

**ДИФРАКЦИЯ И ФОКУСИРОВКА
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

Издательство ТГТУ

Министерство образования Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

**ДИФРАКЦИЯ И ФОКУСИРОВКА
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**

Методические указания для студентов 2 курса
дневного отделения специальности 200800

Тамбов
Издательство ТГТУ
2003

УДК 537.86(076)
ББК В3я73
М758

Утверждено редакционно-издательским советом университета

Рецензент

Кандидат педагогических наук, доцент

В.П. Плотников

М758 Дифракция и фокусировка электромагнитных волн: Метод. указания / Н.Я. Молотков, О.В. Ломакина. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. 32 с.

Изложен метод зон Френеля для объяснения дифракционных явлений и дается углубление этого метода при переходе к субзонам. Дается приближенная и строгая теория фокусировки волн, как с помощью вогнутых зеркал, так и с помощью линз. Теоретические выводы иллюстрируются наглядными опытами по фокусировке в сантиметровом диапазоне радиоволн.

Предназначены для студентов 2 курса дневного отделения специальности 200800.

УДК 537.86(076)

ББК В3я73

© Тамбовский государственный
технический университет
(ТГТУ), 2003

Учебное издание

ДИФРАКЦИЯ И ФОКУСИРОВКА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

Методические указания

**Молотков Николай Яковлевич,
Ломакина Ольга Владимировна**

Редактор В.Н. Митрофанова

Компьютерное макетирование Е.В. Кораблевой

Подписано к печати 30.06.2003

Формат 60 × 84/16. Бумага газетная. Печать офсетная

Объем: 1,86 усл. печ. л.; 1,9 уч.-изд. л.

Тираж 150 экз. С. 448

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

1 Понятие о дифракции. Принцип Гюйгенса-Френеля

Дифракция – это явление, возникающее при прохождении света в среде с резкими неоднородностями (щели, отверстия и т.д.) и приводящее к отклонению от законов геометрической оптики. В частности, дифракция приводит к огибанию световыми волнами различных препятствий и проникновению света в область геометрической тени. Для наблюдения дифракции необходимы определенные условия. Это обусловлено тем, что масштабы дифракции сильно зависят от соотношения размеров препятствия и длины волны. Утверждение, что если объект дифракции сравним с длиной волны, то явление дифракции наблюдается, а если объект значительно превышает длину волны, то дифракция наблюдаться не будет, не совсем верно. Масштаб дифракции зависит не только от размеров объекта, но и от расстояния от объекта до экрана. Известно, что четкой тени никогда не наблюдается. Критерием наличия или отсутствия дифракции является волновой параметр

$$P = \frac{\sqrt{r\lambda}}{D}, \quad (1)$$

где D – размер препятствия; λ – длина волны; r – расстояние от препятствия до точки наблюдения дифракционной картины. Если $P < 1$, то дифракционные эффекты слабые и можно применять законы геометрической оптики; если $P \geq 1$, то дифракция присутствует, что приводит к нарушению законов геометрической оптики.

Известно, что наличие дифракции объясняется волновыми свойствами света. Однако известный из курса физики принцип Гюйгенса не позволяет объяснить не только дифракционные явления (ибо в нем ничего не говорится об интенсивности вторичных волн), но и образование геометрической тени, то есть прямолинейное распространение света. Для объяснения дифракции Френель дополнил принцип Гюйгенса постулатом об интерференции вторичных волн. Усовершенствованный таким образом принцип получил название принципа Гюйгенса-Френеля. Поясним его физическую сущность.

Пусть имеется источник света, и волновая сферическая поверхность в некоторый момент времени t . Выберем произвольную точку M наблюдения. Согласно принципу Гюйгенса-Френеля, все вторичные когерентные волны, идущие от волновой поверхности в точку M наблюдения, интерферируют в этой точке (рис. 1).

Разобьем волновую поверхность на элементарные участки dS_i . Каждый элементарный участок dS_i является источником вторичных волн с амплитудой dE_i и вносит свой «вклад» в результирующую амплитуду. Однако, «вклад» вторичных неравнозначен. Амплитуда dE_i

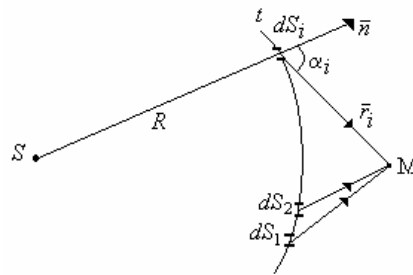


Рис. 1

колебаний в точке наблюдения M . Амплитуда dE_i колебаний вторичных волн, приходящих в точку M , зависит, во-первых, от площади элементарных участков ΔS_i , при этом амплитуда вторичной волны пропорциональна площадке: $dE_i \sim \Delta S_i$; во-вторых, от угла α_i между нормалью \bar{n} к волновой поверхности и направлением \bar{r}_i в точку наблюдения (dE_i уменьшается с ростом α_i). Результат интерференции вторичных волн в точке наблюдения M зависит не только от амплитуд dE_i вторичных волн, но и от фазовых соотношений между ними, т.е. от величины фазы $k\bar{r}_i$ каждой вторичной волны, где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число. Таким образом, от каждого участка dS_i волновой поверхности в точку M приходит колебание с амплитудой

$$dE = f(\alpha)E_0 \sin(\omega t - kr)dS, \quad (2)$$

где E_0 – амплитуда колебаний в элементе dS ; ωt – фаза колебаний на волновой поверхности; kr – дополнительное изменение фазы вторичных волн при прохождении расстояния r . Коэффициент $f(\alpha)$ Френель считал убывающим при увеличении угла α , причем $f(\alpha) = 1$, если $\alpha = 0$ и $f(\alpha) = 0$, если $\alpha = 90^\circ$. Результирующее колебание E , даваемое всеми вторичными волнами в точке M может быть найдено на основе закона интерференции всех вторичных волн при учете их амплитуд и фаз

$$E_p = \int_{\sigma} f(\alpha) E_0 \sin(\omega t - kr) dS. \quad (3)$$

Выражение (3) можно считать аналитическим выражением принципа Гюйгенса-Френеля. Следует отметить, что решение задач на расчет дифракции на основе интегрального выражения (3) часто бывает затруднительно. Если дифракционная картина обладает той или иной симметрией, то интегрирование может быть заменено геометрическим или алгебраическим суммированием амплитуд вторичных волн. Впервые метод алгебраического сложения амплитуд вторичных волн предложил О. Френель. Этим методом мы и воспользуемся при расчете дифракционных картин.

2 Метод зон Френеля и доказательство прямолинейного распространения света с точки зрения волновой теории

Принцип Гюйгенса не позволяет объяснить прямолинейность распространения света. Согласно этому принципу каждую точку волнового фронта можно рассматривать как источники вторичных волн, распространяющихся по всем направлениям, в том числе и в область геометрической тени. Иначе говоря, волны должны огибать любое препятствие всегда и неясно как вообще может возникнуть сколь-нибудь четкая тень, если свет имеет волновую природу. Однако закон прямолинейного распространения света можно получить на основе принципа Гюйгенса-Френеля.

Пусть имеется точечный источник света S (рис. 2). Определим амплитуду результирующей волны, приходящей в произвольную точку M . Допустим, что в некоторый момент времени t волновая поверхность

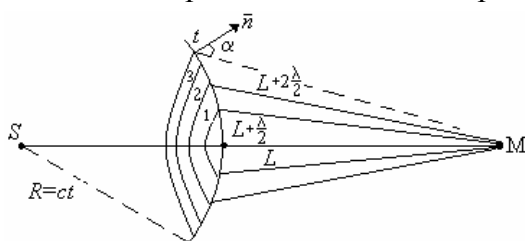


Рис. 2

радиуса $R = ct$, где c – скорость света.

Результирующая амплитуда E волн, приходящих в точку M , будет зависеть от результата интерференции всех вторичных волн, излучаемых всеми элементарными участками волновой поверхности. Непосредственное вычисление амплитуды колебаний на основе интеграла (3) весьма затруднительно. Френель предложил оригинальный метод разбиения волновой поверхности не на элементарные участки, а на достаточно большие кольцевые зоны, которые получили название зон Френеля. При этом интегрирование может быть заменено алгебраическим или геометрическим сложением. Границей первой зоны Френеля являются точки на волновой поверхности, которые отстоят от точки M на расстоянии $L + \frac{\lambda}{2}$. Границей второй зоны являются точки на волновой поверхности, которые находятся на расстоянии $L + 2\frac{\lambda}{2}$ от точки M и т.д. Допустим, что от первой центральной зоны в точку M приходит вторичная волна с амплитудой \bar{E}_1 , от второй \bar{E}_2 и т.д., тогда результирующая амплитуда колебаний определяется

$$\bar{E}_p = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3 + \dots \quad (4)$$

Разность хода волн, приходящих в точку M от любых соседних зон равна $\Delta = \frac{\lambda}{2}$; а разность фаз $\delta = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{2} = \pi$. При сложении однонаправленных противофазных колебаний модуль результирующей амплитуды равен

$$E_p = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots \quad (5)$$

Амплитуды вторичных волн E_i зависят от площади зон ΔS_i . Однако, площади всех зон, как будет показано далее, одинаковы

$$\Delta S_i = \frac{\pi RL}{R+L} \lambda, \quad (6)$$

т.е. не зависят от номера зоны. Радиусы зон Френеля можно рассчитать по формуле

$$r_i = \sqrt{\frac{RL}{R+L} i \lambda}, \quad (7)$$

где $i = 1, 2, 3 \dots$ – номер зоны Френеля.

Несмотря на то, что площади всех зон Френеля одинаковы, амплитуды вторичных волн, излучаемых ими в точку М различны, так как различные углы α_i . Из рис. 2 видно, что с ростом номера i зоны растет угол α . Следовательно, чем больше номер зоны, тем меньше амплитуда вторичной волны, которую она посылает в точку М. Поэтому можно записать

$$|E_1| > |E_2| > |E_3| > \dots > |E_i| > |E_{i+1}| > \dots \quad (8)$$

Чтобы подсчитать результирующую амплитуду колебаний, приходящих в точку М, выражение (5) запишем в виде

$$E_p = \frac{E_1}{2} + \left(\frac{E_1 - E_2 + E_3}{2} \right) + \left(\frac{E_3 - E_4 + E_5}{2} \right) + \dots \quad (9)$$

Можно считать, что:

$$E_i = \frac{E_{i-1} + E_{i+1}}{2}.$$

Тогда все скобки в выражении (9) обратятся в ноль и мы получим

$$E_p = \frac{E_1}{2}. \quad (10)$$

Амплитуда результирующей волны, приходящей от полностью открытого сферического волнового фронта, равна половине амплитуды волны, приходящей от первой зоны Френеля.

Из формулы (10) следует, что амплитуда колебаний, приходящих от одной первой зоны Френеля в два раза больше амплитуды волны приходящей от всего сферического волнового фронта:

$$E_1 = 2E_p.$$

Интенсивность волны I_1 , приходящей от первой зоны Френеля, будет в четыре раза больше интенсивности I_p волны, приходящей от полностью открытого волнового фронта

$$I_1 = 4I_p,$$

так как интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды. Эти выводы легко показать на опыте в диапазоне радиоволн. С этой целью устанавливают источник и приемник сантиметровых электромагнитных волн ($\lambda = 3,2$ см) на расстоянии $R + L = 1$ м. Между источником и приемником ставят металлический экран с круглым отверстием, радиус ($r_1 = 8,9$ см) которого равен первой зоне Френеля при $R = L = 50$ см и измеряют интенсивность I_1 волны, приходящей от первой зоны. Убрав экран, отмечают уменьшение интенсивности I принимаемой волны ($I < I_1$). Другими словами, интенсивность волны, приходящей от всего волнового фронта, меньше интенсивности волны, приходящей от первой зоны Френеля.

Таким образом, при полностью действующем волновом фронте ин-

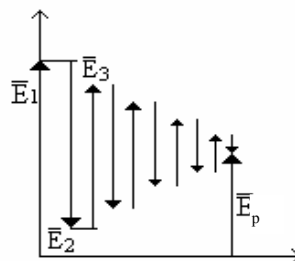


Рис. 3

тенсивность в точке наблюдения обеспечивается частью волновой поверхности, площадь которой меньше размеров первой зоны Френеля. Действие остальных зон компенсируется за счет интерференции вторичных волн. Так как радиус первой зоны Френеля достаточно мал, а ее часть дает в точке приема волну с амплитудой равной амплитуде от всего фронта, то можно считать, что свет идет от точки S к точке M по узкому «каналу», т.е. прямолинейно.

Суммирование убывающих амплитуд вторичных волн согласно формуле (5) можно осуществить на основе векторной диаграммы (рис. 3). Из полученной диаграммы, видно, что амплитуда результирующего колебания равна:

$$E_p = \frac{E_1}{2},$$

что полностью совпадает с формулой (10).

3 Расчет радиусов зон Френеля при сферическом волновом фронте

Пусть S – источник волн, а M – точка наблюдения. Отметим на волновой сферической поверхности точки, соответствующие границам i -ой зоны Френеля. Эти точки находятся на расстоянии $L + i\frac{\lambda}{2}$ от точки M . Радиус i -ой зоны равен $r_i = AB$, $OB = h_i$ – высота сегмента (рис. 4)

Рассмотрим ΔSAB и ΔABM . Из треугольника ASB

$$r_i^2 = R^2 - (R - h_i)^2 = 2Rh_i - h_i^2. \quad (11)$$

Из треугольника AMB имеем

$$r_i^2 = (L + i\frac{\lambda}{2})^2 - (L + h_i)^2 = i\lambda L - 2Lh_i. \quad (12)$$

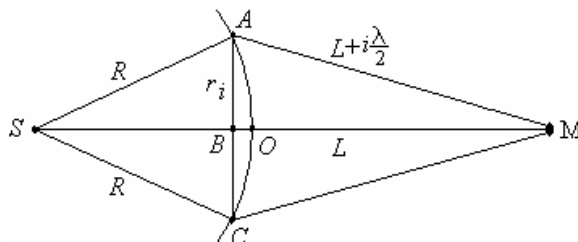


Рис. 4

Члены h_i^2 и $i^2 \frac{\lambda^2}{2}$ отбросим как величины, имеющие второй порядок малости. Из (12) найдем:

$$r_i = \sqrt{2Rh_i}. \quad (13)$$

Приравняв правые части (11) и (12), получим:

$$h_i = \frac{i\lambda L}{2(R + L)}. \quad (14)$$

Подставим (14) в (13), найдем радиус i -ой зоны Френеля для сферического фронта

$$r_i = \sqrt{\frac{RL}{R + L}} i\lambda. \quad (15)$$

Радиус первой зоны при $i = 1$ равен $r_1 = \sqrt{\frac{RL}{R + L}} \lambda$. Тогда радиус i -ой зоны равен

$$r_i = \sqrt{i} r_1. \quad (16)$$

Следовательно, для радиусов зон справедливо соотношение: $r_1 : r_2 : r_3 \dots = \sqrt{1} : \sqrt{2} : \sqrt{3} \dots$

Найдем радиусы зон Френеля для плоского волнового фронта. Запишем выражение (15) в виде

$$r_i = \sqrt{\frac{iL\lambda}{1 + \frac{L}{R}}}$$

Для плоского фронта $R \rightarrow \infty$. Тогда получим

$$r_i = \sqrt{iL\lambda} . \quad (17)$$

4 Площади зон Френеля

Боковая поверхность шарового сегмента AOC (рис. 4), которая представляет собой площадь всех i зон, начиная с первой, равна

$$S_1 + S_2 + \dots + S_i = 2\pi R h_i .$$

Учитывая формулу (14), получим

$$S_1 + S_2 + \dots + S_i = \frac{RL\pi}{R+L} i\lambda ,$$

Площадь шарового сегмента, которая включает в себя площадь всех $(i+1)$ зон, начиная с первой, равна

$$S_1 + S_2 + \dots + S_{i+1} = \frac{RL\pi}{R+L} (i+1)\lambda ,$$

Площадь i -ой зоны равна

$$\Delta S_i = \frac{RL\pi\lambda}{R+L} (i+1) - \frac{\pi\lambda RL}{R+L} i .$$

Следовательно,

$$\Delta S_i = \frac{RL}{R+L} \pi\lambda . \quad (18)$$

Площадь i -ой зоны не зависит от ее номера, т.е. площади всех зон одинаковы. Площадь любой зоны Френеля при плоском волновом фронте, можно найти из формулы (18), преобразовав ее к виду

$$\Delta S_i = \pi \frac{L}{1 + \frac{L}{R}} \lambda .$$

При $R \rightarrow \infty$ получим

$$\Delta S_i = \pi\lambda L .$$

Площади всех зон при плоском волновом фронте одинаковы.

5 Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске

В физике различают два вида дифракции: дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера. Если лучи, падающие на объект можно считать параллельными между собой и лучи, идущие от объекта к экра-

ну также можно считать параллельными, то такая дифракция называется дифракцией Фраунгофера. Дифракция в сходящихся или расходящихся лучах называется дифракцией Френеля.

Поставим на пути сферической световой волны непрозрачный экран с круглым отверстием (рис. 5), где S – точечный источник света. На экране, установленном на некотором расстоянии L от отверстия, наблюдается дифракционная картина, которая представляет собой систему светлых и темных колец. При радиуса отверстия r , в центре наблюдается как светлое, так и темное пятно.

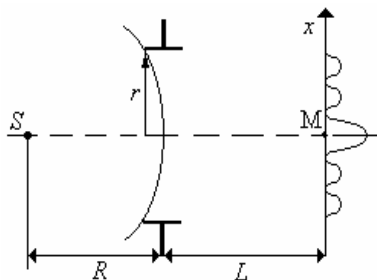


Рис. 5

чем, в зависимости от расстояний R, L дифракционной картины может

Разобьем волновую поверхность на зоны Френеля. Так как отверстие имеет конечный радиус, то количество зон Френеля, укладывающихся в отверстии, конечно. Пусть число зон Френеля равно m . Согласно формуле (5) амплитуда результирующего колебания в центре M дифракционной картины равна

$$E_p = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots \pm E_m. \quad (19)$$

Амплитуда E_m берется со знаком «+», если m – нечетное число и со знаком «-», если m четное.

Рассмотрим два частных случая:

а) Допустим, что в отверстии укладывается нечетное число зон Френеля. Тогда получим

$$E_p = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots + E_m,$$

или

$$E_p = \frac{E_1}{2} + \left(\frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2} \right) + \dots + \frac{E_m}{2}.$$

Учитывая, что члены в скобках равны нулю, получим

$$E_p \approx \frac{E_1}{2} + \frac{E_m}{2}.$$

Если число m зон невелико, можно считать, что $E_1 \approx E_m$. Следовательно, в центре дифракционной картины будет светлое пятно:

$$E_p \approx E_1.$$

Таким образом, если в отверстии укладывается нечетное число зон Френеля, то в центре дифракционной картины наблюдается светлое пятно.

На рис. 6 показано геометрическое сложение амплитуд вторичных волн при $m = 3$.

б) Пусть в отверстии укладывается четное число зон Френеля. Выражение (19) принимает вид

$$E_p = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + \dots - E_m,$$

или

$$E_p = \frac{E_1}{2} + \left(\frac{E_1}{2} - E_2 + \frac{E_3}{2} \right) + \dots + \frac{E_{m-1}}{2} - E_m,$$

Откуда найдем:

$$E_p = \frac{E_1}{2} + \frac{E_{m-1}}{2} - E_m.$$

Если число зон невелико, то все амплитуды примерно одинаковы и $E_p = 0$. Таким образом, если в отверстии укладывается четное число зон, то в центре дифракционной картины наблюдается темное пятно. На рис. 7 показана векторная диаграмма сложения амплитуд вторичных волн при $m = 4$.

Справедливость полученных выводов может быть доказана экспериментально в опытах с радиоволнами. Для этого источник и приемник радиоволн располагают на расстоянии одного метра друг от друга. Между ними устанавливают металлический экран с ирисовой диафрагмой, с помощью которой

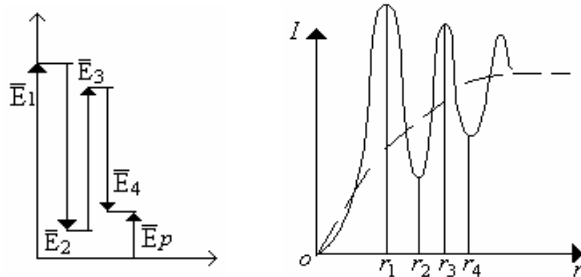


Рис. 7

Рис. 8

радиус отверстия можно изменять от 0,5 до 20 см. При увеличении радиуса отверстия от минимального его значения наблюдается увеличение интенсивности принимаемого сигнала. Этот рост продолжается до тех пор, пока в отверстии не будет открыта первая зона Френеля. При дальнейшем увеличении радиуса отверстия в приемник будут приходить вторичные волны также и от второй зоны. Их интерференция с ранее пришедшими волнами от первой зоны вызовет уменьшение интенсивности принимаемых волн. Когда отверстие откроет две первые зоны Френеля, то их действие практически полностью уничтожат друг друга из-за интерференции противофазных колебаний и принимаемый сигнал будет минимален по интенсивности. При дальнейшем увеличении размеров отверстия, действия двух первых зон Френеля в точке приема останутся скомпенсированными, а интенсивность принимаемого сигнала создается действием третьей зоны Френеля. Когда число открытых зон будет равно $m = 3$, интенсивность принимаемого сигнала будет такой же, как если была бы открыта только третья зона. Центр дифракционной картины будет иметь достаточную интенсивность. Когда число открытых зон будет равно $m = 4$, интенсивность в центре дифракционной картины будет минимальная и т.д. На рис. 8 показана зависимость интенсивности I принимаемого сигнала в радиодиапазоне от радиуса отверстия. По полученному графику можно опытным путем найти радиусы r_i зон Френеля и интенсивность волн, приходящих от каждой зоны. На рис. 9 показаны дифракционные картины, наблюдаемые в световом диапазоне, когда в отверстии укладывается $m = 1$, $m = 2$, и $m = 3$ зон Френеля. Рядом с дифракционными картинами приводится различное распределение интенсивности в них.

Рассмотрим явление дифракции на круглом диске. Пусть диск закрывает m зон Френеля. Открытыми остаются зоны с номерами $m + 1$, $m + 2 \dots$. Найдем амплитуду результирующего колебания в центре дифракционной картины

$$E_p = E_{m+1} - E_{m+2} + E_{m+3} - E_{m+4} + \dots,$$

или

$$E_p = \frac{E_{m+1}}{2} + \left(\frac{E_{m+1}}{2} - E_{m+2} + \frac{E_{m+3}}{2} \right) + \dots$$

Откуда получаем

$$E_p = \frac{E_{m+1}}{2} \neq 0. \quad (20)$$

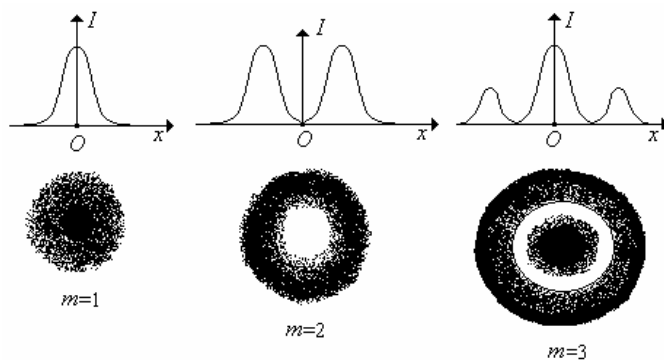


Рис. 9

Следовательно, в центре дифракционной картины даваемой диском всегда будет наблюдаться светлое пятно (пятно Пуассона). Если диск закрывает достаточно большое число зон Френеля, то чередование светлых и темных колец наблюдается лишь в очень узкой области геометрической тени. В центре же дифракционной картины наблюдается светлое пятно, но очень малых размеров. Полученные выводы

легко получить в опытах с радиоволнами. Для этого устанавливают источник и приемник волн на расстоянии одного метра друг от друга. Измеряют интенсивность принимаемого сигнала I_0 . Устанавливают между источником и приемником металлический диск радиусом $r_1 = 8,9$ см, который закрывает первую зону Френеля, и прямолинейное распространение волн от источника к приемнику становится невозможным. Несмотря на это, приемник регистрирует сигнал с интенсивностью I , которая не равна нулю.

6 Зонные пластинки, работающие на отражение и фокусировка волн

Традиционно фокусирующее действие вогнутого зеркала объясняется законами геометрической оптики. Однако при изучении вопросов дифракции Френеля целесообразно в качестве примера объяснить фокусирующее действие вогнутого зеркала с точки зрения волновой теории. При этом теоретические выводы могут быть экспериментально подтверждены наглядными опытами в сантиметровом диапазоне радиоволн ($\lambda = 3,2$ см).

Пусть источник 1 и приемник 2 радиоволн находится, соответственно, на расстояниях R и f от плоского зеркала, в качестве которого может быть использован металлический лист в форме круга диаметром 44 см (рис. 10). Разобьем мысленно плоскость поверхности зеркала на кольцевые зоны Френеля, радиусы которых могут быть рассчитаны по формуле (15)

$$r_i = \sqrt{i\lambda \frac{Rf}{R+f}},$$

или при $R = f$ получим

$$r = \sqrt{\frac{f\lambda i}{2}}, \quad (21)$$

где i – номер зоны.

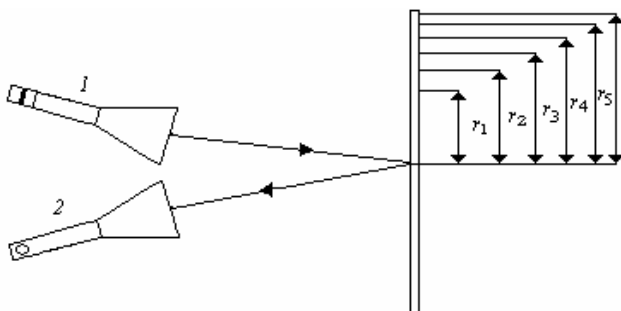


Рис. 10

При $f = 50$ см и $\lambda = 3,2$ см радиусы зон имеют значения: $r_1 = 8,9$ см; $r_2 = 12,6$ см; $r_3 = 15,4$ см; $r_4 = 17,8$ см; $r_5 = 20$ см; $r_6 = 21,9$ см. Очевидно, что в рассматриваемом плоском зеркале укладывается шесть зон Френеля. Несмотря на равенство площадей зон, амплитуды вторичных волн, отраженных от кольцевых зон и фиксируемых приемником, различны. Так как с увеличением номера i зоны увеличивается угол α_i между нормалью к зеркалу и направлением в точку приема волн, то амплитуды вторичных волн монотонно убывают: $E_1 > E_2 > E_3 > \dots$. Учитывая, что разность хода волн, отраженных от любых двух соседних зон, равна $\Delta = \frac{\lambda}{2}$, а разность фаз между ними равна $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \pi$, то амплитуда результирующей волны, отраженной от зеркала диаметром 44 см, согласно интерференционного принципа Гюйгенса-Френеля равна:

$$E_{p1} = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + E_5 - E_6. \quad (22)$$

Как было показано в § 2, при бесконечно большом числе зон $E_{p1} = \frac{E_1}{2}$. Векторная диаграмма амплитуд вторичных волн, отраженных от плоского зеркала показана на рис. 11.

Возникает проблема: как можно увеличить амплитуду волны, отраженной от зеркала? Анализируя выражение (22), студенты могут предложить два способа решения задачи. Во-первых, в плоском зеркале можно оставить лишь отражающие нечетные зоны, удалив из него отражающие четные зоны. Полученная таким образом пластинка на-

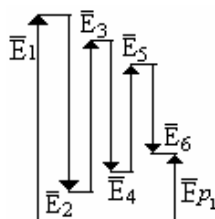


рис.11

зывается «амплитудной зонной пластинкой, работающей на отражение» (рис. 12).

Следовательно, амплитудная зонная пластинка будет обеспечивать в точке приема отраженную волну с амплитудой:

$$E_{p2} = E_1 + E_3 + E_5. \quad (23)$$

Векторная диаграмма амплитуд вторичных волн, даваемых амплитудной зонной пластинкой, показана на



Рис. 12

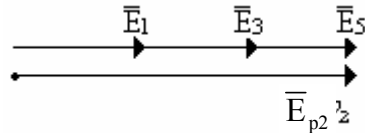


Рис. 13

рис. 13. Опыт в сантиметровом диапазоне волн подтверждает, что отражающее действие амплитудной зонной пластинки больше отражающего действия плоского зеркала, т.е. $E_{p2} > E_{p1}$.

Во-вторых, из формулы (22) следует, что между вторичными волнами, отраженными от соседних четных и нечетных зон имеется разность фаз $\varphi = \pi$, или геометрическая разность хода $\Delta = \frac{\lambda}{2}$. Поэтому, вместо того чтобы исключать действие четных зон, для увеличения амплитуды отраженной волны необходимо фазы вторичных волн от четных зон изменить на π по сравнению с фазами волн, отраженных от нечетных зон. Другими словами, необходимо компенсировать разность хода $\Delta = \frac{\lambda}{2}$ вторичных волн от соседних зон. Полученная таким образом пластинка называется «фазовой зонной пластинкой, работающей на отражение», или пластинкой с обращением фаз. Следовательно, фазовая зонная пластинка будет обеспечивать в точке приема результирующую волну с амплитудой

$$E_{p3} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 + E_6. \quad (24)$$

Векторная диаграмма амплитуд, даваемых фазовой зонной пластинкой, показана на рис. 14. Изготовить фазовую зонную пластинку можно следующим образом. Перед плоским металлическим листом диаметром 44 см в области четных зон ($i = 2, 4, 6$) устанавливают отражающие металлические кольцевые пластины соответствующих четных зон на расстоянии $d = \frac{\Delta}{2} = \frac{\lambda}{4}$ от него и закрепляют их с помощью шпилек с цилиндрическими прокладками высотой $d = 8$ мм (рис. 15).

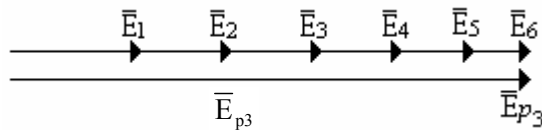


Рис. 14

Таким образом, в фазовой зонной пластинке, работающей на отражение, отражающие поверхности четных зон оказываются сдвинутыми пространственно по отношению к отражающим поверхностям нечетных зон на расстояние $d = \frac{\lambda}{4}$. Опыт в



сантиметровом диапазоне радиоволн показывает, что фокусирующее действие фазовой зонной пластинки больше фокусирующего действия амплитудной зонной пластинки, т.е. $E_{p3} > E_{p2}$ примерно в два раза.

Рис. 15

От фазовой зонной пластинки перейдем к ступенчатой фазовой зонной пластинке, работающей на отражение (рис. 16).

Изготавливается она следующим образом. Перед плоским металлическим листом диаметром 44 см в области второй зоны ($i = 2$) устанавливают соответствующее отражающее металлическое кольцо на расстоянии $d_2 = \frac{\lambda}{4} = 8$ мм от листа и жестко закрепляют его; в области третьей зоны ($i = 3$) перед листом уста-



Рис. 16

навливают соответствующее отражающее металлическое кольцо на расстоянии $d_3 = 2\frac{\lambda}{4} = 16$ мм и т.д. Отражающее кольцо i -ой зоны устанавливают от листа на расстоянии

$$d_i = (i-1)\frac{\lambda}{4}. \quad (25)$$

Студенты часто считают, что фокусирующее действие ступенчатой фазовой зонной пластинки (рис. 16) больше, чем фазовой зонной пластинки (рис. 15), так как она напоминает вогнутое зеркало. Однако, их фокусирующие действия одинаковы. Объясняется это тем, что ступенчатая фазовая пластинка изменяет фазы вторичных волн от четных зон на нечетное число π , а фазы вторичных волн от нечетных зон на четное число π . Таким образом, фазовые соотношения вторичных волн от фазовой зонной пластинки и от ступенчатой фазовой зонной пластинки одинаковы. Это также подтверждается опытами в сантиметровом диапазоне волн.

Очевидно, что ступенчатая фазовая зонная пластинка не обеспечивает полной фокусировки волн, так как вторичные волны, приходящие в точку приема от противоположных краев одной и той же зоны Френеля имеют разность фаз, равную π . Вследствие этого вторичные волны от элементарных кольцевых зон каждой зоны Френеля в точке приема имеют не одинаковые фазы, различны у них и оптические пути, то есть они не таутохронны. Полное фокусирующее действие можно обеспечить, если ступенчатое изменение отражающей поверхности в зонной пластинке заменить на плавное непрерывное изменение, то есть перейти к вогнутому зеркалу. Форму поверхности собирающего зеркала можно найти, если из выражений (21) и (25) исключить длину волны λ и считать, что при большом числе зон Френеля $i \approx (i-1)$. Следовательно, мы получаем уравнение параболы:

$$r^2 = 2fd, \quad (26)$$

где f – фокусное расстояние вогнутого зеркала.

Таким образом, для исключения сферической аберрации поверхность собирающего зеркала должна быть параболоидом вращения. Однако, так как формула (21) получена приближенно, ибо не учитывались члены второго порядка малости $i^2\Delta^2$, то поверхность собирающего зеркала, не обладающего сферической аберрацией должна быть гиперболоидом вращения.

Из формулы (26) следует, что фокусное расстояние зонной пластинки равно

$$f = \frac{2r_i^2}{\lambda i}. \quad (27)$$

Так как в данную формулу входят номера i зон, то часто считают, что зонная пластинка имеет несколько фокусов. Однако радиусы зон Френеля могут быть рассчитаны по формуле

$$r_i = \sqrt{i} r_1, \quad (28)$$

где r_1 – радиус первой зоны. Подставляя выражение (28) в формулу (27) найдем

$$f = \frac{2r_1^2}{\lambda}.$$

Так как радиус первой зоны Френеля зависит при данной длине волны, лишь от расстояний источника и приемника до зонной пластинки, то и фокусное расстояние ее определяется этими параметрами.

7 Зонные пластинки, работающие на прохождение и фокусировка волн

Пусть имеется источник волн и приемник, между которыми расположен экран с круглым отверстием. Разобьем волновую сферическую поверхность в области отверстия на кольцевые зоны Френеля. Пусть число зон, которые укладываются в отверстие, равно $m = 5$. Тогда амплитуда результирующей волны, регистрируемая приемником, согласно принципа Гюйгенса-Френеля будет равна:

$$E_{p1} = E_1 - E_2 + E_3 - E_4 + E_5.$$

Возникает проблема: как можно увеличить амплитуду волны, регистрируемую приемником? Существует два различных способа решения этой проблемы. Во-первых, исключим действие, например, четных зон. Это можно сделать с помощью, так называемой амплитудной зонной пластинки, которая для световых волн представляет собой стеклянную пластинку, на которой нанесено непрозрачное покрытие так, что оно закрывает все четные зоны Френеля и оставляет открытыми все нечетные кольцевые зоны. Более просто амплитудную зонную пластинку можно изготовить для радиоволн. Она состоит из металлических колец, закрывающих четные зоны Френеля (рис. 17). Радиусы зон Френеля рассчитаны по формуле (15) при $R = L = 0,5$ м и $\lambda = 3,2$ см, $i = 1; 2; 3 \dots$. Для проведения опыта устанавливают источник и приемник радиоволн на расстоянии $R + L = 100$ см. Измеряют интенсивность волн, проходящих через отверстие, содержащее $m = 6$ зон Френеля. Установив между источником и приемником волн амплитудную зонную пластинку, отмечают увеличение интенсивности, принимаемых волн. Из формулы (29) следует, что результирующее колебание, приходящее от амплитудной зонной пластинки, равно

$$E_{p2} = E_1 + E_3 + E_5. \quad (29)$$

Легко видеть, что $E_{p2} > E_{p1}$. Векторная диаграмма сложения колебаний, даваемых амплитудной зонной пластинкой, будет аналогична рис. 13.

Во-вторых, еще большее увеличение амплитуды можно получить с помощью фазовой зонной пластинки, в которой колебания нечетных зон не уничтожаются, как это имело место ранее, а изменяют фазу на π . Такое изменение фазы четных зон можно достичь, если площади этих зон покрыть прозрачным диэлектриком соответствующей толщины. В фазовой зонной пластинке для радиоволн (рис. 18) четные зоны покрываются металлоленточной структурой при расстоянии между лентами $a = 20$ мм. При $\lambda = 3,2$ см эквивалентный показатель преломления металлоленточной структуры $n = \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2} = 0,6$. Чтобы обеспечить изменение фаз четных зон на π , она покрывается искусственным диэлектриком, толщина d которого удовлетворяет условию

$$d(1-n) = \frac{\lambda}{2}. \quad (30)$$

Результирующее колебание, приходящее от всех зон фазовой зонной пластинки равно:

$$E_{p3} = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5.$$



Рис. 17

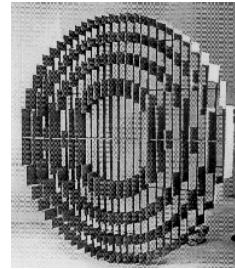


Рис. 18

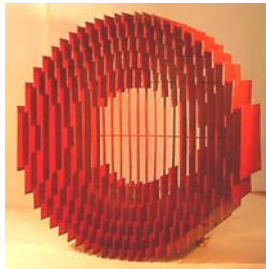


Рис. 19



Рис. 20

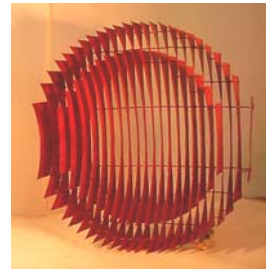


Рис. 21

Легко видеть, что $E_{p3} > E_{p2}$. Векторная диаграмма сложения колебаний, даваемых фазовой зонной пластинкой, будет аналогична рис. 14.

Опыт показывает, что интенсивность волны, приходящей от фазовой зонной пластинки, больше, чем в случае амплитудной зонной пластинки.

Рассмотрим действие ступенчатой фазовой зонной пластинки (рис. 19) для радиоволн, в которой центральная зона открыта, вторая зона покрыта искусственной средой толщиной d , удовлетворяющей условию (30), третья зона покрыта металлоленточной структурой толщиной $2d$, четвертая имеет толщину $3d$ и т.д. Часто считают, что ступенчатая фазовая зонная пластинка обеспечивает еще больше увеличение амплитуды принимаемых волн, так как она имеет форму близкую к линзе, однако, ее действие такое же, как и у фазовой зонной пластинки (рис. 18), что подтверждается опытом. Объясняется это тем, что в ступенчатой фазовой зонной пластинке фазы четных зон изменяются слоем диэлектрика на нечетное число π , а фазы нечетных зон изменяются на четное число π . Следовательно, фазовые соотношения вторичных волн в фазовой зонной пластинке и ступенчатой фазовой зонной пластинке одинаковы.

Еще большее увеличение амплитуды принимаемой волны можно получить, если от ступенчатой фазовой зонной пластинки перейти к непрерывному изменению ее толщины, т.е. к собирающей линзе. Металлоленточная собирающая линза с эквивалентным показателем преломления $n < 1$ для сантиметровых электромагнитных волн показана на рис. 20. Действие этой линзы сводится к тому, что все вторичные волны приходят в точку наблюдения, которая является фокусом, в одинаковой фазе. Другими словами, все оптические пути вторичных волн одинаковы. Лучи, собираемые в фокусе, являются таутохронными, то есть время распространения для них одинаково.

Можно показать, что фокусирующее действие линзы не зависит от ее толщины. Из линзы можно удалить кольцевые слои, которые изменяют фазы вторичных волн на четное число π , т.е. на $2\pi, 4\pi, \dots$ толщина удаленных слоев должна удовлетворять условию: $d(1-n) = \lambda; d(1-n) = 2\lambda$ и т.д. Линза, в которой удалены подобные слои, называется зонированной (рис. 21). Фокусирующее действие зонированной и обычной толстой линз с одинаковыми фокусными расстоянием одинаковы.

8 Углубление метода зон Френеля

Метод зон Френеля является приближенным методом для расчета дифракционных картин. Объясняется это следующим. Считается что волны, приходящие от всех точек любой зоны Френеля имеют одинаковую фазу в точке наблюдения. Но это не так. Известно, что волны, приходящие от краев зоны в точку наблюдения, имеют разность хода $\frac{\lambda}{2}$, т.е. между ними имеется разность фаз π .

Пусть имеется точечный источник света S и точка наблюдения M . Возьмем сферическую волновую поверхность и построим первую зону Френеля радиусом r_1 (рис. 22).

Волны, приходящие от разных точек волновой поверхности первой зоны в точку M , имеют различные фазы. Разобьем волновую поверхность первой зоны на достаточно малые кольцевые участки, называемые субзонами. Пусть границы первой субзоны находятся от точки M на расстоянии Δ , которое удовлетворяет условию $\Delta < \frac{\lambda}{2}$. Например, при $\Delta = \frac{\lambda}{12}$, или $\Delta = \frac{\lambda}{2 \cdot 6}$ получим

$$\Delta = \frac{\lambda}{2N}.$$

Откуда видно, что первая зона будет разбита на $N = 6$ кольцевых субзон, так как $6\Delta = \frac{\lambda}{2}$. Разность фаз волн, приходящих в точку M от двух любых соседних субзон равна

$$\varphi = k\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{12} = \frac{\pi}{6}.$$

Пусть амплитуды волн, приходящих от первой, второй, третьей и т.д. субзон равны

$$E_{1_0}; E_{2_0}; E_{3_0}; \dots; E_{6_0}$$

Можно показать, что площадь всех субзон одинакова. Однако амплитуды вторичных волн с расстоянием номера субзон уменьшается, т.е.

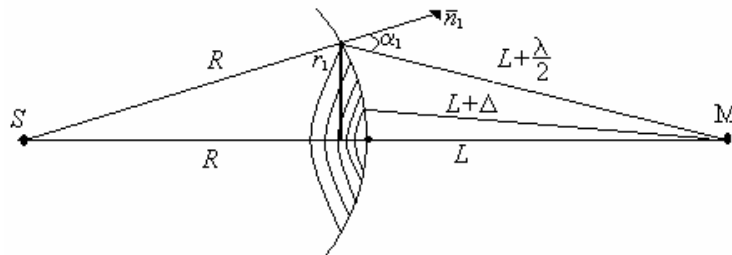


Рис. 22

$$|E_{1_0}| > |E_{2_0}| > |E_{3_0}| > \dots,$$

так как угол α_1 между направлением в точку наблюдения и нормалью к волновой поверхности растет с увеличением номера субзон.

Найдем радиусы субзон. Для этого достаточно в известной формуле радиусов зон Френеля

$$r_i = \sqrt{\frac{RL}{R+L} i \lambda} = \sqrt{\frac{2RL}{R+L} i \frac{\lambda}{2}} = \sqrt{\frac{2RL}{R+L} i \Delta}$$

сделать замену $\Delta = \frac{\lambda}{2}$ на $\Delta = \frac{\lambda}{2N}$.

Радиусы субзон равны:

$$r_i = \sqrt{\frac{2RL}{R+L} i \frac{\lambda}{2N}} = \sqrt{\frac{RL}{R+L} \frac{\lambda}{N} i},$$

где i – номер субзоны; N – число субзон в первой зоне Френеля.

Примем фазу волны, приходящую в точку наблюдения M от первой центральной субзоны, за нуль. Тогда фаза волны, приходящей от второй субзоны, будет равна φ ; фаза волны, приходящей от третьей субзоны будет равна 2φ и т.д. Другими словами, фазы вторичных волн, приходящих в точку наблюде-

ния образуют арифметическую прогрессию: $0; \varphi; 2\varphi; 3\varphi \dots$ Чтобы найти амплитуду волны, приходящей от всей первой зоны Френеля, необходимо сложить колебания:

$$E_1 = E_{01} \cos(\omega t) + E_{02} \cos(\omega t + \varphi) + E_{03} \cos(\omega t + 2\varphi) + \dots$$

Для нахождения амплитуды результирующей волны в точке М, воспользуемся векторной диаграммой (рис. 23), где OP – опорная линия. Если бы амплитуды волн, приходящих от субзон были одинаковы, то векторная диаграмма представляла собой звенья, вписанные в дугу полуокружности. В действительности это дуга полуспирали. \bar{E}_1 – есть вектор, характеризующий амплитуду результирующей волны, приходящей в точку М от всей первой зоны. Если при разбиении количество субзон N увеличить до бесконечности, то векторная диаграмма волн, приходящих от первой зоны, превратится в дугу полуспирали близкой к полуокружности. Из векторной диаграммы (рис. 24) видно, что фаза волны, приходящей от края первой зоны Френеля, отличается от фазы волны, приходящей от центра зоны, на π . Из данной диаграммы следует, что фаза результирующей волны \bar{E}_1 в точке М отличается от фазы волны, приходящей от центра

первой субзоны на $\frac{\pi}{2}$.

Продолжим разбиение второй зоны Френеля на кольцевые субзоны и на векторной диаграмме построим амплитуды вторичных волн, приходящих от этих субзон в точку наблюдения (рис. 25). Величины амплитуд вторичных волн от субзон второй зоны Френеля будут вписываться также в дугу полуспиралей. Амплитуда волны, приходящей от второй зоны будут изображаться вектором \bar{E}_2 . Продолжая разбиение третьей зоны Френеля на субзоны, построим векторную диаграмму вторичных волн от нее. Амплитуда результирующей волны, приходящей от третьей зоны Френеля изображается вектором \bar{E}_3 . Эти рассуждения можно продолжить. Очевидно, векторная диаграмма вторичных волн от бесконечно малых субзон всего открытого волнового фронта будет изображаться спиралью (рис. 26). При этом амплитуда результирующей волны, приходящей от полностью открытого волнового фронта, изображается вектором \bar{E}_p . Из векторной диаграммы непосредственно следует, что

$$E_p = \frac{E_1}{2},$$

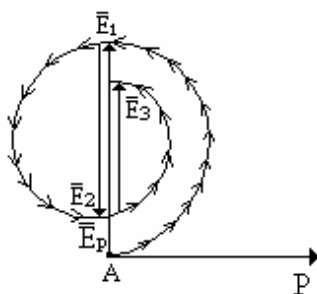


Рис. 25

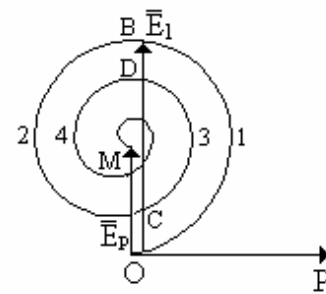


Рис. 26

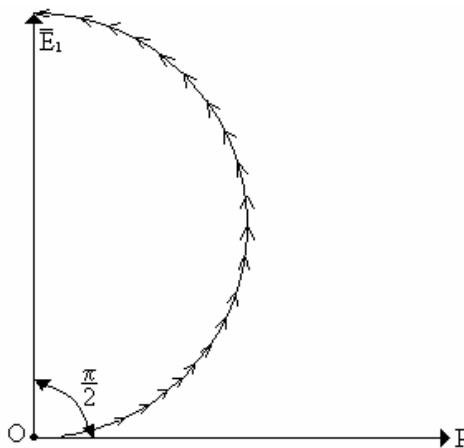


Рис. 24

ли. Френеля,

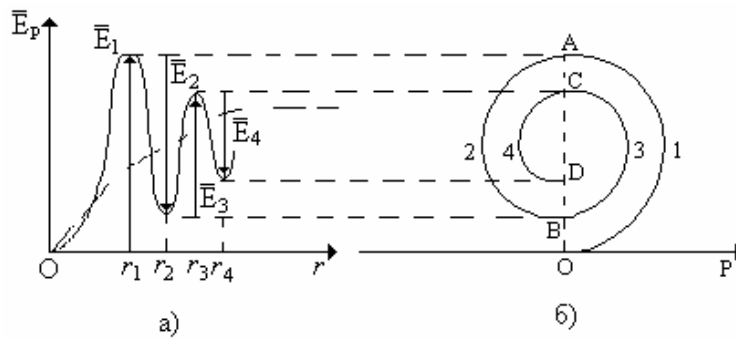


Рис. 27

или

$$E_1 = 2E_p,$$

т.е. амплитуда вторичной волны, приходящей от первой зоны E_1 в два раза больше, амплитуды волны, приходящей от всего сферического волнового фронта. Этот вывод раньше был получен алгебраическим путем.

Углубление метода зон Френеля позволяет по-новому объяснить закономерности дифракции на круглом отверстии и действие зонных пластинок. В § 5 было показано, что в зависимости от того, четное или нечетное число зон Френеля укладывается в отверстии амплитуда волны, проходящей через круглое отверстие, периодически изменяется при увеличении радиуса отверстия аналогично рис. 8.

При этом графическое изменение амплитуды волны от радиуса отверстия можно совместить с полученной нами спиралью векторной диаграммы (рис. 27). Например, если в отверстии содержится четное число зон Френеля ($m = 2$), то амплитуда принимаемой волны равна: $\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2$, т.е. модуль этой амплитуды: $E = E_1 - E_2$ на векторной диаграмме изображается отрезком OB .

Если в отверстии укладывается нечетное число зон Френеля ($m = 3$), то амплитуда принимаемой волны равна: $\bar{E} = \bar{E}_1 + \bar{E}_2 + \bar{E}_3$, т.е. модуль этой амплитуды: $E = E_1 - E_2 + E_3$ на векторной диаграмме изображается отрезком OC . Допустим, что амплитудная зонная пластинка, работающая на отражение или прохождение, исключает действие всех четных зон и в точку наблюдения приходят волны только нечетных зон Френеля. Тогда для выбранной точки наблюдения векторная диаграмма вторичных волн принимает вид, показанный на рис. 28, а. От спирали (рис. 27, б) остаются только полувитки нечетных номеров зон Френеля. Эту векторную диаграмму можно перерисовать так, как показано на рис. 28, б. Ясно, что результирующая амплитуда будет во много раз больше, чем при свободном распространении волн. Этим объясняется

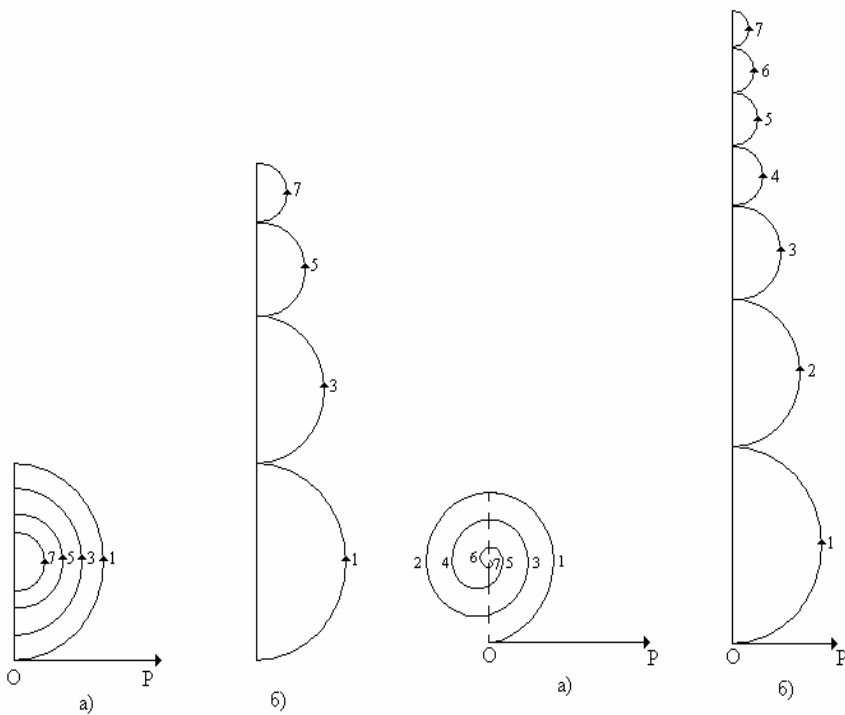


Рис. 28

Рис. 29

фокусирующее действие амплитудной зонной пластинки. Аналогичный результат получится, если амплитудная зонная пластинка исключает действие нечетных зон Френеля.

В §§ 6 и 7 были описаны фазовые зонные пластинки, которые, например, изменяют фазы вторичных волн от четных зон на π по сравнению с фазами волн от нечетных зон. Действие фазовой зонной пластинки сводится к преобразованию спирали векторной диаграммы (рис. 29, а) так, что полувиток каждой четной зоны Френеля поворачивается на угол π против часовой стрелки по сравнению с полувитками каждой нечетной зоны (рис. 29, б).

Из сравнения векторных диаграмм (рис. 28, б) и (рис. 29, б) следует, что амплитуда вторичной волны, даваемая фазовой зонной пластинкой больше амплитуды, которую обеспечивает амплитудная зонная пластинка. Фокусирующее действие вогнутого зеркала или собирающей линзы сводится к «выпрямлению» векторной диаграммы (рис. 29, б). Однако это требует дополнительных разъяснений.

9 Строгая теория фокусировки волн

В §§ 6 и 7 для объяснения фокусирующих свойств вогнутых зеркал и собирающих линз был применен приближенный метод зон Френеля. Было показано, что фокусирующий прибор является предельным случаем ступенчатой фазовой зонной пластинки. Дадим более строгий подход к теории фокусировки волн. Вначале рассмотрим собирающее и рассеивающее действие зеркал с точки зрения теории дифракции.

Пусть источник и приемник волн находятся в точке М на расстоянии $OM = f$ от плоского зеркала (рис. 30). Разобьем поверхность зеркала на элементарные кольцевые участки, называемыми субзонами. Размер субзон значительно меньше зон Френеля. Границей первой центральной субзоны являются

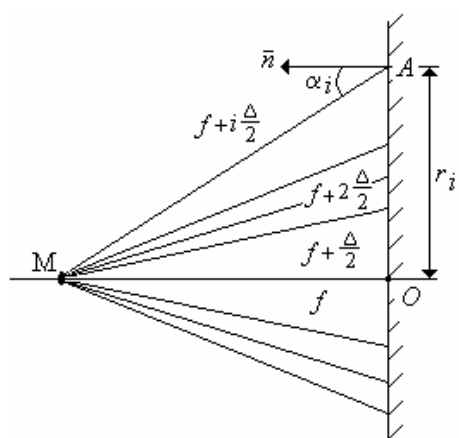


рис.30

точки на зеркале. Которые находятся на расстоянии $\left(f + \frac{\Delta}{2}\right)$ от точки М, где $\Delta \ll \frac{\lambda}{2}$. Границей второй кольцевой субзоны являются точки на поверхности плоского зеркала, которые находятся на расстоянии $\left(f + 2\frac{\Delta}{2}\right)$ от точки М. Продолжая разбиение зеркала на кольцевые элементарные участки, легко видеть, что границей i -ой

субзоны являются точки на зеркале, которые находятся от точки М на расстоянии $\left(f + i \frac{\Delta}{2}\right)$. Очевидно, что Δ есть геометрическая разность хода вторичных волн, приходящих в точку М от любых двух соседних субзон. Если допустить, что каждая зона Френеля, на которые можно разбить поверхность плоского зеркала, делится на N кольцевых субзон, то разность хода вторичных волн, приходящих в точку М от любых соседних субзон, равна

$$\Delta = \frac{\lambda}{2N}. \quad (31)$$

Из прямоугольного треугольника OMA найдем радиусы субзон

$$r_i^2 = \left(f + i \frac{\Delta}{2}\right)^2 - f^2;$$

или

$$r_i^2 = if\Delta + i^2 \frac{\Delta^2}{4}. \quad (32)$$

Рис. 30

Если отбросить член $\frac{i^2 \Delta^2}{4}$ второго порядка малости, то получим приближенную формулу

$$r_i = \sqrt{if\Delta}. \quad (33)$$

Учитывая формулу (31), получим

$$r_i = \sqrt{\frac{if\lambda}{2N}}.$$

Например, для сантиметровых электромагнитных волн ($\lambda = 3,2$ см) при $f = 75$ см и $N = 3$, радиус первой ($i = 1$) субзоны равен: $r_1 = \sqrt{\frac{f\lambda}{2N}} = 63,2$ (мм). Радиус любой субзоны легко найти по формуле: $r_i = r_1 \sqrt{i} = 63,2 \sqrt{i}$ (мм) при $i = 1; 2; 3 \dots 12$. Можно показать, что площади кольцевых субзон одинаковы: $\Delta S = \pi f \Delta$. Однако, амплитуды вторичных волн, приходящих в точку наблюдения М, будут различны. Причем, чем больше номер i субзоны, тем меньше амплитуда вторичной волны, приходящей от нее, так как с ростом номера субзоны увеличивается угол α_i (рис. 30) между нормалью к зеркалу и направлением в точку наблюдения М. Следовательно, между амплитудами волн, отраженных от субзон и приходящих в точку М, имеется соотношение

$$|\bar{E}_1| > |\bar{E}_2| > |\bar{E}_3| > \dots$$

Так как геометрическая разность хода вторичных волн, приходящих в точку М от любых соседних субзон, равна Δ , то между ними имеется разность фаз, равная

$$\varphi = k\Delta,$$

где $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число. Учитывая формулу (11), получим:

$$\varphi = \frac{\pi}{N}. \quad (34)$$

Например, при $N = 3$ имеем $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Будем считать, что фаза вторичной волны, приходящей в точку М от первой ($i = 1$) субзоны, равна нулю: $\varphi_1 = 0$. Тогда фаза вторичной волны, приходящей от второй (i

= 2) субзоны, будет равна $\varphi_2 = \varphi$; фаза вторичной волны от третьей ($i = 3$) субзоны будет равна $\varphi_3 = 2\varphi$ и т.д. Следовательно, фазы вторичных волн, приходящих от субзон в точку М, образуют арифметическую прогрессию: $0; \varphi; 2\varphi; 3\varphi; \dots$ Согласно принципа Гюйгенса-Френеля амплитуда результирующей волны, приходящей в точку М, равна

$$E = E_1 \cos \omega t + E_2 \cos(\omega t - \varphi) + E_3 \cos(\omega t - 2\varphi) + \dots E_n \cos[\omega t - (n-1)\varphi]. \quad (35)$$

Для нахождения амплитуды результирующей волны, отраженной от плоского зеркала и приходящей в точку наблюдения, воспользуемся векторной диаграммой (рис. 31), построенной на основании формулы (35) при $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Векторная диаграмма представляет собой ломаную линию, вписанную в свертывающуюся спираль, причем каждый последующий вектор \vec{E}_{i+1} повернут против часовой стрелки на угол φ по отношению к предыдущему вектору \vec{E}_i . Амплитуда результирующей волны, отраженной от плоского зеркала и приходящей в точку М, численно равна модулю вектора, соединяющего начало и конец векторной диаграммы. Легко видеть, что при бесконечно большом числе субзон амплитуда результирующей волны равна половине амплитуды волны, приходящей от первых трех субзон, или половине амплитуды волны, приходящей от первой зоны Френеля. В частном случае двенадцати субзон или четырех зон Френеля, как показано на рис. 31, амплитуда результирующей волны, отраженной от плоского зеркала, будет не столь большой.

Для того чтобы увеличить в точке наблюдения амплитуду результирующей вторичной волны, отраженной от зеркала, необходимо «размотать» спираль векторной диаграммы (рис. 31) и превратить ее в прямую линию. Для этой цели увеличим фазу вторичной волны, отраженной от второй субзоны, на $\varphi = \frac{\pi}{3}$, т.е. повернем вектор \vec{E}_2 на диаграмме (рис. 31) по часовой стрелке на угол $\varphi = \frac{\pi}{3}$ по отношению к вектору \vec{E}_1 волны, отраженной от первой субзоны. Другими словами, необходимо компенсировать геометрическую разность

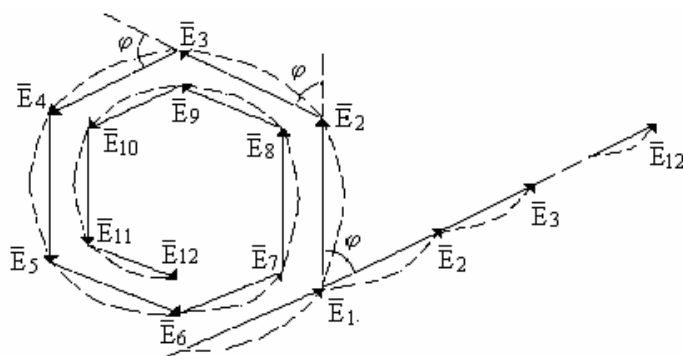


Рис. 31

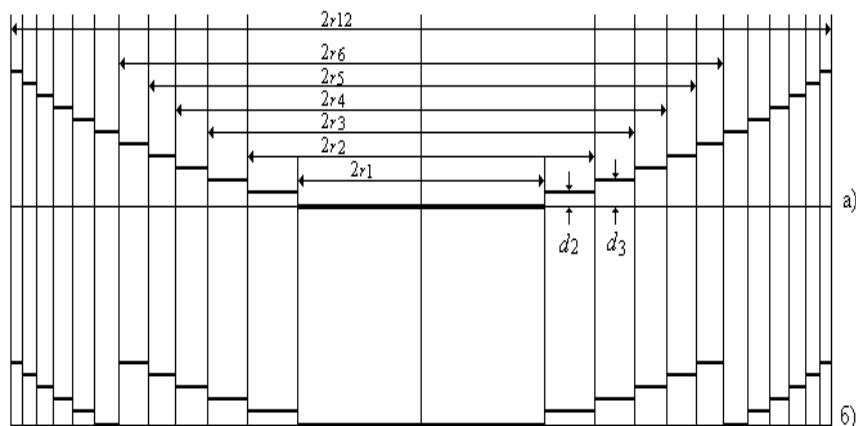


Рис. 32

хода Δ между вторичными волнами E_2 и E_1 . Технически это можно реализовать соответствующим смещением или сдвигом отражающего кольцевого слоя второй субзоны навстречу падающим волнам на отрезок:

$$d_2 = d = \frac{\Delta}{2}$$

по отношению к отражающей поверхности первой субзоны как схематично показано на рис. 32, а. Увеличим фазу волны, отраженной от третьей субзоны, на 2φ , т.е. повернем вектор \bar{E}_3 на диаграмме (рис. 31) по часовой стрелке на угол 2φ по отношению к вектору \bar{E}_1 . Другими словами, компенсируем геометрическую разность хода 2Δ между вторичными волнами, отраженными от первой и третьей субзон. Это можно достичь, если отражающий кольцевой слой третьей субзоны сдвинуть навстречу падающим лучам на отрезок

$$d_3 = 2d = \frac{2\Delta}{2} = \Delta$$

по отношению к отражающей поверхности первой субзоны (рис. 32, а).

Аналогично, осуществляя данную операцию с остальными субзонами, получим, что для компенсации геометрической разности хода между вторичными волнами необходимо отражающий слой i -ой субзоны сместить на величину

$$d_i = (i-1)d = (i-1)\frac{\Delta}{2}. \quad (36)$$

В частном случае, при $N = 3$ и $\Delta = \frac{\lambda}{2N} = \frac{\lambda}{6}$, величина смещения двух соседних субзон равна:
 $d = \frac{\Delta}{2} = \frac{\lambda}{12} = 2,67$ (мм) при $\lambda = 32$ мм.

Таким образом, плоское зеркало превращается в ступенчатую фазовую субзонную пластинку (рис. 32, а), работающую на отражение, благодаря которой ломаная спираль векторной диаграммы (рис. 31) превращается в кусочную прямую линию, а амплитуда отраженной результирующей волны в точке М становится равной:

$$E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_{12}.$$

На рис. 33 показана фотография ступенчатой фазовой субзонной пластинки для антиметровых электромагнитных волн ($\lambda = 3,2$ см), которая содержит 12 субзон или 4 зоны Френеля и имеет фокусное расстояние $f = 75$ см при $\Delta = \frac{\lambda}{2N} = \frac{\lambda}{6}$.

Для проведения опытов устанавливают источник 1 и приемник 2 сантиметровых электромагнитных волн с рупорными антеннами как показано на рис. 34. Для измерения интенсивности принимаемых волн приемная рупорная антенна соединяется с осциллографом или демонстрационным микроамперметром. Перед источником и приемником радиоволн на расстоянии $f = 75$ см устанавливают круглое металлическое плоское зеркало 3 радиусом $r_{12} = 219$ мм и измеряют интенсивность I_0 принимаемой волны. Плоское зеркало может быть изготовлено из любого металлического листа, содержащего 12 субзон или 4 зоны Френеля.



Рис. 33

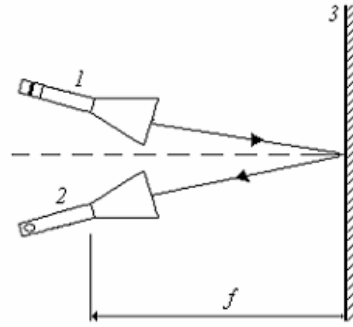


Рис. 34

Вместо плоского зеркала перед источником 1 и приемником 2 на том же расстоянии $f = 75$ см устанавливают ступенчатую фазовую субзонную пластинку (рис. 33) и отмечают резкое увеличение интенсивности I принимаемого сигнала, т.е. $I \gg I_0$.

Очевидно, что ступенчатая фазовая субзонная пластинка не позволяет достичь предельной фокусировки волн, так как вторичные волны, приходящие в точку наблюдения от внешнего и внутреннего края каждой субзоны имеют разность фаз, равную φ , которая при $N = 3$ согласно формуле (34) равна: $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Следовательно, чтобы полностью «размотать» спираль векторной диаграммы и достичь максимальной фокусировки волн, необходимо значительно увеличить число субзон N , на которое разбивается каждая зона Френеля и изменить соответствующие фазы вторичных волн, то есть необходимо перейти от ступенчатой фазовой субзонной пластинки к вогнутому зеркалу. Чтобы найти форму поверхности собирающего зеркала, необходимо из выражений (32) и (36) исключить величину Δ . При больших порядковых числах субзон можно считать, что $i \approx (i - 1)$. Тогда получим уравнение гиперболы

$$r^2 = 2fd + 4d^2.$$

Другими словами, собирающее зеркало, не обладающее сферической аберрацией, должно иметь поверхность в виде гиперболоида вращения. Если величину Δ исключить из уравнений (33) и (36), то получим уравнение параболы

$$r^2 = 2fd. \quad (37)$$

Следовательно, в первом приближении форму поверхности собирающего зеркала можно считать параболоидом вращения.

Дадим понятие о зонировании собирающих зеркал. С помощью ступенчатой фазовой субзонной пластинки изменялись фазы вторичных волн, идущие от всех субзон, кроме первой субзоны. При $N = 3$ фаза волны, идущая от седьмой субзоны изменилась на 2π и есть вектор \vec{E}_7 на диаграмме (рис. 31) поворачиваются по часовой стрелке на угол 2π . Однако такое изменение фазы на 2π не влияет на соотношение всех фаз вторичных волн, приходящих в точку наблюдения. Следовательно, отражающую поверхность седьмой субзоны не следует сдвигать навстречу падающим волнам согласно формуле (36) на отрезок $d_i = (i - 1)d = (i - 1)\frac{\lambda}{2}$. При $\lambda = 3,2$ см и $N = 3$ имеем $d_7 = (i - 1)\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} = 16$ мм. Поверхность восьмой, девятой и т.д. субзон следует сместить на отрезки: d ; $2d$; $3d$ и т.д. При этом фазовые соотношения

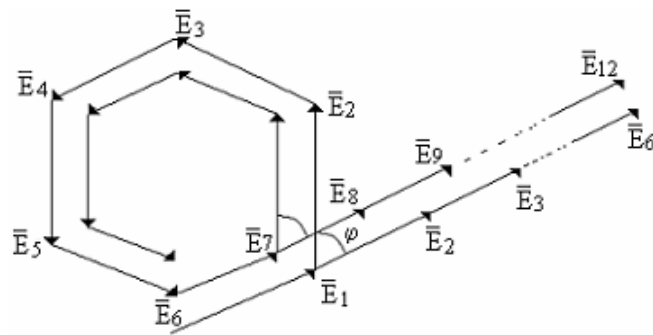


Рис. 35

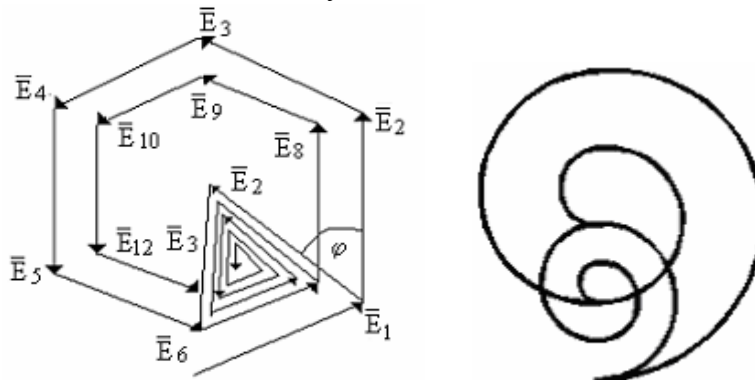
вторичных волн останутся прежними. Другими словами, для осуществления фокусировки волн спираль векторной диаграммы следует «разматывать» не всю сразу, а каждую ломаную окружность или многоугольник по отдельности (рис. 35).

Все это говорит о том, что изменение фазы отраженных волн на 2π или сдвиг отражающих поверхностей субзон на $\frac{\lambda}{2}$ не изменяет фокусирующих свойств ступенчатой фазовой субзонной пластинки. На рис. 36 показана зонированная фазовая субзонная пластинка для сантиметровых радиоволн. Опыт показывает, что ее фокусирующее действие то же, что и обычной фазовой субзонной пластинки (рис. 33).



Рис. 36

Как показано выше, векторная диаграмма вторичных волн, отраженных от плоского зеркала и приходящих в точку наблюдения, представляет собой ломаную линию, вписанную в свертывающуюся спираль. Если каждая зона Френеля разбивается на $N = 3$ субзоны, то векторная диаграмма соответствует рис. 37. Уменьшим фазу вторичной волны от второй субзоны на φ , т.е. повернем вектор \vec{E}_2 на угол φ против часовой стрелки. Фазы волн от третьей, четвертой и т.д. субзон уменьшим соответственно на 2φ ; 3φ и т.д. Векторная диаграмма превратится в более быстро свертывающийся многоугольник и амплитуда результирующей волны в точке наблюдения значительно уменьшится.



Соответствующее уменьшение фаз вторичных волн от субзон: на φ ; 2φ ; 3φ ... можно осуществить, если отражающие поверхности субзон сдвигать в противоположную сторону по отношению к падающим волнам на отрезок: $d_2 = d = \frac{\Delta}{2}$; $d_3 = 2d = \Delta$; ... $d_i = (i-1)d = (i-1)\frac{\Delta}{2}$. В частном случае, при $N = 3$; $\Delta = \frac{\lambda}{2N} = \frac{\lambda}{6}$; $\lambda = 3,2$ см получим $d = 2,67$ мм.

Таким образом, мы приходим не к вогнутой, а к выпуклой ступенчатой фазовой зонной пластинке, работающей на отражение. В предельном повороте при $N \rightarrow \infty$ выпуклая ступенчатая фазовая зонная пластинка превращается в выпуклое зеркало. Легко видеть, что форма поверхности рассеивающего зеркала представляет собой поверхность гиперboloида вращения, и оно допускает зонирование. С точки зрения теории дифракции рассеивающее зеркало спираль векторной диаграммы преобразует в спираль в два раза меньшего радиуса (рис. 38).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Горелик Г.С. Колебания и волны. М.: ГИФМЛ, 1959. 572 с.
- 2 Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970. 855 с.
- 3 Сивухин Д.В. Оптика. М.: Наука, 1980. 751 с.
- 4 Суханов А.Д. Фундаментальный курс физики: Учебник. В 2-х т. М.: Агар, 1998. Т. 2. 709 с.