 5 \text{ мГн}$ ;  $M = 2 \text{ мГн}$ ;  $\dot{E} = 10 \text{ В}$ ;  $\omega = 10^6 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$ . Определить комплексное входное сопротивление цепи относительно зажимов  $I-I'$  и мгновенное значение тока. Проверить выполнение баланса мощностей.



**Рис. 2.32**

2.3.4. Рассчитать входное комплексное сопротивление цепи (рис. 2.33)



**Рис. 2.33**

2.3.5. На частоте  $\omega = 10^6 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}$  входное сопротивление одной из двух одинаковых индуктивно-связанных катушек при разомкнутой другой катушке составляет  $Z_{1K} = 10^4 \text{ Ом}$ , а при короткозамкнутой  $Z_{1K} = 0,99 \cdot 10^4 \text{ Ом}$ . Определить индуктивность катушек, взаимную индуктивность и коэффициент связи между катушками. Потерями в катушках пренебречь.

2.3.6. Каким должно быть емкостное сопротивление  $X_C$  в цепи (рис. 2.34), чтобы входной ток совпал по фазе с входным напряжением, если  $X_{L1} = 10 \text{ Ом}$ ;  $X_{L2} = 20 \text{ Ом}$ ;  $X_M = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ;  $\dot{U} = 100 \text{ В}$ .

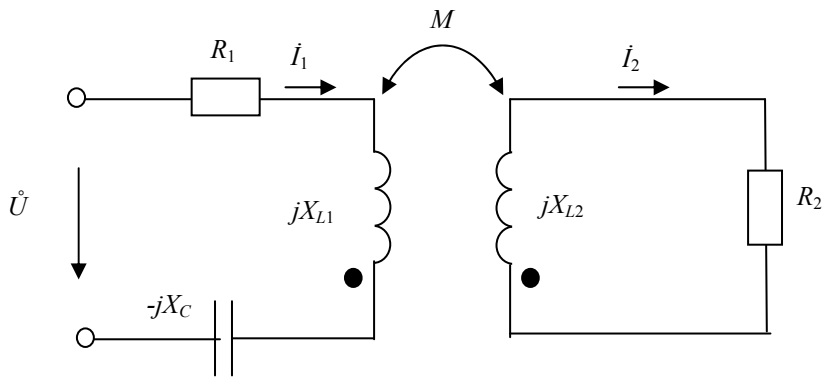


Рис. 2.34

2.3.7. В цепи (рис. 2.35)  $U = 100$  В ;  $f = 500$  Гц ;  $R_1 = 12$  Ом ;  $R_2 = 8$  Ом ;  $L_1 = L_2 = 2M = 0,02$  Гн катушки включены встречно. Определить, при каком значении емкости  $C$  цепь будет находиться в режиме резонанса и каково при этом будет напряжение на емкости?

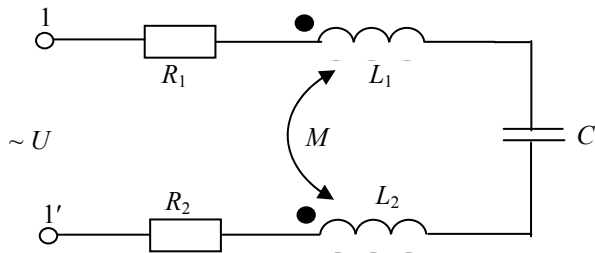


Рис. 2.35

2.3.8. Комплекс тока вторичной обмотки трансформатора (рис. 2.36) без стального сердечника  $\dot{I}_2 = 4$  А. Сопротивления элементов цепи  $R_1 = 5$  Ом ;  $X_1 = 20$  Ом ;  $R_2 = 7$  Ом ;  $X_2 = 24$  Ом . Коэффициент магнитной связи обмоток  $K_{св} = 46\%$  . Определить комплекс напряжения, приложенного к первичной обмотке трансформатора и построить векторную диаграмму.

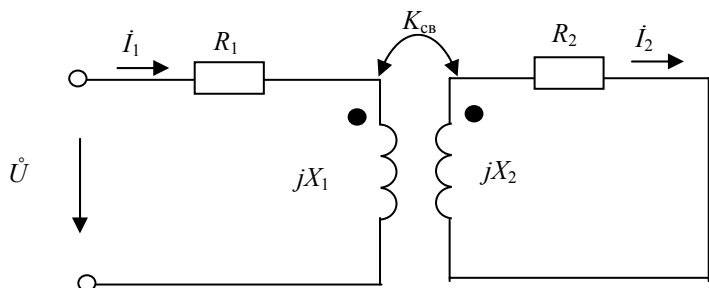


Рис. 2.37

2.3.9. Определить комплексный ток в цепи, изображенной на рис. 2.38, если известно:  $\dot{U} = 130$  В ;  $R_1 = 6$  Ом ;  $R_2 = 3$  Ом ;  $\omega L_1 = 3$  Ом ;  $\omega L_2 = 7$  Ом ;  $\omega M = 1$  Ом .

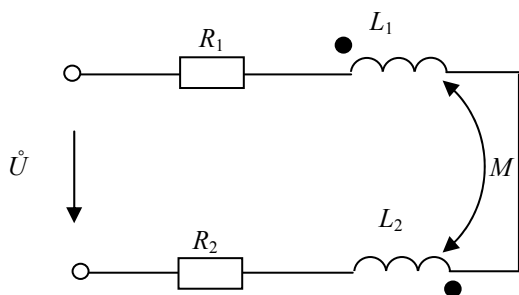


Рис. 2.38

2.3.10. Определить напряжение на емкости  $C = 43$  мкФ, включенной между двумя индуктивно-связанными катушками с параметрам (рис. 2.39):  $R_1 = 10,5$  Ом;  $L_1 = 20$  мГн;  $R_2 = 9,2$  Ом;  $L_2 = 18$  мГн;  $M = 6,5$  мГн. Напряжение 100 В, частота 200 Гц.

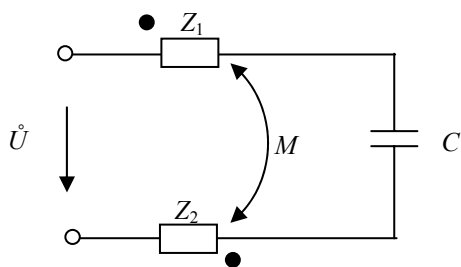


Рис. 2.39

2.3.11. Вольтметр и амперметр, включенные в цепь (рис. 2.40), показали  $U = 88$  мВ,  $I = 2,2$  мА. Чему равна емкость  $C$ , если  $R_1 = 9,5$  Ом,  $\omega L_1 = 14,6$  Ом,  $R_2 = 11,6$  Ом,  $\omega L_2 = 17$  Ом,  $\omega M = 3,2$  Ом? Частота тока  $f = 50$  кГц.

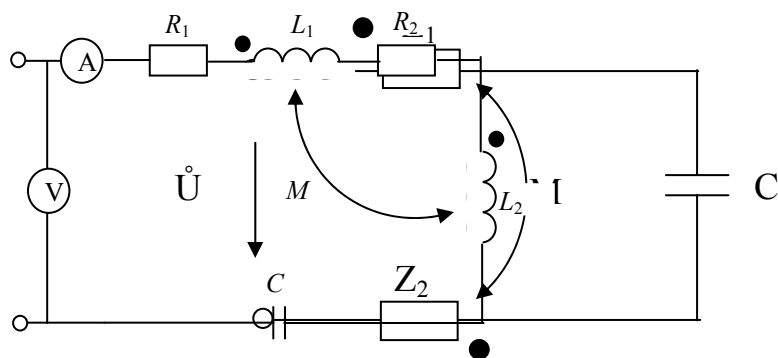


Рис. 2.30

Рис. 2.40

2.3.12. Идеальный трансформатор включен между источником с внутренним сопротивлением  $Z_i = Z_{вх1} = 24$  кОм и нагрузкой  $Z_n = 6$  кОм, с целью повышения отдаваемой источником мощности. Какой коэффициент трансформации  $n$  должен иметь согласующий трансформатор?

2.3.13. Определить входное сопротивление цепи, состоящей из двух трансформаторов, включенных каскадно с нагрузкой  $R_n$  на выходе (рис. 2.41). Активные сопротивления обмоток трансформатора не учитываются.

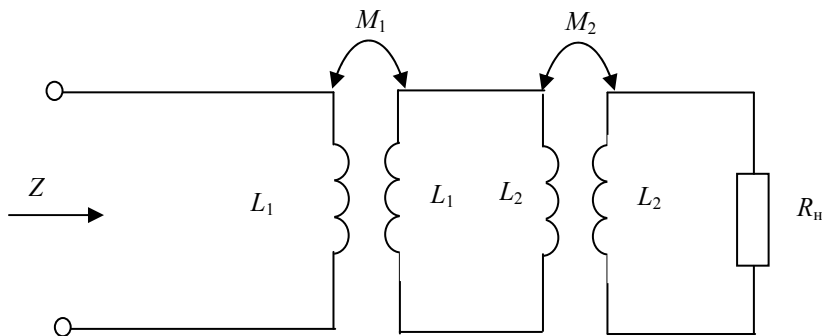


Рис. 2.41

### Ответы, решения и методические указания

#### 2.3.3. Комплексное входное сопротивление цепи

$$Z_{\text{вх}} = R + j[\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M_1 - 1/\omega C] = 5 + j10 \text{ кОм}.$$

По закону Ома в комплексной форме комплексное действующее значение тока

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{\text{вх}}} = (0,4 + j0,8)10^{-3} = 0,894 \cdot 10^{-3} e^{-63,4^\circ} \text{ А},$$

чему соответствует мгновенное значение тока  $i = 1,26\cos(10^6 t - 63,4^\circ)$  мА. Комплексная мощность, отдаваемая источником ЭДС:

$$\hat{P}_{S_{\text{ист}}} = \dot{E}\bar{\dot{I}} = (4 + j8) \cdot 10^{-3} \text{ ВА}.$$

Сумма комплексной мощности всех потребителей

$$\hat{P}_{S_{\text{потр}}} = I^2 R + jI^2[\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M - 1/\omega C] = (4 + j8) \cdot 10^{-3} \text{ ВА}.$$

Баланс мощностей выполняется.

#### 2.3.4. Используя основную систему уравнений электрического равновесия цепи, можно получить уравнения в виде

$$\dot{I}_1 \dot{Z}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_1 = \dot{U}_1; \quad \dot{I}_2 \dot{Z}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 = 0.$$

Исключая из полученной системы уравнения ток  $I_2$ , получаем выражение для входного сопротивления цепи:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{Z}_1} = -Z_1 + j\omega L_1 - (\omega M)^2 / (Z_2 + j\omega L_2).$$

2.3.5. Индуктивность катушек и взаимная индуктивность могут быть определены с помощью выражений, полученных из решений задачи 2.3.4:  $Z_{\text{вх. х}} = \omega L_1$ ,  $Z_{\text{вх. х}} = \omega(L_1 - M^2/L_2)$ . Коэффициенты связи  $K = M/L$ .

2.3.6. По второму закону Кирхгофа при встречном включении обмоток можно записать

$$\begin{aligned} \dot{I}_1(R_P + jX_{L1} - jX_C) - \dot{I}_2 jX_M &= \dot{U}_1; \\ -\dot{I}_1 jX_M + \dot{I}_2(R_2 + jX_{L2}) &= 0, \end{aligned}$$

из второго уравнения выразим  $I_2 = I_1 \frac{jX_M}{R_2 + jX_{L2}}$  и, подставляя в первое, получим

$$I_2 Z_{\text{вх}} = U,$$

где

$$\begin{aligned} Z_{\text{вх}} &= R_1 + jX_{L1} - jX_C + \frac{X_M}{R_2 + jX_{L2}} = R_1 + \frac{R_2 - X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2} + \\ &+ j \left( X_{L1} - X_C - \frac{X_{L2} - X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2} \right). \end{aligned}$$

По условию  $I_m[Z_{\text{вх}}] = 0$ , откуда

$$X_C = X_{L1} - \frac{X_{L2} X_M^2}{R_2^2 + X_{L2}^2},$$

определим комплексы токов

$$I_1 = \frac{U}{Z_{\text{вх}}}; \quad I_2 = I_1 \frac{jX_M}{R_2 + jX_{L2}}.$$

2.3.7. При резонансе напряжений реактивное сопротивление равно нулю  $X_1 + X_2 - 2X_M - X_C = 0$  или  $\omega(L_1 + L_2 - 2M) - \frac{1}{\omega C} = 0$ , откуда

$$C = \frac{1}{\omega^2(L_1 + L_2 - 2M)}.$$

Действующее значение тока при резонансе  $I = \frac{U}{R_1 + R_2}$ .

Действующее значение напряжения на конденсаторе

$$U_C = IX_C = I \frac{1}{\omega C}.$$

2.3.8. Составим уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{U} = R_1 \dot{I}_1 + jX_1 \dot{I}_1 - jX_M \dot{I}_2; \\ 0 = R_2 \dot{I}_2 + jX_2 \dot{I}_2 - jX_M \dot{I}_1, \end{cases} \quad (2.1)$$

или

$$\begin{cases} \dot{U} = \dot{Z}_1 \dot{I}_1 - \dot{Z}_M \dot{I}_2; \\ 0 = -\dot{Z}_M \dot{I}_1 + \dot{Z}_2 \dot{I}_2, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $\dot{Z}_1 = R_1 + jX_1 = 5 + j20 = 20,6e^{j76^\circ}$  Ом;

$$\dot{Z}_2 = R_2 + jX_2 = 7 - j24 = 25e^{j73^\circ 45'}$$
 Ом.

Из второго уравнения системы (2.1) находим  $\dot{I}_1$ :

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 \frac{\dot{Z}_2}{\dot{Z}_M} = 4 \frac{25e^{j73^\circ 45'}}{10e^{j90^\circ}} = 10e^{-j16^\circ 15'}$$
 А.

Подставив найденный комплекс тока  $\dot{I}_1$  в первое уравнение системы (2.2), получим:  $\dot{U} = 10e^{-j16^\circ 15'} \cdot 20e^{j76^\circ} - 4 \cdot 10e^{j90^\circ} = 173e^{j53^\circ}$  В.



$$2.3.9. \dot{I} = (5,7 - j7,1) \text{ A}.$$

2.3.10. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U} = (R_1 + R_2)\dot{I} + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\dot{I} - j\frac{1}{\omega C}\dot{I},$$

из которого  $\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R_1 + R_2 + j\omega(L_1 + L_2 + 2M) - j\frac{1}{\omega C}}$  и напряжение на емкости  $\dot{U}_C = -jX_C\dot{I} = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}$ .

$$2.3.11. 0,796 \text{ мкФ или } 0,0442 \text{ мкФ}.$$

$$2.3.12. n = 2.$$

$$2.3.13. Z_{\text{вх}} = \frac{\omega R_n(L_1^2 + L_1L_2 - M_1^2)}{\omega(L_1L_2 + L_2^2 - M_2^2) - jR_n(L_1 + L_2)} + \frac{j\omega^2(L_1^2L_2 + L_1L_2^2 - L_1M_2^2 - L_2M_1^2)}{\omega(L_1L_2 + L_2^2 - M_2^2) - jR_n(L_1 + L_2)}.$$

### 3. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА И РАСЧЕТА СЛОЖНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

В методе контурных токов в качестве неизвестных выступают так называемые контурные токи, одинаковые для всех участков контура. При решении задач рекомендуется записывать уравнения в канонической форме, например, для трехконтурной цепи

$$\begin{cases} \dot{Z}_{11}\dot{I}_I + \dot{Z}_{12}\dot{I}_{II} + \dot{Z}_{13}\dot{I}_{III} = E_I; \\ \dot{Z}_{21}\dot{I}_I + \dot{Z}_{22}\dot{I}_{II} + \dot{Z}_{23}\dot{I}_{III} = E_{II}; \\ \dot{Z}_{31}\dot{I}_I + \dot{Z}_{32}\dot{I}_{II} + \dot{Z}_{33}\dot{I}_{III} = E_{III}, \end{cases}$$

где  $\dot{Z}_{ii}(\dot{Z}_{11}, \dot{Z}_{22}, \dot{Z}_{33})$  – собственно сопротивление  $i$ -го контура представляет собой сумму комплексных сопротивлений, входящих в контур, входит в уравнение со знаком «+»;  $\dot{Z}_{ij}(\dot{Z}_{12}, \dot{Z}_{13}, \dot{Z}_{23}, \dot{Z}_{21}, \dot{Z}_{31}, \dot{Z}_{32})$  – общее сопротивление двух рядом расположенных контуров, входит в уравнение со знаком «+», если контурные токи в общем сопротивлении совпадают по направлению, при несовпадении направлений токов общее сопротивление входит со знаком минус;  $\dot{E}_i(\dot{E}_I, \dot{E}_{II}, \dot{E}_{III})$  – контурная ЭДС (алгебраическая сумма ЭДС входящих в  $i$ -й контур).

После решения системы уравнений относительно контурных токов, токи в ветвях определяются алгебраической суммой контурных токов, протекающих через соответствующие ветви.

В методе узловых напряжений на первом этапе расчета в качестве неизвестных выступают потенциалы узловых точек схем (узловые напряжения).

При расчете этим методом систему уравнений цепи следует представить в виде

$$\begin{cases} \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{13}\dot{U}_3 = \dot{I}_I; \\ \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{23}\dot{U}_3 = \dot{I}_{II}; \\ \dot{Y}_{31}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{32}\dot{U}_2 + \dot{Y}_{33}\dot{U}_3 = \dot{I}_{III}, \end{cases}$$

где  $\dot{Y}_{ii}(\dot{Y}_{11}, \dot{Y}_{22}, \dot{Y}_{33})$  – собственная проводимость  $i$ -го узла;  $\dot{Y}_{ij}(\dot{Y}_{12}, \dot{Y}_{13}, \dot{Y}_{23}, \dots)$  – общая проводимость узлов  $i$  и  $j$ ;  $\dot{Y}_{ij}$  – входит в уравнение со знаком минус, если положительные направления узловых напряжений выбраны от независимых узлов к базисному узлу, в противном случае общая проводимость берется со знаком плюс;  $\dot{I}_i(\dot{I}_I, \dot{I}_{II}, \dot{I}_{III})$  – узловой ток (алгебраическая сумма токов, полученных от деления ЭДС ветвей, подходящих к  $i$ -му узлу на сопротивления данных ветвей). В эту сумму со знаком плюс входят токи тех ветвей, ЭДС которых направлены к  $i$ -му узлу.

После определения узловых напряжений токи в ветвях находят по закону Ома для участка цепи.

Для нахождения тока в одной из ветвей цепи используют метод эквивалентного генератора.

Искомый ток ветви определяется по закону Ома

$$I = \frac{U_{\text{авхх}}}{R_{\text{вхав}} + R},$$

если в данной ветви нет источника ЭДС и  $I = \frac{U_{авхх} \pm E}{R_{вхав} + R}$ , если в данной ветви имеется источник ЭДС  $E$ , направление которого совпадает («+») или не совпадает («-») с направлением тока от зажима «а» к зажиму «в».

Для переменных токов расчетные уравнения в комплексной форме будут иметь вид:

$$\dot{I} = \frac{U_{авхх}}{\dot{Z}_{вхав} + \dot{Z}}; \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}_{авхх} \pm \dot{E}}{\dot{Z}_{вхав} + \dot{Z}}.$$

При расчете цепи методом наложения (суперпозиции) истинный ток в любой и каждой ветви цепи определяют как алгебраическую сумму частичных токов, вызываемых в данной ветви действием каждого из источников в отдельности.

При определении токов в цепи от действия какого-либо одного источника остальные источники должны быть исключены, но их внутреннее сопротивление (проводимости) оставлены.

Метод наложения применим лишь для линейных цепей.

### 3.1. МЕТОДЫ КОНТУРНЫХ ТОКОВ И УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

#### Контрольные вопросы

1. Что называется ветвью, узлом и контуром электрической цепи?
2. Сформулировать и записать I и II законы Кирхгофа в интегродифференциальной и комплексной формах.
3. В чем состоит сущность метода контурных токов?
4. Каков порядок определения независимых контуров в электрической цепи?
5. Что понимается под контурным током контурной ЭДС?
6. Что представляют собой собственное и взаимное сопротивления контуров?
7. В чем состоит сущность метода узловых напряжений?
8. Что понимается под узловым напряжением?
9. Что называется собственной и общей проводимостями?

#### Задачи

3.1.1. Методом контурных токов найти токи в цепи (рис. 3.1), где  $E_1 = 52$  В;  $E_2 = 48$  В;  $R_1 = 4$  Ом;  $R_2 = 8$  Ом;  $R_3 = 10$  Ом.

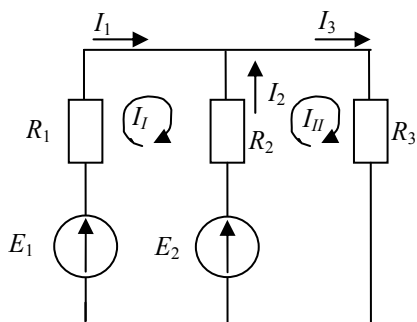


Рис. 3.1

3.1.2. Найти токи в схеме (рис. 3.2) методом контурных токов, если  $\dot{E}_1 = 100$  В;  $\dot{E}_2 = 100e^{j90^\circ}$  В;  $X_C = \frac{1}{\omega C} = 2$  Ом;  $R = 5$  Ом;  $X_L = \omega L = 5$  Ом. Проверить баланс мощностей.

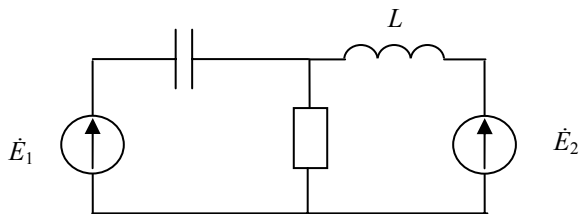


Рис. 3.2

3.1.3. Определить комплексы действующих значений токов в ветвях электрической цепи (рис. 3.3), если  $\dot{Z}_1 = 26 + j25$  Ом,  $\dot{Z}_2 = 26 - j5$  Ом,  $\dot{Z}_3 = -j10$  Ом,  $\dot{E}_1 = 20e^{j30}$  В,  $\dot{E}_2 = 80$  В.

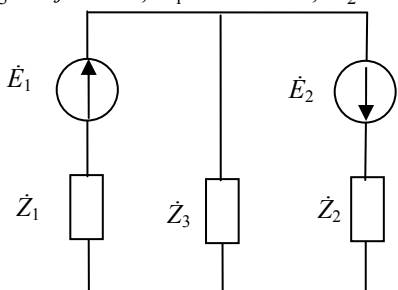


Рис. 3.3

3.1.4. В электрической цепи (рис. 3.4)  $\dot{Z}_1 = 19 - j2$  Ом,  $\dot{Z}_2 = 40$  Ом,  $\dot{Z}_3 = 6 + j8$  Ом,  $\dot{Z}_4 = 5 - j15$  Ом,  $\dot{Z}_5 = 5 - j20$  Ом и  $\dot{Z}_6 = 5 + j15$  Ом. ЭДС источника  $\dot{E} = 100$  В. Определить токи в ветвях.

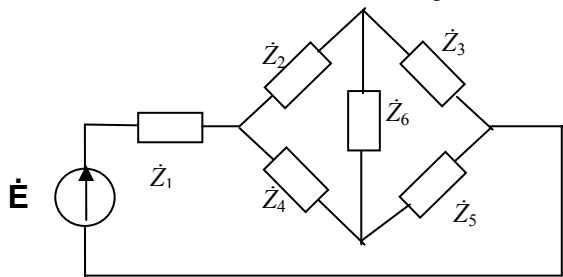


Рис. 3.4

3.1.5. В электрическую цепь (рис. 3.5) включены два генератора синусоидального тока  $i_1 = 50\sqrt{2} \sin \omega t_m A$ ,  $i_2 = 20\sqrt{2} \sin \omega t_m A$ . Известны  $R_1 = 10$  кОм,  $R_2 = 25$  кОм,  $R_3 = 20$  кОм,  $X_C = 34$  кОм. Определить токи в ветвях.

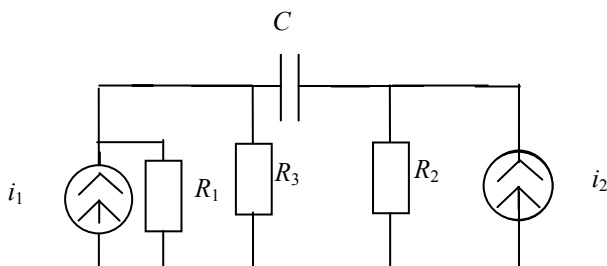


Рис. 3.5

3.1.6. В электрической цепи (рис. 3.6) известны  $\dot{E}_1 = 20$  В,  $R_1 = 500$  Ом,  $R_3 = 400$  Ом,  $X_L = 600$  Ом,  $X_C = 250$  Ом,  $\dot{I} = 40$  мА. Методом контурных токов найти токи в ветвях и проверить баланс мощностей.

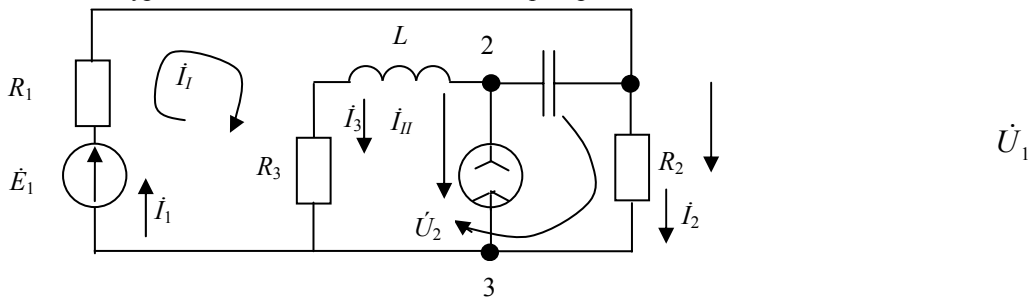


Рис. 3.6

3.1.7. Найти токи в схеме (рис. 3.7) методом контурных токов, если  $\dot{E}_1 = 100$  В,  $\dot{E}_2 = 100e^{j90}$  В,  $\dot{X}_C = \frac{1}{\omega C} = 2$  Ом,  $R = 5$  Ом,  $X_L = \omega L = 5$  Ом. Проверить баланс мощностей.

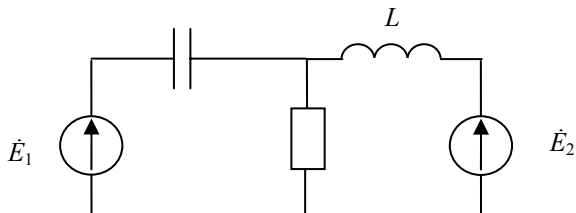


Рис. 3.7

3.1.8. Определить комплексы действующих значений токов в ветвях электрической цепи (рис. 3.8), если  $\dot{Z}_1 = 26 + j25$  Ом,  $\dot{Z}_2 = 26 - j5$  Ом,  $\dot{Z}_3 = -j10$  Ом,  $\dot{E}_1 = 20e^{j30}$  В,  $\dot{E}_2 = 80$  В.

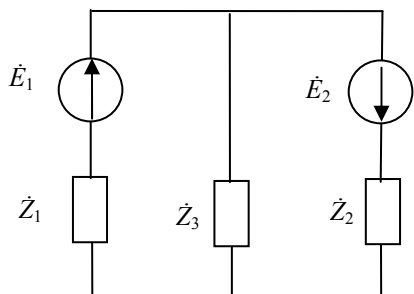


Рис. 3.8

3.1.9. Методом узловых потенциалов определить токи в ветвях цепи (рис. 3.9), где  $I_{R1} = I_{R3} = I$  А,  $E_6 = 1$  В,  $R_1 = R_2 = R_3 = R_5 = 1$  Ом,  $R_4 = R_7 = 0,5$  Ом.

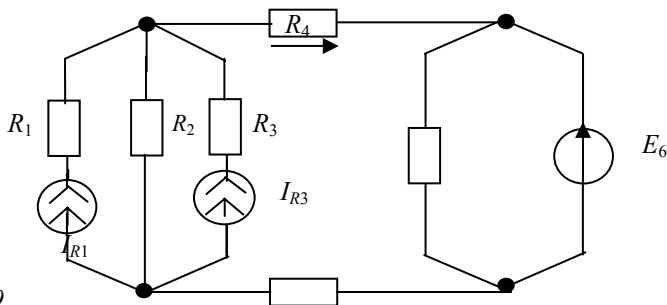


Рис. 3.9

3.1.10. Найти токи в электрической цепи (рис. 3.10), если  $i_1 = 120\sqrt{2} \sin(\omega t)$  В,  $i_2 = 100\sqrt{2} \cos(\omega t - 120^\circ)$  В,  $K = 2$  Ом,  $X_C = 10$  Ом,  $X_L = 5$  Ом.

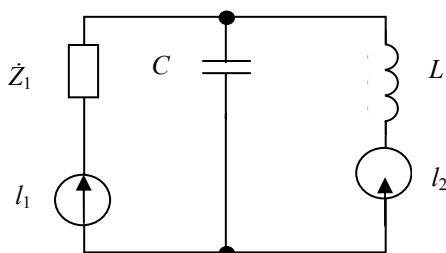


Рис. 3.10

3.1.11. Для мостовой схемы (рис. 3.11) известны  $E_1 = 130$  В,  $R_1 = 10$  Ом,  $X_{L2} = 5$  Ом,  $X_{L3} = 10$  Ом,  $R_4 = 5$  Ом,  $X_{C5} = 10$  Ом. Определить токи в ветвях и активную мощность, расходуемую в цепи.

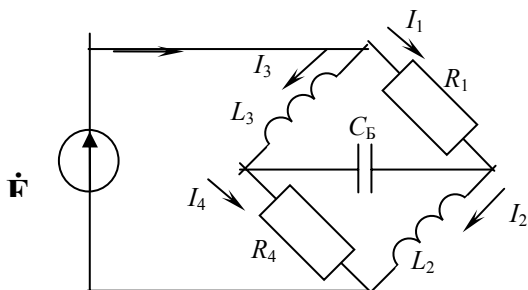


Рис. 3.11

3.1.12. В электрической схеме (рис. 3.12)  $E_1 = 24$  В,  $E_2 = 96$  В,  $E_3 = 32$  В,  $R_1 = 1$  Ом,  $R_2 = 16$  Ом,  $R_3 = 8$  Ом,  $R_4 = 16$  Ом,  $R_5 = 8$  Ом. Определить токи в ветвях.

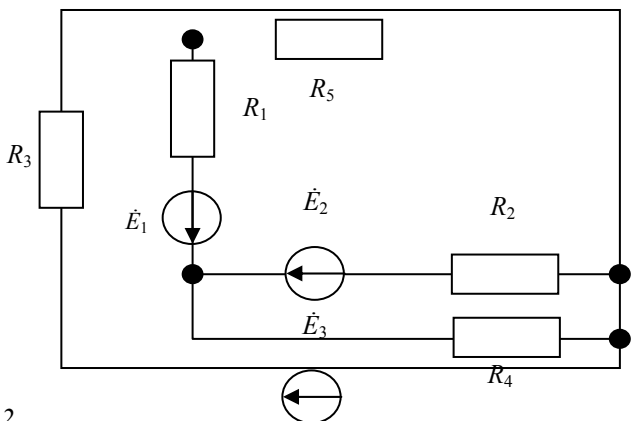


Рис. 3.12

**Ответы, решения и методические указания**

3.1.1. В данной цепи два независимых контура. Каноническая система уравнений для определения двух неизвестных контурных токов имеет вид

$$\begin{cases} \dot{Z}_{11} \dot{I}_I + \dot{Z}_{12} \dot{I}_{II} = \dot{E}_I; \\ \dot{Z}_{21} \dot{I}_I + \dot{Z}_{22} \dot{I}_{II} = \dot{E}_{II}. \end{cases}$$

Если выбрать независимые контуры так, как показано на рис. 3.1, то  $\dot{Z}_{11} = R_1 + R_2 = 4 + 8 = 12$  Ом – полное сопротивление первого контура; это сумма всех сопротивлений, по которым протекает контурный ток  $\dot{I}_I$ ;  $\dot{Z}_{22} = R_3 + R_4 = 8 + 10 = 18$  Ом – полное сопротивление второго контура;  $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} = -8$  Ом – взаимное (общее) сопротивление 1 и 2 контуров; оно положительно, если контурные токи  $\dot{I}_I$  и  $\dot{I}_{II}$  протекают по нему в одном направлении, в противном случае оно отрицательно;  $\dot{E}_I = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 - 52 - 48 = 4$  В – контурная ЭДС первого контура; эта алгебраическая сумма ЭДС, входящих в первый контур;  $\dot{E}_{II} = \dot{E}_2 = 48$  В – контурная ЭДС второго контура.

После подстановки числовых значений имеем систему

$$\begin{cases} 12\dot{I}_I - 8\dot{I}_{II} = 4; \\ -8\dot{I}_I + 18\dot{I}_{II} = 48, \end{cases}$$

решая которую получаем  $\dot{I}_I = 3$  А;  $\dot{I}_{II} = 4$  А.

Истинные токи в ветвях  $\dot{I}_1 = \dot{I}_I = 3$  А,  $\dot{I}_3 = \dot{I}_{II} = 4$  А;

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_{II} - \dot{I}_I = 1 \text{ А.}$$

3.1.2.

$$\dot{I}_1 = 27,8e^{-j56^\circ 20'} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_2 = 32,3e^{-j115^\circ 20'} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_3 = 30e^{-j11^\circ 43'} \text{ А.}$$

3.1.3.

$$\dot{I}_1 = e^{-j53^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_2 = 2,4e^{j25^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_3 = 2,4e^{j49^\circ} \text{ А.}$$

3.1.4.

$$\dot{I}_1 = 1,8e^{j20^\circ 10'} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_2 = 0,56e^{-j38^\circ} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_3 = 2,37e^{-j53^\circ 05'} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_4 = 1,59e^{j37^\circ 35'} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_5 = 2,55e^{j83^\circ 35'} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_6 = 1,83e^{-j122^\circ 20'} \text{ А.}$$

3.1.5.

$$\dot{I}_1 = 35e^{j2^\circ 50'} \text{ мА;}$$

$$\dot{I}_2 = 17,8e^{-j8^\circ 30'} \text{ мА;}$$

$$\dot{I}_3 = 17,5e^{j2^\circ 50'} \text{ мА;}$$

$$\dot{I}_4 = 5,6e^{j47^\circ} \text{ мА.}$$

3.1.6. В схеме имеется пять ветвей ( $p = 5$ ), три узла ( $q = 3$ ) и один источник тока ( $n_{\text{ит}} = 1$ ). Известно, что число независимых уравнений, составленных по методу контурных токов,  $n = P - q + 1 - n_{\text{ит}} = 5 - 3 + 1 - 1 = 2$ .

Независимые контуры следует выбирать так, чтобы  $n$  контурных токов проходили по ветвям, не содержащим источника тока. Выберем направления контурных токов  $\dot{I}_I$  и  $\dot{I}_{II}$  и тока источника тока  $\dot{I}$ , как это показано на рис. 3.6.

$$I_3 = 17,5e^{j2^\circ 50'} \text{ мА.}$$

Запишем в общем виде систему уравнений для контурных токов:

$$\begin{cases} \dot{I}_I \dot{Z}_{11} + \dot{I}_{II} \dot{Z}_{12} = \dot{E}_I; \\ \dot{I}_I \dot{Z}_{21} + \dot{I}_{II} \dot{Z}_{22} = \dot{E}_{II}. \end{cases}$$

Здесь  $\dot{Z}_{11}$  – собственное сопротивление первого контура;  $\dot{Z}_{22}$  – собственное сопротивление второго контура;  $\dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21}$  – взаимное сопротивление контуров.

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{11} &= R_1 + R_3 + jX_L - jX_C = 500 + 400 + j600 - j250 = 900 + j350 \text{ Ом}; \\ \dot{Z}_{22} &= R_3 + R_2 + jX_L - jX_C = 400 + 300 + j600 - j250 = 700 + j350 \text{ Ом}; \\ \dot{Z}_{12} = \dot{Z}_{21} &= -(R_3 + jX_L - jX_C) = -(400 + j600 - j250) = -400 - j350 \text{ Ом}.\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения  $\dot{Z}_{11}$ ,  $\dot{Z}_{22}$ ,  $\dot{Z}_{21}$ ,  $\dot{Z}_{12}$  в исходные уравнения и решая их, найдем контрольные токи:

$$\dot{I}_I = 16,9e^{-j38^\circ} \text{ мА}; \quad \dot{I}_{II} = 15,2e^{j79^\circ} \text{ мА}.$$

Токи в ветвях:

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= \dot{I}_I = 16,9e^{-j32^\circ} \text{ мА}; \\ \dot{I}_2 &= \dot{I}_{II} + \dot{I} = 45,4e^{j19^\circ} \text{ мА}; \\ \dot{I}_3 &= \dot{I}_I - \dot{I}_{II} = 26,3e^{-j64^\circ 25'} \text{ мА}; \\ \dot{I}_4 &= \dot{I}_I - \dot{I}_{II} - \dot{I} = 37,2e^{-j140^\circ 20'} \text{ мА}.\end{aligned}$$

Проверим баланс мощностей.

Мощности источников

$$\tilde{S}_E = \dot{E}_1^* \dot{I}_1 + \dot{U}_2^* \dot{I} = \dot{E}_1^* \dot{I}_1 + \dot{I}_3^* (R_3 + jX_L) \dot{I} = 1,038 + j0,071 \text{ ВА}.$$

Мощности приемников энергии

$$\tilde{S}_Z = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 + I_3^2 jX_L - I_4^2 jX_C = 1,038 + j0,071 \text{ ВА}.$$

Из полученных результатов видно, что  $\tilde{S}_Z = \tilde{S}_E$ , т.е. баланс мощностей соблюдается.

3.1.7.

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= 27,8e^{-j56^\circ 20'} \text{ А}; \\ \dot{I}_2 &= 32,3e^{-j115^\circ 20'} \text{ А}; \\ \dot{I}_3 &= 30e^{j11^\circ 43'} \text{ А}.\end{aligned}$$

3.1.8.

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= e^{-j53^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_2 &= 2,4e^{-j25^\circ} \text{ А}; \\ \dot{I}_3 &= 2,4e^{-j49^\circ} \text{ А}.\end{aligned}$$

3.1.9. В цепи четыре узла. Пусть  $\dot{U}_4 = 0$ , тогда, при условии  $R_6 = 0$ ,  $\dot{U}_3 = \dot{U}_4 + E_6 = 1 \text{ В}$ . Таким образом, требуется определить потенциалы двух оставшихся узлов – первого и второго. Записываем систему уравнений в канонической форме:

$$\begin{cases} Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 + Y_{13}U_3 = I_I; \\ Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 + Y_{23}U_3 = I_{II}. \end{cases}$$

Следует обратить внимание на то, что необходимость в третьем уравнении отпала, так как потенциал третьего узла уже известен. Определим коэффициенты записанных уравнений:

$$\begin{aligned}Y_{11} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_7} = 3 \text{ См}; \\ Y_{22} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} = 3 \text{ См}; \\ Y_{12} = Y_{21} &= -\frac{1}{R_2} = -1 \text{ См}; \\ Y_{13} = 0, \quad Y_{23} &= -\frac{1}{R_4} = -\frac{1}{0,5} = -2 \text{ См}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{11} &= -I_{R_1} - I_{R_3} = -2 \text{ А}; \\ I_{22} &= I_{R_1} + I_{R_3} = 2 \text{ А}.\end{aligned}$$

Подставив полученные коэффициенты в уравнение и перенося известные величины вправо, получаем:

$$\begin{cases} 3U_1 - U_2 = -2; \\ -U_1 + 3U_2 = 4. \end{cases}$$

Откуда  $U_1 = -0,25 \text{ В}$ ,  $U_2 = 1,25 \text{ В}$ .

Определяем по закону Ома токи в ветвях:

$$I_2 = \frac{U_2 - U_1}{R_2} = \frac{1,25 - (-0,25)}{1} = 1,5 \text{ A};$$

$$I_4 = \frac{U_2 - U_3}{R_4} = \frac{1,25 - 1}{0,5} = 0,5 \text{ A};$$

$$I_7 = \frac{U_4 - U_1}{R_7} = \frac{0 - (-0,25)}{0,5} = 0,5 \text{ A};$$

$$I_5 = \frac{U_3 - U_4}{R_5} = \frac{1 - 0}{1} = 1 \text{ A}.$$

Ток  $\dot{I}_6$  определим с помощью 1-го закона Кирхгофа для узла 3 или 4

$$I_6 = I_5 - I_4 = 1 - 0,5 = 0,5 \text{ A}.$$

3.1.10.

$$\dot{I}_R = 11,17e^{j40^\circ 25'} \text{ A};$$

$$\dot{I}_C = 10,4e^{j98^\circ} \text{ A};$$

$$\dot{I}_R = 7,82e^{j155^\circ 30'} \text{ A}.$$

3.1.11.

$$\dot{I}_1 = 4 - j6 \text{ A};$$

$$\dot{I}_2 = 12 - j18 \text{ A};$$

$$\dot{I}_3 = 2 - j16 \text{ A};$$

$$\dot{I}_4 = -6 - j4 \text{ A};$$

$$\dot{I}_5 = -8 + j12 \text{ A};$$

$$P_A = 780 \text{ Вт}.$$

3.1.12.

$$I_1 = 2,1 \text{ A};$$

$$I_2 = 2,12 \text{ A};$$

$$I_3 = 6,95 \text{ A};$$

$$I_4 = 3,88 \text{ A};$$

$$I_5 = 5,04 \text{ A}.$$

## 3.2. МЕТОДЫ НАЛОЖЕНИЯ И ЭКВИВАЛЕНТНОГО ГЕНЕРАТОРА

### Контрольные вопросы

1. Поясните целесообразность применения методов эквивалентного генератора и наложения для расчета электрических цепей.
2. В чем сущность метода эквивалентного генератора?
3. В чем сущность метода наложения?
4. Сформулировать теорему об эквивалентном источнике ЭДС.
5. Каким образом определяют  $U_{\text{хх}}$  и  $Z_{\text{вх}}$  при расчете цепи методом эквивалентного генератора?
6. Поясните на конкретном примере порядок определения  $U_{\text{хх}}$  и  $Z_{\text{вх}}$ .
7. Частичные токи и связь их с искомыми значениями токов в ветвях электрической цепи.

### Задачи

3.2.1. Определить ток  $\dot{I}_5$  в диагонали мостовой схемы, изображенной на рис. 3.13. Сопротивления  $\dot{Z}_1, \dot{Z}_2, \dot{Z}_3, \dot{Z}_4, \dot{Z}_5$  и ЭДС источника  $\dot{E}$  заданы.

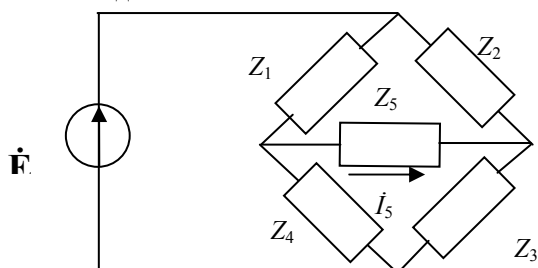


Рис. 3.13

3.2.2. Методом эквивалентного генератора напряжения определить показания амперметра, включенного в электрическую цепь (рис. 3.14), если

$$\dot{E} = 40 \text{ В}, R_1 = 200 \text{ Ом}, R_2 = 160 \text{ Ом}, R_3 = 120 \text{ Ом}, \\ R_4 = 80 \text{ Ом}, X_C = 60 \text{ Ом}.$$

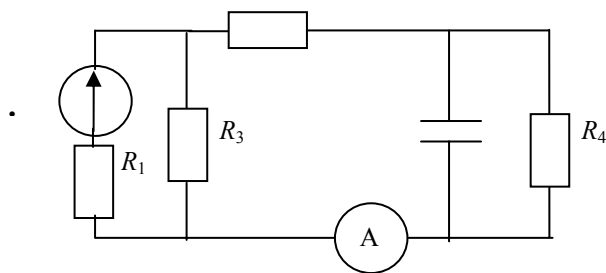


Рис. 3.14

3.2.3. Два самолетных генератора (рис. 3.15) с ЭДС  $\dot{E}_1 = 120 \text{ В}$  и  $\dot{E}_2 = 110 \text{ В}$  с внутренним сопротивлением  $\dot{Z}_1 = 0,4 + j0,6 \text{ Ом}$  и  $\dot{Z}_2 = 0,3 + j1,2 \text{ Ом}$  работают на нагрузку  $\dot{Z}_3 = 10 \text{ Ом}$ . Определить напряжение на нагрузке.

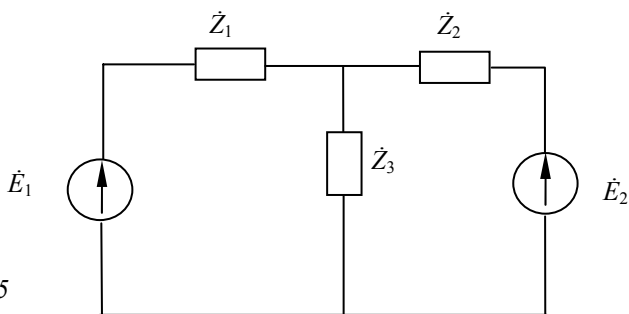


Рис. 3.15

3.2.4. Для мостовой схемы (рис. 3.16)  $E = 28 \text{ В}$ ,  $R_1 = 6 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 12 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 16 \text{ Ом}$ ,  $R_4 = 10 \text{ Ом}$ . Определить токи через  $R_5$ , если  $R_5 = 0,10 \text{ кОм}, 20 \text{ кОм}, 30 \text{ кОм}$ . Построить график зависимости при изменении  $R_5$  от 0 до 30 кОм.

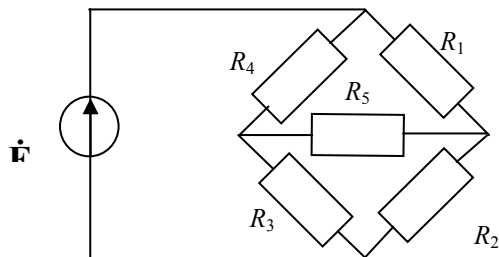


Рис. 3.16

3.2.5. Методом эквивалентного генератора напряжения определить действующее значение тока в ветви с  $Z_5$  (рис. 3.17), если

$$\dot{E}_{m1} = 550 \text{ В}, \dot{E}_{m2} = 220e^{j30^\circ} \text{ В}, \\ \dot{Z}_1 = (1 + j) \text{ Ом}, \dot{Z}_2 = (1 - j) \text{ Ом}, Z_3 = Z_4 = Z_5 = 3 \text{ Ом}.$$

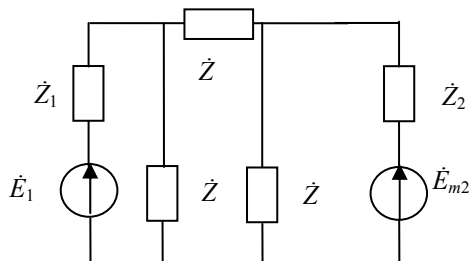


Рис. 3.17

3.2.6. Методом эквивалентного генератора напряжения определить показания амперметра, включенного в электрическую цепь (рис. 3.18), если

$$E = 40 \text{ В}, R_1 = 200 \text{ Ом}, R_2 = 160 \text{ Ом}, \\ R_3 = 120 \text{ Ом}, R_4 = 80 \text{ Ом}, X_C = 60 \text{ Ом}.$$

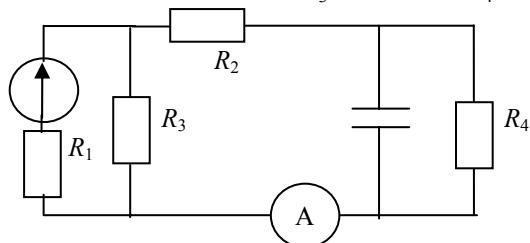




Рис. 3.18

3.2.7. Методом наложения определить токи в ветвях цепи (рис. 3.19), где  $E_1 = 16$  В,  $I_{r2} = 2$  А,  $R_1 = R_2 = R_3 = 2$  Ом.

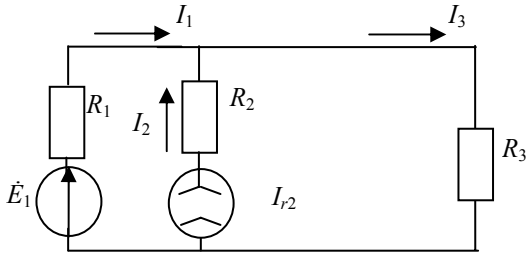


Рис. 3.19

3.2.8. Методом наложения определить показание амперметра в цепи (рис. 3.20), где  $E_1 = 52$  В,  $E_2 = 48$  В,  $R_1 = 4$  Ом,  $R_2 = 8$  Ом,  $R_3 = 10$  Ом.

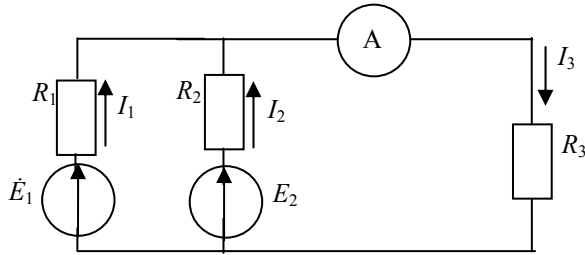


Рис. 3.20

3.2.9. Методом наложения определить показания амперметра в цепи (рис. 3.21), где  $E_1 = E_2 = 4$  В,  $I_{R3} = 2$  А,  $R_1 = R_3 = R_4 = 1$  Ом.

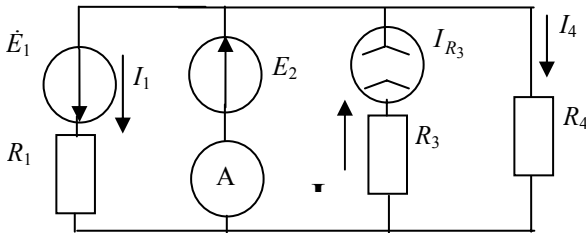


Рис. 3.21

3.2.10. Методом наложения определить ток  $I_3$  в цепи (рис. 3.22), где  $E_1 = 60$  В,  $I_r = 6$  А,  $R_1 = R_2 = R_3 = 3$  Ом,  $R_4 = 6$  Ом.

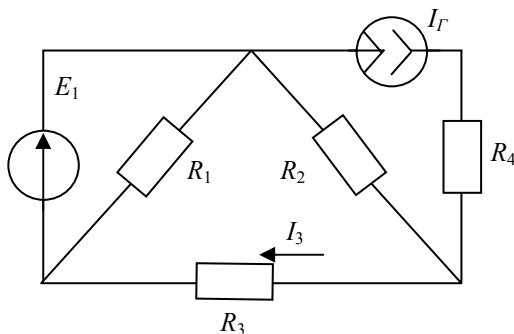


Рис. 3.22

### Ответы, решения и методические указания

3.2.1. Удалим из цепи (рис. 3.13) ветвь  $\dot{Z}_5$  и определим напряжение

$$\dot{U}_{авхх} = \dot{U}_a - \dot{U}_6 = \frac{\dot{E}\dot{Z}_4}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4} - \frac{\dot{E}\dot{Z}_3}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_3} = \frac{\dot{E}(\dot{Z}_2\dot{Z}_4 - \dot{Z}_1\dot{Z}_3)}{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4)(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)}$$

Замкнем накоротко источник напряжения (рис. 3.23, б) и найдем  $\dot{Z}_{авав}$ :

$$\dot{I}_{\text{exax}} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_4}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4} + \frac{\dot{Z}_2 \dot{Z}_3}{\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_4 (\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3 (\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4)}{(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4)(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3)}$$

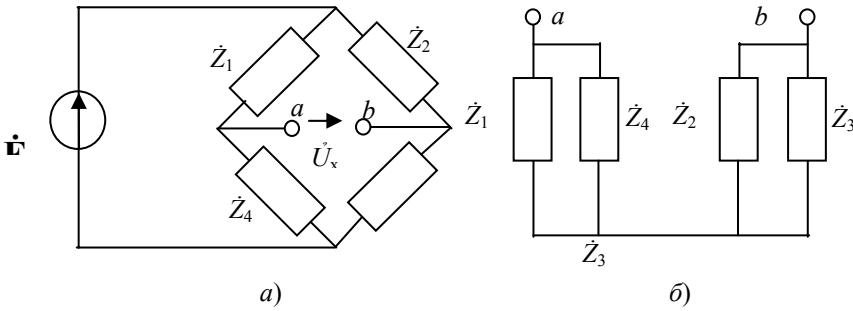


Рис. 3.23

Определим ток в диагонали моста:

$$\dot{I}_5 = \frac{\dot{U}_{\text{axax}}}{\dot{Z}_{\text{exax}} + \dot{Z}_5} = \frac{\dot{E}(\dot{Z}_2 \dot{Z}_4 - \dot{Z}_1 \dot{Z}_3)}{\dot{Z}_5(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4)(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) + \dot{Z}_1 \dot{Z}_4(\dot{Z}_2 + \dot{Z}_3) + \dot{Z}_2 \dot{Z}_3(\dot{Z}_1 + \dot{Z}_4)}$$

3.2.2.  $I = 56 \text{ mA}$ .

3.2.3.  $\dot{U}_3 = 113,9e^{-j2^\circ} \text{ В}$ .

3.2.4.  $\dot{I}_5 = 0,65 \text{ A}$ .

3.2.5.  $51 \text{ A}$ .

3.2.6.  $56 \text{ mA}$ .

3.2.7. Истинные токи в цепи (рис. 3.19) будем находить как алгебраическую сумму токов в цепях (рис. 3.24).

Для цепи (рис. 3.24, а), где действует только ЭДС  $E_1$ , а источник  $I_{r2}$  исключен (вторая ветвь оказалась разомкнутой, так как внутреннее сопротивление источника бесконечно велико), находим

$$I'_1 = I'_3 = \frac{E_1}{R_1 + R_3} = \frac{16}{4} = 4 \text{ A}.$$

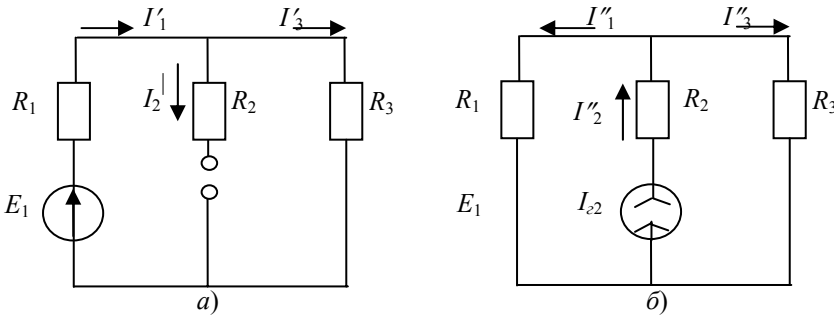


Рис. 3.24

Для цепи (рис. 3.24, б), где действует только источник тока  $I_{r2}$ , а источник ЭДС  $E_1$  исключен (на месте источника оказался короткозамкнутый участок, так как внутреннее сопротивление идеального источника ЭДС отсутствует), находим:

$$I''_1 = I''_2 \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 2 \frac{2}{2+2} = 1 \text{ A};$$

$$I''_3 = I''_2 - I''_1 = 1 \text{ A}.$$

Истинные токи в ветвях цепи находим как алгебраическую сумму частичных токов:

$$I_1 = I'_1 - I''_1 = 3 \text{ A};$$

$$I_2 = -I'_2 - I''_2 = 2 \text{ A};$$

$$I_3 = -I'_3 - I''_3 = 5 \text{ A};$$

Мощность, рассеиваемая в сопротивлении  $R_3$ ,  $P_3 = I_3^2 R_3 = 50 \text{ Вт}$ .

3.2.8.  $4 \text{ A}$ .

3.2.9.  $10 \text{ A}$ .

3.2.10.  $13 \text{ A}$ .

#### 4. СВОЙСТВА И ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЧАСТОТНО-ИЗБИРАТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ

Комплексная частотная характеристика (КЧХ) цепи – отношение комплексных изображений отклика и воздействия:

$$\dot{K}_{XY}(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{\dot{Y}}{\dot{X}} = \frac{Y}{X} e^{j(\psi_Y - \psi_X)} = K_{XY} e^{j\phi_{XY}},$$

где  $\dot{Y}_m$  и  $\dot{Y}$  – комплексные амплитуда и действующее значения отклика (реакции) цепи;  $\dot{X}_m$  и  $\dot{X}$  – комплексные амплитуда и действующее значения внешнего воздействия.

Зависимость модуля  $K_{XY}(\omega)$  и аргумента  $\varphi_{XY}(\omega)$  КЧХ от частоты  $\omega$  называются амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристиками цепи.

Если отклик и внешнее воздействие рассматриваются на одних и тех же зажимах цепи, КЧХ называется входной. К входным характеристикам цепи (рис. 4.1) относятся:

- комплексное входное сопротивление

$$K_{iu}(j\omega) = Z_{11}(j\omega) = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1};$$

- комплексная входная проводимость

$$K_{ui}(j\omega) = Y_{11}(j\omega) = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}.$$

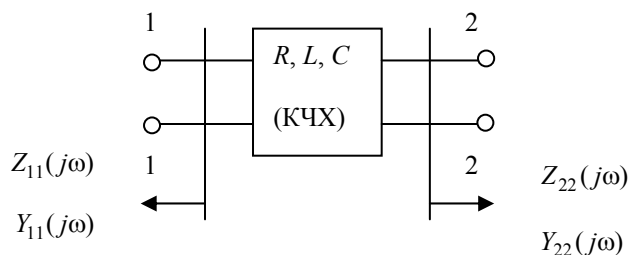


Рис. 4.1

Когда отклик и внешнее воздействие задаются на разных зажимах цепи, КЧХ называется передаточной. К передаточным характеристикам относятся:

- комплексный коэффициент передачи по напряжению

$$K_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{U_2}{U_1} e^{j\varphi_U};$$

- комплексный коэффициент передачи по току

$$K_i(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{I_2}{I_1} e^{j\varphi_i};$$

- комплексное передаточное сопротивление

$$K_{iU}(j\omega) = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = Z_{21}(j\omega);$$

- комплексная передаточная проводимость

$$K_{Ui}(j\omega) = \frac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1} = Y_{12}(j\omega).$$

Сопротивление последовательного колебательного контура вблизи резонанса

$$Z = R + jX \approx R + j2\rho v = R(1 + j2Qv),$$

где  $x = \omega L - \frac{1}{\omega C} \approx 2\rho v$  – реактивное сопротивление;  $\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$  – характеристическое сопротивление;  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  –

резонансная частота;  $v = \frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  – относительная расстройка;  $Q = \frac{\rho}{R}$  – добротность;  $d = \frac{1}{Q}$  – затухание.

Общее активное сопротивление последовательного контура с учетом  $R_i$  и  $R_n$

$$R_{\text{общ}} = R + R + \frac{\rho^2}{R_n}.$$

Полоса пропускания контура

$$\Delta f = df_0 = \frac{f_0}{Q}.$$

Сопротивление параллельных контуров вблизи резонанса

$$\dot{Z} = \frac{Z_{\omega_0}}{1 + j2Qv},$$

где  $Z_{\rho 0} = \frac{\rho^2}{R} p^2 = Q\rho p^2 = Q^2 R p^2 = \frac{L}{RC} p^2$  – сопротивление контура на резонансной частоте;  $p = \frac{|x_{1,20}|}{\rho}$  – коэффициент включения;  $|x_{1,20}|$  – модуль сопротивления ветви на резонансной частоте.

Общее активное сопротивление параллельного контура с учетом  $R_i$  и  $R_n$ :

$$R_{\text{общ}} = R + \frac{\rho^2}{R_i} + \frac{\rho^2}{R_n} = R \left( 1 + \frac{Z_{\rho 0}}{R_i} + \frac{Z_{\rho 0}}{R_n} \right).$$

Выражение нормированной АЧХ одиночных контуров

$$y = \frac{1}{\sqrt{1 + 4Q^2 v^2}},$$

где  $Q_3$  – добротность контура с учетом влияния  $R_i$  и  $R_n$ .

Сопротивление схемы замещения первичного контура системы двух связанных контуров

$$\dot{Z}_{\rho 1} = \dot{Z}_1 - \frac{\dot{Z}_{\text{св}}^2}{\dot{Z}_2} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_{\text{св}}^2}{\dot{Z}_2}.$$

Сопротивление схемы замещения вторичного контура системы двух связанных контуров

$$\dot{Z}_{\rho 2} = \dot{Z}_2 - \frac{\dot{Z}_{\text{св}}^2}{\dot{Z}_1} = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2 - \dot{Z}_{\text{св}}^2}{\dot{Z}_1}.$$

Сопротивление, вносимое в первичный (вторичный) контур

$$\dot{Z}_{\text{вн1}} = R_{\text{вн1}} + jX_{\text{вн1}}, \quad \dot{Z}_{\text{вн2}} = R_{\text{вн2}} + jX_{\text{вн2}},$$

где

$$R_{\text{вн1}} = R_2 \frac{X_{\text{св}}^2}{R_2^2 + X_2^2}; \quad X_{\text{вн1}} = -X_2 \frac{X_{\text{св}}^2}{R_2^2 + X_2^2};$$

$$R_{\text{вн2}} = R_1 \frac{X_{\text{св}}^2}{R_1^2 + X_1^2}; \quad X_{\text{вн2}} = -X_1 \frac{X_{\text{св}}^2}{R_1^2 + X_1^2}.$$

Условие первого (второго) частотного резонанса

$$X_1 + X_{\text{вн1}} = 0; \quad (X_2 + X_{\text{вн2}} = 0).$$

Условия сложного резонанса:

$$X_1 + X_{\text{вн1}} = 0; \quad (X_2 + X_{\text{вн2}} = 0);$$

$$X_{\text{св опт}} = Z_2 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}; \quad \left( X_{\text{св опт}} = Z_1 \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \right).$$

Условия полного резонанса:

$$X_1 = 0; \quad X_2 = 0; \quad X_{\text{св опт}} = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Максимально возможное значение тока во вторичном контуре

$$I_{m \text{ маамама}} = \frac{Em}{2\sqrt{R_1 R_2}}.$$

Коэффициент связи:

$$k = \frac{|X_{\text{св}}|}{\sqrt{X_{K1} X_{K2}}},$$

где  $X_{K1}$  и  $X_{K2}$  – составляющие  $X_1$  и  $X_2$ , имеющие тот же знак, что и  $X_{\text{св}}$ .

Полоса пропускания связанных контуров:

а) случай  $k \leq d$ :

$$\Delta f_n = f_0 d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2 \left[ \left(\frac{k}{d}\right)^4 + 1 \right]}};$$

б) случай  $k > d$ :

$$\Delta f_n = f_0 d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 + 2\left(\frac{k}{d}\right) - 1}.$$

#### 4.1. ВХОДНЫЕ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ

**Контрольные вопросы**

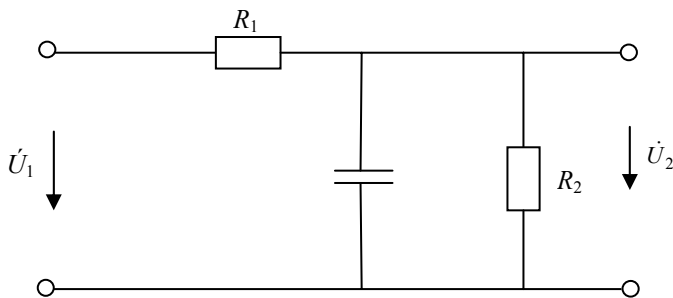
1. Дайте определение комплексной частотной характеристики (КЧХ) цепи. Поясните какую размерность может иметь КЧХ.
2. Дайте определение амплитудно-частотной (АЧХ) и фазочастотной (ФЧХ) характеристики цепи. Что характеризуют АЧХ и ФЧХ цепи.
3. Что такое годограф ФЧК и как он графически строится.
4. Чем определяется (от чего зависит) выражение КЧХ линейной цепи.
5. Постройте (качественно) кривые  $Z_{вх} = f(\omega)$ ,  $\varphi_Z = f(\omega)$  для схем на рис. 4.6, а, б.
6. Рассчитать граничную частоту  $f_{гр}$  для схем на рис. 4.6, б, если  $R = 100$  Ом,  $C = 2$  мкФ.

Примечание: частоту, на которой реактивная составляющая входного сопротивления цепи по абсолютному значению равна активной составляющей, называют граничной.

#### Задачи

4.1.1. Найти аналитические выражения и построить (качественно) графики частотной зависимости полного сопротивления, аргумента, действительной и мнимой составляющих комплексного входного сопротивления цепи, состоящей из параллельно соединенных активного сопротивления и емкости.

4.1.2. Найти аналитические выражения и изобразить (качественно) АЧХ и ФЧХ комплексного коэффициента передачи по напряжению цепи (рис. 4.2), где  $R = R_1 = R_2$ .

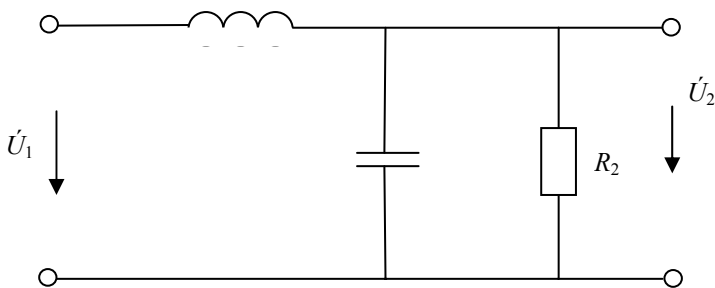


**РИС. 4.2**

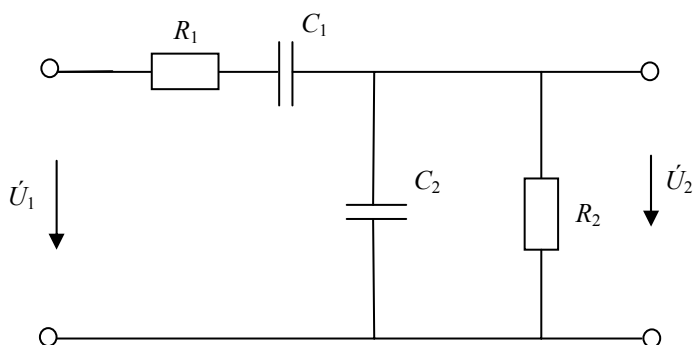
4.1.3. Вычислить модуль и аргумент комплексной входной проводимости параллельно соединенных сопротивления и индуктивности. Построить годограф входной проводимости если  $R_2 = 2$  Ом.

4.1.4. найти аналитические выражения АЧХ и ФЧХ коэффициента передачи по напряжению делителя напряжения, схема которого приведена на рис. 4.3.

4.1.5. Определить АЧХ передаточных сопротивления и проводимости цепи (рис. 4.2), если воздействие является ток или напряжение на входе цепи, а реакцией – напряжение или ток сопротивления  $R_2$ .



**РИС. 4.3**



**Рис. 4.4**

4.1.6. Для цепи (рис. 4.4) определить частоту, на которой АЧХ коэффициента передачи по напряжению имеет максимум. Рассчитать сдвиг фаз между входным и выходным напряжениями на этой частоте, если:  $R = R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$ ;  $C = C_1 = C_2 = 1 \text{ нФ}$ .

4.1.7. Определить частоты, на которых сдвиг фаз между входными и выходными напряжениями в цепи (рис. 4.5) составляет  $-\frac{\pi}{2}$  и  $-\pi$ . Найти модуль коэффициента передачи по напряжению на этих частотах, если  $R = R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$ ;  $C = C_1 = C_2 = 1 \text{ нФ}$ .

4.1.8. Измерения по схеме рис. 4.6 дали:  $U = 120 \text{ В}$ ,  $I_0 = 5 \text{ А}$ ,  $P = 400 \text{ Вт}$ . Замыкание ключа  $K$  приводит к уменьшению показаний амперметра. Определить входное сопротивление двухполюсника.

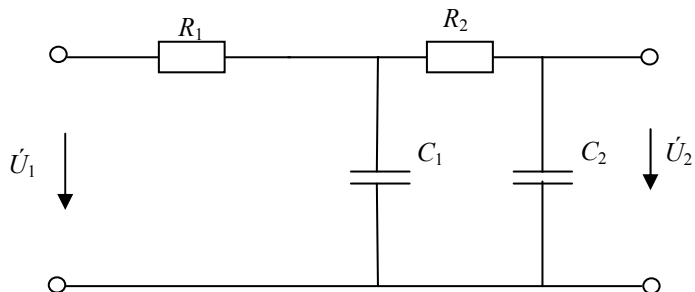


Рис. 4.5

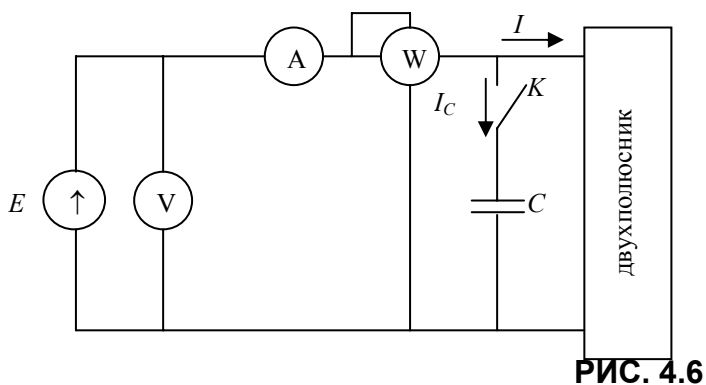
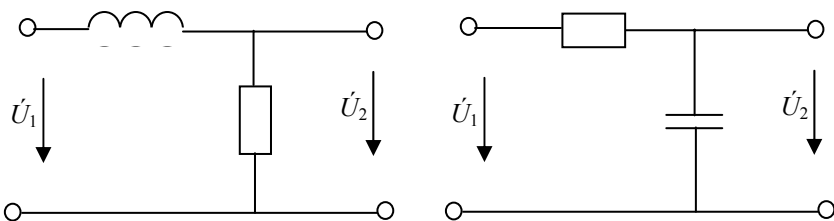


РИС. 4.6



а)

б)

в)

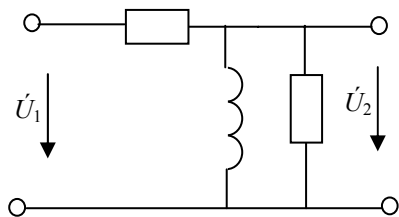


Рис. 4.7

4.1.9. Измерения по схеме рис. 4.6 дали:  $U = 220$  В,  $I_0 = 4$  А,  $P = 300$  Вт. Замыкание ключа  $K$  приводит к увеличению показаний амперметра. Определить входное сопротивление двухполюсника.

4.1.10. Найти аналитические выражения и изобразить (качественно) АЧХ и ФЧХ комплексного коэффициента передачи по напряжению цепей, изображенных на рис. 4.7.

### Ответы, решения и методические указания

4.1.1. Комплексное входное сопротивление параллельной RC цепи можно представить в виде

$$\dot{Z} = \frac{R}{1 + j\omega RC}.$$

Из этого выражения следуют зависимости от частоты полного сопротивления  $Z(\omega) = \frac{R}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$ , аргумента комплексного сопротивления  $\varphi(\omega) = -\text{arctg}(\omega RC)$ , действительной  $R(\omega) = \left[ \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} \right]$  и мнимой  $X(\omega) = \left[ \frac{-\omega RC}{1 + (\omega RC)^2} \right]$  составляющей комплексного входного сопротивления.

Построение графиков упрощается при введении нормированных величин:

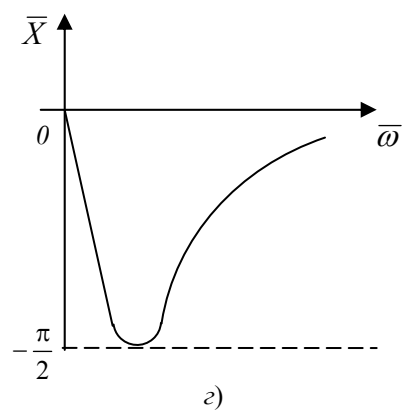
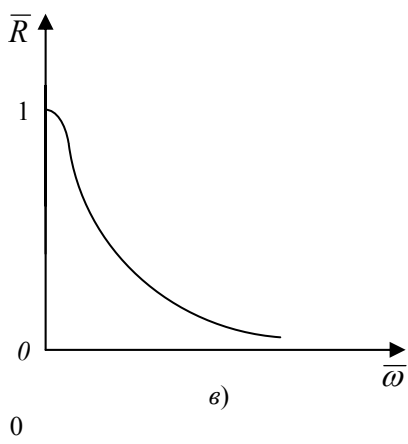
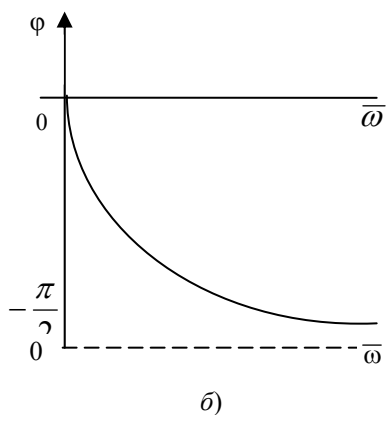
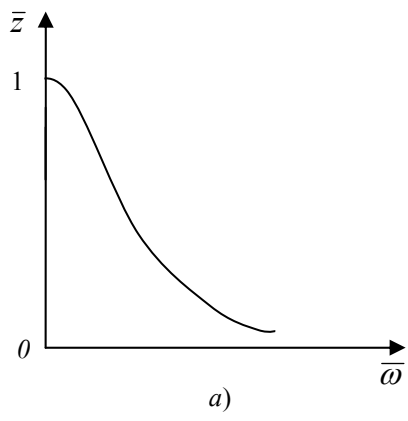
- частоты  $\bar{\omega} = \omega RC$ ;
- полного сопротивления  $\bar{Z}(\bar{\omega}) = \frac{Z(\bar{\omega})}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + \bar{\omega}^2}}$ ;
- вещественной  $\bar{R}(\bar{\omega}) = \frac{R(\bar{\omega})}{R} = \frac{1}{(1 + \bar{\omega}^2)}$  и мнимой

$$\bar{X}(\bar{\omega}) = \frac{X(\bar{\omega})}{R} = \frac{-\bar{\omega}}{(1 + \bar{\omega}^2)}$$
 составляющей КЧХ.

Графики нормированных частотных зависимостей приведены на рис. 4.8.

4.1.2.  $K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4 + (\omega RC)^2}}$ ;  $\varphi(\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{\omega RC}{2}\right)$  рис. 4.9.

4.1.3.  $Y(\omega) = \sqrt{\frac{1}{R^2 + (\omega L)^2}}$ ;  $\varphi(\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{R}{\omega L}\right)$ .



$\bar{\omega}$

0

$\bar{\omega}$



0

0

 $\bar{\omega}$ 

Рис. 4.8

Годограф входной проводимости приведен на рис. 4.10. Вид годографа не зависит от индуктивности, но ее изменением одним и тем же точкам годографа, кроме точки, лежащей на действительной оси, соответствуют различные значения частоты.

$$4.1.4. \quad K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}; \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg} \frac{\omega L}{R(1 - \omega^2 LC)}.$$

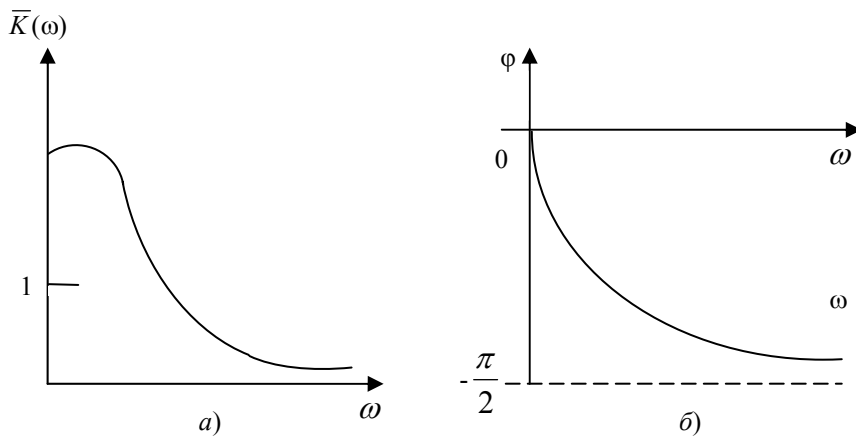
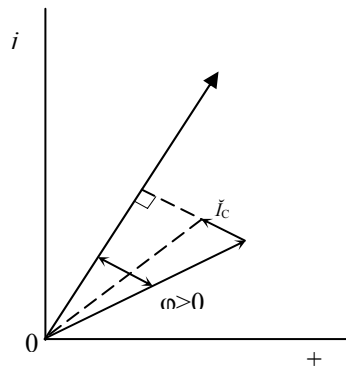
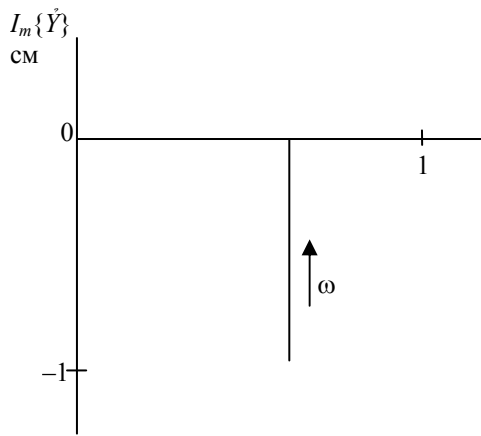
 $-\frac{\pi}{2}$  $\omega$ 

Рис. 4.9



$$\varphi > 0$$

Рис. 4.10

Рис. 4.11

$$4.1.5. Z(\omega) = \frac{R_2}{\sqrt{(1 + \omega R_2 C)^2}}; Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega R_1 R_2 C)^2}}.$$

4.1.6. АЧХ ФЧХ цепи определяются выражениями

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{9 + \left(\frac{\omega RC - 1}{\omega RC}\right)^2}}; \varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega RC - 1}{3}.$$

Из условия  $\frac{dK(\omega)}{d\omega} = 0$  следует  $\omega = \frac{I}{RC}$ ;  $\omega = 10^6$  рад/с;  $\varphi = 0$ .

4.1.7. При  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$   $\omega = 10^6$  рад/с,  $K(\omega) = 0,333$ ; при  $\varphi = -\pi$   $\omega = \infty$ ,  $K(\omega) \rightarrow 0$ .

4.1.8. Модуль входного сопротивления  $Z = \frac{U}{I} = 24 \text{ Ом}$ .

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{400}{120 \cdot 5} = 0,666 \cdot \sin \varphi = 0,745.$$

Таким образом,

$$R_{\text{вх}} = Z \cos \varphi = 24 \cdot 0,666 = 16 \text{ Ом};$$

$$X_{\text{вх}} = Z \sin \varphi = 24 \cdot 0,745 = 17,9 \text{ Ом}.$$

Входное сопротивление имеет активно-индуктивный характер (рис. 4.11), комплекс входного сопротивления

$$Z_{\text{вх}} = 16 + j17,9 \text{ Ом}.$$

$$4.1.9. \dot{Z}_{\text{вх}} = 18,7 - j51,7 \text{ Ом}.$$

$$4.1.10. \text{ а) } K_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg(\omega\tau), \quad \tau = \frac{1}{R};$$

$$\text{ б) } K_U(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg(\omega\tau), \quad \tau = RC;$$

$$\text{ в) } K_U(\omega) = \frac{R_2}{R} \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctg(\omega\tau),$$

$$R = R_1 + R_2, \quad \tau = \frac{LR}{R_1 R_2}.$$

## 4.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

### Контрольные вопросы

1. Что называется резонансом напряжения? Какими свойствами характеризуется последовательный колебательный контур при резонансе?
2. Вычертить графики зависимостей активного, реактивного и полного сопротивлений контура от частоты.
3. Что называется резонансной кривой контура? Начертить графики резонансных кривых по току и напряжению. С какой целью производится нормирование резонансных кривых?
4. Что называется АЧХ и ФЧХ контура? Начертить и пояснить графики нормированных АЧХ при различных добротностях контуров. Начертить график ФЧХ при снятии входного напряжения с емкости.
5. Что называется полосой пропускания контура? Напишите формулу для полосы пропускания. Как определить полосу пропускания по частотной характеристике контура?
6. Как влияют внутреннее сопротивление источника и сопротивление нагрузки на добротность контура и его характеристики?

### Задачи

4.2.1. Определить резонансную частоту  $f_0$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , добротность  $Q$ , затухание  $d$  и полосу пропускания  $\Delta f_n$  последовательного колебательного контура, если  $L = 180 \text{ мкГн}$ ,  $C = 240 \text{ пФ}$ ,  $R = 8,2 \text{ Ом}$ .

4.2.2. Как изменяется резонансная частота, добротность и полоса пропускания последовательного контура при увеличении в два раза:

а) сопротивления потерь; б) индуктивности; в) емкости.

4.2.3. Последовательный колебательный контур имеет резонансную частоту  $f_0 = 6,5$  МГц, индуктивность  $L = 12,4$  мкГн. Определить емкость и сопротивление потерь контура, если задана его полоса пропускания  $\Delta f_n = 150$  кГц.

4.2.4. К последовательному колебательному контуру подключен источник ЭДС  $e = 0,2 \cos \omega t$  В с внутренним сопротивлением  $14$  Ом. Определить добротность контура, амплитуду напряжения на емкости и индуктивности при резонансной частоте  $\omega_0 = 10^7$  рад/с и на частоте  $\omega_1 = 1,01 \cdot 10^7$  рад/с.

4.2.5. Заданы резонансная частота последовательного колебательного контура  $f_0 = 2$  МГц, ширина полосы пропускания  $\Delta f_n = 16$  кГц и сопротивление потерь  $R = 12$  Ом. Рассчитать параметры реактивных элементов контура.

4.2.6. Резонансная частота последовательного контура  $f_0 = 200$  кГц, емкость контура  $C = 1000$  пФ, полоса пропускания  $\Delta f_n = 10$  кГц. Определить сопротивление потерь и добротность контура.

4.2.7. Индуктивность последовательного контура  $L = 200$  мкГн, сопротивление потерь  $R = 15$  Ом. Определить полосу пропускания контура.

4.2.8. В последовательном контуре известны параметры элементов  $R = 10$  Ом;  $L = 1,02$  мГн;  $C = 970$  пФ. Найти граничные частоты полосы пропускания.

4.2.9. Мощность, отдаваемая источником ЭДС, питающая настроенный последовательный контур, равна  $P = 50$  мВт. Амплитуда напряжения на емкости  $U_{m0} = 60$  В. Индуктивность контура  $L = 180$  мкГн, емкость  $C = 500$  пФ. Определить сопротивление потерь контура, полосу пропускания и амплитуду ЭДС.

4.2.10. Резонанс напряжений в последовательном контуре наступает при частоте  $f_0 = 1,5$  МГц, добротность контура  $Q = 250$ . Вычислить частоты, соответствующие половинной мощности.

4.2.11. Определить полосу пропускания цепи (рис. 4.12). Параметры цепи:  $L = 1$  мГн;  $C = 1$  пФ;  $R = 10$  Ом;  $R_i = 5$  Ом;  $R_n = 0,1$  МОм.

4.2.12. Последовательный контур имеет следующие параметры:  $L = 0,4$  мГн,  $C = 300$  пФ,  $R = 11$  Ом. Определить величину активного сопротивления, включенного дополнительно (либо последовательно, либо параллельно емкости), чтобы расширить полосу пропускания до  $20$  кГц.

4.2.13. Последовательный колебательный контур содержит конденсатор переменной емкости, у которого  $C_{\min} = 10$  пФ,  $C_{\max} = 500$  пФ. Определить коэффициент перекрытия контура по частоте  $K_f = f_{0\max}/f_{0\min}$ .

4.2.14. На последовательный колебательный контур с  $f_0 = 10^6$  рад/с действуют одновременно сигнал  $U_c = 1 \cos 10^6 t$  мВ и помеха  $U_n = 10 \cos 510^5 t$  мВ. Рассчитать параметры контура, если известно, что составляющая напряжения на емкости, созданная сигналом превышает составляющую, созданную помехой, в  $10$  раз, а составляющая тока с частотой сигнала имеет амплитуду  $I_{mc} = 0,1$  мА. Определить также амплитуды напряжения на емкости.

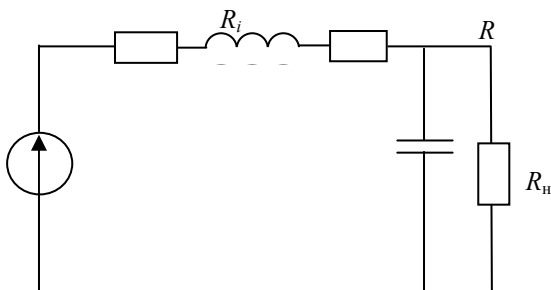


Рис. 4.12

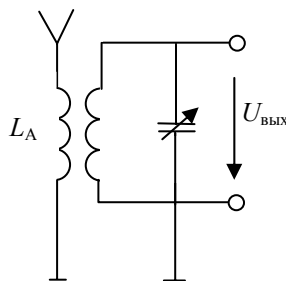


Рис. 4.13

4.2.15. Входной контур радиоприемного устройства средневолновой радиостанции (рис. 4.13), настроенный на частоту  $f_0 = 2 \cdot 10^6$  Гц, имеет добротность  $Q = 100$ . На антенну воздействуют одновременно полезный сигнал с  $f_c = 2 \cdot 10^6$  Гц и помеха с  $f_n = 2,05 \cdot 10^6$  Гц. Амплитуда сигнала в антенне в два раза больше амплитуды помехи. Определить, во сколько раз  $U_{m \text{ вых.с}}$  полезного сигнала больше  $U_{m \text{ вых.п}}$  помехи.

### Ответы, решения и методические указания

4.2.1.  $f_0 = 766$  кГц;  $\rho = 866$  Ом;  $Q = 106$ ;  $d = 9,43 \cdot 10^{-3}$ ,  $\Delta f_{\Pi} = 7,23$  кГц.

4.2.2. а)  $f_{0a} = f_0$ ;  $Q_a = Q/2$ ;  $\Delta f_{\Pi a} = 2\Delta f_{\Pi}$ ; б)  $f_{0б} = f_0/\sqrt{2}$ ;  $Q_b = \sqrt{2}Q$ ;  $\Delta f_{\Pi б} = \Delta f_{\Pi}/2$ ; в)  $f_{0в} = f_0\sqrt{2}$ ;  $Q_в = Q/\sqrt{2}$ ;  $\Delta f_{\Pi в} = \Delta f_{\Pi}$ .

4.2.3.  $C = 48,3$  пФ;  $R = 11,7$  Ом.

4.2.4.  $Q = 167$ ;  $U_{mC0} = U_{mL0} = 10$  В;  $U_{mC1} = U_{mL1} = 7,07$  В.

4.2.5. Решая систему уравнений  $\rho = \omega_0 L$ ,  $Q = \rho/R$ ,  $Q = \omega_0/\Delta\omega_{\Pi}$  находим индуктивность контура  $L = R/2\pi\Delta f_{\Pi} = 119$  мкГн. Заменяя в исходной системе первое уравнение на  $\rho = I/\omega_0 C$ , получим  $C = \Delta f_{\Pi}/2\pi f^2 R = 53$  пФ.

4.2.6.  $R = 39,8$  Ом;  $Q = 20$ .

4.2.7.  $\Delta f_{\Pi} = 7,5 \cdot 10^4$  рад/с.

4.2.8. АЧХ в полосе пропускания практически симметрична относительно резонансной частоты. В этом случае граничные частоты можно определить с помощью приближенного соотношения

$$f_{\text{пр}} \approx f_0 \pm \Delta f_{\Pi}/2; f_{\text{H}} = 159 \text{ кГц}; f_{\text{B}} = 161 \text{ кГц}.$$

4.2.9.  $R = 10$  Ом;  $\Delta\omega_{\Pi} = 5,56 \cdot 10^4$  рад/с;  $E_m = 1$  В.

4.2.10.  $f_{\text{H}} = 1,497$  МГц;  $f_{\text{B}} = 1,503$  МГц.

4.2.11. Полоса пропускания контура  $\Delta f_{\Pi} = f_0/Q$ , где

$$f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} = 159 \text{ кГц}; Q_3 = \rho/(R_i + R + R'_H); \rho = \sqrt{L/C}.$$

Для того чтобы учесть влияние сопротивления нагрузки на ширину полосы пропускания контура, заменим на резонансной частоте  $f_0$  участок цепи с параллельно включенными элементами  $C'$  и  $R'_H$ :

$$R'_H = R/(1 + (2\pi f_0 R_H C)^2) \approx 1/(2\pi f_0 C)^2 R_H = 10 \text{ Ом};$$

$$C' = C(1 + (2\pi f_0 R_H C)^2)/(2\pi f_0 R_H C)^2 \approx C = 1 \text{ нФ}.$$

Тогда  $Q_3 = 4Q$ ,  $\Delta f_{\Pi} = 3,98$  кГц.

4.2.12.  $R_{\text{пос}} = 39$  Ом;  $R_{\text{пар}} = 34,2$  кОм;

4.2.13.  $K_f = 7,1$ .

4.2.14.  $L = 1,33$  мГн;  $C = 750$  пФ;  $R = 10$  Ом;  $U_{mc} = 133$  мВ;  $U_{mn} = 13,3$  мВ.

4.2.15.  $U_{\text{твых.с}}/U_{\text{твых.п}} = 10$ .

### 4.3. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Контрольные вопросы

1. Что называется резонансом токов? Какими свойствами характеризуется параллельный контур при резонансе токов?
2. Вычертить графики зависимостей  $R_3$ ,  $X_3$  и  $Z_3$  параллельного контура от расстройки. Привести формулу для сопротивления параллельного контура при резонансе.
3. Что такое эквивалентная добротность контура? Как она зависит от внутреннего сопротивления источника и сопротивления нагрузки?
4. Как влияют внутреннее сопротивление источника и сопротивление нагрузки на АЧХ и ФЧХ параллельного контура?
5. Чем обусловлено применение сложных параллельных контуров? Нарисуйте их схемы и поясните особенности контуров второго и третьего видов.

Задачи

4.3.1. Определить резонансную частоту  $f_0$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , добротность  $Q$  и резонансное сопротивление  $Z_{30}$  контура (рис. 4.14), если  $C = 360$  пФ .

4.3.2. К простому параллельному контуру (рис. 4.14) подключен источник гармонического напряжения, частота которого совпадает с резонансной частотой контура. Параметры источника:  $E = 1$  В;  $R_i = 120$  кОм . Определить действующие значения тока источника, напряжения на контуре, тока емкостной и индуктивной ветвей контура.

4.3.3. Простой параллельный контур имеет следующие параметры:  $C = 500$  пФ ;  $Q = 100$ ;  $\omega_0 = 10^6$  рад/с . Определить полосу пропускания контура, а также активную и реактивную составляющие сопротивления на частоте  $1,007 \cdot 10^6$  рад/с .

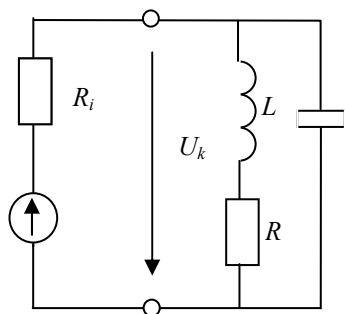


Рис. 4.14

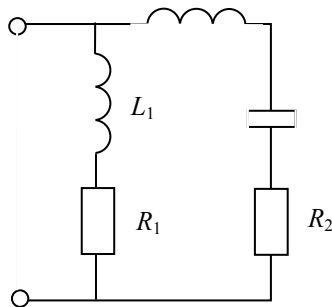


Рис. 4.15

4.3.4. Простой параллельный контур построен на длину волны  $\lambda_0 = 400$  м . Индуктивность контура  $L = 200$  мкГн , сопротивление потерь  $R = 10$  Ом . На какой частоте реактивная составляющая сопротивления контура имеет максимальное значение и емкостный характер?

4.3.5. Простой параллельный контур подключен к источнику ЭДС с внутренним сопротивлением  $R_i = 50$  кОм . Параметры контура:  $C = 500$  пФ ;  $Q = 100$ ;  $\omega_0 = 10^6$  рад/с . Определить эквивалентную добротность и полосу пропускания.

4.3.6. Простой параллельный контур является коллекторной нагрузкой транзистора с выходным сопротивлением  $R_i = 15$  кОм . Схема должна быть настроена на частоту  $f_0 = 300$  кГц и иметь полосу пропускания  $\Delta f_n = 3$  кГц . Кроме того, в контуре должна выделяться максимальная мощность. Найти параметры контура.

4.3.7. Индуктивность катушки параллельного контура  $L = 1$  мГн , сопротивление потерь  $R = 10$  Ом . Рассчитать контур так, чтобы на частоте  $10^6$  рад/с его сопротивление было активным и равным  $Z_{30} = 25$  кОм .

4.3.8. Определить частоты резонансов токов  $f_{0T}$ , напряжений  $f_{0N}$ , добротность  $Q$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , коэффициент включения  $p$  и резонансное сопротивление  $Z_{30}$  сложного параллельного контура (рис. 4.15). Параметры элементов цепи:  $L_1 = 150$  мкГн ;  $L_2 = 50$  мкГн ;  $C = 240$  пФ ;  $R_1 = 10$  Ом ;  $R_2 = 4$  Ом .

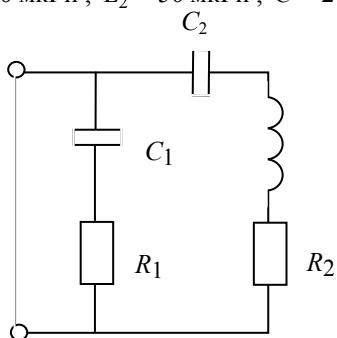


РИС. 4.16

4.3.9. Параллельный контур второго вида (рис. 4.15), настроенный на частоту сигнала, является нагрузкой радиолампы, имеющей внутреннее сопротивление  $R_i = 10$  кОм . Как следует распределить индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  между ветвями для обеспечения передачи в контур максимальной мощности, если известны  $L = 200$  мкГн ;  $C_2 = 100$  пФ ;  $R = 50$  Ом ?

4.3.10. Сложный параллельный контур (рис. 4.15) подключен к источнику ЭДС с внутренним сопротивлением  $R_i = 100$  кОм . Параметры контура:  $C = 500$  пФ ;  $Q = 100$ ;  $L_2 = 500$  мкГн ;  $\omega_0 = 10^6$  рад/с . Определить эквивалентную добротность и полосу пропускания  $\Delta\omega_n$  .

4.3.11. Вычислить частоты резонансов токов  $f_{0T}$ , напряжений  $f_{0N}$ , добротность  $Q$ , характеристическое сопротивление  $\rho$ , коэффициент включения  $p$  и резонансное сопротивление  $Z_{30}$  (рис. 4.16). Параметры элементов цепи:  $L = 220$  мкГн ;  $C_1 = 48$  пФ ;  $C_2 = 320$  пФ ;  $R = 16$  Ом .

4.3.12. Рассчитать параметры и резонансное сопротивление параллельного контура, если известно, что частота резонанса токов  $f_{0T} = 600$  кГц, а частота резонанса напряжений  $f_{0H} = 400$  кГц. Добротность контура на частоте резонанса токов  $Q = 100$ , полное сопротивление потерь  $R = 5$  Ом.

4.3.13. Рассчитать параметры сложного параллельного контура, который на частоте  $10^7$  рад/с должен обладать активным сопротивлением, равным 10 кОм, а на частоте  $2 \cdot 10^7$  рад/с – активным сопротивлением 10 Ом. Полное сопротивление потерь контура 20 Ом.

### Ответы, решения и методические указания

4.3.1. В случае малых потерь резонансная частота, характеристическое сопротивление и добротность параллельного контура, совпадают с соответствующими параметрами последовательного контура, составленного из тех же элементов:  $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} = 593$  кГц;  $\rho = \sqrt{L/C} = 745$  Ом;  $Q = \rho/R = 62,1$ . Резонансное сопротивление параллельного колебательного контура в  $Q$  раз превышает его характеристическое сопротивление:

$$Z_{30} = Q\rho = \rho^2/R = 46,3 \text{ кОм}.$$

4.3.2. На частоте резонанса токов входное сопротивление контура имеет активный характер и равно  $Z_{30}$ . Действующее значение тока в неразветвленной части цепи  $I = E/(R_i + Z_{30}) = 6,01$  мкА. Напряжение на контуре  $U_K = Z_{30}I = 0,278$  В. В случае малых потерь действующие значения тока емкостной и индуктивной ветвей на частоте резонанса токов приближенно равны:  $I_C \approx I_L \approx U_K/\rho = QI = 0,374$  мА.

4.3.3.  $\Delta\omega_{\Pi} = 10^4$  рад/с,  $R_3 = 67,6$  кОм;  $X_3 = -94,6$  кОм.

4.3.4.  $f = 754$  кГц.

4.3.5.  $Q_3 = 20$ ;  $\Delta\omega_{\Pi} = 5 \cdot 10^4$  рад/с.

4.3.6. При решении воспользоваться условием передачи максимальной активной мощности от генератора в контур, т.е.  $Z_{30} = R_i - R = 1,5$  Ом;  $L = 79,5$  мкГн;  $C = 3540$  пФ

4.3.7. Сложный контур;  $L = 1$  мГн,  $C = 1000$  пФ;  $R = 10$  Ом;  $p = 0,5$ .

4.3.8. Частота резонанса токов, добротность и характеристическое сопротивление сложного параллельного контура в случае малых потерь совпадают с частотой резонанса напряжений, добротностью и характеристическим сопротивлением последовательного контура, составленного из тех же элементов:

$f_{0T} = 1/2\pi\sqrt{(L_1 + L_2)C} = 726$  кГц;  $\rho = \sqrt{(L_1 + L_2)/C} = 913$  Ом;  $Q = \rho/(R_1 + R_2) = 65,2$ . Частота резонанса напряжений определяется параметрами ветви, содержащей емкость  $C$  и индуктивность  $L_2$ :  $f_{0H} = 1/2\pi\sqrt{L_2C} = 1,45$  МГц. Коэффициент включения контура характеризуется отношением индуктивности  $L_1$  индуктивной ветви к суммарной индуктивности контура:  $p = L_1/(L_1 + L_2) = 0,75$ . Резонансное сопротивление контура  $Z_{30} = (\rho p)^2/(R_1 + R_2) = 33,5$  кОм.

4.3.9.  $L_1 = L_2 = 100$  мкГн.

4.3.10.  $Q_3 = 88,9$ ;  $\Delta\omega_{\Pi} = 11\,250$  рад/с.

4.3.11.  $f_{0T} = 1,66$  МГц;  $f_{0H} = 600$  кГц;  $\rho = 2,3$  кОм;  $Q = 143$ ;  $p = 0,87$ .

4.3.12. Контур третьего вида;  $C_1 = 1190$  пФ;  $C_2 = 954$  пФ;  $L = 59$  мкГн.

4.3.13. Контур второго вида;  $L_1 = 44,7$  мкГн;  $L_2 = 14,9$  мкГн;  $C = 168$  пФ;  $R_1 = R_2 = 10$  Ом.

## 4.4. СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

### Контрольные вопросы

1. Какие виды связи применяются в связанных контурах? Что называется коэффициентом связи и чему он равен в схемах с индуктивной, автотрансформаторной и внутренней емкостной связью?
2. С какой целью вводят понятие схемы замещения первичного и вторичного контуров? Нарисуйте данные схемы замещения, напишите выражения для вносимых сопротивлений и поясните их физический смысл.
3. Какие существуют способы настройки связанных контуров? Поясните условия сложного и полного резонансов. Как практически настраиваются контуры данными способами?
4. Что понимается под резонансными частотами связанных контуров? Поясните физически возможность существования частот связи в связанных контурах.
5. Нарисуйте семейство нормированных АЧХ при  $k \leq d$  и  $k > d$  и поясните причины возникновения двугорбой АЧХ.
6. Что понимается под полосой пропускания связанных контуров и от чего она зависит? Какова максимально возможная полоса пропускания двух связанных контуров?

Задачи

4.4.1. Для двух трансформаторно-связанных контуров определить величину взаимной индуктивности  $M$ , обеспечивающей коэффициент связи  $K = 2\%$ , если  $L_1 = 400$  мкГн,  $L_2 = 900$  мкГн.

4.4.2. Два контура с внутриемкостной связью имеют  $C_1 = C_2 = 100$  пФ;  $C_{cb} = 1800$  пФ. Определить коэффициент связи.

4.4.3. Для системы двух связанных контуров (рис. 4.17) с одинаковыми параметрами:  $R_1 = R_2 = R = 24$  Ом;  $C_1 = C_2 = C = 1,2$  нФ;  $L_1 = L_2 = L_0 = 0,5$  мГн;  $C_{12} = 18$  нФ определить резонансную частоту  $f_0$ , добротность  $Q$ , коэффициент связи  $K$  и максимально возможное значение тока  $I_{2\max}$  при  $E = 1$  В.

4.4.4. Индуктивно-связанные контуры (рис. 4.18) имеют параметры:  $L_1 = 12$  мкГн;  $R_1 = 10$  Ом;  $L_2 = 10$  мкГн;  $R_2 = 8$  Ом. Оба контура настроены на частоту генератора  $f_0 = 5 \cdot 10^6$  Гц, ЭДС генератора  $E = 4$  В. Определить, при какой взаимной индукции  $M$  ток во вторичном контуре достигает максимально возможного значения и величину этого тока.

4.4.5. Два связанных колебательных контура (рис. 4.17) с одинаковыми параметрами настроены индивидуально на резонансную частоту  $f_0 = 0,8$  МГц. Найти значения  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_{12}$ , соответствующие настройке на полный резонанс при  $L_1 = L_2 = L = 120$  мкГн;  $Q_1 = Q_2 = Q = 60$ .

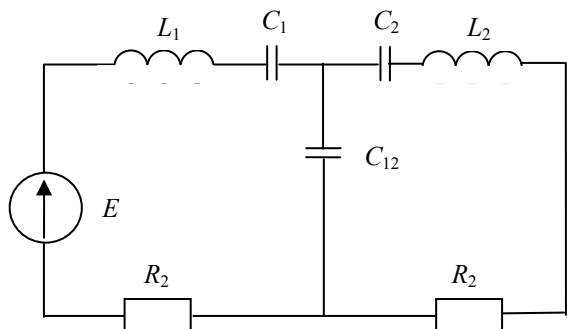


Рис. 4.17

4.4.6. Система из двух одинаковых индуктивно-связанных контуров с параметрами  $L = 0,2$  мГн,  $C = 150$  пФ;  $R = 30$  Ом настроена методом полного резонанса. ЭДС генератора  $E = 3$  В. Определить взаимную индуктивность  $M$  и максимально возможное значение тока во вторичном контуре.

4.4.7. Схема системы связанных контуров приведена на рис. 4.18. Амплитуды токов, протекающих в контурах  $I_{m1} = 100$  мА,  $I_{m2} = 40$  мА, частота ЭДС  $f_0 = 2,5 \cdot 10^6$  рад/с. Определить сопротивление, вносимое из второго контура в первый, и коэффициент связи. Параметры схемы:  $L_1 = L_2 = 300$  мкГн;  $C_1 = C_2 = 500$  пФ;  $R_1 = 8$  Ом;  $R_2 = 10$  Ом.

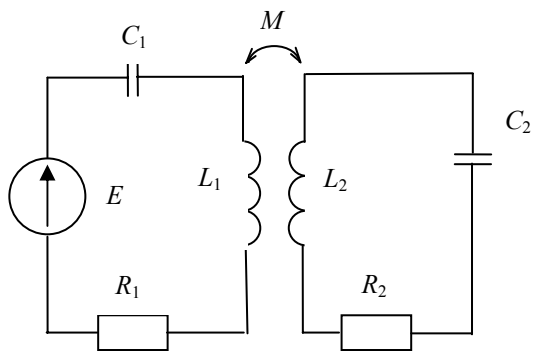


Рис. 4.18

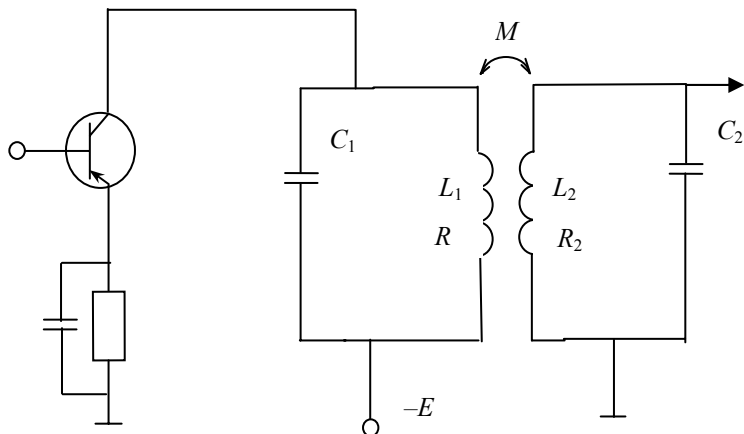


Рис. 4.19



4.4.8. Схема системы связанных контуров приведена на рис. 4.18. Найти величину емкости  $C_1$  и КПД при первом частном резонансе. Параметры схемы:  $E = 50 \cos 10^6 t$  В;  $L_1 = 400$  мкГн;  $L_2 = 200$  мкГн;  $C_2 = 4000$  пФ;  $R_1 = 20$  Ом;  $R_2 = 100$  Ом;  $M = 60$  мкГн.

4.4.9. Для системы связанных контуров (рис. 4.18) найти величину емкости  $C_2$  и КПД во втором частном резонансе. Параметры схемы:  $E = 50 \cos 10^6 t$  В;  $L_1 = 250$  мкГн;  $L_2 = 200$  мкГн;  $C_1 = 2000$  пФ;  $R_1 = R_2 = 20$  Ом;  $M = 100$  мкГн.

4.4.10. Два трансформаторно-связанных контура (рис. 4.19) имеют следующие параметры:  $L_1 = 250$  мкГн;  $C_1 = 1000$  пФ;  $R_1 = 5$  Ом;  $L_2 = 500$  мкГн;  $C_2 = 500$  пФ;  $R_2 = 10$  Ом. Коэффициент связи  $K = 1\%$ , резонансная длина волны  $\lambda_0 = 942$  м. Определить активное и реактивное сопротивления, вносимые в первичный контур, и эквивалентное сопротивление первичного контура.

4.4.11. Два одинаковых одиночных контура, составляющих систему связанных контуров, настроены каждый в отдельности на частоту  $f_0 = 2 \cdot 10^6$  Гц. Определить частоты связи  $f_{02}$  и  $f_{03}$ , если известны следующие параметры:  $R_1 = R_2 = 10$  Ом;  $C_1 = C_2 = 100$  пФ;  $X_{св} = 32$  Ом.

4.4.12. Два связанных контура, образующих полосовой фильтр настроены в отдельности на частоту  $f_0 = 465$  кГц. Добротности контуров  $Q_1 = Q_2 = 50$ . Определить, при каком коэффициенте связи ширина полосы пропускания системы  $\Delta f_{п} = 15$  кГц.

4.4.13. Два одинаковых индуктивно-связанных контура, параметры которых  $L_1 = L_2 = 250$  мкГн,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом, настроены порознь на одну и ту же частоту  $f_0 = 5 \cdot 10^5$  Гц.

Определить: 1) полосу пропускания каждого контура; 2) полосу пропускания индуктивно-связанных контуров при критической связи; 3) максимальную полосу пропускания двух связанных контуров; 4) при каких коэффициентах связи полоса пропускания двух связанных контуров будет а) в  $\sqrt{2}$  раз меньше; б) в 1,2 раза больше и в) в 2 раза больше по сравнению с полосой пропускания одиночного контура.

4.4.14. Полосовой фильтр состоит из двух одинаковых контуров, связанных индуктивно (рис. 4.18). Параметры контуров:  $L_1 = L_2 = 400$  мкГн,  $C_1 = C_2 = 100$  пФ,  $R_1 = R_2 = 10$  Ом. Определить наибольшую полосу пропускания фильтра и коэффициент связи, при котором эта полоса обеспечивается. Найти взаимную индуктивность контуров фильтра.

4.4.15. Два индуктивно-связанных контура имеют параметры:  $L_1 = 400$  мкГн,  $C_1 = 500$  пФ,  $R_1 = 20$  Ом,  $L_2 = 360$  мкГн,  $C_2 = 580$  пФ,  $R_2 = 15$  Ом,  $M = 40$  мкГн. Амплитуда ЭДС источника  $E_{1m} = 100$  В, его угловая частота  $\omega = 2 \cdot 10^6$  рад/с. Определить мощности  $P_1$  и  $P_2$ , расходуемые в первом и втором контурах, найти КПД при заданной связи.

4.4.16. Пользуясь данными задачи 4.4.15, определить  $P_2$  и КПД, если взаимная индуктивность  $M = 10$  мкГн, при условии, что оба контура в отдельности настроены в резонанс с частотой источника.

### Ответы, решения и методические указания

4.4.1.  $M = 12$  мкГн.

4.4.2.  $K = 0,0525$ .

4.4.3. Собственные емкости первого и второго контуров имеют одинаковые значения:  $C_{11} = C_{22} = C_{12}/(C + C_{12}) = 1125$  пФ. Резонансные частоты и добротности первого и второго контуров также одинаковы:  $f_0 = 1/2\pi\sqrt{LC} = 212,2$  кГц;  $Q = \sqrt{L/C_{11}}/R = 27,8$ . Коэффициент связи между контурами  $K = \sqrt{C_{11}C_{22}}/C_{12} = 0,0625$ . Максимальное значение тока второго контура  $I_{2\max.\max} = E/(2P) = 20,8$  мА.

4.4.4. В соответствии с условиями задачи настройка выполнена способом полного резонанса. Взаимная индуктивность определяется соотношением  $M = K\sqrt{L_1L_2}$ , где  $K = K_{\text{опт}} = \sqrt{d_1d_2} = \sqrt{R_1R_2}/\omega_0\sqrt{L_1L_2} = 0,026$ .  $M = 0,285$  мкГн. Максимально возможное значение тока  $I_{2\max.\max} = E/2\sqrt{R_1R_2} = 0,224$  А.

4.4.5. Настройке системы связанных контуров с одинаковыми параметрами на полный резонанс соответствует оптимальное значение коэффициента связи  $K = K_{\text{опт}} = I/Q = \sqrt{C_{11}C_{22}}/C_{12}$ . Собственные емкости контуров могут быть определены по известной резонансной частоте и индуктивности контуров.

$$C_1 = C_2 = 335 \text{ пФ}; C_{12} = 19,8 \text{ нФ}.$$

4.4.6.  $M = 5,1$  мкГн;  $I_{2\max.\max} = 0,05$  А.

4.4.7.  $\dot{Z}_{\text{вн1}} = (1,6 + j8)$  Ом;  $K = 0,0272$ .

4.4.8.  $C_1 = 2410$  пФ;  $\eta = 0,59$ .

4.4.9.  $C_2 = 4170$  пФ;  $\eta = 0,835$ .

4.4.10.  $R_{\text{вн1}} = 5$  Ом;  $X_{\text{вн1}} = 0$ ;  $Z_{\text{Э1}} = 10$  Ом.

4.4.11.  $f_{02} = 1,96$  МГц;  $f_{03} = 2,04$  МГц

4.4.12.  $K = 0,022$ .

4.4.13. Полоса пропускания каждого контура  $\Delta f_{\text{п}} = f_0 Q = R/2\pi L = 6350$  Гц. Полоса пропускания двух индуктивно-связанных контуров при критической (оптимальной) связи  $\Delta f_{\text{п.опт}} = \sqrt{2} f_0 d = 9000$  Гц. Максимальная полоса пропускания двух индуктивно-связанных контуров  $\Delta f_{\text{п.макс}} = 3,1 f_0 d = 19\ 700$  Гц.

Для ответа на вопросы п. 4, а и 4, б данной задачи, условия которых соответствуют полосе пропускания при связи ниже критической, для которой  $\Delta f_{\text{п.кр}} = \Delta f_{\text{п.опт}} = 1,41 f_0 d$ , нужно воспользоваться формулой

$$\Delta f_{\text{п}} = f_0 d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2 \cdot \left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]}} = \frac{1}{\sqrt{2}} f_0$$

или

$$\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2 \cdot \left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]} = 0,5.$$

Решая последнее уравнение относительно  $K$ , найдем  $K = 3,6 \cdot 10^{-3}$ ,

$$\Delta f_{\text{п}} = f_0 d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2 \cdot \left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]}} = 1,2 f_0 d$$

или

$$\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + \sqrt{2 \cdot \left[1 + \left(\frac{k}{d}\right)^4\right]} = 1,44.$$

Решая это уравнение относительно  $K$ , найдем  $K = 10,6 \cdot 10^{-3}$ ; для ответа на вопрос п. 4, в, в условии задачи 4.4.13 воспользуемся формулой

$$\Delta f_{\text{п}} = f_0 d \sqrt{\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + 2 \cdot \left(\frac{k}{d}\right)} = 2 f_0 d$$

или

$$\left(\frac{k}{d}\right)^2 - 1 + 2 \frac{k}{d} = 4.$$

Решая последнее уравнение, найдем  $K = 18,4 \cdot 10^{-3}$ .

4.4.14.  $\Delta f_{\text{п.макс}} = 1250$  Гц;  $K = 0,011$ ;  $M = 4,4$  мкГн.

4.4.15. Реактивные сопротивления контуров

$$X_1 = \omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1} = -200 \text{ Ом}; \quad X_2 = \omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} = -140 \text{ Ом}.$$

Эквивалентные активное и реактивное сопротивления первого контура соответственно равны:

$$R_{\text{эк}} = R_1 + R_{\text{вн1}} = R_1 + \frac{(\omega H)^2}{Z_2^2} R_2 = 24,8 \text{ Ом};$$

$$X_{\text{эк}} = X_1 + X_{\text{вн1}} = X_1 - \frac{(\omega H)^2}{Z_2^2} X_2 = -155 \text{ Ом}.$$

Мощность расходуемая в первом контуре,

$$P_1 = \frac{1}{2} I_{1m}^2 R_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{E_{1m}}{Z_{\text{эк1}}}\right)^2 R_1 = 4,05 \text{ Вт}.$$

КПД  $h = P_2/(P_1 + P_2) = 0,194$ .

Оптимальную связь определим по формуле

$$M_{\text{опт}} = \frac{X_{12\text{опт}}}{\omega} = \frac{\sqrt{R_1 R_2}}{\omega} = 8,65 \text{ мкГн}.$$

При оптимальной связи  $X_{\text{эк}} = 0$ , тогда

$$Z_{\text{эк}} = R_{\text{эк}} = R_1 + R_{\text{вн1}} = R_1 + \frac{\omega^2 H^2_{\text{опт}}}{R_2} = 2R_1 = 40 \text{ Ом}.$$

Токи в контурах:

$$I_{1M \text{ max. max}} = \frac{E_{1m}}{2R_1} = 2,5 \text{ А};$$

$$I_{2M \max.\max} = \frac{E_{1m}}{2\sqrt{R_1 R_2}} = 2,89 \text{ А.}$$

Значение максимально возможной мощности

$$P_{2 \max.\max} = P_{1 \max.\max} = \frac{E_{1m}^2}{8P_1} = 62,5 \text{ Вт; } \eta = 0,5.$$

4.4.16.  $P_2 = 61,5 \text{ Вт; } \eta = 0,57.$

## 5. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Основы теории четырехполосников (ЧП) заключаются в том, что на основании некоторых обобщенных его параметров находятся токи и напряжения на входе при известных токах и напряжениях на выходе и наоборот. При этом токи и напряжения внутри заданной схемы не рассчитываются.

Соотношения между токами и напряжениями на входе и выходе ЧП (рис. 5.1) могут быть записаны в виде шести групп уравнений:

1. Форма  $\| A \|$ :  $\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}'_2;$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}'_2.$$

2. Форма  $\| Y \|$ :  $\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2;$

$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2.$$

3. Форма  $\| Z \|$ :  $\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}'_2;$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}'_2.$$

4. Форма  $\| B \|$ :  $\dot{U}_2 = B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}'_1;$

$$\dot{I}_2 = B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}'_1.$$

5. Форма  $\| G \|$ :  $\dot{I}_1 = G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}'_2;$

$$\dot{U}_2 = G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}'_2.$$

6. Форма  $\| H \|$ :  $\dot{U}_1 = H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2;$

$$\dot{I}'_2 = H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2.$$

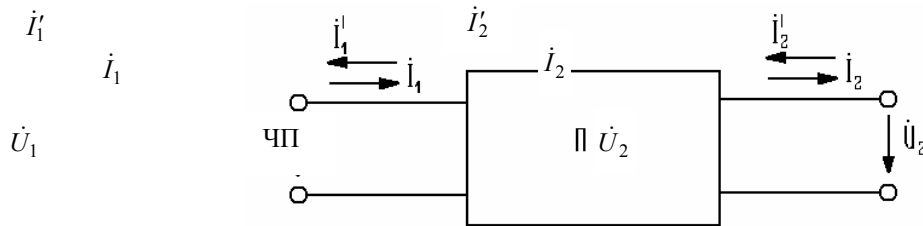


Рис. 5.1

Коэффициенты каждой системы уравнений четырехполосника могут быть выражены через коэффициенты любой другой системы (табл. 5.1).

Таблица 5.1

Из формы В форму	$\  A \ $	$\  Y \ $	$\  Z \ $	$\  H \ $
$\  A \ $	$A_{11} \quad A_{12}$ $A_{21} \quad A_{22}$	$\frac{-Y_{22}}{Y_{21}} \quad \frac{-1}{Y_{21}}$	$\frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad \frac{ Z }{Z_{21}}$	$\frac{- H }{H_{21}} \quad \frac{-H_{11}}{H_{21}}$

		$\frac{- Y }{Y_{21}} \quad \frac{-Y_{11}}{Y_{21}}$	$\frac{1}{Z_{21}} \quad \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$	$\frac{-H_{22}}{H_{21}} \quad \frac{-1}{H_{21}}$
$\  Y \ $	$\frac{A_{22}}{A_{12}} \quad \frac{- A }{A_{12}}$	$Y_{11} \quad Y_{12}$	$\frac{Z_{22}}{ Z } \quad \frac{-Z_{12}}{ Z }$	$\frac{1}{H_{11}} \quad \frac{-H_{12}}{H_{11}}$
	$\frac{-1}{A_{12}} \quad \frac{A_{11}}{A_{12}}$	$Y_{21} \quad Y_{22}$	$\frac{-Z_{21}}{ Z } \quad \frac{Z_{11}}{ Z }$	$\frac{H_{21}}{H_{11}} \quad \frac{ H }{H_{11}}$
$\  Z \ $	$\frac{A_{11}}{A_{21}} \quad \frac{ A }{A_{21}}$	$\frac{Y_{22}}{ Y } \quad \frac{-Y_{12}}{ Y }$	$Z_{11} \quad Z_{12}$	$\frac{ H }{H_{22}} \quad \frac{H_{12}}{H_{22}}$
	$\frac{1}{A_{21}} \quad \frac{A_{22}}{A_{21}}$	$\frac{-Y_{21}}{ Y } \quad \frac{Y_{11}}{ Y }$	$Z_{21} \quad Z_{22}$	$\frac{-H_{21}}{H_{22}} \quad \frac{1}{H_{22}}$
$\  H \ $	$\frac{A_{12}}{A_{22}} \quad \frac{ A }{A_{22}}$	$\frac{1}{Y_{11}} \quad \frac{-Y_{12}}{Y_{11}}$	$\frac{ Z }{Z_{22}} \quad \frac{Z_{12}}{Z_{22}}$	$H_{11} \quad H_{12}$
	$\frac{-1}{A_{22}} \quad \frac{A_{21}}{A_{22}}$	$\frac{Y_{21}}{Y_{11}} \quad \frac{ Y }{Y_{11}}$	$\frac{-Z_{21}}{Z_{22}} \quad \frac{1}{Z_{22}}$	$H_{21} \quad H_{22}$

В табл. 5.1 обозначено:

$$\| A \| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21};$$

$$\| Y \| = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21};$$

$$\| Z \| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21};$$

$$\| H \| = H_{11}H_{22} - H_{12}H_{21};$$

- для обратимого ЧП

$$\| A \| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1;$$

$$Y_{12} = Y_{21}; \quad Z_{12} = Z_{21}; \quad H_{12} = H_{21}; \quad A_{12} = A_{21},$$

- для симметричного ЧП

$$A_{11} = A_{22}; \quad Y_{11} = Y_{22}; \quad Z_{11} = Z_{22}; \quad H_{11} = H_{22}.$$

В последнем случае независимых коэффициентов только два ( $A_{11}$  и  $A_{12}$ ;  $Y_{11}$  и  $Y_{12}$ ;  $Z_{11}$  и  $Z_{12}$ ;  $H_{11}$  и  $H_{12}$ ).

Анализ одиночных ЧП, а также их каскадное (цепочное) соединение, производится в наиболее удобной форме уравнений – форма  $\| A \|$ .

Каскадное (цепочное) соединение нескольких ЧП целесообразно заменить эквивалентным ЧП, коэффициенты которого определяются по известным коэффициентам каскадно соединенных ЧП. Матрица коэффициентов  $\| A \|$  эквивалентного ЧП равна произведению матриц  $\| A \|$  и отдельных ЧП (рис. 5.2).

$$\| A_{\Sigma} \| = \prod_{k=1}^n \| A_K \|.$$

Следует иметь в виду, что матрицы, подлежащие перемножению, записываются в том же порядке, в каком отдельные ЧП включены в схеме сложного (эквивалентного) ЧП.

Необходимо отметить, что параллельное соединение ЧП легко заменяется эквивалентным, если уравнения составных ЧП записаны в форме  $\| Y \|$

$$\| Y_{\Sigma} \| = \sum_{k=1}^n \| Y_K \|,$$

а последовательное соединение – в форме  $\| Z \|$  (рис. 5.3, а, б)

$$\| Z_{\Sigma} \| = \sum_{k=1}^n \| Z_K \|.$$

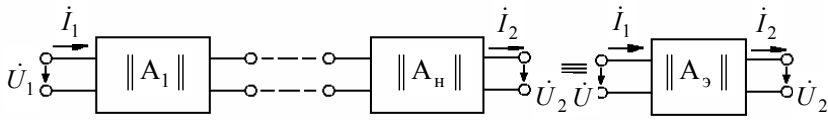


Рис. 5.2

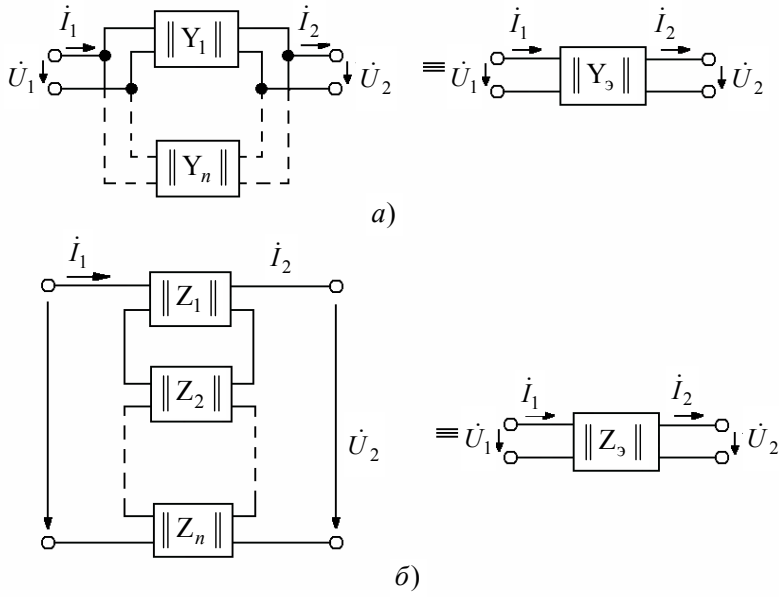


Рис. 5.3

Правила сложения матриц применимы лишь при равенстве входящего и выходящего токов в каждой паре зажимов составных ЧП. Соединение четырехполюсников, удовлетворяющее этому условию, называется регулярным.

При расчете сложных электрических цепей, представленных в виде ЧП, часто пользуются схемами замещения – Т-образной (соединение элементов звездой) и П-образной (соединение элементов «треугольником»), рис. 5.4.

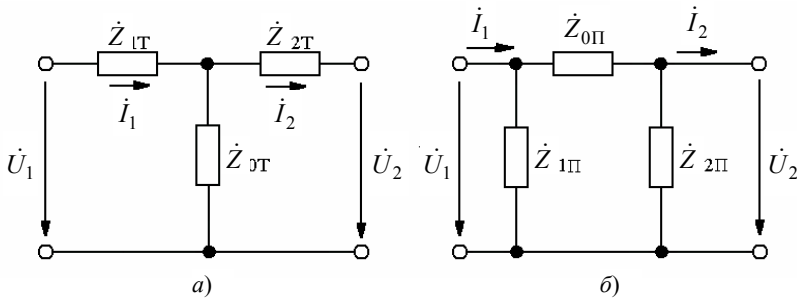


Рис. 5.4

Между элементами Т- и П-образными схемами замещения и параметрами ЧП существует определенная связь (табл. 5.2).

Таблица 5.2

Кoeffициент	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{21}$	$A_{22}$
ЧП				
Рис. 5.4, а	$1 + \frac{\dot{Z}_{1T}}{\dot{Z}_{0T}}$	$\dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{2T} + \frac{\dot{Z}_{1T}\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}$	$\frac{1}{\dot{Z}_{0T}}$	$1 + \frac{\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}$
Рис. 5.4., б	$1 + \frac{\dot{Z}_{0П}}{\dot{Z}_{2П}}$	$\dot{Z}_{0П}$	$\frac{\dot{Z}_{0П} + \dot{Z}_{1П} + \dot{Z}_{2П}}{\dot{Z}_{1П}\dot{Z}_{2П}}$	$1 + \frac{\dot{Z}_{0П}}{\dot{Z}_{1П}}$

Пассивный П-образный ЧП может быть преобразован в Т-образный (или наоборот) по правилу преобразования «треугольника» сопротивлений в эквивалентную «звезду».

Следует отметить, что Т-образная и П-образная схемы замещения четырехполюсника не всегда физически реализуемы. Это означает, что в схеме замещения ЧП параметры  $R$ ,  $L$  и  $C$  должны быть положительными.

Если в какой-либо ветви схемы такое условие не выполняется, то она считается физически нереализуемой.

Однако данное утверждение не относится к четырехполюсникам, не содержащим реактивных элементов.

Помимо коэффициентов уравнений ЧП в различных формах широко используются характеристические параметры: постоянная распределения (передачи)  $\gamma = \alpha + j\beta$ , действительная часть которой называется собственным затуханием ЧП, а мнимая часть – коэффициентом фазы, и характеристические сопротивления  $\dot{Z}_{1c}$  и  $\dot{Z}_{2c}$ . Кроме того, часто применяются параметры холостого хода (х.х.) и короткого замыкания (к.з.) входные сопротивления ЧП со стороны входных зажимов ( $\dot{Z}_{1x}$  и  $\dot{Z}_{1k}$ ) и со стороны выходных зажимов ( $\dot{Z}_{2x}$  и  $\dot{Z}_{2k}$ ). Эти параметры связаны между собой соотношением  $\frac{\dot{Z}_{1x}}{\dot{Z}_{1k}} = \frac{\dot{Z}_{2x}}{\dot{Z}_{2k}}$ , которое свидетельствует о том, что в общем виде ЧП характеризуется тремя независимыми коэффициентами – параметрами, а симметричный ЧП – двумя (например,  $\dot{Z}_{1x}$  и  $\dot{Z}_{1k}$ ).

Входным сопротивлением ЧП называется отношение входного напряжения к входному току.

Связь между коэффициентами ЧП, параметрами х.х. и к.з. и характеристическими параметрами приведена в табл. 5.3. В этой же таблице через вышеназванные параметры даются выражения для расчета входного сопротивления ЧП при произвольной нагрузке  $\dot{Z}_H$ .

Таблица 5.3

	Коэффициенты	Параметры х.х. и к.з.	Характеристические параметры
Коэффициенты	$A_{11}$ $A_{12}$ $A_{21}$ $A_{22}$	$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1x}Z_{1k}}{Z_{2k}(Z_{1x} - Z_{1k})}}$ $A_{12} = A_{11}Z_{2k}$ $A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{1x}}$ $A_{22} = \frac{A_{12}}{Z_{1k}}$	$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1c}}{Z_{2c}}} \operatorname{ch}\gamma$ $A_{12} = \sqrt{Z_{1c}Z_{2c}} \operatorname{sh}\gamma$ $A_{21} = \frac{1}{\sqrt{Z_{1c}Z_{2c}}} \operatorname{sh}\gamma$ $A_{22} = \sqrt{\frac{Z_{2c}}{Z_{1c}}} \operatorname{ch}\gamma$
Параметры х.х. и к.з.	$Z_{1x} = \frac{A_{11}}{A_{21}}$ $Z_{1k} = \frac{A_{12}}{A_{22}}$ $Z_{2x} = \frac{A_{22}}{A_{21}}$ $Z_{2k} = \frac{A_{12}}{A_{11}}$	$Z_{1x}$ $Z_{1k}$ $Z_{2x}$ $Z_{2k}$	$Z_{1x} = Z_{1c} \operatorname{cth}\gamma$ $Z_{1k} = Z_{1c} \operatorname{th}\gamma$ $Z_{2x} = Z_{2c} \operatorname{cth}\gamma$ $Z_{2k} = Z_{2c} \operatorname{th}\gamma$

Продолжение табл. 5.3

	Коэффициенты	Параметры х.х. и к.з.	Характеристические параметры
Характеристические параметры	$Z_{1c} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}$ $Z_{2c} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{21}A_{11}}}$ $\gamma = \ln\left(\sqrt{\frac{A_{11}A_{22}}{A_{12}A_{21}}} + \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}\right)$	$Z_{1c} = \sqrt{Z_{1x}Z_{1k}}$ $Z_{2c} = \sqrt{Z_{2x}Z_{2k}}$ $\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{Z_{1k}}{Z_{1x}}} = \sqrt{\frac{Z_{2k}}{Z_{2x}}}$	$Z_{1c}$ $Z_{2c}$ $\gamma = \alpha + j\beta$

Входное сопротивление	$Z_{1\text{вх}} = \frac{A_{11}Z_{\text{н}} + A_{12}}{A_{21}Z_{\text{н}} + A_{22}}$	$Z_{1\text{вх}} = Z_{1\text{x}} \frac{Z_{2\text{k}} + Z_{\text{н}}}{Z_{2\text{x}} + Z_{\text{н}}}$	$Z_{1\text{вх}} = Z_{1\text{c}} \operatorname{tg}(\gamma + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{2\text{c}} + Z_{\text{н}}}{Z_{2\text{c}} - Z_{\text{н}}})$
	$Z_{2\text{вх}} = \frac{A_{22}Z_{\text{н}} + A_{12}}{A_{21}Z_{\text{н}} + A_{11}}$	$Z_{2\text{вх}} = Z_{2\text{x}} \frac{Z_{1\text{k}} + Z_{\text{н}}}{Z_{1\text{x}} + Z_{\text{н}}}$	$Z_{2\text{вх}} = Z_{2\text{c}} \operatorname{tg}(\gamma + \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{1\text{c}} + Z_{\text{н}}}{Z_{1\text{c}} - Z_{\text{н}}})$

### Контрольные вопросы

1. Что называется четырехполюсником?
2. Как классифицируются четырехполюсники?
3. Записать шесть форм записи уравнений ЧП, указать для них положительные направления записи токов и напряжений?
4. В каких случаях каждая форма записи имеет преимущества перед остальными?
5. Как опытным путем определить коэффициенты  $A, Z, Y, H$ ?
6. Каким образом, зная коэффициенты одной формы записи, определить коэффициенты другой формы?
7. Какое соединение ЧП называют регулярным?
8. Что понимается под характеристическими параметрами ЧП?
9. Каким образом определяются характеристические сопротивления ЧП?
10. Что называется входным сопротивлением ЧП?
11. С какой целью используют схемы замещения ЧП?
12. Приведите примеры электро-, радиосхем, в которых осуществляется каскадное соединение ЧП?
13. Что называется постоянной передачи?
14. В каких единицах измеряют затухания?

### Задачи

5.1. Выразить коэффициенты ЧП в форме  $\|A\|$  через параметры Т-образной схемы замещения (рис. 5.5)

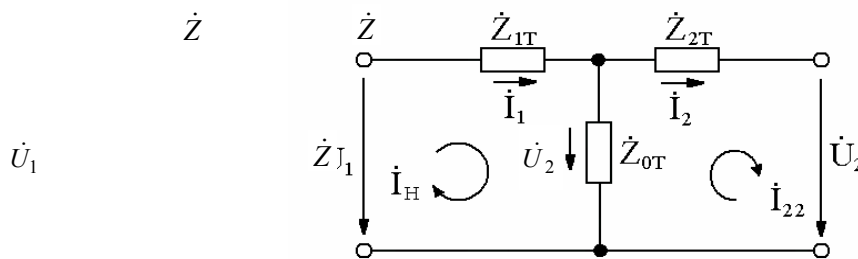


Рис. 5.5

5.2. Выразить коэффициенты ЧП в форме  $\|A\|$  через параметры П-образной схемы замещения (рис. 5.6)

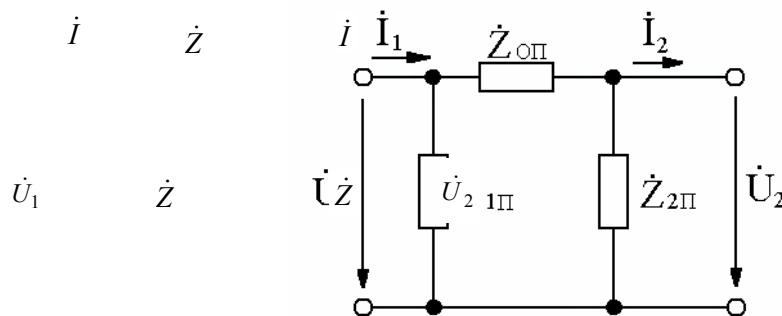


Рис. 5.6

5.3. Определить коэффициенты Т-образного ЧП в форме  $\|A\|$ , если  $Z_{1\text{T}} = 10 \text{ Ом}$ ;  $Z_{0\text{T}} = -j10 \text{ Ом}$  и  $Z_{2\text{T}} = j20 \text{ Ом}$ . Убедиться в справедливости соотношения  $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1$ . Определить комплекс напряжения на разомкнутых вторичных зажимах, если  $U_1 = 10 \text{ В}$  (рис. 5.7).

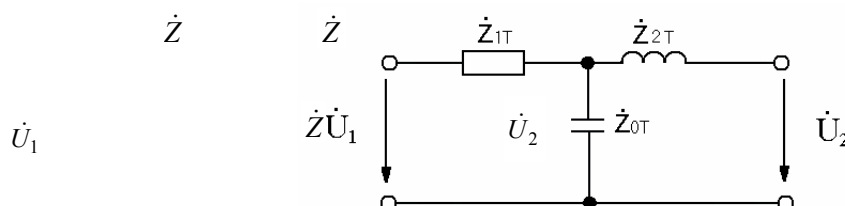


Рис. 5.7

5.4. Известна матрица коэффициентов ЧП. Определить параметры холостого хода и короткого замыкания со стороны первичных и вторичных зажимов. Проверить выполнимость соотношения  $\frac{\dot{Z}_{1x}}{\dot{Z}_{1k}} = \frac{\dot{Z}_{2x}}{\dot{Z}_{2k}}$

5.5. Определить входное сопротивление ЧП со стороны первичных зажимов при подключении к выходным зажимам нагрузочного сопротивления  $Z_H = 2 \text{ Ом}$ . То же при нагрузке со стороны первичных зажимов  $Z_0 = 1 \text{ Ом}$  (рис. 5.8).

$$Z_{1T} = 1 \text{ Ом}; Z_{2T} = j2 \text{ Ом}; Z_{0T} = -j1 \text{ Ом}.$$

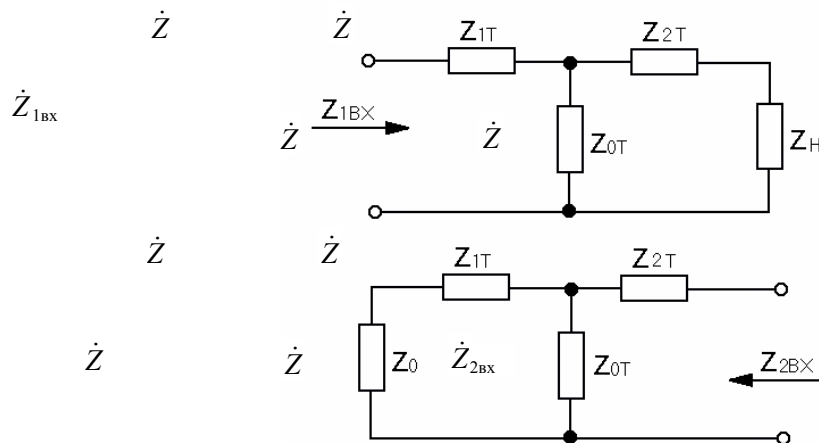


Рис. 5.8

5.6. Известны коэффициенты ЧП:  $A_{11} = 1 + j$ ;  $A_{12} = (4 + j4) \text{ Ом}$ ;  $A_{22} = 0,5$ . Определить, какое активное сопротивление надо подключить к выходным зажимам, чтобы входное сопротивление оказалось активным.

5.7. Измерения проведенные с несимметричным ЧП при х.х. и к.з. при прямой передаче и при х.х. при обратной передаче, дали следующие результаты:

$$U_{1x} = 10 \text{ В}, I_{1x} = 0,7 \text{ А}, P_{1x} = 5 \text{ Вт}, \varphi_{1x} < 0;$$

$$U_{1k} = 10 \text{ В}, I_{1k} = 0,45 \text{ А}, P_{1k} = 2 \text{ Вт}, \varphi_{1k} < 0;$$

$$U_{2x} = 10 \text{ В}, I_{2x} = 1,0 \text{ А}, P_{2x} = 0 \text{ Вт}, \varphi_{2x} > 0.$$

Определить коэффициенты ЧП по форме  $\|A\|$  и параметры Т-образной схемы замещения.

5.8. Определить характеристические параметры симметричного ЧП, если  $Z_{1T} = Z_{2T} = 10 \text{ Ом}$ ,  $Z_{0T} = -j10 \text{ Ом}$  (рис. 5.9).

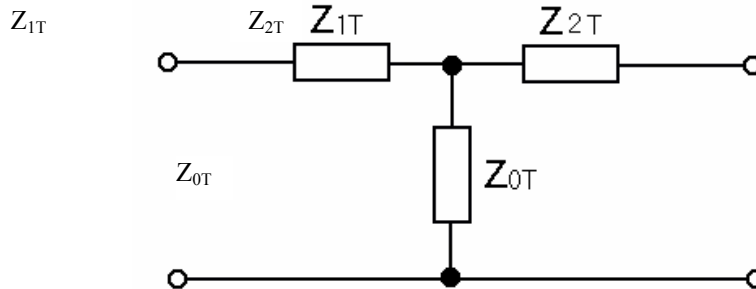


Рис. 5.9

5.9. Четырехполюсник задачи 5.8 нагружен согласованной нагрузкой. Определить  $\dot{I}_1, S_1, \dot{U}_2, \dot{I}_2, S_2$ , если  $\dot{U}_1 = 12 \text{ В}$ .

5.10. Определить характеристические параметры ЧП, комплексные сопротивления Т-образной схемы замещения которого равны  $Z_{1T} = 1 \text{ Ом}$ ;  $Z_{2T} = j2 \text{ Ом}$ ;  $Z_{0T} = -j1 \text{ Ом}$ .

5.11. Для передачи наибольшей мощности от генератора нагрузки применяется согласующий симметричный ЧП, включаемый между генератором и нагрузкой (рис. 5.10). Найти коэффициенты  $A_{11}, A_{12}, A_{21}$  и  $A_{22}$  этого ЧП, рассчитать параметры Т-образной схемы замещения и определить мощность нагрузки при ее подключении непосредственно к генератору и через согласующий ЧП, если  $\dot{E} = 130 \text{ В}$ ,  $Z_H = 25 \text{ Ом}$ ,  $Z_i = 1 \text{ Ом}$ .

5.12. Определить коэффициент трансформации идеального трансформатора, включаемого между генератором с внутренним сопротивлением  $Z_0 = (1 + j2) \text{ Ом}$  и нагрузкой  $Z_H = (100 - j200) \text{ Ом}$  с целью передачи в нагрузку максимальной мощности.



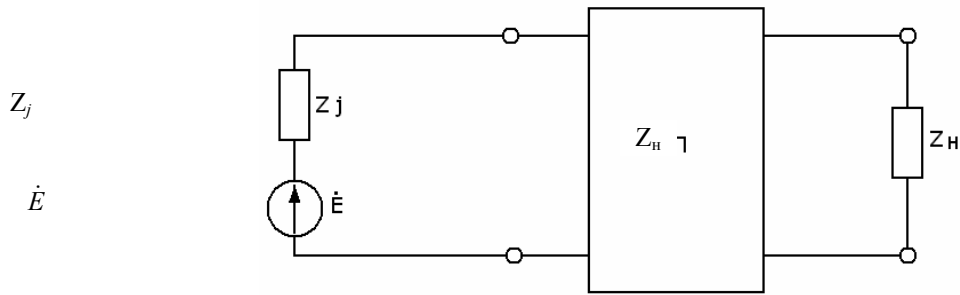


Рис. 5.10

5.13. Два одинаковых четырехполюсника из задачи 5.5 соединены каскадно по схемам, приведенным на рис. 5.11. Определить коэффициенты  $\| A \|$  эквивалентного ЧП для каждого из случаев.

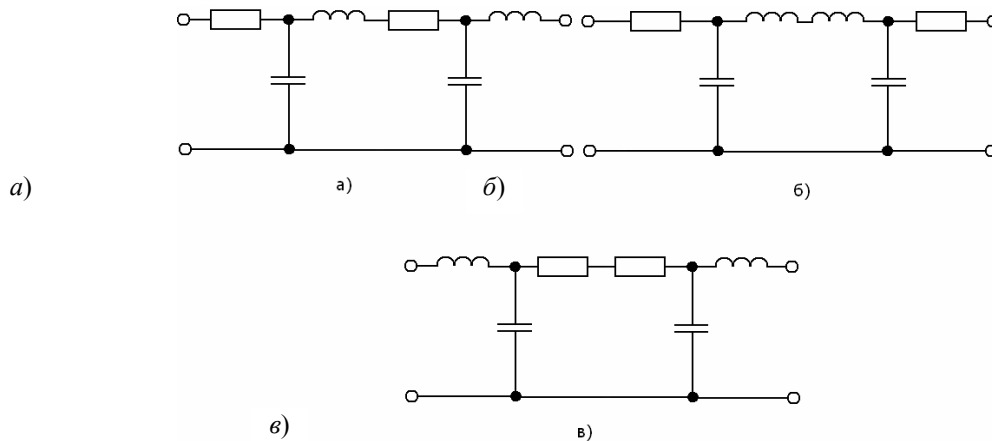


Рис. 5.11

5.14. Заменить изображенный на рис. 5.12 ЧП эквивалентной Т-образной схемой замещения, если  $Z_{11} = 1 \text{ Ом}$ ,  $Z_{2T} = 2 \text{ Ом}$ ,  $Z_{0T} = -j1 \text{ Ом}$ ,  $n = \frac{W_1}{W_2} = \frac{1}{2}$ .

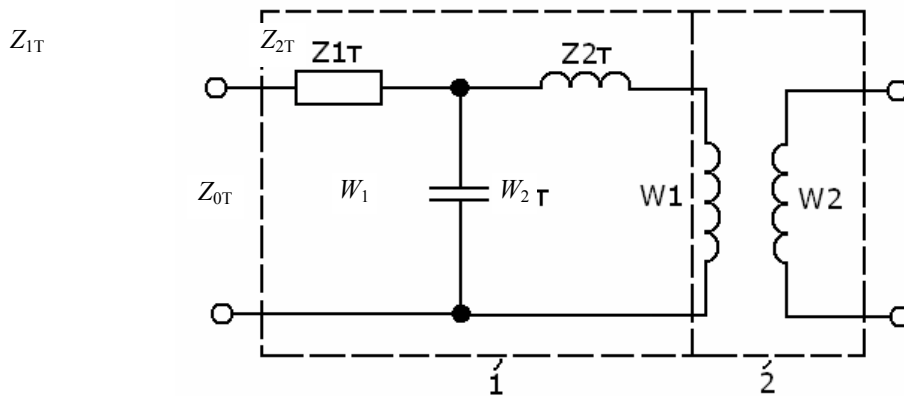


Рис. 5.12

5.15. Два одинаковых ЧП из задачи 5.5 соединены последовательно. Начертить схему регулярного соединения и определить коэффициенты эквивалентного ЧП.

5.16. Два одинаковых ЧП из задачи 5.5 соединены параллельно. Начертить схему регулярного соединения и определить коэффициенты  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$  эквивалентного ЧП.

Ответы, решения и методические указания

5.1. **Первый способ.** Использование уравнений Кирхгофа

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{Z}_{1T} \dot{I}_1 + \dot{Z}_{2T} \dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_0 + \dot{I}_2. \end{cases} \quad (5.1) \quad (5.2)$$

Сравним (5.1) и (5.2) с уравнением ЧП в форме  $\| A \|$ :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{A}_{11} \dot{U}_2 + \dots; \\ \dot{I}_1 = \dot{A}_{21} \dot{U}_2 + \dots \end{cases} \quad (5.3) \quad (5.4)$$

В уравнении (5.2) необходимо  $\dot{I}_0$  заменить через  $\dot{I}_2$  или  $\dot{U}_2$  и параметры схемы замещения, а в уравнении (5.1) необходимо избавиться от  $\dot{I}_1$ . Так как

$$\dot{I}_0 = \frac{\dot{U}_2 + Z_{2T}\dot{I}_2}{\dot{Z}_{0T}}$$

и

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_{0T}} + \frac{\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}\dot{I}_2 + \dot{I}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_{0T}}\dot{U}_2 + \left(1 + \frac{\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}\right)\dot{I}_2,$$

то сравним с (5.4), получим:  $\dot{A}_{21} = \frac{1}{\dot{Z}_{0T}}$ ;  $\dot{A}_{22} = 1 + \frac{\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}$ .

Подставим выражение для тока  $\dot{I}_1$  в (5.1):

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{Z}_{1T} \left[ \frac{1}{\dot{Z}_{0T}}\dot{U}_2 + \left(1 + \frac{\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}\right)\dot{I}_2 \right] + \dot{Z}_{2T}\dot{I}_2 + \dot{U}_2 = \\ &= \left(1 + \frac{\dot{Z}_{1T}}{\dot{Z}_{0T}}\right)\dot{U}_2 + \left(\dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{2T} + \frac{\dot{Z}_{1T}\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}\right)\dot{I}_2.\end{aligned}$$

Сравним это выражение с (5.3), получим:

$$A_{11} = 1 + \frac{\dot{Z}_{1T}}{\dot{Z}_{0T}}; \quad A_{12} = \dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{2T} + \frac{\dot{Z}_{1T}\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}.$$

**Второй способ.** Использование метода контурных токов.

Уравнения для двух независимых контуров

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{I}_1(\dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{0T}) + \dot{I}_2 \dot{Z}_{2T}; \\ -\dot{U}_2 = -\dot{I}_1\dot{Z}_{0T} + \dot{I}_2(\dot{Z}_{2T} + \dot{Z}_{0T}). \end{cases} \quad (5.5)$$

Из (5.5) найдем

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\dot{Z}_{0T}}\dot{U}_2 + \frac{\dot{Z}_{2T}\dot{Z}_{0T}}{\dot{Z}_{0T}}\dot{I}_2 + \dot{I}_2 = \frac{1}{\dot{Z}_{0T}}\dot{U}_2 + \left(1 + \frac{\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}\right)\dot{I}_2,$$

откуда

$$A_{21} = \frac{1}{\dot{Z}_{0T}}; \quad A_{22} = 1 + \frac{\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}.$$

Подставив выражение для тока  $\dot{I}_1$  в (5.5), получим

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \left(\frac{\dot{U}_2}{\dot{Z}_{0T}} + \dot{I}_2 + \frac{\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}\dot{I}_2\right)(\dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{0T}) + \dot{I}_2\dot{Z}_{2T} = \\ &= \left(1 + \frac{\dot{Z}_{1T}}{\dot{Z}_{0T}}\right)\dot{U}_2 + \left(\dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{2T} + \frac{\dot{Z}_{1T}\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}\right)\dot{I}_2.\end{aligned}$$

Сравним это выражение с (5.3), получим

$$A_{11} = 1 + \frac{\dot{Z}_{1T}}{\dot{Z}_{0T}}; \quad A_{12} = \dot{Z}_{1T} + \dot{Z}_{2T} + \frac{\dot{Z}_{1T}\dot{Z}_{2T}}{\dot{Z}_{0T}}.$$

5.2. Применим **третий способ** определения коэффициентов. Из уравнений ЧП формы  $\|A\|$  при  $I_2 \neq 0$  (режим х.х. при прямой передаче) следует, что

$$\dot{A}_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{2к}}; \quad (5.9)$$

$$\dot{A}_{22} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_{1к}}{\dot{I}_{2к}}. \quad (5.10)$$

Для П-образного ЧП при х.х. и прямой передаче (рис. 5.6)

$$\dot{U}_{2х} = \frac{\dot{U}_{1х}}{\dot{Z}_{0П}\dot{Z}_{2П}}\dot{Z}_{2П} \quad \text{и} \quad \dot{I}_{1х} = \frac{\dot{U}_{1х}}{\dot{Z}_{1П}} + \frac{\dot{U}_{1х}}{\dot{Z}_{0П}\dot{Z}_{2П}}.$$

В соответствии с (5.7) и (5.8) получим:

$$A_{11} = \frac{\dot{Z}_{0П} + \dot{Z}_{2П}}{\dot{Z}_{2П}} = 1 + \frac{\dot{Z}_{0П}}{\dot{Z}_{2П}};$$

$$A_{21} = \frac{\dot{Z}_{1\Pi} + \dot{Z}_{2\Pi} + \dot{Z}_{0\Pi}}{\dot{Z}_{1\Pi}\dot{Z}_{2\Pi}} = \frac{1}{\dot{Z}_{2\Pi}} + \frac{1}{\dot{Z}_{1\Pi}} + \frac{\dot{Z}_{0\Pi}}{\dot{Z}_{1\Pi}\dot{Z}_{2\Pi}}.$$

При к.з. и прямой передаче

$$\dot{i}_{1К} = \frac{\dot{U}_{1К}}{\dot{Z}_{1\Pi}} + \frac{\dot{U}_{1К}}{\dot{Z}_{0\Pi}} = \frac{\dot{U}_{1К}}{\frac{\dot{Z}_{1\Pi}\dot{Z}_{0\Pi}}{\dot{Z}_{1\Pi} + \dot{Z}_{0\Pi}}}; \quad \dot{i}_{2К} = \frac{\dot{U}_{1К}}{\dot{Z}_{0\Pi}}.$$

В соответствии с (5.9) и (5.10) получим:

$$A_{12} = \frac{\dot{U}_{1К}}{\dot{I}_{2К}} = \frac{\dot{U}_{1К}}{\frac{\dot{U}_{1К}}{\dot{Z}_{0\Pi}}} = \dot{Z}_{0\Pi};$$

$$A_{22} = \frac{\dot{I}_{2К}}{\dot{I}_{2К}} = \frac{\frac{\dot{U}_{1К}(\dot{Z}_{0\Pi} + \dot{Z}_{1\Pi})}{\dot{Z}_{1\Pi} + \dot{Z}_{0\Pi}}}{\frac{\dot{U}_{1К}}{\dot{Z}_{0\Pi}}} = 1 + \frac{\dot{Z}_{0\Pi}}{\dot{Z}_{1\Pi}}.$$

Из выражений (5.7) – (5.10) ясен смысл коэффициентов ЧП в форме  $\|A\|$ :

$A_{11}$  – коэффициент передачи ЧП по напряжению в режиме х.х.;

$A_{22}$  – коэффициент передачи ЧП по току в режиме к.з.

Эти коэффициенты безразмерные.

$A_{12}$  – величина, обратная передаточной проводимости в режиме к.з. Размерность – Ом;

$A_{21}$  – величина, обратная передаточному сопротивлению в режиме х.х. Размерность – См.

5.3.

$$1. \quad A_{11} = \sqrt{2}e^{j45^\circ}; \quad A_{12} = \sqrt{50}e^{j116^\circ30'} \text{ Ом};$$

$$A_{21} = 0,1e^{j90^\circ} \text{ Ом}; \quad A_{22} = -1.$$

$$2. \quad U_2 = 50\sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ В}.$$

5.4. Использовать формулы из табл. 5.2.

$$\dot{Z}_{1X} = \sqrt{2}e^{-j45^\circ} \text{ Ом}; \quad \dot{Z}_{1К} = \sqrt{5}e^{-j63^\circ30'} \text{ Ом};$$

$$\dot{Z}_{2X} = e^{j90^\circ} \text{ Ом}; \quad \dot{Z}_{2К} = \sqrt{2,5}e^{j71^\circ35'} \text{ Ом}.$$

5.5.

$$\dot{Z}_{1ВХ} = 1,85e^{-j40^\circ35'};$$

$$\dot{Z}_{2ВХ} = 1,27e^{j71^\circ30'}.$$

5.6.

1. Найдем неизвестный четвертый коэффициент ЧП:

$$A_{21} = \frac{A_{11}A_{22} - 1}{A_{12}} = \frac{(1+j)0,5 + 1}{4 + j4} = \frac{-0,5\sqrt{2}e^{-j45^\circ}}{4\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = j0,125 \text{ Ом}.$$

2. Запишем выражение для определения входного ЧП при нагрузке  $Z_H = R_H$

$$Z_{1ВХ} = \frac{A_{11}Z_H + A_{12}}{A_{21}Z_H + A_{22}} = \frac{(1+j)R_H + 4 + j4^\circ}{j0,125R_H + 0,5} = \frac{(4 + R_H) + j(4 + R_H)}{0,5 + j0,125R_H}.$$

Умножаем числитель и знаменатель на комплексное число сопряженное знаменателю

$$Z_{1ВХ} = \frac{2 + R_H + 0,125R_H^2 + j(2 - 0,125R_H^2)}{0,25 + 0,125^2R_H^2}.$$

По условию  $Z_{1ВХ} = R_{1ВХ}$ , следовательно,  $I_m\{Z_{1ВХ}\} = 0$ , т.е.

$$\frac{2 - 0,125R_H^2}{0,25 + 0,125^2R_H^2} = 0.$$

Откуда  $R_H = 4 \text{ Ом}$ .

5.7.

1. Определяем модуль и аргумент входного сопротивления ЧП при прямом х.х.:

$$Z_{1x} = \frac{U_{1x}}{I_{1x}} = \frac{10}{0,7} = 14,1 \text{ Ом};$$

$$\varphi_{1x} = \arccos \frac{P_{1x}}{U_{1x} I_{1x}} = \arccos \frac{5,0}{10 \cdot 0,7} = \arccos 0,707 = 45^\circ;$$

$$\dot{Z}_{1x} = 14,1 e^{-j45^\circ} = (10 - j10) \text{ Ом}.$$

Аналогично находим

$$Z_{1k} = 10 - j20 = 22,4 e^{-j63^\circ 30'} \text{ Ом};$$

$$Z_{2x} = j10 = 10 e^{j90^\circ} \text{ Ом}.$$

2. Используя соотношение между параметрами х.х. и к.з., находим  $Z_{2k}$ :

$$Z_{2k} = 15,81 e^{-j71^\circ 30'} = (5 + j15) \text{ Ом}.$$

3. По формулам, приведенным в табл. 5.3, находим коэффициенты ЧП: по вычисленным параметрам х.х. и к.з.:

$$A_{11} = \sqrt{\frac{Z_{1x} Z_{1k}}{Z_{2k} (Z_{1x} - Z_{1k})}} = \sqrt{\frac{14,1 e^{-j45^\circ} \cdot 22,4 e^{-j63^\circ 30'}}{15,81 e^{-j71^\circ 30'} (10 - j10 + j20)}} = \pm(1 + j);$$

$$A_{12} = A_{11} Z_{2k} = \pm(1 + j)(5 + j15) = \pm 22,4 e^{j126^\circ 30'} \text{ Ом};$$

$$A_{21} = \frac{A_{11}}{Z_{1x}} = \frac{\pm(1 + j)}{10 - j10} = \pm 0,1 \text{ Ом};$$

$$A_{22} = \frac{A_{12}}{Z_{1k}} = \frac{\pm 22,4 e^{j126^\circ 30'}}{22,4 e^{-j63^\circ 30'}} = \pm(-1).$$

4. Определим параметры Т-образной схемы замещения

$$Z_{0T} = \frac{1}{A_{21}} = \frac{1}{\pm j0,1} = \pm j10 \text{ Ом};$$

$$Z_{1T} = \frac{A_{11} - 1}{A_{21}} = \frac{\pm(1 + j) - 1}{\pm j0,1} = [10; (-10 - j20)] \text{ Ом};$$

$$Z_{2T} = \frac{A_{22} - 1}{A_{21}} = \frac{\pm(-1) - 1}{\pm j0,1} = (j20; 0) \text{ Ом}.$$

5. Т-образная схема замещения, соответствующая верхнему знаку полученных параметров, представлена на рис. 5.13. Схему, соответствующую нижнему знаку, в параметрах реализовать невозможно, так как активное сопротивление в левом плече схемы на рис. 5.13 должно быть отрицательным ( $Z_{1T} = -10 - j20$ ) Ом.

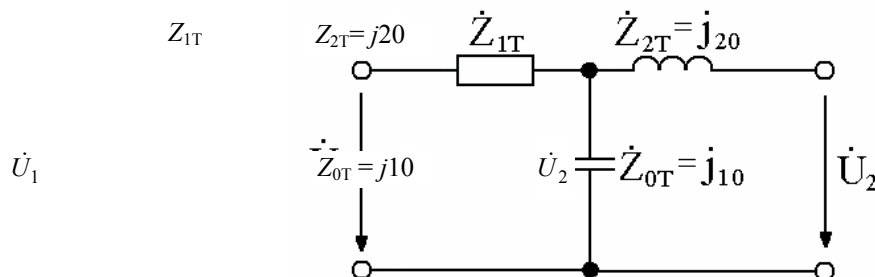


Рис. 5.13  
5.8.

$$\dot{Z}_{1c} = \dot{Z}_{2c} = Z_c = 14,95 e^{-j31^\circ 45'} \text{ Ом};$$

$$\gamma = \ln 2,9 e^{j0,9}; \quad \alpha = 1,06 \text{ Нп}; \quad \beta = 51^\circ 45'$$

5.9. Данные взять из решенной задачи 5.8

$$\dot{I}_1 = 0,8e^{j31^\circ 45'} \text{ А}; S_1 = 9,6 \text{ В}\cdot\text{А}; \dot{U}_2 = 4,1e^{j51^\circ 45'} \text{ В};$$

$$I_2 = 0,28e^{-j20^\circ} \text{ А}; S_2 = 1,15 \text{ В}\cdot\text{А}.$$

5.10.

**Первый способ.** Использовать коэффициенты ЧП в форме  $\|A\|$ , найденные в задаче 5.5.

**Второй способ.** Использовать параметры х.х. и к.з., которые были ранее найдены в задаче 5.4:

$$\dot{Z}_{1c} = 1,78e^{-j54^\circ 15'} \text{ Ом}; \dot{Z}_{2c} = 1,26e^{-j80^\circ 48'} \text{ Ом}; \gamma = \ln 2,68e^{-j72^\circ 35'};$$

$$\alpha = 0,985 \text{ Нп}; \beta = -1,27 \text{ рад}.$$

5.11.

1. Найдем коэффициенты ЧП, исходя из следующих уравнений:

$$Z_{1\text{вх}} = \frac{A_{11}Z_{\text{н}} + A_{12}}{A_{21}Z_{\text{н}} + A_{22}}; \quad (5.11)$$

$$Z_{2\text{вх}} = \frac{A_{22}Z_0 + A_{12}}{A_{21}Z_0 + A_{11}}; \quad (5.12)$$

$$A_{11} = A_{22}; \quad (5.13)$$

$$A_{12}A_{21} = 1. \quad (5.14)$$

Уравнение (5.11) отражает условие согласования внутреннего сопротивления генератора  $Z_0 = 1 \text{ Ом}$  с входным сопротивлением ЧП, нагруженного сопротивлением  $Z_{\text{н}} = 25 \text{ Ом}$ .

Уравнение (5.12) отражает условие согласования нагрузочного сопротивления  $Z_{\text{н}} = 25 \text{ Ом}$  с входным сопротивлением ЧП со стороны вторичных зажимов при подключении к первичным зажимам сопротивления  $Z_0 = 1 \text{ Ом}$ .

Уравнение (5.13) выражает условие симметрии ЧП, а (5.14) – связь между коэффициентами.

Решая совместно уравнения (5.11) – (5.14), получим:

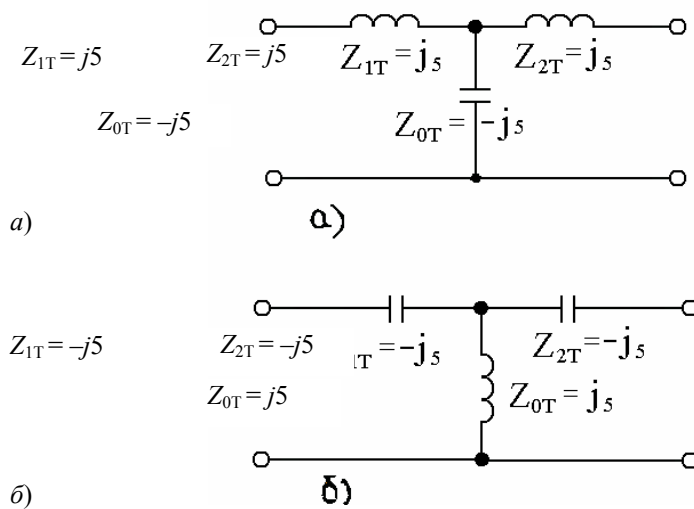
$$A_{11} = A_{22} = 0; \quad A_{12} = -\frac{1}{A_{21}} = \pm j5 \text{ Ом}.$$

2. Определяем комплексные сопротивления Т-образной схемы замещения:

$$Z_{0\text{T}} = \frac{1}{A_{21}} = \pm j5 \text{ Ом}; \quad 1 + \frac{Z_{2\text{T}}}{Z_{0\text{T}}} = A_{22}; \quad 1 + \frac{Z_{2\text{T}}}{Z_{0\text{T}}} = A_{22};$$

$$Z_{2\text{T}} = Z_{1\text{T}} = -1 \cdot Z_{0\text{T}} = \pm j5 \text{ Ом}.$$

Так как сопротивления элементов схемы оказались реактивными, то эта схема может быть реализована двумя способами (рис. 5.14).



**Рис. 5.14**

3. Мощность нагрузки, подключенной непосредственно к генератору:

$$P_{\text{н}}' = I^2 R_{\text{н}} = \left( \frac{13}{1+25} \right)^2 \cdot 25 = 6,25 \text{ Вт}.$$

4. Для определения мощности нагрузки, подключенной через согласующий ЧП, необходимо предварительно найти  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ :

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{Z_0 + Z_{\text{вх}}} = \frac{13}{1+1} = 6,5 \text{ A};$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{Z_{0T}}{Z_{0T} + Z_{2T} + Z_{\text{н}}} = 6,5 \frac{-j5}{-j5 + j5 + 25} = -j1,3 \text{ A};$$

$$P_{\text{н}} = \dot{I}_2^2 R_{\text{н}} = 1,3^2 \cdot 25 = 42,25 \text{ Вт}.$$

5.12. Для передачи большей мощности от генератора в нагрузку требуется, чтобы входное сопротивление идеального трансформатора с подключенным к вторичной обмотке нагрузочным сопротивлением  $Z_{\text{н}}$  было равно сопряженному комплексу внутреннего сопротивления генератора.  $n = 1/10$ .

5.13.

а)  $A_{11} = -2 + j$ ;  $A_{12} = (-2 - j) \text{ Ом};$   
 $A_{21} = -1 \text{ Ом};$   $A_{22} = (-1 - j).$

б)  $A_{11} = (-3 - j2)$ ;  $A_{12} = -j2 \text{ Ом};$   
 $A_{21} = (-6 + j2) \text{ Ом};$   $A_{22} = (-3 - j2).$

в)  $A_{11} = (-3 - j2)$ ;  $A_{12} = (-2 + j2) \text{ Ом};$   
 $A_{21} = (2 - j4) \text{ Ом};$   $A_{22} = (-3 - j2).$

5.14.

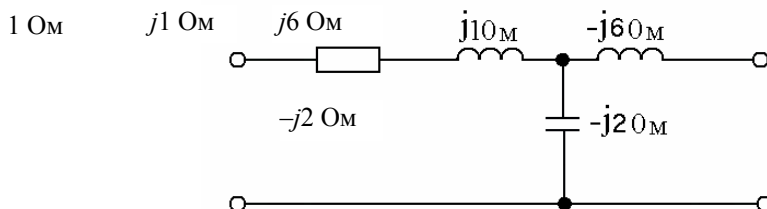


Рис. 5.15

5.15.

$$A_{11} = 1,41e^{j45^\circ}; \quad A_{12} = (-2 + j4) \text{ Ом};$$

$$A_{21} = j0,5 \text{ Ом}; \quad A_{22} = -1.$$

5.16. Составим схему эквивалентного ЧП (рис. 5.16)

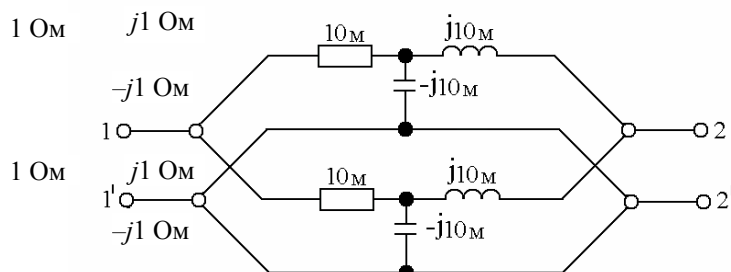


Рис. 5.16

При параллельном соединении ЧП используется форма  $\|Y\|$  уравнений ЧП. Матрица эквивалентного ЧП  $\|Y_3\|$  равна сумме матриц составных ЧП.

$$\|Y_3\| = \|Y'\| + \|Y''\|.$$

Матрицы  $\|Y'\|$  и  $\|Y''\|$  получим из матрицы  $\|A\|$  по формулам, приведенным в табл. 5.1,

$$\|Y'\| = \|Y''\| = \begin{vmatrix} \frac{A_{22} - |A|}{A_{12}} & \frac{-|A|}{A_{12}} \\ 1 & \frac{A_{11}}{A_{12}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{-1+j2} & \frac{-1}{-1+j2} \\ -1 & \frac{1+j2}{-1+j2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,2 + j0,4 & 0,2 + j0,4 \\ 0,2 + j0,4 & 0,2 - j0,6 \end{vmatrix}.$$

Матрица эквивалентного ЧП

$$\|Y_3\| = \|Y'\| = \|Y''\| = \begin{vmatrix} 0,4 + j0,8 & 0,4 + j0,8 \\ 0,4 + j0,8 & 0,4 - j1,2 \end{vmatrix}$$

Переходим к матрице формы  $\|A_3\|$

$$\|A_3\| = \begin{vmatrix} \frac{-Y_{22}}{|-1|} & \frac{1}{Y_{21}} \\ -1 & \frac{-Y_{11}}{Y_{21}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-0,4 + j1,2}{-0,4 + j0,8} & \frac{-1}{-0,4 + j0,8} \\ -(0,4 + j0,8)(0,4 - j1,2) + (0,4 + j0,8)^2 & \frac{-0,4 - j0,8}{0,4 + j0,8} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + j & -0,5 + j \\ j2 & -1 \end{vmatrix}$$

*Проверка.*  $A_{11}^3 A_{22}^3 - A_{12}^3 A_{21}^3 = (1+j)(-1) - j2(-0,5+j) = 1$ .

При параллельном соединении двух одинаковых ЧП коэффициенты  $A_{11}$  и  $A_{22}$  не изменяются, а коэффициенты  $A_{12}$  и  $A_{21}$  изменяются в два раза, причем  $A_{12}$ , имеющий размерность сопротивления, уменьшается в два раза, а  $A_{21}$ , имеющий размерность проводимости, увеличится в два раза.