

Министерство образования Российской Федерации
Тамбовский государственный технический университет

Н.А. Малков, Г.А. Барышев

ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Учебное пособие

*Одобрено Учебно-методическим объединением по образованию
в области радиотехники, электроники, биомедицинской техники и
автоматизации в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по направлению 5511 и специальностям 200800 и 220500*

Тамбов • Издательство ТГТУ • 2003

УДК 696:28.342
ББК 32.85к65
М19

Рецензенты:

Доктор физико-математических наук, профессор
В.А. Федоров

Доктор технических наук, профессор
В.Ф. Калинин

Малков Н.А., Барышев Г.А.

М19 Основы технической электродинамики: Учебное пособие. – Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2003. – 128 с.

ISBN 5-8265-0235-5

В пособии приведены разделы, посвященные статическим и стационарным полям, большое внимание уделяется переменным электромагнитным полям (распространение электромагнитных волн вдоль проводника, излучение, электромагнитное поле диполей и экранирование). Рассмотрена теория линий передачи, поверхностных волн и замедляющих структур.

Учебное пособие соответствует программе курса «Техническая электродинамика» и предназначено для студентов, обучающихся по специальностям 200800 и 220500.

УДК 696:28.342
ББК 32.85к65

ISBN 5-8265-0235-5

© Тамбовский государственный
технический университет
(ТГТУ),
2003
© Малков Н.А., Барышев Г.А.,
2003

Н.А. МАЛКОВ, Г.А. БАРЫШЕВ

**ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ

Учебное издание

**МАЛКОВ Николай Аркадьевич,
БАРЫШЕВ Гертруд Алексеевич**

**ОСНОВЫ ТЕХНИЧЕСКОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ**

Учебное пособие

Редактор Т.М. Глинкина

Компьютерное макетирование И.В. Евсеевой

Подписано к печати 16.05.2003

Гарнитура Times New Roman. Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Объем: 7,44 усл. печ. л.; 7,3 уч.-изд. л.

Тираж 100 экз. С. 313

Издательско-полиграфический центр ТГТУ
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

ВВЕДЕНИЕ

Математическую формулировку законов электромагнитного поля дал Максвелл, полностью воспринявший идеи Фарадея. Теория Максвелла объединяла все известные в то время законы электромагнетизма и содержала гениальные предположения о глубокой связи, существующей между электрическими и магнитными явлениями. Именно эти предположения дополнили теорию электромагнитного поля новой идеей о существовании токов смещения и привели к созданию системы *уравнений Максвелла*, справедливых для любых электромагнитных полей в любых средах.

Подобно веществу электромагнитное поле обладает энергией, массой, количеством движения (импульсом) и моментом количества движения, т.е. теми универсальными свойствами материи, которые подчиняются всеобщим законам сохранения и обусловлены несотворимостью и неуничтожимостью материи и ее движения.

Электромагнитное поле в макроскопическом масштабе наблюдения характеризуется непрерывностью его распределения в пространстве. С течением времени происходит распространение поля в пространстве. Распространяющееся электромагнитное поле называют электромагнитной волной. Поскольку объемная плотность массы электромагнитного поля весьма мала, то в вакууме при отсутствии сильных гравитационных полей скорость распространения электромагнитного поля в свободном пространстве всегда постоянна и равна скорости света, которая близка к $3 \cdot 10^8$ м/с.

Классическая (макроскопическая) электродинамика приписывает полю лишь волновые свойства, а элементарным частицам – корпускулярные.

Электромагнитное поле есть особый вид материи, отличающийся непрерывным распределением в пространстве (электромагнитные волны, поле заряженных частиц) и обнаруживающий дискретность структуры (фотоны), характеризующийся в свободном состоянии способностью распространения в вакууме (при отсутствии сильных гравитационных полей) со скоростью, близкой к $3 \cdot 10^8$ м/с, оказывающий на заряженные частицы силовое воздействие, зависящее от их скорости.

Электрический заряд есть свойство частиц материи (вещества) или тел, характеризующее их взаимосвязь с собственным электромагнитным полем и их взаимодействие с внешним электромагнитным полем; имеет два вида, известные как положительный заряд (заряд протона, позитрона и др.) и отрицательный заряд (заряд электрона и др.); количественно определяется по силовому взаимодействию тел, обладающих электрическими зарядами.

Ярче всего торжество теории электромагнитного поля проявилось в изобретении радиосвязи нашим соотечественником А. С. Поповым (1895 г.), которое привело к широкому практическому использованию электромагнитного поля.

Глава 1 ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

1.1 Законы электромагнитного поля

Из физики известны следующие законы электромагнитного поля, найденные экспериментально-опытным путем:

Наименование	Интегральная форма	Дифференциальная форма
Электростатическое (магнитостатическое) поле		
Закон Кулона	$\vec{F}_3 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon r^2} \vec{l}_r \text{ [Н]}$	
Теорема Гаусса	$\oint_s \vec{E} ds = \frac{q}{\epsilon_0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
Закон сохранения заряда	$I = \int_s \vec{J}_{\text{np}} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt}$	$\operatorname{div} \vec{J}_{\text{np}} = 0$
Электрическое поле постоянного тока в проводниках		
Первый закон Кирхгофа	$\oint_s \vec{J}_{\text{np}} d\vec{S} = 0$	$\operatorname{div} \vec{J}_{\text{np}} = 0$

Второй закон Кирхгофа	$\oint_l \bar{E} d\bar{l} = 0$	$\text{rot} \bar{E} = 0$
Закон Ома	$I = \frac{U}{R}$	$\bar{J}_{\text{пр}} = \gamma_{\text{пр}} \bar{E}$
Закон Джоуля-Ленца	$P = IU$	$P = \bar{J}_{\text{пр}} \bar{E}$
Магнитное поле постоянного тока		
Закон Ампера	$d\bar{F}_{\text{M12}} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{[I_2 d\bar{l}_2 [I_1 d\bar{l}_1 \bar{r}_{12}]]}{\bar{r}_{12}^3} = [I_2 d\bar{l}_2 d\bar{B}_1]$	
Закон Био-Савара	$\bar{H} = \frac{I}{4\pi} \int_l \frac{[d\bar{l} \bar{r}]}{r^3}$	
Закон Ома для магнитной цепи	$\varphi = \frac{IW}{R_{\text{м}}}$	$\bar{J}_{\text{м}} = \gamma_{\text{м}} \bar{H}$
Сила Лоренца	$\bar{F} = \bar{F}_3 + \bar{F}_{\text{м}} = q\bar{E} + q[\bar{v}\bar{B}]$	
Закон полного тока	$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S \bar{J}_{\text{пр}} d\bar{S}$	$\text{rot} \bar{H} = \bar{J}_{\text{пр}}$

Продолжение табл.

Наименование	Интегральная форма	Дифференциальная форма
Переменное электромагнитное поле		
Обобщенной закон полного тока	$\oint_L H d\bar{l} = \int_S \left(\bar{J}_{\text{ст}} + \bar{J}_{\text{пр}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) d\bar{S}$	$\text{rot} \bar{H} = \bar{J}_{\text{ст}} + \bar{J}_{\text{пр}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$
ЗАКОН ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ	$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S}$	$\text{rot} \bar{E} = - \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$

Переход от интегральной формы к дифференциальной форме записи законов выполняется с помощью теоремы Стокса $\oint_l \bar{E} d\bar{l} = \int_s \text{rot} \bar{E} d\bar{s}$ и теоремы Гаусса $\oint_s \bar{E} d\bar{s} = \int_v \text{div} \bar{E} dv$.

Закон Кулона определяет направление и величину силы \bar{F}_3 электростатического взаимодействия между двумя точечными, неподвижными относительно наблюдателя, электрическими зарядами q_1 и q , а закон Ампера – силы $d\bar{F}_{\text{M12}}$ магнитного взаимодействия, с которой элемент тока $I_1 d\bar{l}_1$ действует на элемент тока $I_2 d\bar{l}_2$ (рис. 1.1).

Напряженностью \bar{E} электрического поля называется сила \bar{F}_3 , с которой электрическое поле действует на точечное тело с единичным положительным зарядом q_1 , внесенное в рассматриваемую точку поля. Она определяется из закона Кулона

$$\bar{E} = \frac{\bar{F}_3}{q_1} = \frac{q}{4\pi\epsilon r^2} \bar{l}_r.$$

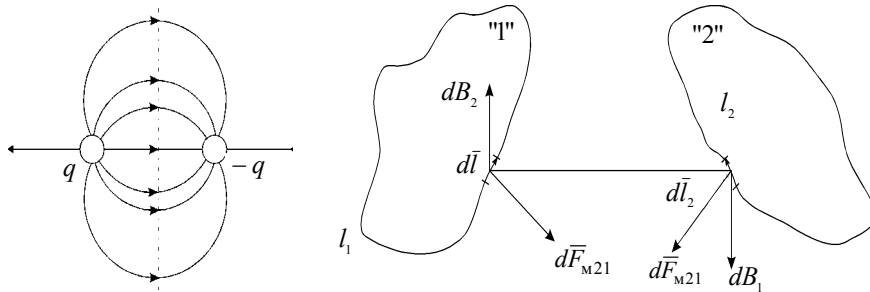


Рис. 1.1

Магнитная индукция \vec{B} численно равна силе \vec{F}_m , с которой магнитное поле действует на единичный элемент тока $Idl = 1 \text{ A} \cdot \text{м}$, расположенный перпендикулярно к направлению этого поля

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_m}{Idl} = \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{[Idl\vec{r}]}{r^3}.$$

Для наглядного представления пользуются графическим изображением поля. Силовые линии \vec{E} и \vec{H} проводят так, чтобы касательные к ним указывали направление вектора \vec{E} или \vec{H} , а их густота была прямо пропорциональна его абсолютному значению.

В случае замкнутой поверхности S , окружающей заряд q , согласно теореме Гаусса для вакуума, полный поток вектора \vec{E} , проходящий через эту поверхность, равен величине заряда q , деленной на диэлектрическую проницаемость ϵ_0 . Линии вектора \vec{D} электрического смещения, связанного с зарядами, начинаются и заканчиваются на этих зарядах.

Линии вектора магнитной индукции \vec{B} всюду непрерывны, так как магнитных зарядов не существует и полный поток вектора \vec{B} , проходящий через замкнутую поверхность, равен нулю, т.е.

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

В случае неоднородной и анизотропной среды теорема Гаусса не применима. В этом случае следует пользоваться постулатом Максвелла

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q,$$

имеющим более общий характер.

Из закона сохранения заряда следует, что количество электричества, выходящего за некоторый промежуток времени через замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V , равно величине уменьшения находящегося в объеме заряда за тот же промежуток времени

$$I = \int_S \vec{J}_{\text{пр}} d\vec{S} = -\frac{dq}{dt},$$

где вектор $\vec{J}_{\text{пр}}$ – плотность тока проводимости в какой-либо точке этой поверхности, определяется как вектор, направленный вдоль линии тока, проходящей через эту точку, и равный

$$|\vec{J}_{\text{пр}}| = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I_{\text{пр}}}{\Delta S} = \frac{dI}{dS}.$$

Токи, создаваемые генераторами, условились называть сторонними электрическими токами $I_{\text{ст}}$ или токами возбуждения, а токи, создаваемые полем в проводящей среде – токами проводимости $I_{\text{пр}}$. Кроме токов проводимости и сторонних токов, существуют токи смещения $I_{\text{см}}$.

Связь между электрическим током и напряженностью магнитного поля устанавливается законом полного тока.

В общем случае на основании обобщенного закона полного тока циркуляция вектора напряженности магнитного поля определяется тремя токами $I_{\text{ст}}$, $I_{\text{пр}}$ и $I_{\text{см}}$.

Вторая связь определяет электрическое поле, возникающее при изменении во времени магнитного поля.

Циркуляция вектора напряженности электрического поля на основании закона электромагнитной индукции по любой замкнутой регулярной кривой равна скорости уменьшения по времени магнитного потока $-\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ через любую поверхность, опирающуюся на эту кривую. Полный поток может меняться во времени, а также из-за деформации контура и изменения магнитной проницаемости.

При всяком изменении магнитного потока через проводящий контур в этом контуре возникает электрический ток. Индуцированный ток всегда имеет такое направление, при котором его магнитное поле уменьшает или компенсирует изменение магнитного потока, являющееся причиной возникновения этого тока.

1.2 Интегральные уравнения электромагнитного поля

Основными уравнениями макроскопической теории электромагнитного поля являются уравнения, изложенные Дж. Максвеллом в 1873 г. в труде «Трактат об электричестве и магнетизме». Эти уравнения, получившие название уравнений Максвелла, математически связывают векторы поля друг с другом, а также с токами и зарядами.

Дж. Максвелл, проанализировав основные опытные законы электрического и магнитного поля, ввел понятие о плотности тока смещения $\bar{J}_{\text{см}} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, как производной вектора электрического смещения по времени, теорему Гаусса распространил на любой диэлектрик с ϵ , а закон полного тока обобщил на случай переменных электромагнитных полей и показал, что связь между векторами поля, токами и зарядами определяется четырьмя основными уравнениями:

$$\text{I} \quad \oint_l H dl = \int_S \left(\bar{J}_{\text{см}} + \bar{J}_{\text{пр}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) d\bar{S}; \quad (1.1)$$

$$\text{II} \quad \oint_l \bar{E} d\bar{l} = - \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S}; \quad (1.2)$$

$$\text{III} \quad \oint_S \bar{D} d\bar{S} = q, \quad (1.3)$$

$$\text{IV} \quad \oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0 \quad (1.4)$$

и тремя вещественными уравнениями

$$\bar{D} = \epsilon \bar{E}, \quad \bar{B} = \mu \bar{H}, \quad \bar{J}_{\text{пр}} = \gamma_{\text{пр}} \bar{E}.$$

В основе первого уравнения – обобщенный закон полного тока, второго – закон электромагнитной индукции, третьего – теорема Гаусса, четвертого – аналогичная теореме Гаусса, но только для потока магнитной индукции через замкнутую поверхность, а «вещественных» уравнений – закон Ома в дифференциальной форме.

Первое уравнение Максвелла в интегральной форме определяет суммарный эффект циркуляции вектора \bar{H} от потоков плотностей стороннего тока, тока проводимости, тока смещения через поверхность, ограниченную циркуляцией, второе уравнение – циркуляции вектора \bar{E} от потока плотности магнитного тока $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$, третье и четвертое – потоков векторов \bar{D} и \bar{B} через замкнутые поверхности от совокупности зарядов, имеющихя внутри объемов, ограниченных замкнутыми поверхностями.

Плотность тока смещения $\bar{J}_{\text{см}} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}$ определяется движущимся электрическим полем $\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$ и движением электрических зарядов, связанных в микросистемах $\frac{\partial \bar{P}}{\partial t}$, где \bar{P} – вектор поляризованности веществ, Кл/м², $P = \chi \epsilon_0 E$, χ – относительная электрическая восприимчивость.

Все остальные закономерности электромагнитного поля могут быть определены из этой системы уравнений. В качестве примера покажем, что основные законы электротехники, как закон Ома, первый и второй законы Кирхгофа, являются следствием основных уравнений.

Так при изменении векторов поля по гармоническому закону $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} = j\omega \bar{D}$, $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = j\omega \bar{B}$ для резистивного, емкостного и магнитного элементов цепи длиной dl с поперечным сечением dS с параметрами $\gamma_{\text{пр}}$, ϵ , μ и

векторами $\bar{J}, \bar{D}, \bar{B}$, направленными вдоль элементов dl , из трех вещественных уравнений после умножения на отношение $\frac{dS}{dl}$ и ряда подстановок получаем известные соотношения

$$\begin{aligned}\bar{J}_{\text{np}} \frac{dS}{dl} &= \gamma_{\text{np}} \frac{dS}{dl} \bar{E}; \quad I \frac{1}{dl} = \frac{1}{R} E; \quad IR = v_R; \\ \bar{D} \frac{dS}{dl} &= \varepsilon \frac{dS}{dl} \bar{E}; \quad DdS = CE dl; \quad \frac{\partial D}{\partial t} dS = C \frac{dE}{dt} dl = j\omega CE dl; \quad I_{\text{cm}} \frac{1}{j\omega C} = v_c, \\ \bar{B} \frac{dS}{dl} &= \mu \frac{dS}{dl} \bar{H}; \quad BdS = \frac{1}{R_m} H dl; \quad R_m \Phi = v_m,\end{aligned}$$

соответствующие закону Ома, из второго уравнения Максвелла (1.2)

$$\bar{E} d\bar{l} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S} = -j\omega d\Phi = -j\omega I \frac{d\Phi}{I} = -j\omega LI; \quad U_L = -j\omega LI -$$

закон Ома для индуктивного элемента.

Первый закон Кирхгофа можно получить из первого уравнения Максвелла (1.1), если взять циркуляцию вектора \bar{H} по одному и тому же бесконечно малому контуру в узле в двух противоположных направлениях

$$\oint_L \bar{H} d\bar{\varepsilon} - \oint_L \bar{H} d\bar{l} = \int_S \left(\bar{J}_{\text{np}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) d\bar{S} = 0; \quad \sum_{i=1}^n I_i = 0,$$

где S – бесконечно малая поверхность сферы, образованная двумя полусферами, опирающимися на один и тот же бесконечно малый контур L .

Второй закон Кирхгофа является следствием второго уравнения Максвелла (1.2)

$$\oint_L \bar{E} d\bar{l} = -\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} d\bar{S} = -j\omega \int_S \bar{B} d\bar{S} = -j\omega \sum_{i=1}^n \Phi_i = -j\omega \sum_{i=1}^n L_i I_i,$$

где $\sum_{i=1}^n \Phi_i$ – суммарный поток, пронизывающий контур, созданный как токами контура, так и токами соседних контуров; L_i – собственная и взаимная индуктивности.

Циркуляцию вектора \bar{E} по оси замкнутой цепи можно представить в виде суммы напряжений на отдельных участках контура с сосредоточенными интегральными параметрами R, C и напряжений источников.

1.3 Дифференциальные уравнения электромагнитного поля

Переход от интегральных уравнений к дифференциальным, представляющим связь между векторами поля в данной точке, осуществляется путем уменьшения контура циркуляции векторов \bar{H} и \bar{E} в первом и во втором уравнениях Максвелла (1.1), (1.2) и объема внутри замкнутой поверхности в третьем и четвертом уравнениях Максвелла (1.3), (1.4) до бесконечно малых величин [12].

При этом принимается во внимание, что предел, к которому стремится отношение циркуляции вектора к величине поверхности ΔS , охватываемой малым замкнутым контуром Δl , равен составляющей ротора этого вектора, ориентированной по направлению единичной нормали \bar{l}_n к поверхности S , т.е.

$$\text{I} \quad \text{rot}_n \bar{H} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{H} d\bar{l}}{\Delta S} \bar{l}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int_S \left(J_{\text{cr}_n} + J_{\text{np}_n} + \frac{\partial D_n}{\partial t} \right) dS}{\Delta S}; \quad (1.5)$$

$$\text{rot } \bar{H} = \bar{J}_{\text{cr}} + \bar{J}_{\text{np}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t};$$

$$\text{II} \quad \text{rot}_n \bar{E} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{E} d\bar{l}}{\Delta S} \bar{l}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\int_S \frac{\partial B}{\partial t} dS}{\Delta S}; \quad \text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}, \quad (1.6)$$

а предел отношения потока вектора через малую замкнутую поверхность ΔS к объему ΔV , находящемуся внутри замкнутой поверхности ΔS , равен дивергенции вектора, т.е.

$$\text{III} \quad \text{div } \bar{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \bar{D} d\bar{S}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\int \rho dV}{\Delta V}, \quad \text{div } \bar{D} = \rho; \quad (1.7)$$

$$\text{IV} \quad \oint \bar{B} d\bar{S} \\ \text{div} \bar{B} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta V} = 0, \quad \text{div} \bar{B} = \rho, \quad (1.8)$$

где $\bar{1}_n$ – единичная нормаль к поверхности ΔS ; $\text{rot}_n \bar{H}$, $\text{rot}_n \bar{E}$ – составляющие ротора, ориентированные по направлению единичной нормали $\bar{1}_n$ к поверхности ΔS ; $\frac{\partial B_n}{\partial t}$, J_n , $\frac{\partial D_n}{\partial t}$ – составляющие векторов $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ и \bar{J} , $\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$, ориентированные по $\bar{1}_n$.

«Дивергенция» по-латыни значит расхождение или расходимость. Те точки поля вектора \bar{D} , в которых $\text{div} \bar{D} \neq 0$, принято называть истоками этого поля, численно величина $\text{div} \bar{D}$ называется силой или обильностью истоков поля.

Первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме (1.5) устанавливает связь между магнитным полем и его изменением в пространстве с плотностью тока в этой точке, при этом все виды токов независимо от причин их возникновения являются равноценными в смысле возбуждения ими магнитных полей.

Второе уравнение Максвелла (1.6) определяет связь между электрическим полем и его изменением в пространстве с изменением магнитного поля во времени. При этом изменяющееся во времени магнитное поле создает вихревое электрическое поле, т.е. наряду с электрическим полем зарядов может существовать вихревое электрическое поле.

Третье и четвертое уравнения Максвелла (1.7), (1.8) выражают принцип непрерывности в дифференциальной форме тока и магнитного потока. Отличие от нуля дивергенции электрического смещения отражает то обстоятельство, что линии электрического поля начинаются и заканчиваются на зарядах, по сравнению с линиями магнитного поля, не имеющих ни начала, ни конца.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме определяют связь векторов $\bar{E}, \bar{H}, \bar{J}, \bar{D}, \bar{B}$ между собой. Для определения дифференциального уравнения, которому самостоятельно удовлетворяет каждый из векторов поля, применим операцию ротор к первому и второму уравнениям и в них вместо $\text{rot} \bar{E}$ подставим $-\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$, а вместо $\text{rot} \bar{H} - \bar{J}_{\text{cr}} + \gamma_{\text{np}} \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$:

$$\begin{cases} \text{rot rot} \bar{H} = \text{rot} \bar{J}_{\text{cr}} + \text{rot} \gamma_{\text{cr}} \bar{E} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \bar{E} = \text{rot} \bar{J}_{\text{cr}} - \gamma_{\text{cr}} \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2}; \\ \text{rot rot} \bar{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \bar{H} = -\mu \gamma_{\text{np}} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \mu \frac{\partial \bar{J}_{\text{cr}}}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Векторное тождество $\text{rot rot} \bar{H} = \text{grad div} \bar{H} - \nabla^2 \bar{H}$, где ∇^2 – оператор Лапласа позволяет уравнения (1.9) привести к обобщенным неоднородным векторным волновым уравнениям:

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{H} - \gamma_{\text{cr}} \mu \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial t^2} = -\text{rot} \bar{J}_{\text{cr}}; \\ \nabla^2 \bar{E} - \gamma_{\text{np}} \mu \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} - \text{grad} \frac{\rho}{\varepsilon} = \mu \frac{\partial \bar{J}_{\text{cr}}}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.10)$$

При изменении векторов поля во времени по гармоническому закону, в комплексной форме как $e^{j\omega t}$, первая и вторая производные (1.10) равны

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega t} = j\omega e^{j\omega t}; \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} e^{j\omega t} = -\omega^2 e^{j\omega t},$$

$$\text{а сумма} \quad \gamma_{\text{np}} \mu \frac{\partial e^{j\omega t}}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 e^{j\omega t}}{\partial t^2} = (j\omega \gamma_{\text{np}} \mu - \varepsilon \mu \omega^2) e^{j\omega t} = -\gamma^2 e^{j\omega t},$$

где $\gamma = \omega \sqrt{\mu \varepsilon'} = \omega \sqrt{\mu \left(\varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{np}}}{\omega} \right)}$ – коэффициент распространения поля; $\varepsilon' = \varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{np}}}{\omega}$ – комплексная диэлектрическая проницаемость.

Волновые уравнения (1.10) для комплексных амплитуд векторов поля переходят в уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{H} + \gamma^2 \bar{H} = -\text{rot} \bar{J}_{\text{cr}}; \\ \nabla^2 \bar{E} + \gamma^2 \bar{E} = j\omega \mu \bar{J}_{\text{cr}}. \end{cases} \quad (1.11)$$

В случае, когда используются процессы распространения электромагнитных волн в сторонние токи $\bar{J}_{\text{ст}}$, возбуждающие поле, находятся за пределами анализируемой части пространства, неоднородные уравнения Гельмгольца переходят в однородные уравнения вида

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{H} + \gamma^2 \bar{H} = 0; \\ \nabla^2 \bar{E} + \gamma^2 \bar{E} = 0, \end{cases} \quad (1.12)$$

ОБЩИМИ РЕШЕНИЯМИ КОТОРЫХ ДЛЯ ПЛОСКИХ ВОЛН В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ЯВЛЯЮТСЯ ФУНКЦИИ ВИДА

$$e^{j(\omega t \pm (\gamma_x x + \gamma_y y + \gamma_z z))} = e^{j(\omega t \pm \gamma r)},$$

для цилиндрических волн в цилиндрической системе координат

$$AI_n(j\gamma r) + BK_n(j\gamma r)$$

и для сферических волн в сферической системе координат

$$\frac{e^{j(\omega t \mp \gamma r)}}{r^n},$$

где $I_n(j\gamma r)$, $K_n(j\gamma r)$ – модифицированные функции Бесселя I и II рода n -порядка аргумента $j\gamma r$.

В комплексной форме полная система дифференциальных уравнений приводится к виду

$$\begin{cases} \text{I} & \text{rot } \bar{H} = j\omega \epsilon' \bar{E}; \\ \text{II} & \text{rot } \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H}; \quad \bar{D} = \epsilon \bar{E}; \\ \text{III} & \text{div } \bar{D} = 0; \quad \bar{B} = \mu \bar{H}; \\ \text{IV} & \text{div } \bar{B} = 0; \quad \bar{J}_{\text{пр}} = \gamma_{\text{пр}} \bar{E}. \end{cases} \quad (1.13)$$

В дальнейшем в (1.13) не будем ставить точки над векторами.

1.4 Векторные и скалярные потенциалы

Векторные и скалярные потенциалы вводят для упрощения решения векторных неоднородных волновых уравнений (1.10).

Вместо решения двух уравнений для векторов \bar{E} и \bar{H} определяется одно для векторного потенциала \bar{A} (или \bar{A}'), связанного следующими простыми соотношениями с векторами поля:

$$\begin{cases} \bar{B} = \text{rot } \bar{A}; \quad \bar{E} = \text{rot } \bar{A}'; \\ \bar{E} = -\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \text{grad } v; \quad \bar{H} = \epsilon \frac{\partial \bar{A}'}{\partial t} + \gamma_{\text{пр}} \bar{A}' - \text{grad } v_{\text{м}}, \end{cases} \quad (1.14)$$

где \bar{A} – векторный электрический потенциал; \bar{A}' – векторный магнитный потенциал; v , $v_{\text{м}}$ – скалярные потенциалы электрического и магнитного поля.

Векторные и скалярные потенциалы удовлетворяют неоднородным волновым уравнениям

$$\begin{cases} \nabla^2 \bar{A} - \mu \gamma_{\text{пр}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = -\mu \bar{J}_{\text{см}}; \quad \nabla^2 \bar{A}' - \mu \gamma_{\text{пр}} \frac{\partial \bar{A}'}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{A}'}{\partial t^2} = 0; \\ \nabla^2 v - \mu \gamma_{\text{пр}} \frac{\partial v}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad \nabla^2 v_{\text{м}} - \mu \gamma_{\text{пр}} \frac{\partial v_{\text{м}}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 v_{\text{м}}}{\partial t^2} = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Между векторными и скалярными потенциалами существует связь в виде соотношений:

$$\operatorname{div} \bar{A} = -\mu\gamma_{\text{пр}}v - \mu\varepsilon \frac{\partial v}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \bar{A}' = -j\gamma \frac{\dot{v}}{\omega}; \quad \operatorname{div} \bar{A}' = \mu \frac{\partial v_M}{\partial t}; \quad \operatorname{div} \bar{A}' = j\omega\mu\dot{v}_M, \quad (1.16)$$

а напряженности \bar{E} и \bar{H} через векторные потенциалы определяются как

$$\bar{E} = -j\omega \left(\bar{A} + \frac{1}{\gamma^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} \right); \quad \bar{H} = -j\omega\varepsilon \left(\bar{A}' + \frac{1}{\gamma^2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A}' \right). \quad (1.17)$$

В качестве доказательства правильности выражений (1.14) – (1.17), например для \bar{E} и \bar{H} , подставим значения \bar{E} и \bar{H} в I уравнение Максвелла (1.5)

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \bar{A} = -\gamma_{\text{пр}} \frac{\partial \bar{A}'}{\partial t} - \gamma_{\text{пр}} \operatorname{grad} U - \varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} U + \bar{J}_{\text{ст}},$$

затем воспользуемся тождеством

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \bar{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \nabla^2 \bar{A}$$

и сгруппируем слагаемые так

$$\nabla^2 \bar{A} - \mu\gamma_{\text{пр}} \frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = \gamma_{\text{пр}} \operatorname{grad} v + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} v - \operatorname{grad} \operatorname{div} \bar{A} - \mu \bar{J}_{\text{ст}},$$

ЧТО С УЧЕТОМ (1.15) И (1.16) ПОЛУЧАЕМ РАВЕНСТВО НУЛЮ КАК ЛЕВОЙ, ТАК И ПРАВОЙ ЧАСТЕЙ.

Для стационарных полей $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = 0$ неоднородные волновые уравнения (1.15) переходят в уравнения Пуассона

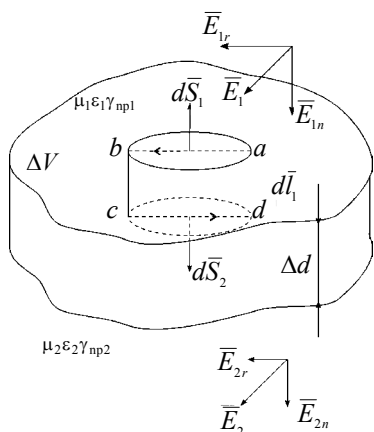
$$\nabla^2 \bar{A} = -\mu \bar{J}_{\text{ст}}; \quad \nabla^2 v = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.18)$$

и уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \bar{A}' = 0; \quad \nabla^2 v_M = 0. \quad (1.19)$$

1.5 Граничные условия для векторов поля

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме, содержащие производные от составляющих векторов поля $\bar{E}, \bar{D}, \bar{H}, \bar{B}, \bar{J}$ по координатам, теряют смысл в точках разрыва на границах раздела сред с различными параметрами $\varepsilon, \mu, \gamma_{\text{пр}}$.



Для определения граничных условий предполагают, что граница раздела двух сред обладает некоторой малой толщиной, в пределах которой происходит непрерывный переход от параметров первой среды к параметрам второй среды. Такое же непрерывное изменение происходит и с векторами поля. Далее, устремляя толщину границы раздела к нулю, осуществляют предельный переход и получают граничные условия, определяющие поведение векторов поля на границе раздела.

Рассмотрим границу раздела двух сред (рис. 1.2) при отсутствии на ней сторонних зарядов.

Допустим, что толщина границы раздела равна Δd . За основу вывода примем уравнения Максвелла в интегральной форме. Циркуляцию векторов \bar{E} и \bar{H} определим по бесконечно малому контуру $abcd$, а потоки векторов $\bar{D}, \bar{B}, \bar{J}$ через замкнутую поверхность бесконечно малого объема ΔV высотой Δd найдем, устремив толщину границы к нулю, т.е.

$$\text{I} \quad \oint_{abcd} \bar{H} d\bar{l} = H_{1r} dl_1 - H_{2r} dl_2 = (H_{1r} - H_{2r}) dl = \left(\bar{J}_{\text{np}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) dS_{abcd} = 0,$$

так как $dS_{abcd} \rightarrow 0$ при $\Delta d \rightarrow 0$;

$$\text{II} \quad \oint_{abcd} \bar{E} d\bar{l} = E_{1r} dl_1 - E_{2r} dl_2 = (E_{1r} - E_{2r}) dl = -\frac{d\Phi}{dt} = 0, \text{ так как } d\Phi \rightarrow 0 \text{ при } \Delta d \rightarrow 0;$$

$$\text{III} \quad \oint_S \bar{D} d\bar{S} = D_{1n} dS_1 - D_{2n} dS_2 = (D_{1n} - D_{2n}) dS = q \text{ или}$$

$$D_{1n} - D_{2n} = \frac{q}{dS} = \sigma_{\text{пов}};$$

$$\text{IV} \quad \oint_S \bar{B} d\bar{S} = B_{1n} dS_1 - B_{2n} dS_2 = (B_{1n} - B_{2n}) dS \text{ или } B_{1n} - B_{2n} = 0.$$

Кроме того, определим разность двух циркуляций вектора \bar{H} по контурам элементов поверхности dS_1 и dS_2 .

$$\begin{aligned} \oint_{dS_1} \bar{H} d\bar{l} - \oint_{dS_2} \bar{H} d\bar{l} &= (H_{1\tau} - H_{2\tau}) L = \int_{dS_1} \left(\bar{J}_{\text{np}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) d\bar{S} - \int_{dS_2} \left(\bar{J}_{\text{np}} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \right) d\bar{S} = \\ &= \left(\bar{J}_{1n} + \frac{\partial D_{1n}}{\partial t} - \bar{J}_{2n} - \frac{\partial D_{2n}}{\partial t} \right) dS = 0 \end{aligned}$$

$$\text{или } \bar{J}_{1n} + \frac{\partial D_{1n}}{\partial t} = \bar{J}_{2n} + \frac{\partial D_{2n}}{\partial t}.$$

В результате на границе раздела двух сред непрерывны тангенциальные составляющие векторов \bar{E}, \bar{H} :

$$H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau} \quad (1.20)$$

и нормальные составляющие векторов $\bar{B}, \bar{J}_{\text{np}} + \frac{d\bar{D}}{dt}, \bar{D}$:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad J_{1n} + \frac{\partial D_{1n}}{\partial t} = J_{2n} + \frac{\partial D_{2n}}{\partial t}, \quad D_{1n} = D_{2n} \quad (1.21)$$

при равенстве нулю поверхностной плотности заряда $\sigma_{\text{пов}}$, так как в общем случае $D_{1n} - D_{2n} = \sigma_{\text{пов}}$.

Соответственно разрыв на границе претерпевают нормальные составляющие \bar{H} и \bar{E} и тангенциальные составляющие $\bar{B}, \bar{J}_{\text{np}} + \frac{d\bar{D}}{dt}, \bar{D}$.

1.6 Закон сохранения энергии электромагнитного поля

Выделим в электромагнитном поле некоторый объем V , ограниченный поверхностью S , и составим уравнение баланса энергии в нем. Для этого второе уравнение Максвелла (1.6) умножим скалярно на вектор \bar{H} , а первое уравнение Максвелла (1.5) – на вектор \bar{E} и вычтем из первого произведения второе:

$$\begin{array}{l} \text{rot } \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} \\ \text{rot } \bar{H} = \bar{J}_{\text{cr}} + \gamma_{\text{np}} \bar{E} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \bar{H} \\ (-) \\ \bar{E} \end{array} \right.$$

$$\bar{H} \text{rot } \bar{E} - \bar{E} \text{rot } \bar{H} = -\bar{H} \frac{\partial \bar{B}}{\partial t} - \bar{J}_{\text{cr}} \bar{E} - \gamma_{\text{np}} \bar{E} \bar{E} + \bar{E} \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}.$$

С учетом векторного тождества $\text{div}[\bar{E}\bar{H}] = \bar{H} \text{rot } \bar{E} - \bar{E} \text{rot } \bar{H} = \text{div } \bar{\Pi}$ находим

$$\operatorname{div} \bar{\Pi} + \bar{E} \bar{J}_{\text{cr}} + \gamma_{\text{np}} E^2 + \mu \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \varepsilon \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0. \quad (1.22)$$

Это уравнение называют теоремой Пойтинга в дифференциальной форме для мгновенных значений векторов поля.

Проинтегрируем выражение по объему V и, используя теорему Остроградского-Гаусса, на основании которой

$$\int_V \operatorname{div} \bar{\Pi} dV = \oint_S \bar{\Pi} d\bar{S},$$

получаем теорему Пойтинга в интегральной форме для мгновенных значений векторов поля

$$\oint_S \bar{\Pi} d\bar{S} + \int_V \bar{E} \bar{J}_{\text{cr}} dV + \int_V \gamma_{\text{np}} E^2 dV + \int_V \left(\mu \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \varepsilon \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) dV = 0, \quad (1.23)$$

где интегралы $\oint_S \bar{\Pi} d\bar{S}$ – поток вектора плотности мощности электромагнитного поля $\bar{\Pi}$ через замкнутую

поверхность S , охватывающую объем V , $\bar{\Pi} = [\bar{E} \bar{H}] \rightarrow \left[\begin{smallmatrix} \text{В} & \text{А} \\ \text{м} & \text{м} \end{smallmatrix} \right] = \left[\frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{м}^2} \right]$, $\bar{\Pi} d\bar{S} \rightarrow [BA]$;

$\int_V \bar{E} \bar{J}_{\text{cr}} dV$ – мощность источника сторонних токов в объеме V ;

$\int_V \gamma_{\text{np}} E^2 dV$ – мощность тепловых электрических потерь в V ;

$$\int_V \left(\mu \bar{H} \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} + \varepsilon \bar{E} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} \right) dV =$$

$$= \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu H^2}{2} + \frac{\varepsilon E^2}{2} \right) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (W_m + W_3) dV = \frac{\partial}{\partial t} (W_m + W_3) -$$

мощность электромагнитного поля, сосредоточенная в объеме V .

Сумма мощностей источников сторонних токов, тепловых потерь, магнитного и электрического полей, сосредоточенных в объеме, и мощности электромагнитного поля, проходящего через поверхность S объема V , равна нулю, что позволяет рассматривать выражение (1.23) в качестве уравнения баланса мгновенных мощностей в пространстве объема V , ограниченном поверхностью.

Для определения баланса комплексных, активных и реактивных мощностей в пространстве второе уравнение Максвелла (1.13) для комплексных амплитуд векторов поля умножим скалярно на сопряженное значение комплексной амплитуды вектора \bar{H}^* (у которой обратный знак мнимой части \dot{H}), а первое уравнение Максвелла для сопряженных комплексных амплитуд – на вектор \bar{E} и вычтем из первого произведения второе, т.е.

$$\begin{array}{l} \operatorname{rot} \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H} \\ \operatorname{rot} \bar{H}^* = \bar{J}_{\text{cr}}^* + \gamma_{\text{np}} \bar{E}^* - j\omega \varepsilon \bar{E}^* \end{array} \quad \begin{array}{l} \bar{H}^* \\ \bar{E} \end{array}$$

$$\bar{H}^* \operatorname{rot} \bar{E} - \bar{E} \operatorname{rot} \bar{H}^* = -j\omega \mu \bar{H} \bar{H}^* - j^* \bar{E} - \gamma_{\text{np}} \bar{E}^* \bar{E} + j\omega \mu \bar{E}^* \bar{E}.$$

С учетом векторного тождества $\operatorname{div} [\bar{E} \bar{H}^*] = \bar{H}^* \operatorname{rot} \bar{E} - \bar{E} \operatorname{rot} \bar{H}^*$, а также значений $\bar{E} \bar{E}^* = |\bar{E}|^2 = E_m^2$, $\bar{H} \bar{H}^* = |\bar{H}|^2 = H_m^2$ получаем

$$\operatorname{div} [\bar{E} \bar{H}^*] + \bar{J}_{\text{cr}} \bar{E} + \gamma_{\text{np}} E_m^2 + j\omega (\mu H_m^2 - \varepsilon E_m^2) = 0, \quad (1.24)$$

а после интегрирования по объему V , деления всего выражения на 2 и использования теоремы Остроградского-Гаусса –

$$\oint_S \frac{[\vec{E}\vec{H}^*]}{2} dS + \int_V \frac{\vec{J}_{\text{ст}}^* \vec{E}}{2} dV + \int_V \frac{\gamma_{\text{пр}} E_m^2 dV}{2} + \int_V j\omega \left(\frac{\mu H_m^2}{2} - \frac{\varepsilon E_m^2}{2} \right) dV. \quad (1.25)$$

Выражения (1.24) называют теоремой Пойнтинга в дифференциальной и (1.25) в интегральной формах для комплексных амплитуд векторов поля.

Величины $\gamma_{\text{пр}}$, ω , μ , ε , E_m^2 , H_m^2 являются действительными, поэтому третий интеграл в (1.25), представляющий собой усредненную за период колебаний мощность тепловых потерь, всегда величина действительная, а четвертый интеграл – представляющий мощность, затраченную на создание магнитного и электрического полей в объеме V – всегда величина мнимая.

Разделяя действительные и мнимые части в (1.25), напишем отдельно баланс активных и реактивных мощностей в пространстве:

$$\oint_S \operatorname{Re} \frac{1}{2} [\vec{E}\vec{H}^*] d\vec{S} + \int_V \operatorname{Re} \frac{1}{2} \vec{J}_{\text{ст}}^* \vec{E} dV + \int_V \gamma_{\text{пр}} \frac{E_m^2}{2} dV = 0; \quad (1.26)$$

$$\oint_S \operatorname{Im} \frac{1}{2} [\vec{E}\vec{H}^*] d\vec{S} + \int_V \operatorname{Im} \frac{1}{2} \vec{J}_{\text{ст}}^* \vec{E} dV + \int_V \omega \left(\frac{\mu H_m^2}{2} - \frac{\varepsilon E_m^2}{2} \right) dV = 0. \quad (1.27)$$

Рассмотрим баланс мощностей в частных случаях.

1 В объеме V отсутствуют источники сторонних электрических токов:

$$\int_S \operatorname{Re} \frac{1}{2} [\vec{E}\vec{H}^*] d\vec{S} = - \int_V \gamma_{\text{пр}} \frac{E_m^2}{2} dV; \quad \oint_S \operatorname{Im} \frac{1}{2} [\vec{E}\vec{H}^*] d\vec{S} = - \int_V \omega \left(\frac{\mu H_m^2}{2} - \frac{\varepsilon E_m^2}{2} \right) dV. \quad (1.28)$$

В этом случае, как видно из баланса мощностей (1.28), тепловые потери компенсируются за счет притока действительной части потока электромагнитной энергии в объем V , а реактивная мощность, затрачиваемая на создание магнитного поля и электрического поля токов смещения в объеме V – за счет притока мнимой части потока.

2 В объеме V отсутствуют источники сторонних электрических токов и тепловые потери ($\gamma_{\text{пр}} = 0$), как, например, в объемном резонаторе:

$$\oint_S \operatorname{Im} \frac{1}{2} [\vec{E}\vec{H}^*] d\vec{S} = - \int_V \omega \left(\frac{\mu H_m^2}{2} - \frac{\varepsilon E_m^2}{2} \right) dV. \quad (1.29)$$

Реактивная мощность, затрачиваемая на создание электромагнитного поля в объемном резонаторе, компенсируется за счет притока мнимой части потока электромагнитного поля, которая может иметь как индуктивный при $\mu H_m^2 > \varepsilon E_m^2$, так и емкостной характер при $\mu H_m^2 < \varepsilon E_m^2$. При резонансе, когда энергия магнитного поля равна энергии электрического поля токов смещения, мнимая часть потока стремится к нулю.

3 При распространении плоских волн в воздухе, т.е. в среде без потерь, удельные энергии $\mu H_m^2 = \varepsilon E_m^2$, $H_m \sqrt{\mu} = E_m \sqrt{\varepsilon}$, баланс активных и реактивных мощностей тождественно равен нулю, т.е. $0 = 0$. Поэтому распространение плоских волн в прозрачных средах ($\gamma_{\text{пр}} \rightarrow 0$) происходит без затраты энергии.

4 При распространении плоских волн в проводниках $\varepsilon \ll \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega}$, т.е. в среде с потерями, токами смещения можно пренебречь по сравнению с токами проводимости. Тогда при отсутствии источников сторонних электрических токов баланс мощностей следующий

$$\oint_S \operatorname{Re} \frac{1}{2} [\vec{E}\vec{H}^*] d\vec{S} = - \int_V \gamma_{\text{пр}} \frac{E_m^2}{2} dV; \quad \oint_S \operatorname{Im} \frac{1}{2} [\vec{E}\vec{H}^*] d\vec{S} = - \int_V \omega \frac{\mu H_m^2}{2} dV, \quad (1.30)$$

т.е. электромагнитные волны в объеме затухают, отдавая часть энергии на нагрев проводников, реактивная часть мощности потока энергии при этом идет на компенсацию затрат поля по созданию вихревого магнитного поля и имеет индуктивный характер, проявляется так называемый поверхностный эффект. Подобный баланс мощностей можно записать для устройств электротермической закалки, нагрева.

Глава 2 ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОЛЯ. МЕТОДЫ ИХ РАСЧЕТА

2.1 Потенциальные поля. Основные особенности

Основным признаком потенциальности поля в дифференциальной форме является равенство нулю ротора вектора напряженности поля, а в интегральной форме – циркуляции вектора по замкнутому контуру, т.е.

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad \text{или} \quad \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0 \quad \text{для электрического поля;}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = 0 \quad \text{или} \quad \oint_L \vec{H} d\vec{l} = 0 \quad \text{для магнитного поля.}$$

В этом случае вектор напряженности поля может быть определен через градиент скалярного потенциала, так как ротор от градиента тождественно равен нулю, т.е. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$ или $\vec{E} = -\operatorname{grad} U$, $\vec{H} = -\operatorname{grad} U_m$, а разность потенциалов определяется как

$$v_a - v_b = \int_a^b \vec{E} d\vec{l}, \quad v_{Ma} - v_{Mb} = \int_a^b \vec{H} d\vec{l}. \quad (2.1)$$

По размерности v определяется в вольтах, v_m – в амперах.

К потенциальным полям относятся и их свойства определяют:

- электростатические (магнитостатические) поля, законы Кулона и теорема Гаусса;
- электрическое поле постоянного тока в проводниках, законы Ома, Кирхгофа, Джоуля-Ленца;
- магнитное поле постоянного тока в области, где плотность тока проводимости равна нулю, законы Ампера, Био-Савара.

Источниками потенциальных полей в случае электро- и магнитостатических полей являются заряды, $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ или $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = q$, в остальных случаях, плотности тока проводимости,

$$\operatorname{div} \vec{J}_{np} = 0; \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0; \quad \oint_S \vec{J}_{np} d\vec{S} = 0; \quad \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Силовые линии напряженностей статических полей начинаются и заканчиваются на зарядах, а электрического и магнитного поля постоянного тока всегда замкнуты, не имеют ни начала, ни конца.

Система интегральных и дифференциальных уравнений для потенциальных полей может быть получена из (1.1) – (1.8), принимая $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, т.е для электростатического поля:

$$\begin{cases} \text{II} & \left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} v; \\ \text{III} & \left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = q, \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho, \quad -\operatorname{div} \epsilon \operatorname{grad} v = \rho, \quad \nabla^2 v = -\frac{\rho}{\epsilon}, \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases} \quad (2.2)$$

для электрического поля постоянного тока в проводящей среде:

$$\begin{cases} \text{II} & \left\{ \begin{array}{l} \oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = 0, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} v; \\ \text{I} & \left\{ \begin{array}{l} \oint_S \vec{J}_{np} d\vec{S} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{J}_{np} = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{grad} v = \nabla^2 v = 0, \end{array} \right. \end{array} \right. \end{cases} \quad (2.3)$$

для магнитного поля постоянного тока:

$$\begin{cases} \text{I} & \left\{ \oint_L \bar{H} d\bar{l} = 0, \quad \text{rot } \bar{H} = 0, \quad \bar{H} = -\text{grad} v_M; \right. \\ \text{IV} & \left. \left\{ \oint_S \bar{B} d\bar{S} = 0, \quad \text{div } \bar{B} = 0, \quad \text{div grad } v_M = \nabla^2 v_M = 0, \right. \right. \end{cases} \quad (2.4)$$

Потенциальные поля имеют пространственное распределение. Удельные объемные плотности энергии электростатического и магнитного поля постоянного тока на основании (1.23) равны $\frac{\varepsilon E^2}{2}$, $\frac{\mu H^2}{2}$, а удельная мощность тепловых электрических потерь – $\gamma_{\text{np}} E^2$. Вся энергия электростатического и магнитного поля постоянного тока и вся мощность тепловых электрических потерь, сосредоточенные в пространстве, определяются объемными интегралами $\int_V \left(\frac{\mu H^2}{2} + \frac{\varepsilon E^2}{2} \right) dV$; $\int_V \gamma_{\text{np}} E^2 dV$, где E , H – результирующие напряженности электрического и магнитного поля в объеме dV .

Любой объем V можно представить в виде суммы бесконечно малых объемов $dV = d\bar{S} d\bar{l}$ с $d\bar{S} \perp d\bar{l}$ и $d\bar{S} \parallel \bar{E}$ или \bar{H} .

$$\left\{ \begin{aligned} \int_V \gamma_{\text{np}} E^2 dV &= \int_V \gamma_{\text{np}} \bar{E} \bar{E} d\bar{S} d\bar{l} = \int_V \bar{J}_{\text{np}} d\bar{S} \bar{E} d\bar{l} = \int_V \frac{\bar{E} d\bar{l}}{\bar{J}_{\text{np}} d\bar{S}} (\bar{J}_{\text{np}} d\bar{S})^2 = \\ &= \int_V R(dV) (\bar{J}_{\text{np}} d\bar{S})^2 \cong \sum_{i=1}^n R_i I_i^2; \\ \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2} dV &= \int_V \frac{\varepsilon \bar{E}}{2} \bar{E} d\bar{S} d\bar{l} = \int_V \frac{\bar{D} d\bar{S}}{2} \bar{E} d\bar{l} = \int_V \frac{\bar{D} d\bar{S}}{2 \bar{E} d\bar{l}} (\bar{E} d\bar{l})^2 = \\ &= \int_V \frac{C(dV)}{2} (\bar{E} d\bar{l})^2 \cong \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{2} (\bar{E} d\bar{l})^2; \\ \int_V \frac{\mu H^2}{2} dV &= \int_V \frac{\mu \bar{H}}{2} \bar{H} d\bar{S} d\bar{l} = \int_V \frac{\bar{B} d\bar{S}}{2} \bar{H} d\bar{l} = \int_V \frac{\bar{B} d\bar{S}}{2 \bar{H} d\bar{l}} (\bar{H} d\bar{l})^2 = \\ &= \int_V \frac{L(dV)}{2} (\bar{H} d\bar{l})^2 \cong \sum_{i=1}^n \frac{L_i}{2} (\bar{H} d\bar{l})^2, \end{aligned} \right. \quad (2.5)$$

где R_i , C_i , L_i – интегральные параметры пространства: сопротивление, емкость и индуктивность объема dV , в котором $d\bar{S} \perp d\bar{l}$, $d\bar{S} \parallel \bar{E}$ при определении R_i и $d\bar{S} \perp \bar{E}$ и \bar{H} при определении C_i и L_i , т.е.

$$\frac{1}{R_i} = \frac{\bar{J}_{\text{np}} d\bar{S}}{\bar{E} d\bar{l}}; \quad C_i = \frac{\bar{D} d\bar{S}}{\bar{E} d\bar{l}}; \quad L_i = \frac{\bar{B} d\bar{S}}{\bar{H} d\bar{l}} = \frac{1}{R_{mi}},$$

для уединенных проводников

$$\frac{1}{R} = \frac{\int_S \bar{J}_{\text{np}} d\bar{S}}{\int_L \bar{E} d\bar{l}} = \frac{I}{v}; \quad C = \frac{\int_S \bar{D} d\bar{S}}{\int_L \bar{E} d\bar{l}} = \frac{q}{v}; \quad L = \frac{\int_S \bar{B} d\bar{S}}{\int_L \bar{H} d\bar{l}} = \frac{\Phi}{I}.$$

Потенциальные поля – силовые поля, поэтому широко используются на практике, в частности, в системах ориентации и стабилизации для подвеса шарового ротора гироскопа, в электронно-лучевых трубках для ускорения и отклонения электронного пучка.

Суммарная сила \bar{F} , действующая на движущийся заряд, определяется силой Лоренца

$$\bar{F} = \bar{F}_e + \bar{F}_m = q_e (\bar{E} + [\bar{v} \bar{B}]). \quad (2.6)$$

Так в электростатическом однородном поле \bar{E} жесткий диполь за счет возникающего электрического момента \bar{M} поворачивается по направлению поля, как показано на рис. 2.1:

$$\bar{M} = qlE \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta = P_e \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta = [\bar{P}_e \bar{E}], \quad (2.7)$$

а в неоднородном поле совершает дополнительное поступательное движение

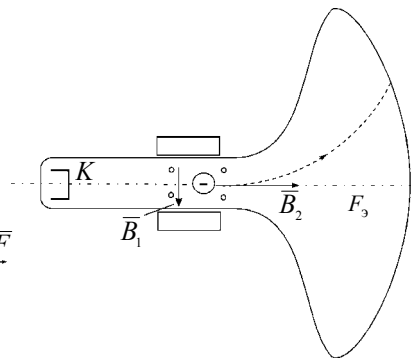
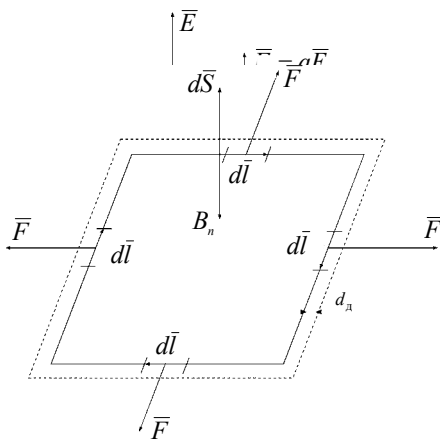


Рис. 2.3

$$\Delta \bar{E} = \bar{E}' - \bar{E} = dl \frac{\partial \bar{E}}{\partial l} = dl \operatorname{grad} \bar{E}.$$

В частности аналогичное явление в магнитостатике используется для подъема металлических предметов с помощью постоянных магнитов и для магнитного подвеса ротора гироскопа.

В лучевой трубке электрон за счет электрического поля \bar{E} , созданного между катодом и экраном (анодом), испытывает силовое воздействие $\bar{F}_3 = -e\bar{E}$ по оси трубки и приобретает скорость

\bar{v} (рис. 2.2), а за счет магнитного поля \bar{B}_1 отклоняется в горизонтальной плоскости, а за счет \bar{B}_2 – в вертикальной плоскости.

При воздействии магнитного поля \bar{B} на контур с постоянным током I возникает сила \bar{F} в соответствии с законом Ампера, действующая на элемент $Id\bar{l}$:

$$\bar{F} = [Id\bar{l}\bar{B}] = [Id\bar{l}\bar{B}] \frac{d_n}{d_d} = [Id\bar{l}\bar{B}] \frac{\bar{d}_n \bar{l}_d}{d_d} = I\bar{B}[d_n d\bar{l}] \frac{1}{d_d} \bar{l}_d = I\bar{B}d\bar{S} \frac{1}{d_d} \bar{l}_d = I \frac{d\Phi}{d_d} \bar{l}_d,$$

которая вызывает перемещение или деформацию контура, сопровождаемые изменением магнитного потока, пронизывающего площадку, охватываемую контуром (рис. 2.3).

B_n – стремится растянуть (сжать) контур, B_τ – развернуть его так, чтобы $d\bar{S} \parallel B_\tau \bar{l}_d$.

2.2 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

Математическую аналогию дифференциальных уравнений и ее применение к некоторым задачам расчета рассмотрим на примере трех потенциальных полей (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Электростатическое поле в диэлектрике при $\rho = 0$	Поле постоянного тока в проводящей среде при ЭДС = 0	Магнитное поле постоянного тока в магнетике при $\bar{J}_{\text{пр}} = 0$
$\operatorname{rot} \bar{E} = 0$	$\operatorname{rot} \bar{E} = 0$	$\operatorname{rot} \bar{H} = 0$
$\operatorname{div} \bar{D} = 0$	$\operatorname{div} \bar{J}_{\text{пр}} = 0$	$\operatorname{div} \bar{B} = 0$
$\bar{D} = \epsilon \bar{E} = \epsilon_0 \bar{E} + \bar{P} = \epsilon_0(1 + \chi) \bar{E}$	$\bar{J}_{\text{пр}} = \gamma_{\text{пр}} \bar{E}$	$\bar{B} = \mu \bar{H} = \epsilon_0 \bar{H} + \bar{J} = \mu_0(1 + \chi_m) \bar{H}$
$\bar{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\bar{P}_{M\Delta V}}{\Delta V}$		$\bar{J} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\bar{J}_{M\Delta V}}{\Delta V}$
$\bar{E} = -\operatorname{grad} v, \nabla^2 v = 0$	$\bar{E} = -\operatorname{grad} v, \nabla^2 v = 0$	$\bar{H} = -\operatorname{grad} v_m, \nabla^2 v_m = 0$
$\Psi_D = \int_S \bar{D} d\bar{S}$	$I = \int_S \bar{J}_{\text{пр}} d\bar{S}$	$\Psi_B = \int_S \bar{B} d\bar{S}$
Граничные условия		
$D_{n1} = D_{n2}$	$\bar{J}_{\text{пр}n1} = \bar{J}_{\text{пр}n2}$	$B_{n1} = B_{n2}$
$E_{1\tau} = E_{2\tau}$	$E_{1\tau} = E_{2\tau}$	$H_{1\tau} = H_{2\tau}$
Аналогичные величины		
\bar{E}	\bar{E}	\bar{H}
\bar{D}	$\bar{J}_{\text{пр}}$	\bar{B}

ε	$\gamma_{\text{пр}}$	μ
U	U	U_M
Ψ_D	I	Ψ_B
$C = \frac{q}{v} = \frac{\oint \bar{D} d\bar{S}}{\int_L \bar{E} d\bar{l}} = \frac{2W_3}{U^2}$	$\frac{1}{R} = \frac{I}{v} = \frac{\int \bar{J}_{\text{пр}} d\bar{S}}{\int \bar{E} d\bar{l}} = \frac{I^2}{P}$	$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\int \bar{B} d\bar{S}}{\oint \bar{H} d\bar{l}} = \frac{1}{R_M} = \frac{2W_M}{I^2}$
$W_3 = \int_V \frac{\varepsilon E^2}{2} dV = \frac{Cv^2}{2}$	$P = \int_V \gamma_{\text{пр}} E^2 dV = I^2 R$	$W_M = \int_V \frac{\mu H^2}{2} dV = \frac{I^2 L}{2}$

Математическая аналогия дифференциальных уравнений различных потенциальных полей позволяет проводить их моделирование как физическое с использованием, например, метода электро моделирования в электролитических ваннах или с помощью проводящей бумаги, так и математическое с использованием ЭВМ.

2.3 Уравнение Пуассона. Решения для скалярного и векторного потенциалов

Для расчета полей в однородных средах при известном распределении зарядов или токов в рассматриваемом объеме исходным является уравнение Пуассона (1.18):

$$\nabla^2 v = -\frac{\rho}{\varepsilon}; \quad \nabla^2 \bar{A} = -\mu \bar{J}_{\text{пр}}. \quad (2.8)$$

Частным решением неоднородного уравнения Пуассона для точечного, объемного ρ , поверхностного σ и линейного τ зарядов является сумма интегралов [9]

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho}{r} dV + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_S \frac{\sigma}{r} dS + \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_L \frac{\tau}{r} dl. \quad (2.9)$$

Так, потенциал бесконечно малого заряда q равен

$$U_r - U_\infty = \int_r^\infty E_r dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi r^2 \varepsilon} dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon r} \Big|_r^\infty, \quad U_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon r},$$

а q заряд можно представить в виде объемного, поверхностного или линейного интегралов.

Векторное уравнение Пуассона в декартовой системе координат эквивалентно трем скалярным уравнениям:

$$\nabla^2 \bar{A} = \nabla^2 A_x \bar{i}_x + \nabla^2 A_y \bar{i}_y + \nabla^2 A_z \bar{i}_z = -\mu (J_{\text{пр}x} \bar{i}_x + J_{\text{пр}y} \bar{i}_y + J_{\text{пр}z} \bar{i}_z); \quad (2.10)$$

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_{\text{пр}x}; \quad \nabla^2 A_y = -\mu J_{\text{пр}y}; \quad \nabla^2 A_z = -\mu J_{\text{пр}z},$$

решениями которых по аналогии с потенциалом U служат интегралы

$$A_x = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_{\text{пр}x}}{r} dV; \quad A_y = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_{\text{пр}y}}{r} dV; \quad A_z = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_{\text{пр}z}}{r} dV,$$

а так как $\bar{A} = A_x \bar{i}_x + A_y \bar{i}_y + A_z \bar{i}_z$, то

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_{\text{пр}x} \bar{i}_x + J_{\text{пр}y} \bar{i}_y + J_{\text{пр}z} \bar{i}_z}{r} dV = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}_{\text{пр}}}{r} dV. \quad (2.11)$$

Формулы (2.9) и (2.11) дают возможность по заданному распределению зарядов и токов найти скалярный U и векторный потенциалы \bar{A} и затем определить \bar{E} , \bar{D} и \bar{B} , \bar{H} из соотношений

$$\bar{E} = -\text{grad } v, \quad \bar{D} = \varepsilon \bar{E}; \quad \bar{B} = \text{rot } \bar{A}, \quad \bar{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \bar{A}.$$

Как и в случае линейного распределения зарядов при линейных токах, когда поперечные размеры проводников пренебрежимо малы по сравнению с длиной и расстоянием r до точки наблюдения, формула (2.11) упрощается и соответствует закону Био-Савара:

$$\bar{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}_{\text{пр}}}{r} d\bar{S} d\bar{l} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{d\bar{l}}{r}; \quad \bar{H} = \frac{I}{4\pi} \int_L \text{rot} \left(\frac{d\bar{l}}{r} \right) = \frac{I}{4\pi} \int_L \frac{d\bar{l} \times \bar{r}}{r^3}. \quad (2.12)$$

2.4 Методы решения уравнения Лапласа

Существует несколько методов решения уравнения Лапласа $\nabla^2 v = 0$. Подробно известные методы описаны, например, в учебнике для студентов вузов [2].

Условия, при выполнении которых решение уравнения, полученное каким-либо методом, можно считать единственным, определяются теоремой единственности.

Она формулируется следующим образом.

Из множества функций, являющихся решениями уравнения Лапласа, существует только одна, удовлетворяющая граничным условиям, т.е. если каким-то путем удалось найти решение граничной задачи, то оно и только оно является искомым решением. Из теоремы единственности следует также, что если две функции, представляющие собой решения уравнения Лапласа, совпадают на поверхности S , ограничивающей объем V , то они совпадают во всем объеме V .

Рассмотрим некоторые методы решения уравнения Лапласа на конкретных примерах.

1 *Метод разделения переменных применительно к определению магнитного поля полой стальной сферической оболочки, расположенной в однородном магнитном поле.*

Полую стальную сферическую оболочку с внутренним r_1 и внешним r_2 радиусами поместим в однородное магнитное поле с напряженностью H_0 , например, в поле Земли $H_{0\text{гор}} = 40$ А/м, $B_{0\text{гор}} = 5,0 \cdot 10^{-5}$ Тл (рис. 2.4).

В этом случае скалярный потенциал магнитного поля U_M , внутри и в стенке оболочки, а также во внешней среде удовлетворяет уравнению Лапласа, которое в сферической системе координат с учетом независимости потенциала от угла φ из-за симметрии системы состоит из двух слагаемых

$$\nabla^2 v_M = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dv_M}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{dv_M}{d\vartheta} \right) = 0. \quad (2.13)$$

После замены v_M произведением двух функций $X(\vartheta)Y(r)$, т.е. $U_M = X(\vartheta)Y(r)$, каждая из которых зависит только от одной координаты ϑ или r , и разделения переменных уравнение (2.13) переходит в два равенства

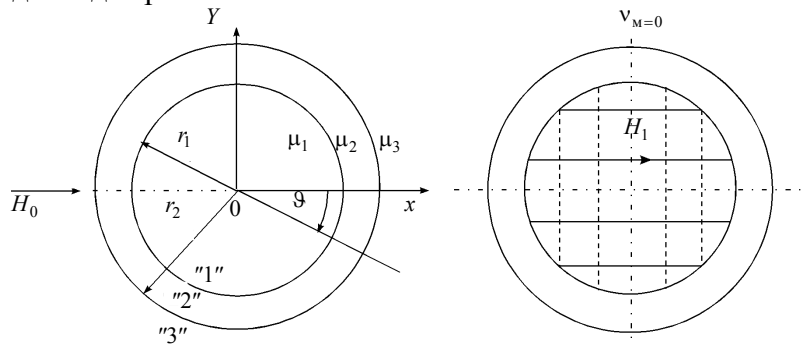


Рис. 2.4

$$\frac{1}{Y(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial Y(r)}{\partial r} \right) = \lambda; \quad - \frac{1}{X(\vartheta) \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial X(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right) = \lambda,$$

где λ – постоянная величина.

Первое равенство из этой системы называется уравнением Эйлера, решением которого [10] является сумма

$$Y(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}, \quad (2.14)$$

где A_n, B_n – постоянные величины; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$; $\lambda = n(n+1)$.

Второе равенство при $\lambda = n(n+1)$ приводит к уравнению Лежандра [10], решением которого служит полином Лежандра от аргумента $\cos \vartheta$, т.е. $X(\vartheta) = P_n(\cos \vartheta)$.

Общее решение для скалярного потенциала представляется в виде суммы

$$U_M = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \vartheta). \quad (2.15)$$

Истинным решением уравнения Лапласа для исследуемой задачи из этой суммы является слагаемое при $n = 1$, так как только оно удовлетворяет граничным условиям

$$U_M = (Ar + Br^{-2})P_1(\cos \vartheta) = (Ar + Br^{-2})\cos \vartheta. \quad (2.16)$$

При $n = 0$ решение $v_{M1} = Ar + Br^{-1}$ не удовлетворяет исследуемой задаче, так как при $r \rightarrow 0$ внутри сферы v_{M0} стремится к бесконечности, при $n = 2, 3, \dots$ полиномы $P_n(\cos \vartheta)$ не обеспечивают граничные условия.

Принимая внутри оболочки при $r = 0$ потенциал $v_{M0} = 0$, для потенциала и напряженностей в каждой из трех сред находим

$$v_{M1} = A_1 r \cos \vartheta, \quad \bar{H}_1 = -\text{grad} v_{M1} = \frac{\partial v_{M1}}{\partial r} \bar{1}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial v_{M1}}{\partial \vartheta} \bar{1}_\vartheta = -A_1 \cos \vartheta \bar{1}_r + A_1 \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta;$$

$$v_{M2} = (A_2 r + B_2 r^{-2}) \cos \vartheta, \quad \bar{H}_2 = -(A_2 - 2B_2 r^{-3}) \cos \vartheta \bar{1}_r + (A_2 + B_2 r^{-3}) \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta;$$

$$v_{M3} = (A_3 r + B_3 r^{-2}) \cos \vartheta, \quad \bar{H}_3 = -(A_3 - 2B_3 r^{-3}) \cos \vartheta \bar{1}_r + (A_3 + B_3 r^{-3}) \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta.$$

На внутренней $r = r_1$ и внешней $r = r_2$ поверхностях сферы должны выполняться граничные условия, т.е. равенства нормальных составляющих индукции и равенства тангенциальных составляющих напряженности магнитного поля:

при $r = r_1$

при $r = r_2$

$$\begin{cases} \mu_1 A_1 = \mu_2 (A_2 - 2B_2 r_1^{-3}); \\ A_1 = A_2 + B_2 r_1^{-3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_2 (A_2 - 2B_2 r_2^{-3}) = \mu_3 (A_3 - 2B_3 r_2^{-3}); \\ A_2 + B_2 r_2^{-3} = A_3 + B_3 r_2^{-3}. \end{cases}$$

Решая систему равенства относительно A_3 , находим коэффициенты A_1, A_2, B_2, B_3 .

$$A_1 = \frac{9\mu_2\mu_3}{\mu_1 + 2\mu_2} \frac{A_3}{A}; \quad A_2 = 3\mu_3 \frac{A_3}{A}; \quad B_2 = -r_1^3 \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} 3\mu_3 \frac{A_3}{A};$$

$$B_3 = -r_2^3 \left(\mu_2 - \mu_3 + (2\mu_2 + \mu_3) \frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \right) \frac{A_3}{A};$$

$$A = \mu_2 + 2\mu_3 + (\mu_2 - \mu_3) 2 \frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}.$$

Для определения A_3 устремим радиус r к бесконечности. Напряженность магнитного поля H_3 при этом совпадает с напряженностью H_0 внешнего однородного поля, т.е.

$$\begin{aligned} \bar{H}_3 &= -(A_3 - 2B_3 r^{-3}) \cos \vartheta \bar{1}_r + (A_3 + B_3 r^{-3}) \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta = \\ &= -A_3 \cos \vartheta \bar{1}_r + A_3 \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta = \bar{H}_0, \end{aligned}$$

а поэтому $A_3 = -H_0$.

Внутри сферы магнитное поле всюду однородно, вектор напряженности \bar{H}_1 направлен параллельно \bar{H}_0 и равен:

$$\bar{H}_1 = H_x \bar{1}_x = -9 \frac{\mu_2\mu_3}{\mu_1 + 2\mu_2} \frac{1}{A} H_0 \bar{1}_x,$$

в теле сферической оболочки:

$$\bar{H}_2 = \left\{ - \left(1 + 2 \frac{r_1^3}{r^3} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \right) \cos \vartheta \bar{1}_r + \left(1 - \frac{r_1^3}{r^3} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \right) \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta \right\} 3\mu_3 \frac{1}{A} H_0,$$

во внешней среде равен геометрической сумме векторов напряженностей внешнего однородного поля H_0 и поля эквивалентного магнитного диполя:

$$\bar{H}_3 = \bar{H}_0 + (2 \cos \vartheta \bar{1}_r + \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta) \frac{r_2^3}{r^3} \left(\mu_2 - \mu_3 + (2\mu_2 + \mu_3) \frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_0} \right) \frac{1}{A} H_0.$$

За счет сферической оболочки во внешней среде создается дополнительное поле, определяемое вторым слагаемым в выражении \bar{H}_3 . При равенстве магнитных проницаемостей $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ дополнительного поля не существует, второе слагаемое обращается в нуль.

Дополнительное поле подобно полю эквивалентного магнитного диполя с моментом P_M , ориентированным вдоль однородного внешнего поля \bar{H}_0 и равным

$$\bar{P}_M = r_2^3 \left[\mu_2 - \mu_3 + (2\mu_2 + \mu_3) \frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2} \right] 4\pi\mu_3 \frac{1}{A} H_0 \bar{I}_x.$$

Для практики представляет определенный интерес сравнение магнитных моментов двух вариантов конструкций металлических сферических оболочек: сплошной и полой.

В случае сплошной металлической сферы $\mu_1 = \mu_3 \ll \mu_2$

$$\bar{P}_{M \text{ сплош}} = r_2^3 \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 + 2\mu_3} 4\pi\mu_3 H_0 \bar{I}_x \cong 4\pi\mu_3 r_2^3 H_0 \bar{I}_x,$$

а во втором случае тонкой металлической оболочки $\mu_1 = \mu_3 \ll \mu_2$

$$\bar{P}_{M \text{ полая}} = r_2^3 \frac{\mu_2 - \mu_3}{\mu_2 + 2\mu_3} \frac{1 - \frac{r_1^3}{r_2^3}}{1 - 2 \frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{(\mu_2 - \mu_3)^2}{(\mu_2 + 2\mu_3)^2}} 4\pi\mu_3 H_0 \bar{I}_x \cong 4\pi\mu_3 r_2^3 H_0 \bar{I}_x$$

или $\bar{P}_{M \text{ сплош}} \cong \bar{P}_{M \text{ полая}}$.

Следовательно, в этих двух случаях во внешней среде магнитные поля полностью совпадают как по величине, так и по конфигурации, т.е. легкая тонкая металлическая оболочка с внешним радиусом r_2 эквивалентна по внешнему воздействию на поле Земли сплошной металлической сфере того же радиуса r_2 .

Внутри сферы всегда магнитное поле H_1 слабее H_0 при $\mu_2 \gg \mu_3$

$$H_1 = -9\mu_2\mu_3 \frac{H_0}{(\mu_2 + 2\mu_3)(\mu_1 + 2\mu_2) + 2(\mu_2 - \mu_3) \frac{r_1^3}{r_2^3} (\mu_1 - \mu_2)} \cong -9 \frac{\mu_3}{\mu_2} H_0.$$

Сферические и другой конструкции металлические оболочки широко используются в технике в качестве электромагнитных экранов.

За счет сферической оболочки во внешнем поле, кроме горизонтальной составляющей H_x вектора напряженности магнитного поля, возникает вертикальная составляющая H_y , равная для металлической оболочки

$$H_{3y} = -3 \cos \vartheta \sin \vartheta \frac{r_2^3}{r^3} \frac{\mu_2 - \mu_3 + (2\mu_2 + \mu_3) \frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}}{\mu_2 + 2\mu_3 + (\mu_2 - \mu_3) 2 \frac{r_1^3}{r_2^3} \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + 2\mu_2}} H_0 \approx$$

$$\approx -3 \cos \vartheta \sin \vartheta \frac{r_2^3}{r^3} H_0.$$

Внутри сферы поле однородное.

2 Метод зеркальных изображений

Метод зеркальных изображений применяется для расчета электрических и магнитных полей, в которых заряды или токи расположены вблизи поверхностей раздела нескольких сред. Он состоит в том, что путем введения фиктивных зарядов q', q'' или токов I', I'' сложную задачу сводят к ряду простых, имеющих те же граничные условия; расположение и величину фиктивных зарядов или токов определяют из условия сохранения граничных условий.

Так расчет электрического поля точечного заряда q , расположенного в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , на расстоянии h от плоской поверхности раздела с другой диэлектрической средой с проницаемостью ϵ_2 , сводится к двум простым задачам (рис. 2.5).

Для расчета поля в первой среде вторая среда заменяется первой и рассматривается электрическое поле в однородной среде с ϵ_1 , от двух зарядов q и q' , расположенных симметрично относительно плоскости раздела. Для расчета поля во второй среде первая среда заменяется второй и рассматривается электрическое поле в однородной среде с ϵ_2 , создаваемое точечным зарядом q'' , помещенным в точку, в которой в реальной задаче находится заряд q .

На основании закона Кулона напряженности электрического поля точечных зарядов q, q', q'' равны

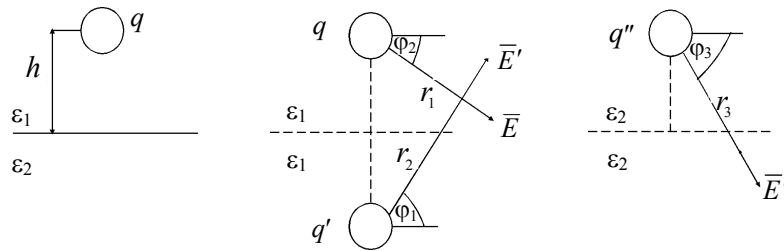


Рис. 2.5

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_1 r_1^2} \vec{1}_1; \quad \vec{E}' = \frac{q'}{4\pi\epsilon_2 r_2^2} \vec{1}_2; \quad \vec{E}'' = \frac{q''}{4\pi\epsilon_3 r_3^2} \vec{1}_3.$$

Из граничных условий $E_{1\tau} = E_{2\tau}$ и $D_{1n} = D_{2n}$ при $r = r_1 = r_2 = r_3$ и $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ находим

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_1} \cos \varphi_1 + \frac{q'}{4\pi\epsilon_1} \cos \varphi_2 = \frac{q''}{4\pi\epsilon_2} \cos \varphi_3, \quad q + q' = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} q'';$$

$$\frac{\epsilon_1 q}{4\pi\epsilon_1} \sin \varphi_1 + \frac{\epsilon_1 q'}{4\pi\epsilon_1} \sin \varphi_2 = \frac{\epsilon_2 q''}{4\pi\epsilon_2} \sin \varphi_3, \quad q = q' + q''$$

или

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q; \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q. \quad (2.17)$$

Расчет электрического поля линейных зарядов, параллельных плоским поверхностям раздела двух сред с ϵ_1 и ϵ_2 , производится аналогично расчету точечного заряда с заменой q на r ,

т.е.

$$\tau' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \tau; \quad \tau'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \tau.$$

Расчет магнитного поля бесконечно длинного провода с током I , расположенного параллельно плоской поверхности раздела двух однородных сред с магнитными проницаемостями μ_1, μ_2 может быть произведен аналогично расчету электрического поля линейных зарядов по принципу обратного соответствия, т.е. с заменой τ на I и ϵ на $\frac{1}{\mu}$. Тогда

$$I' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I; \quad I'' = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1} I.$$

3 Метод конформных преобразований

Метод конформных преобразований, используя свойства функций комплексного переменного, позволяет упростить расчет плоскопараллельного поля сложной конфигурации, изображаемого в комплексной плоскости $z = x + jy$, сводя эту задачу к простому расчету однородного поля в другой системе координат – вещественной U или мнимой v .

Комплексный потенциал $W = U + qv$, с помощью которого осуществляется указанное преобразование, представляет собой комплексную функцию, вещественной (или мнимой) частью которой является потенциал

$v(x, y)$, а мнимой (или вещественной) – функция потока $\Psi(x, y) = Ul$, которая представляет собой поток вектора напряженности поля $\vec{E}(\vec{H})$, отнесенный к единице длины $d\Psi(x, y) = E da$ (рис. 2.6).

Уравнение $v(x, y) = \text{const}$ является уравнением эквипотенциальных линий, уравнение $\Psi(x, y) = \text{const}$ уравнением силовых линий; те и другие образуют ортогональную сетку. Из полного дифференциала от комплексного потенциала

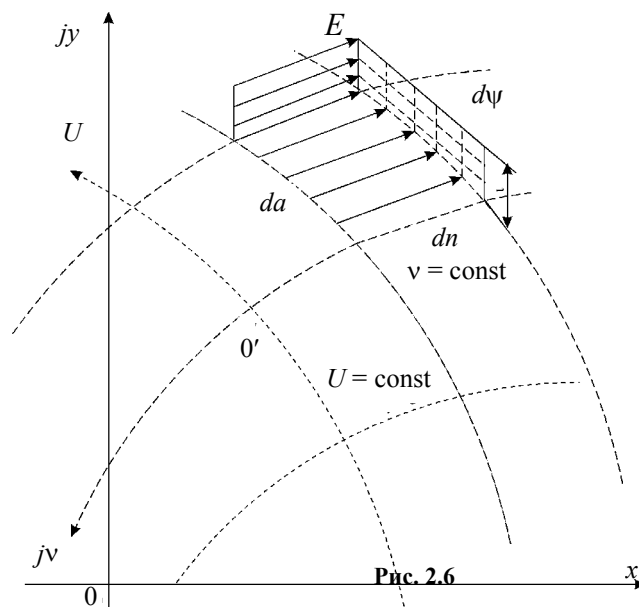


Рис. 2.6

$$\frac{dW}{dz} = \frac{d(U + jv)}{d(x + jy)} = \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial x} = -j \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

приравнявая вещественные и мнимые части, находим, что потенциал и функция потока связаны между собой условиями Коши-Римана, т.е.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}. \quad (2.18)$$

Продифференцируем первое равенство (2.18) по y , а второе по x и просуммируем их

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}; \quad \nabla^2 v = 0,$$

т.е. функция v удовлетворяет уравнению Лапласа. Продифференцировав первое равенство (2.18) по x , а второе по y , после их сложения находим, что и функция U удовлетворяет уравнению Лапласа.

Величина вектора напряженности поля равна модулю производной комплексного потенциала:

$$E = \left| \frac{dW}{dz} \right|,$$

так как $E = |E_x + jE_y| = \left| -\frac{\partial U}{\partial x} - j \frac{\partial U}{\partial y} \right| = \left| -\frac{\partial v}{\partial x} + j \frac{\partial v}{\partial y} \right| = \left| \frac{dW}{dz} \right|.$

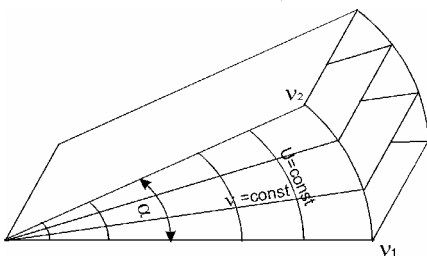


Рис. 2.7

Это поле может быть преобразовано в однородное в координатной плоскости U, v с помощью комплексного потенциала вида

$$W = k \ln z + c = U + jv,$$

где k и c определяются из граничных условий.

В цилиндрической системе координат

$$z = r e^{j\alpha}, \quad \text{а} \quad \ln z = j\alpha + \ln r.$$

Тогда

$$W = k(j\alpha + \ln r) + c_1 + jc_2 = U + jv$$

или после приравнивания вещественных и мнимых частей

$$\alpha k + c_2 = v, \quad k \ln z + c_1 = U.$$

При $\alpha = 0$ $v = v_1$ или $c_2 = v_1$, при $\alpha = \alpha_0$ $v = v_2$ или $\alpha_0 k + v_1 = v_2$ т.е. $k = \frac{v_2 - v_1}{\alpha_0}$;

$$W = \frac{v_2 - v_1}{\alpha_0} \ln z + jv_1 + c_1 = \frac{v_2 - v_1}{\alpha_0} \ln z + c_1 + j \left(\frac{\alpha}{\alpha_0} (v_2 - v_1) + v_1 \right).$$

Эквипотенциальные линии (v) представляют собой лучи, так как v зависит только от α , а силовые линии – дуги концентрических окружностей ($U = \ln z$). Напряженность поля равна

$$E = \left| \frac{dW}{dz} \right| = \frac{v_2 - v_1}{\alpha_0} \left| \frac{d \ln z}{dz} \right| = \frac{v_2 - v_1}{\alpha_0 z}.$$

Полученные результаты могут быть перенесены на аналогичную задачу расчета магнитного поля в воздушном зазоре магнитопровода, считая, что плоскости магнитопровода, ограничивающие этот зазор, имеют магнитные потенциалы v_{m1} и v_{m2} , находим

$$H = \frac{v_{m2} - v_{m1}}{\alpha_0 r}.$$

4 Графический метод (метод сеток)

Графический метод расчета плоскопараллельных полей состоит в построении силовых линий и линий равного потенциала по заданным граничным условиям. Он является в некоторой мере приближенным и применяется для предварительного ориентировочного решения задачи.

Графическую картину потенциального поля строят по определенным правилам:

1 Силовые линии \vec{E} должны быть непрерывными, начинаться и заканчиваться на электродах, так как в исследуемой области $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, а линии \vec{H} – замкнутыми.

2 Силовые линии должны быть перпендикулярны эквипотенциальным линиям, т.е. линиям равного потенциала, так как $E = -\operatorname{grad} v$, $\vec{H} = \operatorname{grad} v_m$.

3 Ячейки, полученные при пересечении эквипотенциальных и силовых линий, должны быть подобными, т.е. отношение линейных размеров двух прилегающих сторон каждой ячейки $\frac{\Delta a}{\Delta n}$ – должно быть постоянным для всей картины поля. При этом обеспечиваются условия (2.18) Коши-Римана, потенциалы удовлетворяют уравнению Лапласа, а напряженность поля может быть определена из отношения

$$E = \frac{\Delta v}{\Delta n}.$$

Проводники имеют один и тот же потенциал, поэтому силовые линии \vec{E} должны быть перпендикулярными к контурам, ограничивающим сечения проводников.

Графическую картину рисуют вначале ориентировочно, стремясь удовлетворить ортогональность силовых и эквипотенциальных линий, а также силовых линий к поверхности проводника, затем исправляют так, чтобы удовлетворить подобие ячеек, т.е. $\frac{\Delta a}{\Delta n} = \operatorname{const}$. Обычно для облегчения построения картины выбирают до $\Delta a = \Delta n$.

На рис. 2.8 для примера показаны картины поля двухпроводной линии *a*), коаксиального кабеля *б*) и полосковой линии *в*).

По картине поля определяют емкость, внешнюю индуктивность и сопротивление утечки конструкции длиной l :

$$C = \frac{2W_3}{(v_1 - v_2)^2} = V \frac{\varepsilon E^2}{2} \frac{2}{(v_1 - v_2)^2} = n \Delta n m \Delta a l \varepsilon \frac{F^2}{(\Delta n - nE)^2} = \varepsilon \frac{m}{n} l \frac{\Delta a}{\Delta n};$$

$$L = \frac{2W_M}{I^2} = V \frac{\mu H^2}{2} \frac{2}{I^2} = n \Delta n m \Delta a l \mu \frac{H^2}{(\Delta a m H)^2} = \mu \frac{n}{m} l \frac{\Delta n}{\Delta a};$$

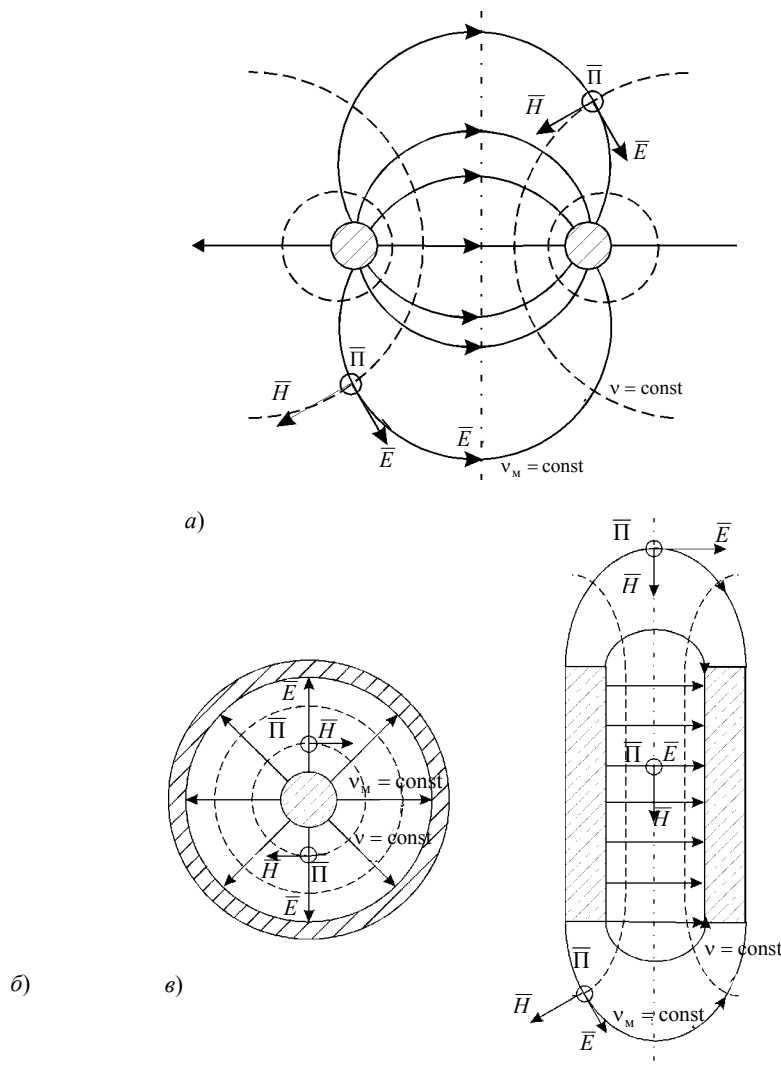


Рис. 2.8

$$R = \frac{P_{\text{теп}}}{I^2} = V\gamma_{\text{пр}} E^2 \frac{1}{I^2} = n\Delta n m \Delta a l \gamma_{\text{пр}} \frac{E^2}{(\gamma_{\text{пр}} E l \Delta a m)^2} = \frac{1}{\gamma_{\text{пр}}} \frac{n}{m} \frac{\Delta n}{\Delta a} \frac{1}{l},$$

где $W_э$, $W_м$ – энергия электрического и магнитного поля в объеме V ;
 $n \cdot m$ – общее число ячеек; n – число эквипотенциальных промежутков;
 m – число трубок.

Глава 3 ПЕРЕМЕННЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ. РАСПРОСТРАНЕНИЕ, ИЗЛУЧЕНИЕ, ЭКРАНИРОВАНИЕ

3.1 Волновые уравнения

Для решения уравнений переменного электромагнитного поля обычно их приводят к волновым уравнениям. Волновыми называют такие дифференциальные уравнения второго порядка в частных производных, которые описывают распространение колебаний в среде. Они содержат наряду с пространственными производными второго порядка также вторые производные по времени.

От уравнений Максвелла можно перейти, как это показано в 1.3, к однородным волновым уравнениям для векторов электромагнитного поля

$$\nabla^2 \bar{E} = -\gamma^2 \bar{E}; \quad \nabla^2 \bar{H} = -\gamma^2 \bar{H}$$

и для векторных и скалярных потенциалов

$$\nabla^2 \bar{A} = -\gamma^2 \bar{A}; \quad \nabla^2 \mathbf{v} = -\gamma^2 \mathbf{v}; \quad \nabla^2 \bar{A}' = -\gamma^2 \bar{A}'; \quad \nabla^2 \mathbf{v}_m = -\gamma^2 \mathbf{v}_m,$$

когда сторонние токи, возбуждающие поле, находятся за пределами анализируемой части пространства.

Волновые уравнения при $\omega = 0$ переходят в уравнения Лапласа, описывающие потенциальные поля.

Волновые уравнения записаны в общей форме, пригодной для любой системы координат. Для их решения следует раскрыть оператор Лапласа ∇^2 в конкретной системе координат и заменить векторные уравнения системой скалярных уравнений. Наиболее простой вид оператор Лапласа имеет в декартовой системе координат в случае плоских волн.

Любая задача теории электромагнитного поля сводится к определению поведения в пространстве и времени векторов \bar{E} и \bar{H} , удовлетворяющих волновым уравнениям при заданных начальных и граничных условиях.

3.2 Плоские волны. Основные свойства

Плоской называют волну, распространяющуюся вдоль какой-либо линейной координаты и неизменную в каждый фиксированный момент времени в плоскости, перпендикулярной этой координате. Предположим, что плоская волна распространяется вдоль оси z декартовой системы координат (рис. 3.1), вектор напряженности электрического поля направлен по оси x , т.е.

$$E_x = E_{mx} e^{j(\omega t - \gamma z)}, \quad E_y = E_z = 0.$$

где $\gamma = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$ – коэффициент распространения.

Отметим основные свойства плоских волн.

1 Составляющая E_z удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\nabla^2 E_x = \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = E_{mx} e^{j\omega t} \frac{\partial^2 e^{-\gamma z}}{\partial z^2} = -\gamma^2 E_x.$$

2 Вектор напряженности магнитного поля \bar{H} направлен перпендикулярно \bar{E} , т.е. по оси y . На основании второго уравнения Максвелла (1.13) имеем

$$\text{rot } \bar{E} = \begin{vmatrix} \bar{1}_x & \bar{1}_y & \bar{1}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \bar{1}_y = -j\gamma E_x \bar{1}_y = -j\omega \mu H_y \bar{1}_y; \quad H_x = H_z = 0 \quad (3.1)$$

или
$$E_x \sqrt{\varepsilon'} = H_y \sqrt{\mu}.$$

3 Отношение $\frac{E_x}{H_y} \rightarrow \frac{B}{A}$, Ом называется характеристическим сопротивлением среды Z_c

$$Z_c = \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j \frac{\gamma_{np}}{\omega}}} = |Z_c| e^{j\varphi_z}. \quad (3.2)$$

Для воздуха $Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-3}}{8,85 \cdot 10^{-12}}} = 377 \text{ Ом}, \quad \varphi_z = 0;$

для металлов $Z_c = \sqrt{\frac{\mu \omega}{-j\gamma_{np}}} = \sqrt{\frac{\mu \omega}{\gamma_{np}}} e^{j\frac{\pi}{4}}$, т.е. вектор напряженности электрического поля E_x на угол $\varphi_z = \frac{\pi}{4}$ опережает H_y .

4 Векторы \vec{E}, \vec{H} и $\vec{\Pi}$ – ортогональны, взаимно перпендикулярны $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{\Pi}$, $\vec{\Pi} = [\vec{E}\vec{H}] = [E_x \vec{i}_y, H_y \vec{i}_y] = E_x H_y \vec{i}_z$.

5 Коэффициент распространения – величина комплексная

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu \left(\varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega} \right)} = \omega \sqrt{\mu} \left| \sqrt{\varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega}} \right| e^{-j \frac{\alpha_\varepsilon}{2}} = \beta - j\alpha, \quad (3.3)$$

где α_ε – угол электрических потерь, $\alpha_\varepsilon = \arctg \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\varepsilon \omega}$; β – фазовая постоянная, $\beta = \omega \sqrt{\mu} \left| \sqrt{\varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega}} \right| \cos \frac{\alpha_\varepsilon}{2}$; α – постоянная затухания, $\alpha = \omega \sqrt{\mu} \left| \sqrt{\varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega}} \right| \sin \frac{\alpha_\varepsilon}{2}$;

$$E_x = E_{\text{mx}} e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)}; \quad H_y = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu}} E_x.$$

6 Длина волны λ – расстояние, на котором фаза волны изменяется на 2π , т.е.

$$\beta \lambda = 2\pi, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{1}{f \sqrt{\mu} \left| \sqrt{\varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega}} \right| \cos \frac{\alpha_\varepsilon}{2}}. \quad (3.4)$$

В среде без потерь $\alpha_\varepsilon = 0$, $\lambda = \frac{1}{f \sqrt{\mu \varepsilon}}$, для воздуха $\lambda = \frac{1}{f \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{c}{f}$,

для хороших проводников $\alpha_\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon \ll \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega}$, $\lambda = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega \mu \gamma_{\text{пр}}}} = 2\pi\Delta$.

7 Явление поверхностного эффекта заключается в неравномерном распределении переменного электромагнитного поля в проводящей среде из-за затухания электромагнитной волны. Это влечет за собой неравномерное распределение плотности тока и магнитной индукции; в установившемся режиме эти величины имеют максимальные значения у поверхности проводника.

В большинстве случаев поверхностный эффект вреден, увеличивая сопротивление переменному току и магнитное сопротивление переменному магнитному потоку. Поверхностный эффект может быть и полезен, например, в установках для индукционного поверхностного нагрева и закалки, в электромагнитных экранах.

При распространении электромагнитного поля вдоль проводника (рис. 3.2) часть основного потока из внешней среды проникает в проводник практически перпендикулярно к его поверхности для компенсации в нем тепловых потерь, затрачиваемых на прохождение тока.

Глубина проникновения волны Δ – расстояние, на котором обеспечивается затухание напряженностей E и H поля в $e = 2,718$ раз, т.е. $\Delta\alpha = 1$.

$$\Delta = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega \sqrt{\mu} \left| \sqrt{\varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega}} \right| \sin \frac{\alpha_\varepsilon}{2}}. \quad (3.5)$$

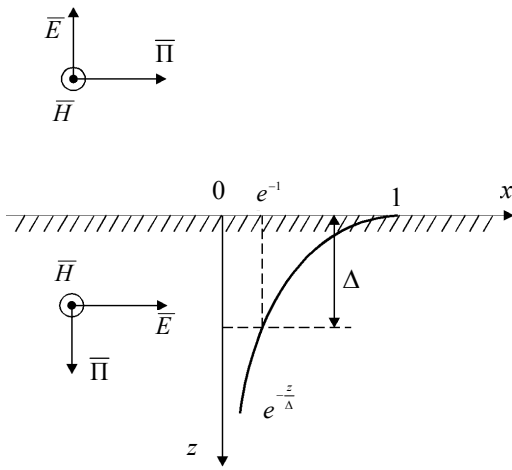


РИС 3.2

Для хороших проводников

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \gamma_{\text{пр}}}};$$

$$\sin \frac{\alpha_{\varepsilon}}{2} = \sin \frac{\pi}{4};$$

$$\left| \sqrt{\varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega}} \right| = \sqrt{\frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega}}.$$

8 Фазовая скорость – скорость перемещения фиксированного значения фазы $\omega t - \beta z = \text{const}$ вдоль направления распространения волны z , т.е. $v_{\phi} = \frac{dz}{dt}$

$$\text{или } \omega dt - \beta dz = 0, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{\beta}, \quad v_{\phi} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu} \left| \sqrt{\varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega}} \right| \cos \frac{\alpha_{\varepsilon}}{2}}.$$

В среде без потерь $v_{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}$; в хороших проводниках $v_{\phi} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu \gamma_{\text{пр}}}}$.

9 Вектор Пойтинга

$$\bar{\Pi} = [\bar{E} \bar{H}] \rightarrow \frac{\text{В}}{\text{м}} \frac{\text{А}}{\text{м}} = \frac{\text{В} \cdot \text{А}}{\text{м}^2}$$

определяет поток электромагнитной энергии, проходящий в единицу времени 1 с через единицу поверхности 1 м^2 в направлении распространения волны.

$$\Pi_z = \text{Re } E_x \cdot \text{Re } H_y = |E_{mx}| |H_{my}| e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \alpha_E) \cos(\omega t - \beta z + \alpha_H) -$$

мгновенное значение. Среднее за период значение

$$\Pi_{\text{сред}} = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi_z dt = |E_{mx}| |H_{my}| e^{-2\alpha z} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t - \beta z + \alpha_E) \cos(\omega t - \beta z + \alpha_H) dt =$$

$$= |E_{mx}| |H_{my}| e^{-2\alpha z} \frac{\cos(\alpha_E - \alpha_H)}{2}.$$

Из равенств $E_x \sqrt{\varepsilon'} = H_y \sqrt{\mu}$ или $|E_{mx}| = \frac{\sqrt{\mu}}{\left| \sqrt{\varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega}} \right|} |H_{my}|$, $\alpha_E - \alpha_H = \frac{\alpha_{\varepsilon}}{2}$ получаем $\cos(\alpha_E - \alpha_H) = \cos \frac{\alpha_{\varepsilon}}{2}$,

$$\text{ПОЭТОМУ } \Pi_{\text{сред}} = e^{-2\alpha z} \frac{|E_{mx}| |H_{mx}|}{2} \cos \frac{\alpha_{\varepsilon}}{2},$$

$$P_{\text{сред}} = \left[e^{-2\alpha z} \cos^2 \frac{\alpha_\varepsilon}{2} \left(\frac{E_{mx}}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\left| \varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega} \right|}{2} + e^{-2\alpha z} \cos^2 \frac{\alpha_\varepsilon}{2} \left(\frac{H_{mx}}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\mu}{2} \right] \times$$

$$\times \frac{1}{\cos \frac{\alpha_\varepsilon}{2} \sqrt{\mu} \sqrt{\left| \varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega} \right|}} = (W_3 + W_M) v_{\text{ср}},$$

где $W_3 = W_M$ – удельные энергии электрического и магнитного поля.

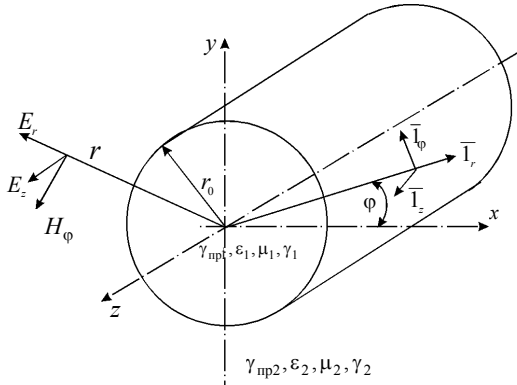


РИС. 3.4

Исключая из E_x, E_y временной множитель, получим уравнение эллипса

$$\left(\frac{E_x}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{E_y}{a_2} \right)^2 - \frac{2E_x E_y}{a_1 a_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2).$$

При $\varphi_1 - \varphi_2 = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n$ оси эллипса совпадают с осями координат. Если $a_1 = a_2$ – эллипс вырождается в окружность, при $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ – в прямую, т.е. эллиптическая поляризация волн становится круговой или линейной.

Обозначая главные оси эллипса через a и b , а через φ – угол, который составляет большая ось эллипса с осью, легко найти следующие соотношения

$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2; \quad \text{tg} 2\varphi = \text{tg} 2\chi \cos(\varphi_2 - \varphi_1); \quad \sin 2\alpha = \sin 2\chi \sin(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где $\text{tg} \alpha = \pm \frac{b}{a}$, $\text{tg} \chi = \pm \frac{a_2}{a_1}$.

3.3 Распространение электромагнитных волн вдоль проводника

Рассмотрим распространении цилиндрической электромагнитной волны вдоль круглого бесконечно длинного проводника радиуса r_0 , с параметрами $\gamma_{\text{пр}1}, \varepsilon_1, \mu_1, \gamma_1$, расположенного в среде $\gamma_{\text{пр}2}, \varepsilon_2, \mu_2, \gamma_2$, по которому проходит ток $I e^{-j\gamma z}$. Решение проведем в цилиндрической системе координат r, φ, z (рис. 3.4), предполагая, что в любой точке вектор напряженности магнитного поля \vec{H} направлен по касательной к окружности с центром на оси проводника, проходящей через исследуемую точку пространства, т.е. $\vec{H} = H_\varphi \vec{e}_\varphi$, $H_r = H_z = 0$, а вектор электрического поля поляризован в плоскости $r z$, т.е.

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_z \vec{e}_z, \quad E_\varphi = 0.$$

Кроме этого, необходимо предположить, что E_r, E_z и H_φ в силу осевой симметрии электромагнитного поля относительно центра проводника не зависят от угла φ , а также изменяются пропорционально $e^{-j\gamma z}$, где γ_z – коэффициент распространения волны вдоль проводника.

В этом случае уравнение Гельмгольца $\nabla^2 E_z = -\gamma^2 E_z$, т.е.

$$\nabla^2 E_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -\gamma^2 E_z,$$

$$W_3 = e^{-2\alpha z} \cos^2 \frac{\alpha_\varepsilon}{2} \left(\frac{E_{mx}}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{\left| \varepsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega} \right|}{2} \rightarrow \frac{B^2 \Phi}{M^2 \text{ м}} \rightarrow \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3}.$$

10 Поляризация волны – закон изменения направления и величины вектора напряженности электрического поля в данной точке пространства за период колебания.

Пусть направление распространения плоской гармонической волны совпадает с осью z . Разложим вектор E в плоскости xu по двум взаимно перпендикулярным направлениям

$$E_x = a_1 \cos(\omega t - \varphi_1), \quad E_y = a_2 \cos(\omega t - \varphi_2).$$

Здесь $r = t - \frac{z}{v_\phi}$; $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$ – постоянные действительные амплитуды и фазы ортогональных проекций вектора \vec{E} .

т.е. амплитуды и фазы ортогональных проекций вектора \vec{E} .

с учетом $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} = 0$, $\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -\gamma_z^2 E_z$, переходит в уравнение Бесселя

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) - (\gamma_z^2 - \gamma^2) E_z = 0, \quad (3.7)$$

решением которого являются модифицированные функции Бесселя: $I_0(\rho_1)$ – первого рода нулевого порядка от аргумента $\rho_1 = r\sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_1^2}$ для проводника; при $\rho_1 \rightarrow 0$, $I_0(\rho_1) \rightarrow I$ и $K_0(\rho_2)$ – второго рода нулевого порядка от аргумента $\rho_2 = r\sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_2^2}$ для внешней среды; при $\rho_2 \rightarrow 0$, $K_0(\rho_2) \rightarrow 0$, т.е. $E_{z1} = A_1 I_0(\rho_1)$, $E_{z2} = B K_0(\rho_2)$.

Из первого уравнения Максвелла (1.13) $\text{rot } \bar{H} = j\omega \epsilon' \bar{E}$, приравнявая составляющие по r , находим

$$-\frac{\partial H_\varphi}{\partial z} = j\omega \epsilon' E_r; \quad j\gamma_z H_\varphi = j\omega \epsilon' E_r; \quad E_r = \frac{\gamma_z}{\omega \epsilon'} H_\varphi, \quad \text{а}$$

из равенства составляющих по φ второго уравнения Максвелла

$$\text{rot } \bar{E} = -j\omega \mu \bar{H}; \quad \frac{\partial E_r}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -j\omega \mu H_\varphi; \quad -j\gamma_z E_z + j\omega \mu H_\varphi = \frac{\partial E_z}{\partial r}$$

или с учетом найденной зависимости E_r и H_φ , получаем $H_\varphi = \frac{j\omega \epsilon'}{\gamma_z^2 - \gamma^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}$.

Таким образом, внутри проводника

$$H_{\varphi 1} = \frac{j\omega \epsilon'_1}{\sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_1^2}} A I'_0(\rho_1), \quad E_{r1} = \frac{\gamma_z}{\omega \epsilon'_1} H_{\varphi 1},$$

а во внешней среде $H_{\varphi 2} = \frac{j\omega \epsilon'_2}{\sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_2^2}} B K'_0(\rho_2)$, $E_{r2} = \frac{\gamma_z}{\omega \epsilon'_2} H_{\varphi 2}$.

При $r = r_0$, на границе раздела $H_{\varphi 1} = H_{\varphi 2}$, так как являются тангенциальными составляющими $H_{1r} = H_{2r}$. На основании закона полного тока они равны $\frac{I}{2\pi r_0} e^{-j\gamma_z z}$, т.е.

$$\frac{j\omega \epsilon'_1}{\sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_1^2}} A I'_0(\rho_{10}) = \frac{j\omega \epsilon'_2}{\sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_2^2}} B K'_0(\rho_{20}) = \frac{I}{2\pi r_0} e^{-j\gamma_z z}.$$

Кроме этого на границе раздела равны тангенциальные составляющие электрического поля, т.е. $E_{z1} = E_{z2}$:

$$\frac{I_0(\rho_{10}) \sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_1^2}}{I'_0(\rho_{10}) 2\pi r_0 j\omega \epsilon'_1} = \frac{\sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_2^2} K_0(\rho_{20})}{2\pi r_0 j\omega \epsilon'_2 K'_0(\rho_{20})}$$

или $R_\sim = -\frac{\gamma_z^2 - \gamma_2^2}{j\omega C_\sim}$.

Так как левая часть равенства определяет сопротивление проводника на единицу длины

$$R_\sim = \frac{E_{z1}}{I} = \frac{E_{z1}}{\oint_{2\pi r_0} H_\varphi dl} = \frac{E_{z1}}{H_\varphi 2\pi r_0} = \frac{I_0(\rho_{10}) \sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_1^2}}{I'_0(\rho_{10}) 2\pi r_0 j\omega \epsilon'_1}, \quad \text{а}$$

правую часть равенства можно представить как

$$\frac{\gamma_z^2 - \gamma_2^2}{j\omega C_\sim},$$

где емкость проводника определяется из выражения

$$C_\sim = \frac{\oint \epsilon'_2 E_{r2} dl}{\int_{r_0}^\infty E_{r2} dl} = \frac{\epsilon'_2 2\pi r_0 K'_0(\rho_{20}) \sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_2^2}}{-K_0(\rho_{20})},$$

а коэффициент распространения

$$\gamma_z = \sqrt{\gamma_2^2 - j\omega C_\sim R_\sim}; \quad A = R_\sim I e^{-\gamma_z z} \frac{1}{I_0(\rho_{10})}; \quad B = R_\sim I e^{-\gamma_z z} \frac{1}{K_0(\rho_{20})},$$

а составляющие E_z, H_φ, E_r равны:

внутри проводника

во внешней среде

$$\begin{aligned} E_{z1} &= R_{\sim} \frac{I_0(\rho_1)}{I_0(\rho_{10})} Ie^{-j\gamma_z z + j\omega t}; & E_{z2} &= R_{\sim} \frac{I_0(\rho_2)}{I_0(\rho_{20})} Ie^{-j\gamma_z z + j\omega t}; \\ H_{\varphi 1} &= \frac{1}{2\pi r_0} \frac{I'_0(\rho_1)}{I'_0(\rho_{10})} Ie^{-j\gamma_z z + j\omega t}; & H_{\varphi 2} &= \frac{1}{2\pi r_0} \frac{I'_0(\rho_2)}{I'_0(\rho_{20})} Ie^{-j\gamma_z z + j\omega t}; \\ E_{r1} &= \frac{\gamma_z}{\omega \varepsilon'_1} H_{\varphi 1}; & E_{r2} &= \frac{\gamma_z}{\omega \varepsilon'_2} H_{\varphi 2}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Электромагнитное поле бесконечно длинного проводника, как видно из (3.9), обладает следующими особенностями.

Рассмотрим два случая.

I случай. Частота ω стремится к нулю – длинные волны. Аргументы цилиндрических функций ρ при $\omega \rightarrow 0$ по модулю $|\rho| \ll l$, а сами функции могут быть приняты равными первым членам их разложений в ряд, т.е.

$$I_0(\rho_{10}) = 1 - \left(\frac{\rho_{10}}{2}\right)^2; \quad I'_0(\rho_1) = \frac{\rho_1}{2}; \quad I'_0(\rho_{10}) = \frac{\rho_{10}}{2}; \quad K_0(\rho_2) = -\ln \rho_2;$$

$$K'_0(\rho_{20}) = -\ln \rho_{20}; \quad K'_0(\rho_2) = -\frac{1}{\rho_2}; \quad K'_0(\rho_{20}) = -\frac{1}{\rho_{20}};$$

$$\frac{I_0(\rho_{10})}{I'_0(\rho_{10})} = \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\rho_{10}\right)^2}{\frac{1}{2}\rho_{10} \left(1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\rho_{10}\right)^2}{2}\right)} = \frac{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\rho_{10}\right)^2}{\frac{1}{2}\rho_{10}}.$$

В этом случае расчеты сопротивления, емкости и индуктивности линии на единицу длины аналогичны постоянному току, т.е.

$$R_{\sim} = \frac{1 + \left(\frac{\rho_{10}}{2}\right)^2}{j\omega \varepsilon'_1 \rho_{10} \pi r_0} \frac{1}{2} \sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_1^2} = \frac{1 + \frac{\rho_{10}^2}{8}}{\gamma_{\text{нр1}} \pi r_0^2} = \frac{1}{\gamma_{\text{нр1}} \pi r_0^2} + j \frac{\omega \mu}{8\pi} = R_{=} + j \frac{\omega \mu}{8\pi};$$

$$C_{\sim} = \frac{\varepsilon'_2 2\pi r_0 \left(-\frac{1}{\rho_{10}}\right) \sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_2^2}}{\ln \rho_{10}} = -\frac{2\pi \varepsilon'_2}{\ln \rho_{10}} = C_{=};$$

$$L_{\sim} = \frac{\Phi_{\text{вн}}}{Ie^{-j\gamma_z z}} = \frac{\int_0^{\infty} \mu_2 H_{\varphi 2} dr}{Ie^{-j\gamma_z z}} = \frac{\mu_2}{2\pi r_0} \int_0^{\infty} \frac{K'_0(\rho_2)}{K'_0(\rho_{20})} dr = -\frac{\mu_2}{2\pi} \ln \rho_{20} = L_{=},$$

а поэтому внутри проводника $E_{z1} = R_{=} Ie^{-j\gamma_z z + j\omega t}$ постоянна по всему сечению проводника;

$H_{\varphi 1} = \frac{I}{2\pi r_0^2} r e^{-j\gamma_z z + j\omega t}$ – прямо пропорциональна радиусу r ; $E_{r1} = j \frac{\gamma_z}{\gamma_{\text{нр1}}} H_{\varphi 1}$, по величине в $\frac{\gamma_z}{2}$ раз меньше E_{r1} .

Внутренняя индуктивность самого проводника $L_{\text{вн}} = \frac{\mu}{8\pi}$ не зависит от его радиуса. Вектор Пойтинга $\vec{P} = [\vec{E}\vec{H}]$, перпендикулярный \vec{E} , \vec{H} , направлен по радиусу внутрь проводника. Поток электромагнитной энергии входит в проводник с поверхности из внешней среды для того, чтобы скомпенсировать тепловые потери в нем, возникающие при протекании тока (рис. 3.5).

Весь поток на единицу длины проводника на его поверхности равен

$$\Pi_r 2\pi r_0 = \text{Re } E_{z10} \text{Re } H_{\varphi 10} \cdot 2\pi r_0 = I^2 R_{=} e^{-2I_m \gamma_z z} = P_{\text{теп}}.$$

Во внешней среде $E_{z2} = R_{=} Ie^{-j\gamma_z z} \frac{\ln \rho_2}{\ln \rho_{20}} \ll E_{r2} = \frac{\gamma_z}{\omega \varepsilon_2} \frac{I}{2\pi r} e^{-j\gamma_z z}$, $H_{\varphi 2} = \frac{1}{2\pi r} Ie^{-j\gamma_z z}$ и E_{r2} – обратно пропорциональны радиусу.

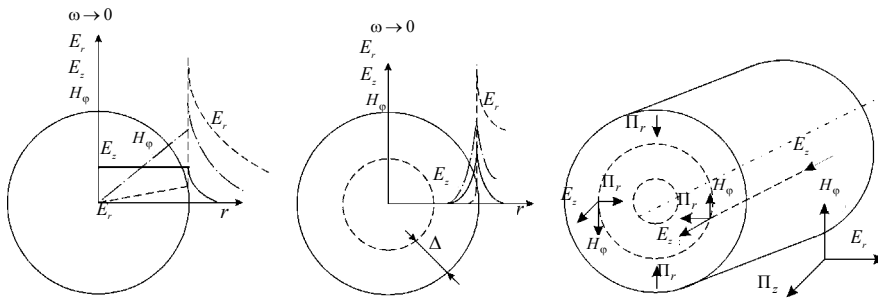


Рис. 3.5

Нормальная составляющая E_r электрического поля на границе раздела, т.е. на поверхности проводника испытывает скачок, равный

$$\frac{E_{r2}}{E_{r1}} = \frac{\epsilon'_1}{\epsilon_2} = -j \frac{\gamma_{np1}}{\omega \epsilon_2}.$$

Основной поток энергии электромагнитного поля во внешней среде распространяется вдоль проводника $\Pi_{z2} = \text{Re } E_{r2} \cdot \text{Re } H_{\phi 2}$ у его поверхности, а часть $\Pi_{z2} = \text{Re } E_{z2} \cdot \text{Re } H_{\phi 2}$ идет внутрь проводника для компенсации тепловых потерь

$$\bar{\Pi} = [\bar{E}\bar{H}] = [(E_r \bar{I}_r + E_z \bar{I}_z) H_{\phi} \bar{I}_{\phi}] = \text{Re } E_{r2} \cdot \text{Re } H_{\phi 2} \bar{I}_z - \text{Re } E_{z2} \cdot \text{Re } H_{\phi 2} \bar{I}_r.$$

Поток $\Pi_{z2} = \left| \frac{\gamma_z}{\omega \epsilon_2} \right| I^2 e^{-2l_m \gamma_z z} \frac{1}{4\pi^2 r^2}$ — обратно пропорционален квадрату радиуса, т.е. поток как бы прижимается к поверхности проводника.

Коэффициент распространения γ_z представим через R_{\sim}, C_{\sim} и L_{\sim} как $\gamma_z = \sqrt{\omega^2 L_{\sim} C_{\sim} - j\omega C_{\sim} R_{\sim}}$, так как

$$\gamma_z^2 = \omega^2 \epsilon'_2 \mu_2 = \omega^2 \epsilon'_2 \mu \frac{2\pi K_0(\rho_{20})}{2\pi K_0(\rho_{20})} = \omega^2 C_{\sim} L_{\sim},$$

или $\gamma_z = \sqrt{-(j\omega L_{\sim} + R_{\sim})j\omega C_{\sim}}$ подобен коэффициенту распространения длинной линии с распределенными параметрами (рис. 3.6) с входным сопротивлением $Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} = Z_c \frac{Z_H + Z_c \text{th} j\gamma_z l}{Z_c + Z_H \text{th} j\gamma_z l}$, напряжением

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 \text{ch } j\gamma_z l + Z_c \dot{I}_2 \text{sh } j\gamma_z l \text{ и током } \dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_2}{Z_c} \text{sh } j\gamma_z l + \dot{I}_2 \text{ch } j\gamma_z l.$$

В рассматриваемом случае характеристическое сопротивление линии при $\omega L \gg R$

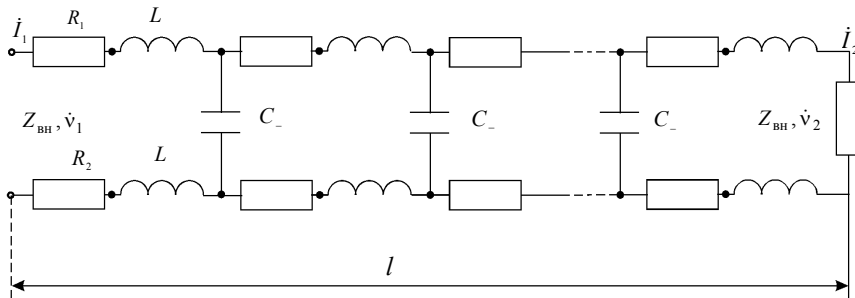


Рис. 3.6

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L_{\sim}}{j\omega C_{\sim}}} = \sqrt{\frac{-j \frac{\omega \mu_2}{2\pi} \ln \rho_{20} + \frac{1}{\gamma_{np1} \pi r_0^2}}{-j\omega \frac{2\pi \epsilon_2}{\ln \rho_{20}}}} \approx \frac{\ln \rho_{20}}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}}.$$

Одиночный проводник имеет большую погонную индуктивность $L_{\text{вн}}$ и малую емкость C , а, следовательно, высокие характеристическое и входное сопротивления. Поэтому направляющие системы, такие как двухпроводная и полосковая линии, коаксиальный кабель, состоят из двух проводников. При этом внешняя индуктивность линии уменьшается, а емкость возрастает за счет концентрации поля между проводниками, за счет этого уменьшаются характеристическое и входное сопротивления линии. Постоянная распространения в этом случае равна

$$\gamma_z = \sqrt{(j\omega L_{\sim} + R_{1\sim} + R_{2\sim})(-j\omega C_{\sim})},$$

где $R_{1\sim}$ и $R_{2\sim}$ – погонные сопротивления проводников.

II *случай* – высокие частоты или короткие волны. Аргументы $|\rho| \gg I$ и отношения функций Бесселя могут быть приняты равными

$$\frac{I_0(\rho)}{I'_0(\rho)} = 1; \quad \frac{K_0(\rho)}{K'_0(\rho)} = -1; \quad \frac{I_0(\rho_1)}{I_0(\rho_{10})} = e^{\rho_1 - \rho_{10}}; \quad \frac{I'_0(\rho_1)}{I'_0(\rho_{10})} = e^{\rho_1 - \rho_{10}}; \quad \frac{K_0(\rho_2)}{K_0(\rho_{20})} = \frac{K'_0(\rho_2)}{K'_0(\rho_{20})} = e^{\rho_{20} - \rho_2}.$$

Тогда для R_{\sim} , C_{\sim} и L_{\sim} можно написать

$$R_{\sim} = \frac{\sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_1^2}}{j\omega\epsilon'_1 2\pi r_0} \cong \frac{j\gamma_1}{j\omega\epsilon'_1 2\pi r_0} = \frac{j\omega\sqrt{-j\frac{\gamma_{np}}{\omega}\mu}}{\gamma_{np1} 2\pi r_0} = \frac{1}{\gamma_{np1} 2\pi r_0 \Delta} (1+j),$$

где Δ – глубина проникновения; $\Delta = \sqrt{\frac{\omega\mu_1\gamma_{np1}}{2}}$.

Внутри проводника проявляется поверхностный эффект, при этом индуктивность самого проводника уменьшается, вещественная часть R_{\sim} возрастает за счет неравномерного распределения электрического поля в проводнике, что эквивалентно уменьшению сечения проводника.

Из равенства (3.8) находим γ_z

$$\frac{\sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_1^2}}{\epsilon'_1} = \frac{\sqrt{\gamma_z^2 - \gamma_2^2}}{\epsilon'_2} (-1) \quad \text{или} \quad \gamma_z = \gamma_2 \sqrt{1 - \frac{\epsilon_2^2(\gamma_2^2 - \gamma_1^2)}{\gamma_2^2(\epsilon_2'^2 - \epsilon_1'^2)}} \approx \gamma_2,$$

так как $\frac{\mu_1\epsilon_2'}{\mu_2\epsilon_1'} \ll I$, например, для медного проводника.

Поэтому с повышением частоты электромагнитное поле распространяется вдоль проводника с постоянной распространения, близкой к коэффициенту распространения внешней среды. Внешняя индуктивность и емкость проводника в этом случае комплексные величины:

$$C_{\sim} \cong -\epsilon_2 2\pi r_0 \sqrt{-\frac{\epsilon_2^2 \gamma_1^2}{\epsilon_1'^2}} = j\sqrt{j\epsilon_2^2} 2\pi r_0 \omega \sqrt{\frac{\omega\mu_1}{\gamma_{np1}}};$$

$$L_{\sim} \cong -\frac{\mu_2}{2\pi r_0} \sqrt{-\frac{\epsilon_1'^2}{\epsilon_2^2 \gamma_1^2}} = \frac{1}{j\sqrt{j}} \frac{\mu_2}{2\pi r_0} \frac{1}{\epsilon_2 \omega} \sqrt{\frac{\gamma_{np1}}{\omega\mu_1}}.$$

На высоких частотах емкостное и индуктивное сопротивления становятся фактически комплексными

$$\frac{1}{j\omega C_{\sim}} = \frac{-1}{\epsilon^2 2\pi r_0 \omega} \sqrt{\frac{\gamma_{np1}}{2\omega\mu_1}} (1-j); \quad j\omega L_{\sim} = \frac{\mu_2}{2\pi r_0 \epsilon_2} \sqrt{\frac{\gamma_{np1}}{2\omega\mu_1}} (1-j),$$

т.е. происходит излучение электромагнитного поля в пространство. Поэтому на СВЧ вместо открытых линий передачи широко используют закрытые волноводы.

3.4 Электромагнитное поле электрического и магнитного диполей. Излучение электромагнитных волн

Элементарный электрический диполь или вибратор представляет собой прямолинейный провод малой длины $dl \ll \lambda$, по которому протекает переменный ток I (рис. 3.7).

Векторный электрический потенциал диполя, рассматривая диполь как бесконечно малый отрезок бесконечно длинного проводника с потенциалом

$$A_z^{\text{б.д.к.}} = \mu \frac{I}{2\pi} K_0(j\gamma\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{I}{2\pi} \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-j\gamma r}}{2r} dz,$$

равен

$$A_z = \mu \frac{Idl}{4\pi r} e^{-j\gamma r} = \mu \frac{Idl}{4\pi r} e^{-\alpha r - j\beta r}. \quad (3.10)$$

В сферической системе координат векторный потенциал \bar{A}_z имеет две составляющие, т.е.

$$\begin{aligned} \bar{A}_z &= A_z \cos \vartheta \bar{1}_r - A_z \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta = \\ &= A_r \bar{1}_r + A_\vartheta \bar{1}_\vartheta. \end{aligned}$$

Напряженности магнитного и электрического полей диполя могут быть определены из выражения (1.14), (1.17), т.е.

$$\bar{B} = \text{rot } \bar{A};$$

$$\bar{E} = -j\omega \left(\bar{A} + \frac{1}{\gamma^2} \text{grad div } \bar{A} \right) = -j\omega \bar{A} - d \text{grad } v.$$

Пользуясь выражением в сферической системе координат, находим:

$$-B_\vartheta = B_r = E_\varphi = 0,$$

так как A_z и A_ϑ не зависят от координаты φ , а $A_\varphi = 0$;

$$-B_\varphi = -\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) \right\} = (1 + j\gamma r) \sin \vartheta \frac{1}{r} A_z = \frac{1 + j\gamma r}{4\pi r^2} e^{-j\gamma r} \mu Idl \sin \vartheta; \quad (3.11)$$

$$\text{div } \bar{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (A_r r^2) + \frac{1}{\sin \vartheta r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (A_\vartheta \sin \vartheta) = \frac{Idl}{4\pi} \mu (1 + j\gamma r) \frac{e^{-j\gamma r}}{r^2} \cos \vartheta (-1),$$

– скалярный потенциал

$$v = -j \frac{\omega}{\gamma^2} \text{div } \bar{A} = (1 + j\gamma r) \frac{e^{-j\gamma r}}{r^2} \cos \vartheta \frac{Idl}{4\pi j\omega \epsilon'}, \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \bar{E} &= -j\omega \frac{Idl}{4\pi} \mu \frac{e^{-j\gamma r}}{r} \left\{ \cos \vartheta \bar{1}_r - \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta - \cos \vartheta \bar{1}_r + \frac{1 + j\gamma r}{\gamma^2 r^2} (2 \cos \vartheta \bar{1}_r + \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta) \right\} = \\ &= j\omega A_z \bar{1}_\vartheta \sin \vartheta + \frac{1 + j\gamma r}{j\omega \epsilon' r^2 \mu} A_z (2 \cos \vartheta \bar{1}_r + \sin \vartheta \bar{1}_\vartheta). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отметим основные свойства электромагнитного поля диполя.

1 Векторы \bar{E} и \bar{H} в любой точке пространства взаимно перпендикулярны, $\bar{H} = H_\varphi \bar{1}_\varphi$, а $\bar{E} = E_r \bar{1}_r + E_\vartheta \bar{1}_\vartheta$.

2 Составляющие H_φ, E_r и E_ϑ – не зависят от координаты φ , т.е. поле является симметричным относительно оси, проходящей через ось диполя.

3 Фазы ($j\beta r$) составляющих векторов поля не зависят от полярного угла ϑ , а только лишь от расстояния r , а поэтому поверхностями равных фаз являются сферические поверхности с центром в точке расположения середины диполя.

4 Линиями вектора напряженности магнитного поля $\bar{H} = H_\varphi \bar{1}_\varphi$ являются концентрические окружности, параллельные экваториальной плоскости XOY , с центрами на оси диполя.

5 Силовые линии вектора $\bar{E} = E_r \bar{1}_r + E_\vartheta \bar{1}_\vartheta$ лежат в меридиальных плоскостях.

6 Комплексный вектор Пойтинга имеет две составляющие $\dot{\Pi}_\vartheta$ и $\dot{\Pi}_r$:

$$\bar{\Pi} = \frac{1}{2} [\dot{\bar{E}} \dot{\bar{H}}^*] = \frac{1}{2} [(\dot{E}_r \bar{1}_r + \dot{E}_\vartheta \bar{1}_\vartheta) \dot{H}_\varphi^* \bar{1}_\vartheta] = \frac{1}{2} [\dot{E}_r \dot{H}_\varphi^* \bar{1}_\vartheta - \dot{E}_\vartheta \dot{H}_\varphi^* \bar{1}_r] = \dot{\Pi}_\vartheta \bar{1}_\vartheta + \dot{\Pi}_r \bar{1}_r.$$

Составляющая $\dot{\Pi}_\vartheta$ лежит в меридиальной плоскости, $\dot{\Pi}_r$ направлена радиально. Они равны

$$\dot{\Pi}_\vartheta = \frac{1}{2} \dot{E}_r \dot{H}_\varphi^* = \frac{1}{32} \frac{I_m^2 dl^2 e^{-2\alpha r}}{\pi^2 r^5} \frac{(1 + \alpha r)^2 + (\beta r)^2}{j\omega \epsilon'} \sin 2\vartheta;$$

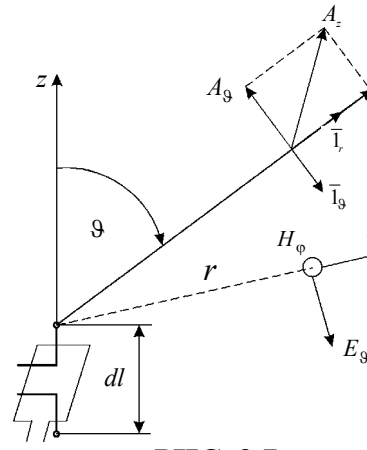


РИС. 3.7

$$\dot{\Pi}_r = \frac{1}{2} \dot{E}_\vartheta \dot{H}_\varphi^* = \frac{1}{32} \frac{I_m^2 dl^2 e^{-2\alpha r}}{\pi^2 r^5} \left[j\omega(1 + \alpha r) + \omega\beta r + \frac{(1 + \alpha r)^2 + (\beta r)^2}{j\omega\epsilon' r^2 \mu} \right] \sin^2 \vartheta .$$

В МЕРИДИАЛЬНОМ НАПРАВЛЕНИИ ПРИ РАСПОЛОЖЕНИИ ДИПОЛЯ В СРЕДЕ БЕЗ ПОТЕРЬ, Т.Е. $\gamma_{\text{пр}} = 0$, $\epsilon' = \epsilon$, ИЗЛУЧЕНИЕ ЭНЕРГИИ НЕ ПРОИСХОДИТ, ТАК КАК $\text{Re} \dot{\Pi}_\vartheta = 0$, А ИМЕЕТ МЕСТО ЕЕ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ПУЛЬСАЦИЯ, $I_m \dot{\Pi}_\vartheta \neq 0$, РЕАКТИВНАЯ ЧАСТЬ УДЕЛЬНОЙ МОЩНОСТИ ПОТОКА ИМЕЕТ ЕМКОСТНОЙ ХАРАКТЕР

$$\dot{\Pi}_\vartheta = -j \frac{1}{32} \frac{I_m^2 dl^2}{\pi^2 r^5} (1 + (\gamma r)^2) \sin 2\vartheta .$$

В проводящих средах $\epsilon' = \epsilon - j \frac{\gamma_{\text{пр}}}{\omega}$, $j\omega\epsilon' = \gamma_{\text{пр}}$, $\alpha = \beta = \frac{1}{\Delta}$, а поэтому

$$\dot{\Pi}_\vartheta = \frac{I_m^2}{32\pi^2} dl^2 e^{-2\frac{r}{\Delta}} \frac{1}{\gamma_{\text{пр}} r^5} \left[\left(1 + \frac{r}{\Delta}\right)^2 + \left(\frac{r}{\Delta}\right)^2 \right] \sin 2\vartheta - \text{величина действительная, энергия электромагнитного поля}$$

переходит в тепловую. Основной поток $\dot{\Pi}_\vartheta$ – проходит в непосредственной близости к диполю и фактически полностью затухает на расстояниях r , равных глубине проникновения Δ , т.е. $r \leq \Delta$.

Радиальная составляющая $\dot{\Pi}_\vartheta$ всегда имеет действительную и мнимую части. В проводящих средах $\dot{\Pi}_\vartheta$ фактически полностью затухает на $r \leq \Delta$. В средах без потерь реактивная часть удельной мощности потока имеет емкостной характер при $\gamma r \ll 1$ и индуктивный при $\gamma r > 1$.

Вещественная часть $\dot{\Pi}_\vartheta$ определяет плотность энергии излучения. Полная мощность, которую излучает электрический диполь в окружающее пространство, определяется всем выходящим потоком $\text{Re} \dot{\Pi}_\vartheta$ через замкнутую сферическую поверхность, т.е.

$$P_{\text{изл}} = \oint_S \text{Re} \dot{\Pi}_r d\bar{S} = \int_0^\pi \frac{I_m^2 dl^2}{32\pi^2 r^2} \mu\omega\beta \sin^2 \vartheta 2\pi r \sin \vartheta d\vartheta = \frac{I_m^2 dl^2}{12\pi} \mu\omega\beta .$$

Как всякую активную мощность, мощность излучения можно представить в виде произведения квадрата действующего значения тока на сопротивление излучателя

$$P_{\text{изл}} = \frac{I_m^2}{2} R_{\text{изл}}, \quad \text{где} \quad R_{\text{изл}} = \frac{dl^2}{6\pi} \mu\omega\beta = \frac{dl^2}{3} \frac{\mu\omega}{\lambda} .$$

$$\text{Для вакуума} \quad R_{\text{изл}} = 790 \left(\frac{dl}{\lambda} \right)^2 .$$

7 Направленность излучения антенны вообще, диполя в частности, характеризуют коэффициентом направленного действия D_a , (рис. 3.8), который определяется как отношение плотности потока мощности в направлении (ϑ, φ) $\text{Re} \dot{\Pi}_r$ к плотности потока мощности, создаваемого гипотетической ненаправленной антенной мощности излучения обеих антенн

$$D_a = \frac{\text{Re} \dot{\Pi}_r}{P_{\text{изл}}} \cdot 4\pi r^2 = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta, \quad D_{a \text{ max}} = 1,5 \quad \text{при} \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} .$$

8 В ближней зоне ($r \ll \lambda$ или $|\gamma r \ll 1|$) напряженность магнитного поля соответствует закону Био-Савара

$$\vec{H} = H_\varphi \vec{1}_\varphi = \frac{I dl}{4\pi r^2} \sin \vartheta \vec{1}_\varphi = \frac{I [d\vec{1}_r]}{4\pi r^2} ,$$

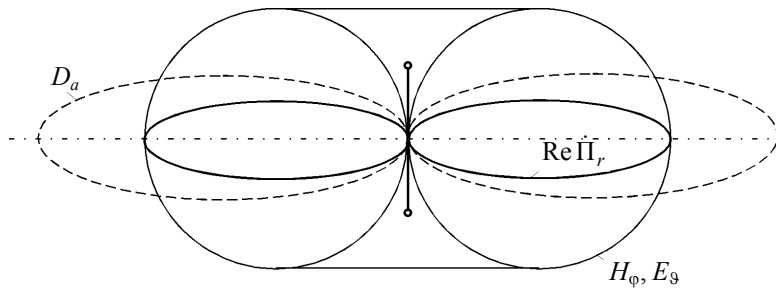


РИС. 3.8

А ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ АНАЛОГИЧНО ПОЛЮ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ДИПОЛЯ В СРЕДАХ БЕЗ ПОТЕРЬ ИЛИ ПОЛЮ ДИПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ, ТАК КАК



Рис. 3.9

$$\vec{E} = \frac{Idl}{j\omega\epsilon'4\pi r^3} (2\cos\vartheta\vec{1}_r + \sin\vartheta\vec{1}_\vartheta), \text{ а скалярный потенциал } v = \frac{Idl\cos\vartheta}{j\omega\epsilon'4\pi r^2}, \text{ причем, если } \epsilon = \epsilon', I = -\frac{\partial q}{\partial t} = -j\omega q, \text{ то}$$

$$v = \frac{qdl\cos\vartheta}{4\pi r^2}, \text{ а если } \epsilon' = -j\frac{\gamma_{np}}{\omega}, \text{ то } v = \frac{Idl\cos\vartheta}{4\pi\gamma_{np}r^2}.$$

9 В дальней зоне ($r \gg \lambda, |\gamma r| \gg r$)

$$\dot{H}_\varphi = \frac{\dot{I}dl}{4\pi r} j\gamma \sin\vartheta e^{-j\gamma r}, \quad \vec{E} = -j\omega \frac{Idl}{4\pi r} \mu \sin\vartheta e^{-j\gamma r}, \quad \frac{H_\varphi}{E_\vartheta} = \frac{\gamma}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = \frac{1}{Z}.$$

10 Поле магнитного диполя подобно электрическому при замене \vec{E} на \vec{H} и наоборот. Основные характеристики диполей для сравнения приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Электрический диполь	Магнитный диполь
$A_z = \mu \frac{Idl}{4\pi} \frac{e^{-j\gamma r}}{r}$	$A'_z = j\omega\mu \frac{IS}{4\pi} \frac{e^{-j\gamma r}}{r}$
$v = (1 + j\gamma r) \cos\vartheta \frac{Idl}{j\omega\epsilon'4\pi} \frac{e^{-j\gamma r}}{r^2}$	$v_m = (1 + j\gamma r) \cos\vartheta \frac{IS}{4\pi} \frac{e^{-j\gamma r}}{r^2} (-1)$
$H_\varphi = (1 + j\gamma r) \sin\vartheta \frac{Idl}{4\pi r^2} e^{-j\gamma r}$	$E_\varphi = (1 + j\gamma r) \sin\vartheta j \frac{\omega\mu SI}{4\pi r^2} e^{-j\gamma r}$
$\vec{E} = j\omega \sin\vartheta A_z \vec{1}_\vartheta + \frac{1 + j\gamma r}{j\omega\epsilon'\mu r^2} \times$ $\times A_z (2\cos\vartheta\vec{1}_r + \sin\vartheta\vec{1}_\vartheta)$	$\vec{H} = -j\omega\epsilon' \sin\vartheta A'_z \vec{1}_\vartheta +$ $+ \frac{1 + j\gamma r}{j\omega\mu r^2} A'_z (2\cos\vartheta\vec{1}_r + \sin\vartheta\vec{1}_\vartheta)$
$P_{изл} = \frac{I_m^2 dl^2}{12\pi} \mu\omega\beta,$	$P_{изл} = \frac{I_m^2 S^2}{12\pi} \mu\omega\beta\gamma^2, \quad R_{изл} = \frac{S^2}{3} \frac{\mu\omega}{\lambda} \gamma^2$
$R_{изл} = \frac{dl^2}{3} \frac{\mu\omega}{\lambda}$	

3.5 Электромагнитное поле диполей в многослойных средах. Боковые и нормальные волны

Рассмотрим электромагнитное поле вертикальных и горизонтальных электрических и магнитных элементарных диполей, расположенных в k слое плоскопараллельной среды, состоящей из $n + 1$ однородных изотропных слоев, показанных на рис. 3.9. В любой точке среды векторные потенциалы A, A' удовлетворяют векторным однородным уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{A} = -\gamma^2 \vec{A}; \quad \nabla^2 \vec{A}' = -\gamma^2 \vec{A}'.$$

В прямоугольной системе координат x, y, z каждое векторное уравнение разделяется на три независимые скалярные уравнения

$$\begin{aligned}\nabla^2 \bar{A}_x &= -\gamma A_x; & \nabla^2 \bar{A}_y &= -\gamma A_y; & \nabla^2 \bar{A}_z &= -\gamma A_z; \\ \nabla^2 A'_x &= -\gamma^2 A'_x; & \nabla^2 A'_y &= -\gamma^2 A'_y; & \nabla^2 A'_z &= -\gamma^2 A'_z.\end{aligned}$$

Общее решение скалярного уравнения в любом слое l определим в виде интеграла

$$\int_0^\infty (f_l e^{-z\mu_l} + f'_l e^{z\mu_l}) \cos n\varphi J_n(-\lambda r) d\lambda, \quad (3.14)$$

где f_l, f'_l – функции, определяемые из граничных условий

$$\mu_l = \sqrt{\lambda^2 - \gamma_l^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{x}{y}.$$

Для проверки подставим (3.14), например при $n = 0$, в оператор Лапласа скалярного уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^2} \int_0^\infty f e^{\pm z\mu_l} J_0(-\lambda r) d\lambda + \frac{\partial}{\partial y^2} \int_0^\infty f e^{\pm z\mu_l} J_0(-\lambda r) d\lambda + \frac{\partial}{\partial z^2} \int_0^\infty f e^{\pm z\mu_l} J_0(-\lambda r) d\lambda = \\ = \int_0^\infty f e^{\pm z\mu_l} \left[-\lambda^2 J_1'(-\lambda r) \frac{x^2}{r^2} - \lambda^2 J_1'(-\lambda r) \frac{y^2}{r^2} - \frac{\lambda}{r} J_1(-\lambda r) + \mu_l^2 J_0(-\lambda r) \right] d\lambda,\end{aligned}$$

а так как $J_1'(-\lambda r) = J_0(-\lambda r) - \frac{J_1(-\lambda r)}{-\lambda r}$, $\mu_l^2 = \lambda^2 - \gamma_l^2$, то

$$\nabla^2 \int_0^\infty f e^{\pm z\mu_l} J_0(-\lambda r) d\lambda = -\gamma_l \int_0^\infty f e^{\pm z\mu_l} J_0(-\lambda r) d\lambda,$$

т.е. $\Delta^2 \int_0^\infty (f_l e^{-z\mu_l} + f'_l e^{z\mu_l}) \cos n\varphi J_n(-\lambda r) d\lambda$ оператора Лапласа от интеграла (3.14) равен правой части скалярного уравнения, а, следовательно, выражение (3.14) является его решением.

Векторные потенциалы диполей также можно представить в виде интеграла подобного (3.14), так как

$$\frac{e^{-j\gamma r}}{r} = \int_0^\infty \frac{e^{\mp(z-h_{k-1}-h)\mu_k}}{\mu_k} \lambda J_0(-\lambda r) d\lambda, \quad (3.15)$$

где h – расстояние диполя от ближайшей верхней границы, h_{k-1} – расстояние k слоя до верхней границы среды.

Моменты вертикальных диполей ориентируем по оси z , горизонтальных – по y .

Функции f_0 и f'_n для верхнего и нижнего слоев многослойной среды примем равными нулю, так как при $|z|$ стремящемся к бесконечности $f_0 e^{-z\mu_0}$ и $f'_n e^{z\mu_n}$ беспредельно возрастают, в то время как поле должно ослабляться.

При извлечении квадратного корня $\mu_l = \pm \sqrt{\lambda^2 - \gamma_c^2}$ вещественная часть его должна быть положительной.

Подынтегральные функции f_l и f'_l находим из системы 2π уравнений, обеспечивающих равенство тангенциальных составляющих векторов напряженности электрического и магнитного поля на каждой границе раздела n многослойной среды.

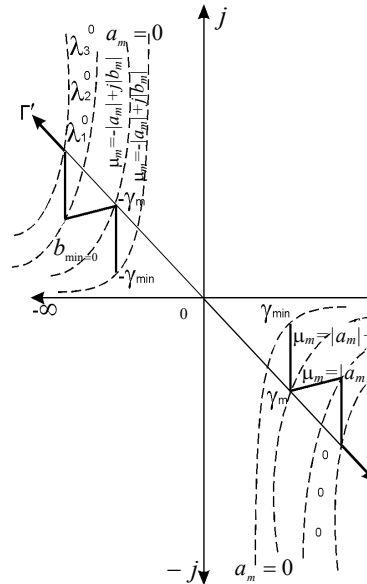
ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ ПЕРВОГО РОДА ЗАМЕНЯЮТСЯ МОДИФИЦИРОВАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ БЕССЕЛЯ ВТОРОГО РОДА

$$J_0(-\lambda r) = -j \frac{1}{\pi} [K_0(j\lambda r) - K_0(-j\lambda r)], \quad (3.16)$$

и каждый интеграл представляется в виде суммы из двух интегралов.

В первом интеграле суммы исходный путь интегрирования Γ_0 (рис. 3.10) деформируется в путь Γ' во втором квадранте комплексной плоскости, а во втором интеграле суммы – Γ_0 в путь Γ в четвертом квадранте комплексной плоскости.

В результате вычисление интегралов (3.14), (3.15) сводится к вычислению интегралов по новым пу-



тям интегрирования Γ и Γ' , определяющих поле двух боковых волн, распространяющихся в верхнем (γ_0) и нижнем (γ_n) слоях, и к сумме вычетов в затронутых полюсах подынтегрального выражения, определяющих поле нормальных волн, распространяющихся в каждом из внутренних слоев многослойной среды. Полюса λ_{pS} находятся из равенства нулю главных определителей Δ и Δ' многослойной среды, показанных на рис. 3.11.

При деформировании пути Γ_0 оказались затронутыми разрезы $b_1 = 0$ в первом квадранте и $a_1 = 0$ в третьем квадранте комплексной плоскости, где b_1 и a_1 определяют $\mu_1 = a_1 + b_1$.

Сумма интегралов вдоль разрезов по верхнему и нижнему листам римановой поверхности обращается в нуль, так, при $b_m = 0$ как на верхнем, так и на нижнем листе, то же и при $a_m = 0$, только $\mu_m = |b_m|$. Поэтому пути интегрирования Γ и Γ' в точках $\mu_m = a_m + jb_m$ просто переходят с одного листа на другой.

В результате общее решение скалярных волновых уравнений приводится к виду

$$A = C \left\{ \sum_{t=1}^t \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{P(\mu)}{\mu_k} \frac{\partial a}{\partial \lambda} B(\lambda_{tSp}) + \frac{1}{j2\pi} \int_{-\gamma_0(\gamma)}^{\infty e^{j\theta}} \left[\frac{P(\mu)}{\mu_k a} - \frac{P(\mu)}{\mu a} \right] B(\lambda) d\lambda \right\}, \quad (3.17)$$

где первое слагаемое определяет поле нормальных волн дискретного спектра, а второе слагаемое – поле боковых волн сплошного спектра.

Значения C , $P(\mu)$, $B(\lambda)$, a для разных диполей, а также для бесконечно длинного проводника приведены в табл. 3.2.

Напряженность поля определяется из выражений (1.14), (1.17):

$$F(\mu) = e^{-(z-h_{t-1})\mu} (A_{k_1 \ell} e^{-h\mu_k} - A_{k_1 \ell'} e^{-(d_k-h)\mu_k}) + e^{(z-h_t)\mu} (A_{k_1 \ell'} e^{-h\mu_k} - A_{k_1 \ell} e^{-(d_k-h)\mu_k});$$

Таблица 3.2

Излучатель	A	C	$B(\lambda)$	t	$P(\mu)$	a
Бесконечный проводник	$A_{y\ell}$	$j \frac{I}{2}$	$e^{j\lambda x}$	1	$F(\mu)$	Δ
Вертикальный электрический диполь	$A_{z\ell}$	$-\frac{Idl}{2\pi}$	$-\lambda_{pS} K_0(-j\lambda r)$	1	$F'(\mu)$	Δ'

Горизонтальный электрический диполь	$A_{y\ell}$	$-\frac{Idl}{2\pi}$	$-\lambda_{pS}K_0(-j\lambda r)$	1	$F(\mu)$	Δ'
	$A_{z\ell}$	$-j\frac{Idl \cos \varphi}{4\pi}$	$\lambda^2 K_1(-j\lambda r)$	1,2	$\Phi(\mu)$	$\Delta\Delta'$
Вертикальный магнитный диполь	$A_{z\ell}$	$-j\frac{\omega\mu M}{4\pi}$	$-\lambda_{pS}K_0(-j\lambda r)$	1	$F(\mu)$	Δ
Горизонтальный магнитный диполь	$A'_{y\ell}$	$-j\frac{\omega\mu\gamma_k^2 M}{2\pi\gamma_c^2}$	$-\lambda_{pS}K_0(-j\lambda r)$	1	$F'(\mu)$	Δ'
	$A'_{z\ell}$	$\frac{\omega\mu}{4\pi} \cos \varphi M$	$\lambda^2 K_1(-j\lambda r)$	1,2	$\Phi'(\mu)$	$\Delta\Delta'$

$$\Phi(\mu) = \sum_{m=1}^n \frac{1 - v'_{m-1,m}}{\mu_{m-1}\gamma_m^2} (\gamma_m^2 - \gamma_{m-1}^2) \times$$

$$\times \left[e^{-(z-h_{c-1})\mu_c} (A'_{m_1\ell} - A'_{(m-1)'\ell}) + e^{(z-h_c)\mu_c} (A'_{m_1\ell'} - A'_{(m-1)'\ell'}) \right] \times$$

$$\times [A_{k_1m} e^{-h\mu_k} - A_{k_1'm} e^{-(d_k-h)\mu_k} + e^{-d_m\mu_m} (A_{k_1m} e^{-h\mu_k} - A_{k_1'm} e^{-(d_k-h)\mu_k})];$$

$$v_{c-1,c} = \frac{\mu_c - \mu_{c-1}}{\mu_c + \mu_{c-1}}; \quad v'_{c-1,c} = \frac{\gamma_{c-1}^2 \mu_c - \gamma_c^2 \mu_{c-1}}{\gamma_{c-1}^2 \mu_c + \gamma_c^2 \mu_{c-1}},$$

где $A_{k',c}$, $A'_{k,\ell}$ – алгебраические дополнения главных определителей Δ, Δ' ; $F'(\mu)$ – подобно $F(\mu)$, только в них коэффициенты отражения V заменяются на V' ; $\Phi'(\mu)$ – подобно $\Phi(\mu)$, только V заменяются на V' и наоборот V' на V .

Напряженности поля, как и в случае расположения диполей в безграничных средах, определяются через векторные потенциалы:

$$\bar{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \bar{A}; \quad \bar{H} = -j\omega\epsilon' \left(\bar{A}' + \frac{1}{\gamma^2} \text{grad div } \bar{A}' \right);$$

$$\bar{E} = -j\omega \left(\bar{A} + \frac{1}{\gamma^2} \text{grad div } \bar{A} \right); \quad \bar{E} = \text{rot } \bar{A}'.$$

Анализ полученных решений электромагнитного поля диполей, расположенных в многослойных средах, показывает:

– границы раздела существенно влияют на поле диполей, так диаграмма направленности горизонтального электрического диполя в дальней зоне поворачивается на $\frac{\pi}{2}$ по сравнению с диаграммой направленности диполя в безграничной среде, линейно поляризованное поле приобретает эллиптическую поляризацию;

– в слоях распространяются нормальные волны с горизонтальной и вертикальной поляризацией, определяемые соответственно из равенств нулю главных определителей $\Delta = 0$ и $\Delta' = 0$, постоянные рас-

пространения волн p -мода равны $\lambda_{\ell p} = \sqrt{\gamma_c^2 - \left(\frac{\pi p}{d_\ell}\right)^2}$ при $p \neq 0$, чем выше номер моды, тем быстрее затухает волна;

– нормальных волн нулевого мода с горизонтальной поляризацией не существует;

– дальней распространение волны с вертикальной поляризацией нулевого мода происходит в слоях с наименьшей удельной проводимостью с постоянной распространения $\lambda_{\ell 0} \cong \sqrt{\gamma_\ell^2 + j\frac{\gamma_c^2}{d_\ell \gamma_{c-1}} + j\frac{\gamma_c^2}{d_\ell \gamma_{c+1}}}$.

В трехслойной среде внутри слоя распространяются нормальные волны, а вдоль границ в верхней и нижней средах – две боковые волны (рис. 3.11, а). Дальность распространения волн зависит от их тепловых потерь энергии и не превышает

$2\pi\Delta_l$, где Δ_l – глубина проникновения для данной среды. Так при $\Delta_{\text{слоя}} \ll \Delta_{\text{внеш}}$ на расстояния $r \gg \Delta_{\text{внеш}}$ поле определяется в основном боковыми волнами, как например, в случае подземных антенн, а при $\Delta_{\text{слоя}} \gg \Delta_{\text{внеш}}$ – нормальными волнами. Так, например, происходит при распространении волн в воздушном волноводе грунт – воздух – ионосфера от наземных антенн. В результате интерференции нормальных и боковых волн, прошедших до данной точки разными путями, т.е. имеющих разные фазы, амплитуды за счет отражения и преломления и разные направления, результирующее поле, как, например, показано на рис. 3.11, б магнитное поле подземного кабеля, на поверхности Земли становится эллиптически поляризованным.

3.6 Электромагнитное экранирование

Электромагнитные экраны применяют для защиты отдельных элементов, блоков, устройств и целых комплексов различных электротехнических систем от внешнего электромагнитного поля или защиты внешнего пространства от внутреннего помехонесущего поля. В качестве экранов используют металлические оболочки. Общий метод расчета экранов состоит в определении электрического и магнитного поля во внешней среде, стенке и внутри экрана и относится к числу труднейших задач электродинамики. В окончательном виде решение возможно только для оболочек, совпадающих по конфигурации с одной из известных координатных систем. Рассмотрим экранирующее действие металлической оболочки на примере бесконечно длинного полого тонкостенного цилиндра, представленной на рис. 3.12

при воздействии плоских электромагнитных волн с вертикальной $E_y = ae^{j\gamma x}$, $H_z = -\frac{1}{z_0}ae^{j\gamma x}$ и горизонтальной $E_z = ae^{j\gamma x}$, $H_y = \frac{a}{z_0}e^{j\gamma x}$ поляризациями.

При решении воспользуемся векторными потенциалами $A'_z = j\frac{a}{\gamma}e^{j\gamma x}$ и $A_z = j\frac{a}{\omega}e^{j\gamma x}$ и разложением в ряд по функциям Бесселя показательной функции

$$e^{j\gamma x} = e^{j\gamma r \cos \varphi} = I_0(j\gamma r) + 2\sum_{p=1}^{\infty} I_p(j\gamma r) \cos p\varphi. \quad (3.18)$$

В каждой среде решения для векторов \bar{A}' и \bar{A} , имеющих в нашем случае только составляющие по оси z , находим в виде сумм

$$A_z = aI_0(j\gamma r) + bK_0(j\gamma r) + 2\sum_{p=1}^{\infty} (aI_p(j\gamma r) + bK_p(j\gamma r)) \cos p\varphi.$$

Зная A'_z и A_z , определяем составляющие E_r, H_z, E_φ и H_r, E_z, H_φ из выражений (1.14) в цилиндрических координатах

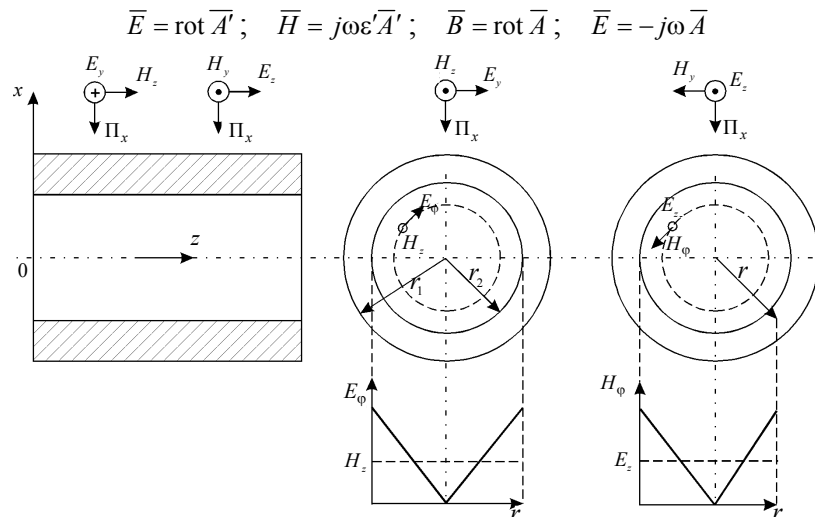


Рис. 3.12

для внешней среды, в стенке и внутри оболочки. Постоянную b для внутренней полости принимаем равной нулю, так как $K_p(j\gamma r)$ при $r = 0$ стремится к бесконечности, а остальные постоянные a и b определяем из граничных условий на внутренней ($r = r_2$) и внешней ($r = r_1$) поверхностях экрана, обеспечивающих равенство тангенциальных составляющих векторов \bar{E} и \bar{H} , т.е. E_φ, H_z и H_φ, E_z на границах раздела сред.

В результате после вычислений внутри экрана составляющие векторов напряженностей электрического и магнитного поля равны

$$E_r = -j \frac{2}{\gamma_2 r} \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p} I_p(j\gamma_2 r) p \sin p\varphi; \quad H_r = -j \frac{2}{\omega \mu r} \sum_{p=1}^{\infty} a'_{2p} I_p(j\gamma_2 r) p \sin p\varphi;$$

$$H_z = -\frac{1}{Z_2} a_{20} I_0(j\gamma_2 r) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p} I_p(j\gamma_2 r) \cos p\varphi; \quad E_z = a'_{20} I_0(j\gamma_2 r) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} a'_{2p} I_p(j\gamma_2 r) \cos p\varphi;$$

$$E_\varphi = a_{20} I'_0(j\gamma_2 r) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} a_{2p} I'_p(j\gamma_2 r) \cos p\varphi; \quad H_\varphi = \frac{1}{Z_2} a'_{20} I'_0(j\gamma_2 r) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} a'_{2p} I'_p(j\gamma_2 r) \cos p\varphi,$$

где $a_{2p} = ja_0 2e^{-j\gamma_1(r_1-r_2)} \frac{1}{\gamma_0 r_1 C}$; $a'_{2p} = ja_0 2e^{-j\gamma_1(r_1-r_2)} \frac{1}{\gamma_0 r_1 C'}$;

$$C' = \left(\frac{z_0}{z_1} K'_p(j\gamma_0 r_1) - K_p(j\gamma_0 r_1) \right) \left(\frac{z_1}{z_2} I_p(j\gamma_2 r_2) + I'_p(j\gamma_2 r_2) \right) -$$

$$- e^{-j\gamma_1 2(r_1-r_2)} \left(\frac{z_0}{z_1} K'_p(j\gamma_0 r_1) + K_p(j\gamma_0 r_1) \right) \left(I'_p(j\gamma_2 r_2) - \frac{z_1}{z_2} I_p(j\gamma_2 r_2) \right);$$

$$C = \left(K'_p(j\gamma_0 r_1) - \frac{z_0}{z_1} K_p(j\gamma_0 r_1) \right) \left(I_p(j\gamma_2 r_2) + \frac{z_1}{z_2} I'_p(j\gamma_2 r_2) \right) -$$

$$- e^{-j\gamma_1 2(r_1-r_2)} \left(K'_p(j\gamma_0 r_1) + \frac{z_0}{z_1} K_p(j\gamma_0 r_1) \right) \left(\frac{z_1}{z_2} I'_p(j\gamma_2 r_2) - I_p(j\gamma_2 r_2) \right).$$

За счет толщины стенки металлической оболочки ослабление поля происходит в $e^{-j\gamma_1(r_1-r_2)}$ раз, как это видно из выражений для a_2 и a'_2 . Поэтому при $|\gamma_1(r_1-r_2)| \gg 1$ внешнее электромагнитное поле не проникает внутрь экрана, а, следовательно, если источник будет расположен внутри экрана, то очевидно его поле во внешней среде будет значительно ослаблено.

Коэффициенты a_{2p} , a'_{2p} при $p = 0$ для трехслойной среды воздух – металл – воздух равны

$$a_{2p} = a_{20} = a'_{20} \cong \frac{2a_0}{1 + e^{-j2\gamma_1(r_1-r_2)}} e^{-j\gamma_1(r_1-r_2)},$$

а при $p \neq 0$ пропорциональны $\frac{z_1}{z_0} |(\gamma_0 r_1)^p|$, следовательно $a_{2p} \ll 1$, $a'_{2p} \ll 1$. Таким образом, радиальные со-

ставляющие E_r и H_r малы, а $H_z \cong -\frac{1}{z_2} a_{20} I_0(j\gamma_0 r) \cong -\frac{2a_0}{z_2} \frac{1}{1 + e^{-j2\gamma_1(r_1-r_2)}} e^{-j\gamma_1(r_1-r_2)}$.

$$E_z \cong a_{20} I'_0(j\gamma_2 r) = \frac{1}{2} j\gamma_2 r \frac{2a_0}{1 + e^{-j2\gamma_1(r_1-r_2)}} e^{-j\gamma_1(r_1-r_2)} -$$

для волн с вертикальной поляризацией и

$$E_z \cong \frac{2a_0}{1 + e^{-j2\gamma_1(r_1-r_2)}} e^{-j\gamma_1(r_1-r_2)}, \quad H_\varphi \cong \frac{1}{2} j\gamma_2 r \frac{2a_0}{z_2} \frac{e^{-j\gamma_1(r_1-r_2)}}{1 + e^{-j2\gamma_1(r_1-r_2)}} -$$

для волн с горизонтальной поляризацией.

Как видно, внутри цилиндра E_φ и H_φ не зависят от угла φ , их силовые линии в виде замкнутых концентрических окружностей, при $r = 0$, $H_\varphi = E_\varphi = 0$ (рис. 3.12). По сравнению с падающими волнами E_φ и H_φ внутри экрана, кроме ослабления за счет стенки цилиндра, уменьшены в $\gamma_2 r$ раза.

Практически без изменения, кроме ослабления в $e^{-j\gamma_1(r_1-r_2)}$ раз, во внутреннюю полость экрана проникают составляющие H_z , и E_z , параллельные образующим цилиндра.

Глава 4 ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ, НАПРАВЛЯЕМЫЕ РЕГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ ПЕРЕДАЧИ

4.1 Введение в теорию волн, направляемых регулярными линиями передачи

4.1.1 Линии передачи и их классификация

Устройство, ограничивающее область, в которой распространяются электромагнитные волны, и на-

правляющее поток электромагнитной энергии в заданном направлении (например, от генератора к антенне) называют линией передачи. Линия передачи имеет границы раздела, вдоль которых и происходит отражение направляемых ею электромагнитных волн. Данная глава посвящена теории регулярной передачи, у которых в продольном направлении неизменны поперечное сечение и электромагнитные свойства заполняющих линию сред [1, 2, 3, 4].

Основные типы регулярных линий передачи (рис. 4.1) можно разделить на две группы – открытые линии и волноводы. Поперечное сечение открытой линии не имеет замкнутого проводящего (металлического) контура,

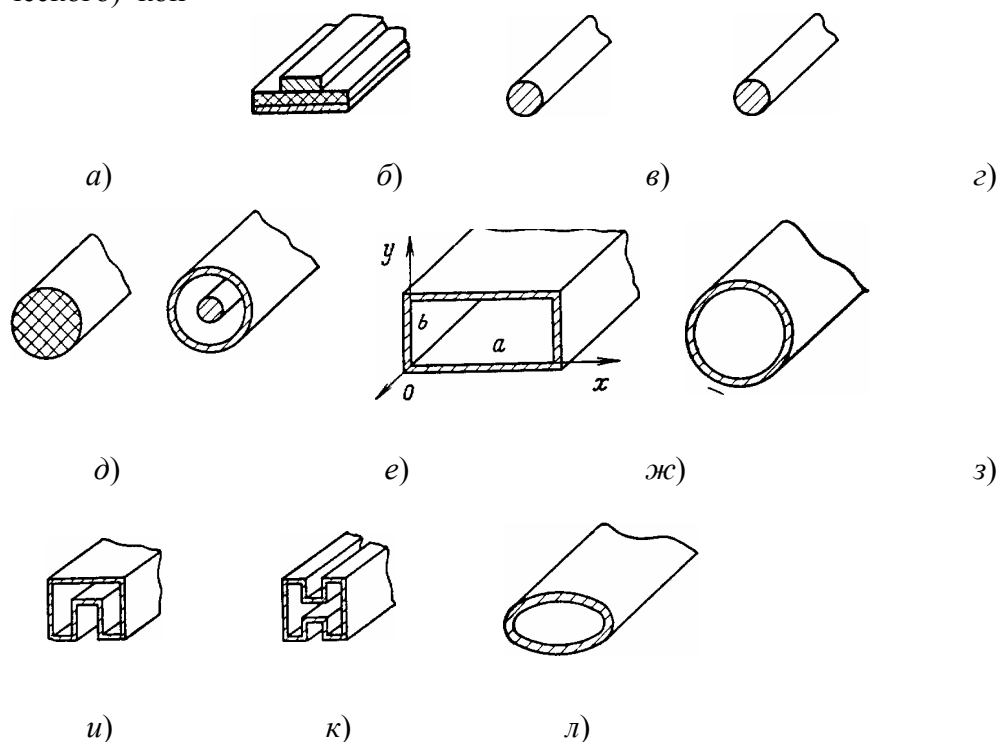


Рис. 4.1

тура, охватывающего снаружи область распространения электромагнитной энергии. Поэтому в открытых линиях поле направляемой волны не экранировано снаружи и существует в пространстве, окружающем линию. Основными типами этих линий передачи являются: симметричная двухпроводная линия, выполненная из круглых проводов (рис. 4.1, а); полосковая линия, состоящая из металлических полосок, разделенных диэлектрической прокладкой (там же, б); однопроводная линия в виде круглого провода (в) и провода с диэлектрическим покрытием (г); диэлектрическая линия, представляющая собой стержень из диэлектрика (д).

Поперечное сечение волновода имеет замкнутый проводящий контур, охватывающий снаружи область распространения электромагнитной энергии. Поэтому в случае волноводов поле направляемой волны не существует в пространстве, окружающем линию передачи. Основными типами волноводов являются коаксиальный круглый волновод, состоящий из соосных круглых провода и экрана (рис 4.1, е); прямоугольный (там же, ж), круглый (з), П-образный, Н-образный (и, к) и эллиптический (л) волноводы.

Отметим, что симметричную двухпроводную линию целесообразно применять на метровых и более длинных волнах, коаксиальный круглый волновод – на дециметровых и более длинных волнах, полосковые и однопроводные линии – на дециметровых и сантиметровых волнах, прямоугольный, круглый и эллиптический волноводы – на сантиметровых и миллиметровых волнах, диэлектрическую линию – на миллиметровых и более коротких волнах.

4.1.2 Решение уравнений Максвелла для регулярных линий передачи

Электромагнитные поля, которые могут существовать в регулярной линии передачи, определяются решением однородных уравнений Максвелла для комплексных амплитуд:

$$\operatorname{rot} \dot{H} = i\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}, \quad \operatorname{rot} \dot{E} = -i\omega \mu_a \dot{H}, \quad (4.1)$$

которое удовлетворяет на цилиндрических поверхностях раздела граничным условиям, присущим исследуемой линии передачи.

Для нахождения этого решения следует рассматривать задачу в такой системе координат, в которой каждая поверхность раздела совпадает с координатной поверхностью либо с частями нескольких координатных поверхностей. Например, при изучении поля прямоугольного волновода следует выбрать декартову систему координат (x, y, z) , ось z которой направлена вдоль волновода (рис. 4.1, ж). При изучении общих свойств полей в регулярных линиях передачи целесообразно рассмотреть решение уравнений (4.1) в обобщенной цилиндрической ортогональной системе координат (u, v, z) .

Любая регулярная линия передачи обладает неизменным поперечным сечением и прямолинейной, продольной осью z , вдоль которой может распространяться электромагнитная волна. Вследствие этого зависимость поля от поперечных координат u и v должна быть одинаковой во всех поперечных сечениях, а с изменением z могут изменяться лишь фазы и амплитуды векторов поля:

$$E(u, v, z) = \dot{E}_0(u, v) e^{\mp \gamma z};$$

$$\dot{H}(u, v, z) = \dot{H}_0(u, v) e^{\mp \gamma z}, \quad (4.2)$$

где коэффициент распространения γ есть в общем случае комплексная величина: $\gamma = \alpha + i\beta$; α – коэффициент затухания; β – коэффициент фазы. При наличии у β мнимой части зависимость от z вида $e^{-\gamma z}$ описывает падающие волны (распространяющиеся в направлении $+z^0$), зависимость $e^{+\gamma z}$ – отраженные волны (распространяющиеся в направлении $-z^0$).

1 Поле, векторы E и H которого имеют поперечные и продольные составляющие. Подставив (4.2) в первое из уравнений (4.1) и воспользовавшись равенством $\operatorname{grad} e^{\mp \gamma z} = \mp \gamma e^{\mp \gamma z} z^0$, получим после сокращения на $e^{\mp \gamma z}$ соотношение

$$\operatorname{rot} \dot{H}_0 \mp \gamma [z^0 H_0] = i\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_0. \quad (4.3)$$

Разложим комплексные векторы \dot{E}_0 и \dot{H}_0 на поперечные и продольные составляющие:

$$\dot{E}_0(u, v) = \dot{E}_{0\perp}(u, v) + z^0 \dot{E}_{0z}(u, v), \quad \dot{H}_0(u, v) = \dot{H}_{0\perp}(u, v) + z^0 \dot{H}_{0z}(u, v), \quad (4.4)$$

где $\dot{E}_{0\perp}(u, v) = u^0 \dot{E}_{0u}(u, v) + v^0 \dot{E}_{0v}(u, v)$;

$$H_{0\perp}(u, v) = u^0 \dot{H}_{0u}(u, v) + v^0 \dot{H}_{0v}(u, v). \quad (4.5)$$

Приняв во внимание, что $\operatorname{rot} z^0 = 0$ и \dot{H}_{0z} не зависит от координаты z , получим:

$$\operatorname{rot}(\dot{H}_{0z} z^0) = [\operatorname{grad} \dot{H}_{0z}, z^0] + \dot{H}_{0z} \operatorname{rot} z^0 = [\operatorname{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z}, z^0], \quad (4.6)$$

где градиент по поперечным координатам $\operatorname{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z}$ является вектором, лежащим в поперечном сечении. Подставляя (4.4) в (4.3) и учитывая (4.6) и тождество $[z^0 z^0] = 0$, имеем

$$\operatorname{rot} \dot{H}_{0\perp} + [\operatorname{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z}, z^0] \mp \gamma [z^0 H_{0\perp}] = i\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_{0\perp} + i\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_{0z} z^0. \quad (4.7)$$

Приравняем слева и справа в (4.7) поперечные и продольные составляющие. Поскольку продольная составляющая вектора $\dot{H}_{0\perp}$ равна нулю и он не зависит от координаты z , $\operatorname{rot} \dot{H}_{0\perp}$ имеет только продольную составляющую. Таким образом,

$$[\text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z}, z^0] \mp \gamma [z^0 H_{0\perp}] = i\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_{0\perp} + i\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_{0\perp}; \quad (4.8)$$

$$\text{rot } \dot{H}_{0\perp} = i\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_{0z} z^0. \quad (4.9)$$

Аналогичным путем из второго уравнения системы (4.1) получим:

$$[\text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z}, z^0] \mp \gamma [z^0 \dot{E}_{0\perp}] = i\omega \mu_a \dot{H}_{0\perp}; \quad (4.10)$$

$$\text{rot } \dot{E}_{0\perp} = -i\omega \mu_a \dot{H}_{0z} z^0. \quad (4.11)$$

Выразив $\dot{H}_{0\perp}$ из (4.10), подставив его в (4.8), найдем с учетом $z_0 / \text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z}$ и $(z^0 E_{0\perp}) = 0$, что

$$\dot{E}_{0\perp} = \mp \frac{\gamma}{\aleph^2} \left\{ \text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z} \pm \frac{i\omega \mu_a}{\gamma} [\text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z}, z^0] \right\}, \quad (4.12)$$

где

$$\aleph^2 = \tilde{k}^2 + \gamma^2, \quad (4.13)$$

$\tilde{k}^2 = \omega^2 \tilde{\varepsilon}_a \mu_a$ и μ_a – параметры однородной среды, в которой определяется поле.

Выразив $\dot{E}_{0\perp}$ из (4.8) и подставив в (4.10), аналогично получим

$$\dot{H}_{0\perp} = \mp \frac{\gamma}{\aleph^2} \left\{ \text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z} \mp \frac{i\omega \varepsilon_a}{\gamma} [\text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z}, z^0] \right\}. \quad (4.14)$$

В вытекающих из уравнений Максвелла (4.1) формулах (4.12) и (4.14) поперечные составляющие поля в регулярной линии передачи выражаются через продольные. Верхние знаки в этих формулах соответствуют зависимости от z вида $e^{-\gamma z}$, нижние – вида $e^{+\gamma z}$.

Для нахождения уравнений, которые определяют продольные составляющие поля \dot{E}_{0z} и \dot{H}_{0z} , вспомним, что в однородной среде без сторонних источников комплексные амплитуды (4.2) удовлетворяют векторным однородным уравнениям Гельмольца:

$$\nabla^2 \dot{H} + k^2 \dot{H} = 0; \quad \nabla^2 \dot{E} + \bar{k}^2 \dot{E} = 0; \\ k^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a.$$

При этом продольные (декартовы) составляющие $\dot{E}_z = \dot{E}_{0z} e^{\mp \gamma z}$ и $\dot{H}_z = \dot{H}_{0z} e^{\mp \gamma z}$ удовлетворяют скалярному уравнению $\nabla^2 \varphi + \tilde{k}^2 \varphi = 0$. Подставив \dot{E}_z и \dot{H}_z в это уравнение и учитывая, что \dot{E}_{0z} и \dot{H}_{0z} не зависят от координаты z , а $e^{\mp \gamma z}$ не зависит от поперечных координат, получим после сокращения на $e^{\mp \gamma z}$:

$$\nabla^2_{\perp} \dot{E}_{0z} + \aleph^2 \dot{E}_{0z} = 0, \quad \nabla^2_{\perp} \dot{H}_{0z} + \aleph^2 \dot{H}_{0z} = 0. \quad (4.15)$$

Здесь $\nabla^2_{\perp} \varphi = \text{div grad}_{\perp} \varphi$ – двумерный оператор Лапласа по поперечным координатам от скалярной функции.

Для определения поля в линии передачи нужно удовлетворить граничным условиям на поверхностях раздела.

2 Поле, векторы \bar{E} и \bar{H} которого имеют только поперечные составляющие. Существует еще одно решение уравнений (4.1), определяющее поле T , векторы которого лежат в поперечных сечениях линии передачи, т.е. удовлетворяют условиям

$$E_z = 0, \quad H_z = 0. \quad (4.16)$$

Условия (4.16) выполняются только в том случае, если линия передачи имеет идеально проводящие поверхности раздела, причем каждая векторная линия H охватывает такой проводник. Действительно, в однородной среде, заполняющей волновод или окружающей открытую линию передачи, в силу уравнений $\text{div } H = 0$ и $H_z = 0$ линии H замкнуты и лежат в поперечных сечениях. Применим закон полного тока

$\oint_L \bar{H} d\bar{l} = i_{\text{полн}} = \int_S \left(\delta + \frac{\partial D}{\partial t} \right) dS$ к контуру L , совпадающему с любой линией H . При этом $\int_L H dl \neq 0$ и, следовательно, $i_{\text{см}} + i \neq 0$, где $i_{\text{см}}$ и i – ток смещения и ток, образованный

движением свободных зарядов, сквозь ограниченную контуром L поперечную поверхность S . Поскольку, однако, согласно (4.16) $E_z = 0$, то $i_{\text{см}} = 0$ и ток проводимости сквозь поверхность S также равен нулю ($\delta_{\text{прз}} = \sigma E_z = 0$). В рассматриваемом случае для удовлетворения закона полного тока линии H должны охватывать идеальные проводники, по которым текут поверхностные продольные токи.

Решение уравнений (4.1) при выполнении условий (4.16) легко получить, положив в приведенных выше формулах $\dot{E}_{0z} = 0$, $\dot{H}_{0z} = 0$. При этом вместо (4.8) и (4.10) имеем:

$$\begin{aligned} \mp \gamma [z^0 H_{0\perp}] &= i\omega \tilde{\varepsilon}_a \dot{E}_{0\perp}; \\ \mp \gamma [z^0 E_{0\perp}] &= -i\omega \mu_a \dot{H}_{0\perp}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Второе соотношение (4.17) позволяет найти $\dot{H}_{0\perp}$, если известны $E_{0\perp}$ и коэффициент распространения γ :

$$\dot{H}_{0\perp} = \pm(\gamma/i\omega\mu_a)[z^0 \dot{E}_{0\perp}]. \quad (4.18)$$

При подстановке $H_{0\perp}$ из (4.18) в первое уравнение (4.17) получим равенство $\varkappa^2 \dot{E}_{0\perp} = 0$. Следовательно, у поля T параметр $\varkappa^2 = 0$ и согласно (4.13) коэффициент распространения

$$\gamma = \sqrt{\varkappa^2 - \tilde{k}^2} = i\tilde{k} = i\omega\sqrt{\tilde{\varepsilon}_a\mu_a}. \quad (4.19)$$

Наметим теперь путь определения вектора $E_{0\perp}(u, v)$. В соответствии с (4.11) и условием $\dot{H}_{0z} = 0$ этот вектор удовлетворяет уравнению $\text{rot } \dot{E}_{0\perp} = 0$, т.е. является потенциальным и может быть выражен через скалярный потенциал ϕ :

$$E_{0\perp} = -\text{grad}_{\perp} \phi. \quad (4.20)$$

В формуле (4.20) учтено, что, поскольку вектор $\dot{E}_{0\perp}$ не имеет продольной составляющей и не зависит от координаты z , его потенциал ϕ также не зависит от координаты z и

$$\text{grad } \phi = \text{grad}_{\perp} \phi.$$

Для нахождения уравнения, определяющего потенциал ϕ , учтем, что комплексная амплитуда $\dot{E} = \dot{E}_{\perp} = \dot{E}_{0\perp}(u, v) e^{\mp\gamma z}$ удовлетворяет в однородной среде первому из уравнений $\text{div } \dot{E} = 0$, $\text{div } \dot{H} = 0$, которое при учете условия $\dot{E}_z = 0$ принимает вид $\text{div}_{\perp} \dot{E}_{0\perp} = 0$. Подставив (4.20) в это уравнение, получим скалярное двумерное уравнение Лапласа для потенциала ϕ

$$\nabla_{\perp}^2 \phi = 0. \quad (4.21)$$

Согласно граничным условиям вектор $\dot{E}_{0\perp}$ перпендикулярен к идеально проводящим цилиндрическим поверхностям раздела, т.е. перпендикулярен к каждой замкнутой кривой $L_{\perp p}$, образованной этими поверхностями в поперечном сечении линии передачи. В соответствии с (4.20) это означает, что кривые $L_{\perp p}$ являются линиями постоянного значения потенциала:

$$\phi = \phi_p = \text{const} \quad \text{на } L_{\perp p} (p = 1, 2, \dots, n). \quad (4.22)$$

В математике доказывается, что краевая задача (4.21) – (4.22) для волноводов (замкнутая кривая $L_{\perp 1}$ охватывает снаружи область существования поля) имеет отличное от нуля решение и, следовательно, существует поле T в тех случаях, когда, во-первых, поперечное сечение ограничено контуром, состоящим из нескольких замкнутых кривых $L_{\perp p}$, т.е. является многосвязной областью (например, коаксиальный волновод), и, во-вторых, потенциал ϕ принимает на этих кривых постоянные, но различные значения.

4.1.3 Классификация направляемых волн

Поле, определяемое в регулярной линии передачи соотношениями (4.21) и (4.22), представляет собой сумму полей магнитного H и электрического E классов. У поля магнитного класса наряду с поперечными составляющими E_{\perp} и H_{\perp} существует продольная составляющая напряженности магнитного поля ($H_z \neq 0$) и отсутствует продольная составляющая напряженности электрического поля ($E_z = 0$); у поля электрического класса наряду с $E_{\perp} \neq 0$ и $H_{\perp} \neq 0$, наоборот $E_z \neq 0$ и $H_z = 0$. Выражения для полей обоих этих классов легко получить, полагая в (4.12) и (4.14) либо $\dot{E}_{0z} = 0$, либо $\dot{H}_{0z} = 0$.

Соотношения (4.16), (4.18) – (4.22) определяют поле поперечного электромагнитного класса T .

Волноводы и двухпроводная симметричная линия имеют только хорошо проводящие поверхности раздела, которые образованы границей металла и однородного диэлектрика. При определении электромагнитного поля этих линий, существующего в диэлектрической среде, идеализируют задачу, заменяя реальный металл идеальным проводником. Эта идеализация

позволяет легко найти поле, которое мало отличается от действительно существующего. Конечные значения электрической проводимости металла учитывают только при определении тепловых потерь в металле с помощью приближенных граничных условий Леонтовича-Щукина.

В волноводах с идеально проводящими стенками граничным условиям могут удовлетворять поля магнитного и электрического классов независимо друг от друга. Следовательно, поля этих двух классов порознь удовлетворяют уравнениям Максвелла и граничным условиям и поэтому могут существовать в волноводе раздельно. Таким образом, в регулярных волноводах, имеющих поперечные сечения в виде двусвязных или многосвязных областей (например, коаксиальный круглый волновод), полное поле в самом общем случае представляет собой сумму независимых друг от друга полей классов T , H и E .

В симметричной двухпроводной линии (открытая линия передачи) с идеально проводящими проводами канализация энергии может осуществляться только с помощью класса T .

В открытых линиях передачи, обладающих осевой симметрией и имеющих поверхности раздела, которые нельзя заменять идеально проводящими границами (например, круглая диэлектрическая линия, круглая однопроводная линия любого типа), в общем случае удовлетворяют граничным условиям поля, векторы E и H которого имеют отличные от нуля поперечные составляющие E_{\perp} , H_{\perp} и обе продольные составляющие E_z , H_z . Эти поля называют гибридными, обозначают буквами HE и EH и именно они могут распространяться в рассматриваемых открытых линиях передачи. Исключение составляют лишь обладающие цилиндрической симметрией поля классов H и E , которые порознь удовлетворяют граничным условиям и, следовательно, могут существовать в открытых линиях передачи раздельно.

4.2 Общая теория волн, направляемых регулярными волноводами

4.2.1 Граничные условия для продольных составляющих поля

ОБЫЧНО ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ПРОИЗВОДИТСЯ ДЛЯ ИДЕАЛИЗИРОВАННОГО СЛУЧАЯ ВОЛНОВОДОВ БЕЗ ПОТЕРЬ, Т.Е. В ПРЕДПОЛОЖЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ СТенок И ОТСУТСТВИЯ ПОТЕРЬ В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ЗАПОЛНЕНИИ.

Согласно граничным условиям в комплексной форме для нормальных составляющих поля на поверхности идеального проводника формулы имеют вид:

$$\left[\dot{\vec{E}}, n_{21}^0 \right] = 0; \left[\dot{\vec{H}}, \bar{n}_{21}^0 \right] = \dot{\vec{\eta}} \quad \text{или} \quad \dot{E}_{\tau} = 0; \dot{H}_{1\tau} = \dot{\vec{\eta}}.$$

Касательные составляющие \dot{E} обращаются в нуль на идеально проводящих цилиндрических поверхностях раздела, т.е. на контуре L_{\perp} области, представляющем собой поперечное сечение волновода. В общем случае контур L_{\perp} поперечного сечения волновода может состоять из нескольких замкнутых кривых $L_{\perp p}$, причем одна из них (внешняя) охватывает остальные. Касательными к цилиндрическим поверхностям составляющими являются $\dot{E}_z = \dot{E}_{0z}(u, v)e^{\mp\gamma z}$ и компонента поперечного вектора $E_{\perp} = E_{0\perp}(u, v)e^{\mp\gamma z}$, тангенциальная к контуру L_{\perp} . Из условия $\dot{E}_z = 0$ сразу же следует граничное условие для составляющей \dot{E}_{0z} :

$$\dot{E}_{0z} = 0 \quad \text{на} \quad L_{\perp}. \quad (4.23)$$

Введем нормальный к контуру L_{\perp} орт n^0 , направленный внутрь металла, и тангенциальный орт t^0 , направленный таким образом, чтобы n^0, t^0, z^0 образовали правую тройку векторов (рис. 4.2). Разложим лежащий в поперечном сечении вектор $\text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z}$ (и $\text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z}$) на составляющие по ортам n^0 и t^0 :

$$\text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z} = (\text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z} n^0) n^0 + (\text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z} t^0) t^0 = \frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial l_n} n^0 + \frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial l_t} t^0, \quad (4.24)$$

где $\frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial l_n}, \frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial l_t}$ – соответственно производные функций \dot{E}_{0z} по направлениям нормали n^0 и касательной t^0 к контуру L_{\perp} . Согласно $[z^0 t^0] = -n^0$ и (4.24) имеем

$$[\text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z} z^0] t^0 = \text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z} [z^0 t^0] = -\text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z} n^0 = -\frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial l_n}. \quad (4.25)$$

С помощью (4.12) получим выражение для тангенциальной к контуру компоненты вектора $\dot{E}_{0\perp}$, которая равна нулю:

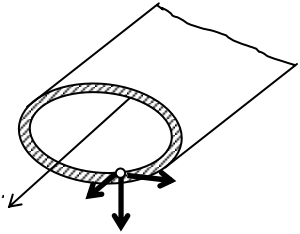
$$\dot{E}_{0\perp} t^0 = \mp \frac{\gamma}{\aleph^2} \left\{ \frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial l_t} \mp \frac{i\omega\mu_a}{\gamma} \frac{\partial \dot{H}_{0z}}{\partial l_n} \right\} = 0 \text{ на } L_{\perp}. \quad (4.26)$$

t^0
 n^0

РИС. 4.2

Поскольку из условия (4.23) сразу же следует равенство $\frac{\partial \dot{E}_{0z}}{\partial l_t} = 0$ на L_{\perp} , то это приводит к следующему граничному условию для составляющей H_{0z} :

$$\frac{\partial H_{0z}}{\partial l_n} = 0 \text{ на } L_{\perp}. \quad (4.27)$$



В случае поля класса E соотношение (4.2) выполняется автоматически и граничное условие имеет вид (4.26); в случае поля класса H автоматически выполняется соотношение (4.26). Таким образом, в волноводах с идеально проводящими поверхностями раздела граничные условия могут быть удовлетворены полями электрического и магнитного классов независимо друг от друга, что приводит к возможности раздельного, независимого существования полей этих классов. При этом функция \dot{E}_{0z} или \dot{H}_{0z} определяется путем решения двумерного уравнения Гельмгольца при соответствующих граничных условиях:

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{E}_{0z} + \aleph^2 \dot{E}_{0z} = 0 \text{ при } \dot{E}_{0z} = 0 \text{ на } L_{\perp}; \quad (4.28)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \dot{H}_{0z} + \aleph^2 \dot{H}_{0z} = 0 \text{ при } \partial \dot{H}_{0z} / \partial l_n = 0 \text{ на } L_{\perp}. \quad (4.29)$$

Условия (4.28) и (4.29) определяют две краевые задачи, называемые соответственно задачей Дирихле и задачей Неймана. В математике доказывается в общем виде, а в следующей главе показывается на частных примерах, что внутри замкнутого контура L_{\perp} (волновод) отличное от нуля решение задачи (4.28) или (4.29) возможно не при любом \aleph^2 , а лишь при строго определенных дискретных вещественных положительных значениях

$$\aleph_1^2, \aleph_2^2, \aleph_3^2, \dots, \quad (4.30)$$

которые называют собственными числами краевой задачи. Собственные числа определяются формой и размерами контура L_{\perp} , образуют бесконечную последовательность величин, возрастающих от некоторого наименьшего значения до бесконечности. Далее они обозначаются через \aleph_{ν}^2 . Каждому собствен-

ному числу \aleph_v^2 соответствует, по крайней мере, одна функция, удовлетворяющая условию (4.28) или (4.29) и называемая собственной функцией краевой задачи. Следовательно, собственные функции \dot{E}_{0z} или \dot{H}_{0z} также образуют бесконечную последовательность частных решений краевой задачи. Каждая собственная функция согласно (4.12) и (4.14) определяет поле конкретного типа класса E или H , которое, как будет показано далее, обладает только ему свойственной картиной векторных линий E и H .

Из (4.13) следует, что каждому собственному числу \aleph_v^2 соответствует свое значение коэффициента распространения

$$\gamma_v = \sqrt{\aleph_v^2 - k^2}, \quad (4.31)$$

где $k^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_a$, ε_a и μ_a – параметры среды без потерь ($\sigma = 0$), заполняющей волновод.

Поскольку поле каждого типа удовлетворяет линейным уравнениям Максвелла и граничным условиям на идеально проводящих поверхностях раздела, то результирующее поле в волноводе в общем случае представляет собой бесконечную сумму полей всех возможных типов.

4.2.2 Поля магнитного и электрического классов, их свойства и параметры

Положив в (4.12) и (4.14) $\dot{E}_{0z} = 0$ во всех точках поперечного сечения волновода без потерь, получим следующие выражения для поля произвольного типа класса H :

$$\dot{H}_{0z} = z^0 H_{0z}; \quad (4.32a)$$

$$\dot{H}_{0\perp} = \mp \frac{\gamma_v}{\aleph_v^2} \text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z}; \quad (4.32b)$$

$$\dot{E}_{0\perp} = -\frac{\gamma_v}{\aleph_v^2} \frac{i\omega\mu_a}{\gamma_v} [\text{grad}_{\perp} \dot{H}_{0z}, z^0] = Z_{hv} [\dot{H}_{0\perp}, \pm z^0]. \quad (4.32v)$$

Здесь введено обозначение

$$Z_{hv} = i\omega\mu_a / \gamma_v; \quad (4.33)$$

\dot{H}_{0z} и \aleph_v^2 определяются из решения краевой задачи (4.29).

Положив в (4.12) и (4.14) $\dot{H}_{0z} = 0$, получим выражения для поля произвольного типа класса E :

$$\dot{E}_{0z} = z^0 \dot{E}_{0z}; \quad (4.34a)$$

$$\dot{E}_{0\perp} = \mp (\gamma_v / \aleph_v^2) \text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z}; \quad (4.34b)$$

$$\dot{H}_{0\perp} = \frac{\gamma_v}{\aleph_v^2} \frac{i\omega\varepsilon_a}{\gamma_v} [\text{grad}_{\perp} \dot{E}_{0z}, z^0] = \frac{1}{z_{ev}} [\pm z^0, \dot{E}_{0\perp}], \quad (4.34v)$$

где

$$Z_{ev} = \gamma_v / i\omega\varepsilon_a; \quad (4.35)$$

\dot{E}_{0z} и \aleph_v^2 определяются из решения краевой задачи (4.28).

Фигурирующий в формулах (4.32) и (4.34) коэффициент распространения γ_v находят из (4.31); в этих формулах и всюду в дальнейшем верхние знаки соответствуют зависимости комплексных амплитуд (4.2) от z вида $e^{-\gamma_v z}$, нижние – вида $e^{\gamma_v z}$.

В соотношениях (4.32b) и (4.34b) поперечные комплексные векторы $\dot{H}_{0\perp}$ и $\dot{E}_{0\perp}$ выражены через одноименные продольные составляющие. Формулы (4.32v) и (4.34v) устанавливают связь между поперечными векторами $\dot{H}_{0\perp}$ и $\dot{E}_{0\perp}$ и переходят друг в друга. Эти векторные формулы при подстановке в них (4.5) распадаются на два скалярных равенства:

$$\dot{E}_{0u} / \dot{H}_{0v} = \pm Z_{cv}; \quad \dot{E}_{0v} / \dot{H}_{0u} = \mp Z_{cv}, \quad (4.36)$$

где Z_{cv} есть Z_{hv} или Z_{ev} . Разные знаки отношений $\dot{E}_{0u} / \dot{H}_{0v}$ и $\dot{E}_{0v} / \dot{H}_{0u}$ обусловлены тем, что согласно (4.32v) и (4.34v) $\dot{E}_{0\perp}$, $\dot{H}_{0\perp}$ и продольный орт z^0 (при $e^{-\gamma_v z}$) или $-z^0$ (при $e^{\gamma_v z}$) образуют правую ортогональную тройку векторов. Величину Z_{cv} , определяющую согласно (4.36) отношение комплексных ам-

плитуд взаимно перпендикулярных поперечных составляющих напряженностей электрического и магнитного полей и имеющую размерность сопротивления, называют характеристическим сопротивлением поля рассматриваемого типа.

Каждому собственному числу краевой задачи κ_v^2 соответствует вещественный положительный параметр κ_v , значение которого определяется формой и размерами поперечного сечения волновода, классом поля и его типом.

Плоские бегущие волны либо местные затухающие поля. В волноводе без потерь согласно (4.31) коэффициент распространения γ_v может быть либо мнимым числом, либо вещественным, что, в свою очередь, приводит к существованию соответственно либо бегущих волн, либо затухающих полей.

При $k > \kappa_v$ γ_v является мнимой величиной: $\gamma_v = \sqrt{\kappa_v^2 - k^2} = i\sqrt{k^2 - \kappa_v^2} = i\beta_v$, где β_v – коэффициент фазы. В этом случае согласно (4.2) и формулы $\dot{A}(t) = \text{Re}(\dot{A}e^{i\omega t})$ в выражение для фазы векторов поля время t и координата z входят в виде линейной комбинации $\omega t \mp \beta_v z = \omega(t \mp z/v_v)$, где

$$v_v = \omega/\beta_v, \quad (4.37)$$

и уравнение постоянного значения фазы имеет вид $t \mp z/v_v = \text{const}$. Отсюда следует, что в волноводе существует плоская волна, поверхности одинаковой фазы $z = \text{const}$ которой распространяются вдоль оси z в направлении $+z^0$ (падающая волна) или $-z^0$ (отраженная волна) с фазовой скоростью (4.37). Поскольку амплитуды векторов поля этой волны изменяются от точки к точке на волновых поверхностях $z = \text{const}$, то она является неоднородной плоской волной. При $\gamma_v = i\beta_v$ амплитуды векторов поля не затухают в направлении распространения волны, что и следовало ожидать в волноводе без потерь.

При $\gamma_v = i\beta_v$ характеристические сопротивления полей (4.33) и (4.35) оказываются вещественными:

$$Z_{hv} = \omega\mu_a/\beta_v, \quad Z_{ev} = \beta_v/\omega\varepsilon_a. \quad (4.38)$$

В этом случае мгновенные значения поперечных векторов E_\perp и H_\perp связаны между собой соотношениями, аналогичными (4.32в) и (4.34в):

$$E_\perp = Z_{cv}[H_\perp, \pm z^0]; \quad H_\perp = \frac{1}{Z_{cv}}[\pm z^0, E_\perp]. \quad (4.39)$$

Отсюда следует, что в каждой точке поперечного сечения волновода компоненты поля E_\perp и H_\perp имеют одинаковую фазу колебаний, взаимно перпендикулярны и образуют с направлением распространения волны правую ортогональную тройку векторов. Это означает, что волна переносит электромагнитную энергию вдоль оси z . Таким образом, при $\gamma_v = i\beta_v$ в волноводе существует неоднородная плоская бегущая волна.

При $k < \kappa_v$ γ_v является вещественной величиной; $\gamma_v = \sqrt{\kappa_v^2 - k^2} = \alpha_v$, где α_v – коэффициент затухания. В этом случае каждый из векторов поля имеет в любой момент времени фазу, одинаковую во всех точках волновода; амплитуды векторов поля затухают в направлениях $\pm z^0$ по экспоненциальному закону $e^{\mp\alpha_v z}$.

При $\gamma_v = \alpha_v$ характеристическое сопротивление (4.33) или (4.35) оказывается мнимым, причем для полей класса H оно имеет индуктивный характер, для полей класса E – емкостный:

$$Z_{hv} = i\omega\mu_a/\alpha_v, \quad Z_{ev} = \alpha_v/i\omega\varepsilon_a. \quad (4.40)$$

Согласно (4.36) в случае мнимого Z_{cv} мгновенные значения взаимно перпендикулярных поперечных составляющих E_u и H_v оказываются сдвинутыми по фазе друг относительно друга на $\pi/2$, что приводит к колебательному характеру движения энергии вдоль оси z , т.е. к отсутствию ее переноса вдоль волновода.

Соответствующий значению $\gamma_v = \alpha_v$ электромагнитный процесс называют местным полем. Экспоненциальное затухание вдоль оси z местных полей не связано с потерей электромагнитной энергии (рассматривается волновод без потерь), а отражает тот факт, что местные поля не распространяются вдоль волновода. Они существуют как локальные поля вблизи различных нерегулярностей, которые имеются в реальной линии передачи.

Критические волновое число, частота и длина волны. Волновое число $k = \omega\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} = 2\pi f\sqrt{\varepsilon_a\mu_a} = 2\pi/\lambda$, скорость $v = 1/\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$ и длина волны $\lambda = vT = v/f$ представляют собой параметры волны частоты f , свободно распространяющейся в безграничной среде (проницаемости ε_a и μ_a которой совпадают с проницаемостями среды, заполняющей волновод).

Известно, что значение вещественного положительного параметра \aleph_v определяется только формой и размерами поперечного сечения волновода, классом и типом поля. Значение волнового числа $k_{кр} = \aleph_v$, соответствующее границе двух различных электромагнитных процессов в волноводе без потерь ($k > \aleph_v$ – бегущая волна, $k < \aleph_v$ – местное поле), называют критическим волновым числом поля рассматриваемого типа. Критическому волновому числу \aleph_v соответствует критическая частота поля рассматриваемого типа $f_{крv}$, которая определяется из соотношения $\aleph_v = 2\pi f_{крv}\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}$ и зависит от значения \aleph_v и параметров среды, заполняющей волновод:

$$f_{крv} = \aleph_v / 2\pi\sqrt{\varepsilon_a\mu_a}. \quad (4.41)$$

Критическая длина волны поля рассматриваемого типа определяется формулой:

$$\lambda_{крv} = v / f_{крv} = 2\pi\aleph_v, \quad (4.42)$$

и, следовательно, зависит от геометрических параметров поперечного сечения волновода, класса и типа поля и не зависит от частоты f электромагнитного процесса и параметров среды ε_a , μ_a , заполняющей волновод.

Если выполняются условия

$$f > f_{крv}, \quad \text{т.е. } \lambda < \lambda_{крv}, \quad (4.43)$$

то $k > \aleph_v$ и тип поля, характеризуемый параметрами \aleph_v , $f_{крv}$ и $\lambda_{крv}$, представляет собой на частоте f распространяющуюся вдоль волновода плоскую бегущую волну. При выполнении обратных неравенств

$$f < f_{крv}, \quad \text{т.е. } \lambda > \lambda_{крv}, \quad (4.44)$$

имеем $k < \aleph_v$ и поле рассматриваемого типа на частоте f вдоль волновода не распространяется.

Фазовая скорость и длина волны в волноводе. В случае выполнения условий (4.43) при учете равенств $k = 2\pi/\lambda$ и $\aleph_v = 2\pi/\lambda_{крv}$ имеем

$$\beta_v = \sqrt{k^2 - \aleph_v^2} = k\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{крv}}\right)^2} = \frac{\omega}{v}\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{крv}}\right)^2}, \quad (4.45)$$

откуда фазовая скорость плоской бегущей волны

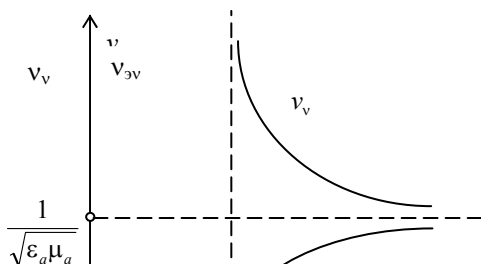
$$v_v = \frac{\omega}{\beta_v} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{крv})^2}} = \frac{v}{\sqrt{1 - (f_{крv}/f)^2}}. \quad (4.46)$$

Из (4.46) следует, что фазовая скорость $v_v > v$. Таким образом, в волноводах бегущие волны классов H и E являются ускоренными.

Фазовая скорость (4.46) зависит от частоты колебаний f (рис. 4.3). Поскольку с увеличением f фазовая скорость уменьшается, то в волноводе распространение волны любого типа классов H и E характеризуется ее нормальной дисперсией. Каждый тип плоской бегущей волны частоты f обладает своей длиной волны в волноводе Λ_v определяемой расстоянием вдоль волновода, на котором фаза электромагнитной волны изменяется на 2π . Согласно этому определению $\beta_v\Lambda_v = \frac{\omega}{v_v}\Lambda_v = 2\pi$, откуда

$$\Lambda_v = v_v T = \frac{2\pi}{\beta_v} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_{крv})^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - (f_{крv}/f)^2}}. \quad (4.47)$$

Из (4.47) следует, что длина волны в волноводе $\Lambda_v > \lambda$.



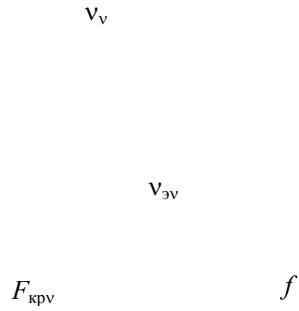


Рис. 4.3

4.2.3 Поле поперечного электромагнитного класса, его свойства и параметры

В регулярном волноводе без потерь коэффициент распространения поля класса T определится соотношением (4.19) при $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a$:

$$\gamma = i\beta = i\omega\sqrt{\epsilon_a\mu_a} = ik. \quad (4.48)$$

Подставив (4.48) в (4.18), выразим $\dot{H}_{0\perp}$ через $\dot{E}_{0\perp}$:

$$\dot{H}_{0\perp} = \frac{1}{Z_\lambda} [\pm z^0, \dot{E}_{0\perp}], \quad (4.49)$$

где

$$Z_\lambda = \omega\mu_a / k = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}. \quad (4.50)$$

Верхний знак, как и всюду, соответствует зависимости комплексных амплитуд (4.2) от z вида $e^{-\gamma z} = e^{-i\beta z}$ (падающая волна), нижний – вида $e^{\gamma z} = e^{i\beta z}$ (отраженная волна).

Комплексный вектор $\dot{E}_{0\perp}$ выражается через скалярный потенциал ϕ соотношением (4.20). Потенциал ϕ есть решение краевой задачи (4.21), (4.22), которое отлично от нуля, для поперечных сечений в виде многосвязанных областей. Поскольку это решение не распадается на множество частных решений, то поле класса T и поле типа T синонимы.

Коэффициент распространения (4.48) на любой частоте является мнимой величиной и равен коэффициенту распространения в безграничном диэлектрике с параметрами ϵ_a и μ_a . Следовательно, в волноводе без потерь на всех частотах поле класса T существует в виде направляемых плоских неоднородных волн, которые распространяются вдоль оси z без затухания с фазовой скоростью

$$v = \omega / \beta = \omega / k = 1 / \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad (4.51)$$

равной скорости волны в безграничном диэлектрике, и имеют длину волны

$$\Lambda = vT = 2\pi / \beta = \lambda, \quad (4.52)$$

равную длине волны в безграничном диэлектрике. Фазовая скорость (4.51) не зависит от частоты колебаний, вследствие чего дисперсия T -волн отсутствует.

Соотношение (4.49) аналогично формуле (4.34в). Следовательно, для направляемых T -волн справедливы выражения (4.36), причем характеристическое сопротивление этих волн на всех частотах существенно: $Z_\lambda = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a} = Z_c$ – и равно характеристическому сопротивлению волны в безграничной среде. При этом согласно (4.49) в каждой точке поперечного сечения волновода мгновенные значения E и H связаны между собой теми же соотношениями, что и в однородной плоской волне в среде без потерь, т.е. E и H взаимно перпендикулярны, отличаются друг от друга по величине в Z_c раз, колеблются в

одинаковой фазе и образуют с направлением распространения волны $\pm z^0$ правую ортогональную тройку векторов. Это означает, что на всех частотах направляемая T -волна переносит электромагнитную энергию вдоль оси z и представляет собой неоднородную плоскую бегущую волну. Возможность существования плоской бегущей T -волны на любой частоте обусловлена тем, что у поля класса T параметр $\varkappa=0$ и, следовательно, $\lambda_{кр} = \infty$, $f_{кр} = 0$. При описании T -волн в волноводах (например, в коаксиале), а также в открытых линиях передачи, образованных хорошими проводниками можно однозначно ввести понятия напряжения и тока и измерить эти величины. Поскольку в соответствии с (4.20) электрическое поле $\dot{E}_{\perp} = \dot{E}_{0\perp} e^{\mp ikz}$ имеет в каждом поперечном сечении (при $e^{\mp ikz} = \text{const}$) потенциальный характер, то электрическое напряжение \dot{U} между проводниками вводится соотношением

$$\dot{U}_{\pm}(z) = \int_1^2 \dot{E}_{\perp\pm} dI = -e^{\mp ikz} \int_1^2 \text{grad} \phi dI = e^{\mp ikz} \int_2^1 d2\phi = (\phi_1 - \phi_2) e^{\mp ikz} = \dot{U}. \quad (4.53)$$

Здесь принадлежащие различным проводникам точки 1 и 2 и сам путь интегрирования лежат в одном и том же поперечном сечении. Линейный интеграл $\int_1^2 E_{0\perp} dI$ равен разности потенциалов двух проводников и не зависит от пути интегрирования в поперечном сечении. При его вычислении удобно совместить этот путь с электрической силовой линией.

Электрический ток \dot{I} в одном из проводников рассматриваемой линии передачи определим по закону полного тока, вычислив циркуляцию вектора $\dot{H}_{\perp} = \dot{H}_{0\perp} e^{\mp ikz}$ вдоль контура L , который охватывает этот проводник и лежит в поперечном сечении. Выбрав в качестве L одну из векторных линий H_{\perp} и условившись считать положительным обход контура в направлении вектора H_{\perp} падающей волны, при учете (4.49) и (4.20) получим

$$\dot{I}_{\pm}(z) = \oint_L \dot{H}_{\perp\pm} dI = \pm e^{\mp ikz} \oint_L |\dot{H}_{0\perp}| dI = \pm \frac{e^{\mp ikz}}{Z_{\lambda}} \oint_L |\text{grad} \phi| dI = \pm \dot{I}_0 e^{\mp ikz}. \quad (4.54)$$

Появление перед экспонентой знаков « \pm » объясняется тем, что при одинаковых направлениях векторов E_{\perp} падающей и отраженной волн векторы H_{\perp} будут иметь противоположные направления

Отношение напряжения $\dot{U}_{+}(z)$ к току $\dot{I}_{+}(z)$ падающей бегущей волны [или взятое со знаком минус отношение $\dot{U}_{-}(z)$ к $\dot{I}_{-}(z)$ отраженной бегущей волны] называют волновым сопротивлением линии передачи:

$$Z_{\text{в}} = \frac{\dot{U}_{+}(z)}{\dot{I}_{+}(z)} = -\frac{\dot{U}_{-}(z)}{\dot{I}_{-}(z)} = Z_{\lambda} \frac{\phi_1 - \phi_2}{\oint_L |\text{grad} \phi| dI}. \quad (4.55)$$

Волновое сопротивление $Z_{\text{в}}$ зависит от геометрических параметров линии передачи и отличается от характеристического сопротивления T -волны $Z_{\lambda} = Z_{\text{с}}$.

4.2.4 Мощность, переносимая вдоль волновода бегущей волной

Среднее за период значение мощности $P_{\text{вcp}}$, переносимой вдоль волновода без потерь бегущей волной произвольного типа в направлении распространения $\pm z^0$, определится выражением:

$$P_{\text{вcp}} = \int_{S_{\perp}} \Pi_{\text{вcp}}(\pm z^0) dS = \frac{1}{2} \int_{S_{\perp}} \text{Re} \left[\dot{E} H^* \right] (\pm z^0) dS = \frac{1}{2} \int_{S_{\perp}} \text{Re} \left[\dot{E}_{\perp} H_{\perp}^* \right] (\pm z^0) dS, \quad (4.56)$$

где S_{\perp} – площадь поперечного сечения волновода.

Учитывая, что при $\gamma = i\beta$ $[\dot{E}_\perp H_\perp] = [\dot{E}_{0\perp} H_{0\perp}]$, имеем

$$[\dot{E}_\perp H_\perp] = (\pm z^0) = [H_{0\perp}, \pm z^0] \dot{E}_{0\perp} = [\pm z^0, \dot{E}_{0\perp}] H_{0\perp}. \quad (4.57)$$

Заменив здесь векторные произведения согласно (4.32в), (4.34в) или (4.49), получим вместо (4.56) два равноценных выражения:

$$P_{\text{всп}} = \frac{1}{2Z_{\text{св}}} \int_{S_\perp} |\dot{E}_{0\perp}|^2 dS = \frac{1}{2Z_{\text{св}}} \int_{S_\perp} (E_{\text{ум}}^2 + E_{\text{ум}}^2) dS, \quad (4.58)$$

где $Z_{\text{св}}$ – характеристическое сопротивление волны рассматриваемого типа.

Из (4.58) видно, что увеличение переносимой мощности сопровождается увеличением напряженности электрического поля. Однако эта напряженность не может быть сделана сколь угодно большой – ее ограничивает предельное значение $E_{\text{пред}}$, которое характеризует электрическую прочность диэлектрика, заполняющего волновод. Если наибольшая амплитуда напряженности электрического поля в волноводе превысит $E_{\text{пред}}$, то возникнет высокочастотный пробой диэлектрика. Разрядный промежуток обладает большой проводимостью и шунтирует собой волновод, что вызывает значительное отражение падающей волны к генератору. Нормальная передача мощности прекращается; появление отраженной волны может привести к выходу из строя генератора. Значение $E_{\text{пред}}$ зависит от вида диэлектрика, частоты колебаний и ряда других причин. Например, для сухого воздуха в диапазоне сантиметровых волн при нормальных атмосферном давлении и начальной ионизации имеем $E_{\text{пред}} = 30 \text{ кВ/см} = 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$.

Подстановка в (4.58) вместо наибольшей амплитуды электрического поля величины $E_{\text{пред}}$ позволяет определить предельную (наибольшую) мощность $P_{\text{пред}}$, которую может переносить вдоль данного регулярного волновода бегущая волна рассматриваемого типа. В реальном волноводе в общем случае существует отраженная волна. Вследствие этого при передаче одинаковой мощности вдоль регулярного и вдоль реального волновода в последнем максимальная напряженность электрического поля оказывается больше. Это означает, что передаваемая вдоль реального волновода наибольшая мощность, которую называют допустимой рабочей мощностью $P_{\text{доп}}$ должна быть меньше, чем $P_{\text{пред}}$.

4.2.5 Скорость распространения энергии вдоль волновода. Групповая скорость

Если волновод заполнен воздухом (близким по своим свойствам к вакууму), то $v = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = c$ и фазовая скорость (4.46) полей магнитного и электрического классов превышает скорость света в вакууме c . Этот результат не противоречит теории относительности, так как фазовая скорость определяет скорость распространения вдоль волновода поверхности постоянной фазы и в данном случае не идентична скорости распространения энергии или сигнала.

Средняя скорость распространения энергии, переносимой гармонической бегущей волной произвольного типа вдоль волновода без потерь, определится соотношением

$$v_{\text{эв}} = P_{\text{всп}} / \int_{S_\perp} W'_{\text{всп}} dS, \quad (4.59)$$

где $P_{\text{всп}}$ выражается формулой (4.58), а $\int_{S_\perp} W'_{\text{всп}} dS$ – среднее за период значение электромагнитной энергии, приходящейся на единицу длины волновода. Из (4.59) для волны произвольного типа класса H или E с помощью соотношений (4.2) можно получить выражения

$$v_{\text{эв}} = v^2 / v_\nu = v \sqrt{1 - (\lambda / \lambda_{\text{кр}\nu})^2} = v \sqrt{1 - (f_{\text{кр}} / f)^2} \quad (4.60)$$

и $v_\nu v_{\text{эв}} = v^2$. Таким образом, в волноводе скорость переноса энергии гармонической волной любого типа классов H и E всегда меньше скорости $v = 1/\sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ волны, свободно распространяющейся в безграничной среде. Для гармонической бегущей T -волны из (4.59) получается выражение $v_\nu = v$, т.е. в волноводе скорость переноса энергии этой волной равна фазовой скорости (и скорости волны в безграничной среде).

Обсудим теперь вопрос о скорости распространения в волноводе сигнала. Поскольку передать информацию с помощью установившейся чисто гармонической волны невозможно (из-за ее однородности во времени и пространстве), то сигналом является только негармоническая волна, которую всегда можно представить суперпозицией гармонических волн с разными частотами. Далее ограничимся важным для практики случаем узкополосных сигналов, у которых все составляющие их гармонические волны занимают полосу частот 2Ω , малую по сравнению со средней (несущей) частотой ω_0 . Распространение таких сигналов в линии передачи рассмотрим на простом примере амплитудно-модулированной одним тоном волны. Полученные при этом результаты можно обобщить на любые узкополосные сигналы.

В некоторой точке поперечного сечения линии $z=0$ мгновенное значение любой компоненты вектора E волны, модулированной одним тоном, можно представить суперпозицией трех гармонических составляющих с разными частотами:

$$E(t, 0) = E_m(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t = E_m \cos \omega_0 t + \frac{mE_m}{2} \cos [(\omega_0 + \Omega)t] + \frac{mE_m}{2} \cos [(\omega_0 - \Omega)t], \quad (4.61)$$

где ω_0 – несущая частота; Ω, m – частота модуляции и коэффициент модуляции соответственно. Распространение всех гармонических составляющих сигнала осуществляется вдоль волновода волнами одного и того же типа. Поэтому при распространении гармонических составляющих (4.61) в направлении, например, $+z^0$ имеем для соответствующей точки произвольного поперечного сечения z следующее выражение:

$$E(t, z) = E_m \cos(\omega_0 t - \beta_{v0} z) + \frac{mE_m}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t - \beta_{v1} z] + \frac{mE_m}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t - \beta_{v2} z], \quad (4.62)$$

где $\beta_{v0} = \beta_v(\omega_0)$, $\beta_{v1} = \beta_v(\omega_0 + \Omega)$, $\beta_{v2} = \beta_v(\omega_0 - \Omega)$ – значения коэффициента фазы волн одного и того же типа на различных частотах.

Рассмотрим случай, когда эти волны относятся к классу H или E , т.е. характеризуются дисперсией, и β_v определяется соотношением (4.45). Для узкополосных сигналов $\Omega \ll \omega_0$ и функция $\beta_v(\omega_0 \pm \Omega)$ может быть представлена тремя первыми членами ряда Тейлора:

$$\beta_v(\omega_0 \pm \Omega) = \beta_v(\omega_0) \pm \left(\frac{d\beta_v}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0} \Omega + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\beta_v}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0} \Omega^2 = \beta_{v0} \pm \xi \Omega + \eta \Omega^2, \quad (4.63)$$

где $\xi = \left(\frac{d\beta_v}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0}$; $\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\beta_v}{d\omega^2} \right)_{\omega=\omega_0}$. При этом $\beta_v z = \beta_{v0} z \pm \xi \Omega z + \eta \Omega^2 z$. Если ограничиться такими значениями z , для которых величина $\eta \Omega^2 z \ll 1$, то ее можно отбросить в аргументе косинусов формулы (4.62). Это означает, что для указанных значений z в интервале частот от $\omega_0 - \Omega$ до $\omega_0 + \Omega$ коэффициент фазы можно аппроксимировать линейной функцией частоты:

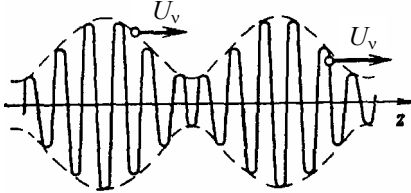
$$\beta_v(\omega_0 \pm \Omega) = \beta_{v0} \pm \xi \Omega. \quad (4.64)$$

Пока остается справедливой аппроксимация (4.64) для коэффициентов фазы всех гармонических волн, составляющих сигнал, эти достаточно близкие по частоте волны образуют так называемую группу волн и сигнал распространяется вдоль линия без изменения своей формы с групповой скоростью.

Действительно, подставив (4.64) в (4.62), получим

$$\begin{aligned}
E(t, z) &= E_m \cos(\omega_0 t - \beta_{v_0} z) + \frac{mE_m}{2} \{ \cos[(\omega_0 + \Omega)t - (\beta_{v_0} + \xi\Omega)z] + \cos[(\omega_0 - \Omega)t - (\beta_{v_0} - \xi\Omega)z] \} = \\
&= E_m \{ 1 + m \cos[\Omega(t - \xi z)] \} \cos(\omega_0 t - \beta_{v_0} z). \quad (4.65)
\end{aligned}$$

Выражение (4.65) можно интерпретировать как плоскую волну частоты ω_0 , которая распространяется в направлении $+z^0$ и амплитуда которой изменяется по закону

$$E_m(t, z) = E_m \{ 1 + m \cos[\Omega(t - \xi z)] \}, \quad (4.66)$$


определяющему форму по формуле (4.65) для распределение вдоль оси z изображено на рис. 4.4.

РИС. 4.4

z огибающей группы волн. Построенное фиксированного момента времени

С течением времени плоскости постоянной фазы, определяемые уравнением $\omega_0 t - \beta_{v_0} z = \text{const}$, распространяются вдоль оси z с фазовой скоростью

$$v_v = \omega_0 / \beta_v(\omega_0) = v / \sqrt{1 - (\lambda_0 / \lambda_{крv})^2}, \quad (4.67)$$

где $\lambda_0 = v / f_0$. Скорость распространения постоянного значения огибающей группы волн (например, ее максимума) называют групповой скоростью u_v . Согласно (4.66) уравнение постоянного значения огибающей имеет вид $t - \xi z = \text{const}$, откуда групповая скорость

$$u_v = \frac{1}{\xi} = \frac{1}{\left(\frac{d\beta_v}{d\omega} \right)_{\omega=\omega_0}} = \frac{1}{\left(\frac{d}{d\omega} \sqrt{\omega^2 \epsilon_a \mu_a - N_v^2} \right)_{\omega=\omega_0}} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{крv}} \right)^2}. \quad (4.68)$$

Поскольку $u_v < v_v$, то происходит специфическое «проскальзывание» высокочастотного заполнения относительно огибающей (см. рис. 4.3).

Если полоса частот, занимаемая сигналом, достаточно узка, то формула (4.64) остается справедливой для значительных расстояний z в линии с дисперсией и соответственно огибающая группы волн перемещается без заметного изменения своей формы (сигнал распространяется без искажения) на значительные расстояния. Поскольку понятие групповой скорости применимо только к узкополосным сигналам, то эта скорость оказывается по величине равной средней скорости распространения энергии (4.60), переносимой гармонической волной на несущей частоте ω_0 .

Фазовая (4.67) и групповая (4.68) скорости связаны между собой соотношением $v_v u_v = v^2$. Скорость распространения узкополосного сигнала (4.68) меньше скорости $v = 1 / \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$.

При распространении сигнала вдоль волновода без потерь волнами T дисперсия отсутствует и коэффициент фазы (4.48) всегда является линейной функцией частоты: $\beta(\omega_0 \pm \Omega) = (\omega_0 \pm \Omega) \sqrt{\epsilon_a \mu_a} = \beta_0 \pm \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \Omega$. Следовательно, понятие группы волн применимо в любой полосе частот и при любых значениях z , произвольный сигнал распространяется без искажения на любые расстояния с групповой скоростью $u = 1 / \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$. Проверить это можно, например, подставив в (4.62) соответствующие выражения для $\beta(\omega)$. Таким образом, при отсутствии дисперсии фазовая (4.51) и групповая скорости совпадают и равны скорости волны $v = 1 / \sqrt{\epsilon_a \mu_a}$ в безграничной среде.

4.2.6 Затухание электромагнитных волн в волноводе,

В п. 4.2.1 – 4.2.5 рассматривались волноводы без потерь, в которых бегущие волны распространяются без затухания ($\gamma_v = i\beta_v$). В действительности, однако, в металлических стенках волновода наблюдается сильный поверхностный эффект, который сопровождается поглощением металлом части мощности, переносимой вдоль волновода. Кроме того, электрическая проводимость реальной диэлектрической среды, заполняющей волновод, все же не равна нулю, вследствие чего происходят потери мощности и в этой среде. Если, однако, волновод заполнен воздухом при нормальном давлении, то для большинства частот диэлектрические потери в нем весьма малы и практически их можно вообще не учитывать.

При определении коэффициента затухания α_v , обусловленного потерями мощности в металлических стенках, приближенно полагают, что распределение поля в поперечном сечении волновода с неидеально проводящими стенками отличается от распределения поля соответствующего типа в поперечном сечении волновода без потерь лишь в непосредственной близости от стенок, где добавляется небольшая касательная составляющая вектора E определяемая с помощью граничных условий Леонтовича-Шукина.

Пусть бегущая волна определенного типа распространяется в волноводе с неидеально проводящими стенками. При $\alpha_v > 0$ вместо (4.58) имеем следующую формулу для средней мощности, переносимой этой волной через поперечное сечение волновода:

$$P_{vcp}(z)e^{-2\alpha_v z} \frac{Z_{cv}}{2} \int_{S_{\perp}} |\dot{H}_{0\perp}|^2 dS = e^{-2\alpha_v z} P_{vcp}(0), \quad (4.69)$$

где $P_{vcp}(0)$ – мощность, переносимая вдоль волновода без потерь.

Очевидно, что справедливо равенство

$$P_{vcp}(z) - P_{vcp}(z + \Delta z) = \Delta P_{vn,cp}(z), \quad (4.70)$$

где $\Delta P_{vn,cp}(z)$ – средняя мощность тепловых потерь, поглощаемая в стенках на отрезке волновода длиной Δz . Разделив (4.70) на Δz и взяв предел при $\Delta z \rightarrow 0$, получим следующее выражение для средней мощности $P_{vn,cp}^{(1)}(z)$, поглощаемой в стенках на единице длины волновода:

$$P_{vn,cp}^{(1)}(z) = - \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{P_{vcp}(z + \Delta z) - P_{vcp}(z)}{\Delta z} = - \frac{dP_{vcp}(z)}{dz}. \quad (4.71)$$

Подставив (4.69) в (4.71), получим $P_{vn,cp}^{(1)}(z) = 2\alpha_v P_{vcp}(z)$, откуда

$$\alpha_v = P_{vn,cp}^{(1)}(z) / 2P_{vcp}(z). \quad (4.72)$$

При наличии в стенках линии передачи сильного поверхностного эффекта величина $P_{vn,cp}^{(1)}(z)$ определится соотношением

$$dP_{n,cp} = \text{Re} \Pi_n dS = r_S \frac{|\dot{\vec{H}}_{\tau}|^2}{2} dS,$$

где $\dot{\vec{H}}_{\tau}$ – тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля на элементе dS ; $r_S = \sqrt{\mu_a \omega / 2\sigma} = 1/\sigma d$, $d = \sqrt{2/\mu_a \sigma \omega}$, $\mu_a \sigma$ – параметры проводящего тела. Произведя в последнем выражении согласно (4.2) замену $|\dot{H}_{\tau}|^2 = |\dot{H}_{0\tau}|^2 e^{-2\alpha_v z}$, подставляя $dS = dl dz$ и интегрируя затем по всему контуру L_{\perp} поперечного сечения, получим выражение для мощности тепловых потерь, поглощаемой на отрезке волновода:

$$dP_{vn,cp}(z) = \frac{1}{2} r_S e^{-2\alpha_v z} dz \oint_{L_{\perp}} |\dot{H}_{0\tau}|^2 dl. \quad (4.73)$$

Имеем

$$P_{\text{в.п.ср}}^{(1)}(z) = \frac{dP_{\text{в.п.ср}}(z)}{dz} = \frac{1}{2} r_s e^{-2\alpha_v z} \oint_{L_\perp} |\dot{H}_{0\tau}|^2 dl. \quad (4.74)$$

Подставив (4.69) и (4.74) в (4.72), получим искомую формулу

$$\alpha_v = \frac{r_s}{4P_{\text{в.п.ср}}} \oint_{L_\perp} |\dot{H}_{0\tau}|^2 dl, \quad (4.75)$$

где α_v дано в 1/м; $|\dot{H}_{0\tau}|^2$ определяется из решения задачи для линии без потерь; $P_{\text{в.п.ср}}$ находится из соотношения (4.58); активное поверхностное сопротивление $r_s = 1/\sigma_2 d = \sqrt{\mu_{2a}\omega/2\sigma_2}$ (μ_{2a} , σ_2 – параметры металла стенок).

Из (4.75) следует, что α_v зависит от формы и размеров поперечного сечения волновода, типа волны, частоты колебаний и материала стенок.

При учете равенства $\dot{H}_{0\tau} = t^0 \dot{H}_{0t} + z^0 H_{0z}$ получим вместо (4.75) формулу

$$\alpha_v = \frac{r_s}{4P_{\text{в.п.ср}}} \oint_{L_\perp} (H_{tm}^2 + H_{zm}^2) dl. \quad (4.76)$$

4.2.7 Графическое изображение структуры поля

Графическое изображение структуры поля определенного типа строится для фиксированного момента времени. При построении картины поля в линии передачи нужно учитывать, что векторные линии H образуют замкнутые петли, а линии E либо оканчиваются на поверхности идеально проводящих стенок (точнее, на поверхностных зарядах стенок), либо также образуют замкнутые петли. Если линии E оканчиваются на поверхности стенок, то согласно тому, что $E_2 = 0$, получаем следующее граничное условие

$$[\dot{E}_1 \bar{n}_{21}^0] = 0 \quad \text{или} \quad E_{1\tau} = 0,$$

они ориентированы перпендикулярно к ней. В изотропной среде, примыкающей к идеальному проводнику согласно тому, что граничное условие принимает вид

$$\bar{H}_1 \bar{n}_{21}^0 = 0 \quad \text{или} \quad H_{1n} = 0,$$

линии H у поверхности стенок ориентированы по касательным к ней.

У поля класса H линии E лежат только в поперечных сечениях и представляют собой плоские кривые, а линии H являются, вообще говоря, трехмерными пространственными кривыми. У поля класса E , наоборот, линии H (замкнутые) лежат только в поперечных сечениях, а линии E являются трехмерными кривыми. Как правило, изображение структуры поля удобнее начинать с построения более простых векторных линий, лежащих только в поперечных сечениях.

В дальнейшем нас будет интересовать, главным образом, построение структуры поля бегущих волн ($\gamma_v = i\beta_v$). В этом случае в каждой точке поперечного сечения волновода взаимно перпендикулярные поперечные компоненты E_\perp и H_\perp образуют с направлением распространения волны правую тройку векторов (см. пп. 4.2, 4.3). Поскольку E_\perp и H_\perp имеют одинаковую фазу колебаний, то они принимают экстремальные значения в одних и тех же поперечных сечениях линии, где продольная составляющая E_z или H_z равна нулю (так как имеет сдвиг по фазе на $\pi/2$ относительно поперечных составляющих).

Для удобства будем изображать структуру поля в таких сечениях волновода (поперечных и продольных), для которых трехмерные в общем случае векторные линии оказываются плоскими и лежащими в этих сечениях или перпендикулярными к ним. Лежащие в плоскости рисунка векторные линии E принято изображать сплошными, векторные линии H – штриховыми. Линии E и H , перпендикулярные плоскости рисунка, представляются точками, если направлены на наблюдателя, и крестиками, если направлены от наблюдателя. Густота векторных линий пропорциональна величине вектора.

4.2.8 Поля основного и высших типов

Согласно (4.42) критические длины волн полей различных типов классов E и H образуют бесконечную последовательность дискретных величин, убывающих от некоторого наибольшего значения до нуля. Поле типа T характеризуется критической длиной волны $\lambda_{кр} = \infty$. Полем основного (низшего) типа называют поле, которое имеет в данной линии передачи наибольшую критическую длину волны (наименьшую критическую частоту). Например, в волноводах с многосвязным поперечным сечением полем основного типа является поле T . Поля остальных типов называют полями высших типов.

Для существования при заданном значении λ (т.е. частоты $f = \nu/\lambda$) в волноводе бегущей волны только основного типа и местных затухающих полей всех высших типов необходимо выбрать размеры поперечного сечения таким образом, чтобы согласно (4.43) и (4.44) одновременно удовлетворялись неравенства:

$$\lambda < \lambda_{кр1}, \lambda_{кр2} < \lambda. \quad (4.77)$$

Здесь $\lambda_{кр1}$ и $\lambda_{кр2}$ – соответственно критические длины волн полей основного типа и первого высшего типа, который имеет наибольшее значение $\lambda_{кр}$ после поля основного типа.

Если во всей полосе частот, занимаемой сигналом, удовлетворяются неравенства (4.76), то имеет место одноволновый режим. Линию передачи, в которой существует этот режим, называют одноволновой. Наибольший коэффициент перекрытия рабочего диапазона частот (или длин волн), в котором сохраняется одноволновый режим, определяется согласно (4.76) соотношением

$$\eta = f_{max} / f_{min} = \lambda_{кр1} / \lambda_{кр2}. \quad (4.78)$$

Если размеры поперечного сечения линии допускают в пропускаемой полосе частот существование бегущих волн более чем одного типа, то имеет место многоволновый режим и линию передачи называют многоволновой.

4.2.9 Требования, предъявляемые к линии передачи

1 Во всей полосе частот, занимаемой сигналом, передача мощности вдоль линии должна осуществляться бегущими волнами только одного типа (называемого рабочим). В самом деле, сигналы, передаваемые волнами различных типов, переносились бы вдоль линии с различными групповыми скоростями и вместо одновременного поступления в точку приема имели бы сдвиг во времени, что привело бы к искажению суммарного сигнала.

2 Линия передачи должна пропускать необходимую мощность без пробоя.

3 При большой длине линии передачи затухание волн в ней должно быть минимальным.

4 Размеры поперечного сечения и масса линии должны быть минимальными.

Первое требование удовлетворяется автоматически, если в линии осуществлен одноволновый режим. Именно этот режим и используют на практике в коаксиальном круглом волноводе и, как правило, в прямоугольном волноводе (4.3). Однако иногда одноволновый режим или не может быть обеспечен в заданном диапазоне частот, или вступает в противоречие с отпеченными выше другими требованиями, что заставляет переходить к многоволновому режиму.

Например, в волноводах минимальным затуханием обладает волна типа H_{01} круглого волновода (см. 4.37), являющаяся волной высшего типа, причем это затухание минимально лишь при достаточно больших отношениях a/λ (a – радиус волновода). Вследствие этого для передачи сигнала на большие расстояния было бы целесообразно использовать круглый волновод с рабочей волной типа H_{01} при значениях $a/\lambda > 3 \dots 4$ (см. 4.1).

При использовании многоволнового режима возникает опасность возникновения в линии передачи наряду с бегущими волнами рабочего типа бегущих волн других типов, являющихся нежелательными, паразитными волнами. Дело в том, что любая реальная линия передачи неизбежно имеет случайные нерегулярности (разнообразные деформации стенок, ступеньки в местах соединения соседних отрезков волновода, искривления оси), на которых происходит частичное (обычно незначительное) преобразование волн рабочего типа в бегущие волны паразитных типов, отнимающие часть мощности у волн рабо-

чего типа. Поэтому в многоволновой линии требуется принимать специальные меры по снижению потерь мощности на преобразование волн рабочего типа в паразитные волны.

В многоволновом волноводе на нерегулярностях происходит и обратное преобразование ранее возникших паразитных волн в волны рабочего типа. В результате этого возникает так называемый попутный поток, который может привести к недопустимым искажениям передаваемого сигнала. Действительно, поскольку различные паразитные волны одной и той же частоты f распространяются в волноводе с разными скоростями, то возникшие при обратных преобразованиях волны рабочего типа накладываются на главную рабочую волну частоты f со случайными сдвигами по фазе, что и приводит к искажениям сигнала. Для ослабления попутного потока в волноводе специальными способами должно быть обеспечено сильное затухание волн паразитных типов.

4.3 ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ И КРУГЛЫЕ ВОЛНОВОДЫ

Волновод представляет собой полую металлическую трубу произвольного сечения, внутри которой распространяются электромагнитные волны. Наиболее часто применяют волноводы прямоугольного (рис. 4.6) и круглого (рис. 4.5) сечений, реже – волноводы более сложного сечения, например, П-образные и H-образные.

В волноводах с идеально проводящими стенками и однородным заполнением могут распространяться волны электрического типа (E), у которых $\dot{H}_z = 0$, $\dot{E}_z \neq 0$ (направление оси z совпадает с продольной осью волновода), и волны магнитного типа (H), у которых $\dot{E}_z = 0$, а $\dot{H}_z \neq 0$.

Анализ волн в волноводах производят посредством решения уравнений Гельмгольца для составляющих \dot{E}_z или \dot{H}_z при равенстве нулю тангенциальной составляющей вектора электрического поля на стенках волновода.

Предположим, что волновод заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью ϵ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$. Каждый конкретный тип волны в волноводе может распространяться в том случае, если

$$\frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}} < \lambda_{кр}, \quad (4.79)$$

где λ_0 – длина волны генератора; $\lambda_{кр}$ – критическая длина волны, которая определяется размерами и формой поперечного сечения волновода.

Для волн типа E_{mn} и H_{mn} в прямоугольном волноводе

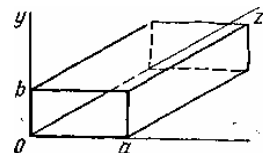
$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}, \quad (4.80)$$

где a, b – размеры поперечного сечения волновода (см. рис. 4.5).

Для волн типа E_{mn} в круглом волноводе

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}}, \quad (4.81)$$

где a – радиус волновода; ν_{mn} – n -й корень уравнения $J_m(x) = 0$.



x

Рис. 4.5

Для волн типа H_{mn} в круглом волноводе

Рис. 4.6

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}, \quad (4.82)$$

где μ_{mn} – n -й корень уравнения $J'_m(x) = 0$.

Значения корней ν_{mn} и μ_{mn} приведены в [9, 10, 13].

Фазовая скорость волны в волноводе определяется величиной продольного волнового числа:

$$h = \sqrt{\beta^2 \varepsilon - g^2}, \quad (4.83)$$

где $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_0}$; $g = \frac{2\pi}{\lambda_{кр}}$ – поперечное волновое число.

Если выполняется условие (4.79), то $\beta^2 \varepsilon > g^2$, значение h действительное и данный тип волны распространяется. Если условие (4.79) не выполняется, то $\beta^2 \varepsilon < g^2$, значение h мнимое и данный тип волны затухает, не распространяясь. В этом случае формула (4.83) позволяет определить коэффициент ослабления волны.

Для нахождения фазовой скорости и длины волны в волноводе можно воспользоваться соотношением

$$h = \frac{2\pi}{\lambda_B} = \frac{\omega}{v_\phi}, \quad (4.83)$$

где λ_B – длина волны в волноводе.

Из (4.83) получаем расчетные формулы для фазовой скорости, длины волны и групповой скорости.

Фазовая скорость

$$v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}}. \quad (4.84)$$

Длина волны в волноводе

$$\lambda_B = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}}. \quad (4.85)$$

Групповая скорость

$$v_{гр} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}}, \quad (4.86)$$

где c – скорость света в свободном пространстве.

Решая уравнение Гельмгольца, можно получить следующие выражения для составляющих векторов напряженностей электрического и магнитного полей волн типа E_{mn} в прямоугольном волноводе:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -j \frac{hm\pi}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_y &= -j \frac{hm\pi}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_z &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-jhz}; \end{aligned} \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= j\omega\varepsilon_a \frac{\pi n}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_y &= -j\omega\varepsilon_a \frac{\pi n}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_z &= 0. \end{aligned}$$

Низшей из волн E_{11} . Картина силовых линий. Выражения для напряженностей полей волн записываются в виде

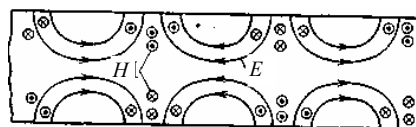


Рис. 4.7

электрического типа является волна поля волны E_{11} изображена на рис. 4.7. составляющих векторов типа H_{mn} в прямоугольном волноводе

$$\dot{E}_x = j\omega\mu_a \frac{\pi n}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-jhz};$$

$$\dot{E}_y = -j\omega\mu_a \frac{\pi m}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-jhz};$$

$$\dot{E}_z = 0;$$

$$\dot{H}_x = j \frac{\pi mh}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-jhz}; \quad (4.88)$$

$$\dot{H}_y = j \frac{\pi mh}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-jhz};$$

$$\dot{H}_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) e^{-jhz}.$$

(H_{10} основным и H_{20} волн в H_{11} угольном волноводе при $a > b$ является волна H_{10} , для которой $\lambda_{кр} = 2a$, ближайшими высшими типами – волны H_{20} , H_{01} , H_{11} . Картина силовых линий поля простейших волн магнитного типа изображена на рис. 4.8.

Наибольшее практическое значение имеет волна типа H_{10} в прямоугольном волноводе. Составляющие векторов поля этой волны описываются выражениями:

$$\dot{E}_x = 0;$$

$$\dot{E}_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz};$$

$$E_z = 0;$$

$$\dot{H}_x = -\frac{h}{\omega\mu_a} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}; \quad (4.89)$$

$$\dot{H}_y = 0;$$

$$\dot{H}_z = j \frac{\pi}{a} \frac{E_0}{\omega\mu_a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}.$$

Составляющие векторов поля волны типа E_{mn} в круглом волноводе имеют вид

$$\dot{E}_r = -j \frac{h}{g} E_0 J'_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz};$$

$$\dot{E}_\varphi = j \frac{hm}{g^2 r} E_0 J_m(gr) \sin(m\varphi) e^{-jhz};$$

$$\dot{E}_z = E_0 J_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz}; \quad (4.90)$$

$$\dot{H}_r = -j \frac{\omega\epsilon_a}{g^2 r} m E_0 J_m(gr) \sin(m\varphi) e^{-jhz};$$

$$\dot{H}_\varphi = -j \frac{\omega\epsilon_a}{g} E_0 J'_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz};$$

$$\dot{H}_z = 0.$$

Низшей среди волн электрического типа в круглом волноводе является волна E_{01} , для которой $\lambda_{кр} = 2,613a$, ближайшим высшим типом – волна E_{11} . Картина силовых линий поля волн типов E_{01} и E_{11} изображена на рис. 4.9.

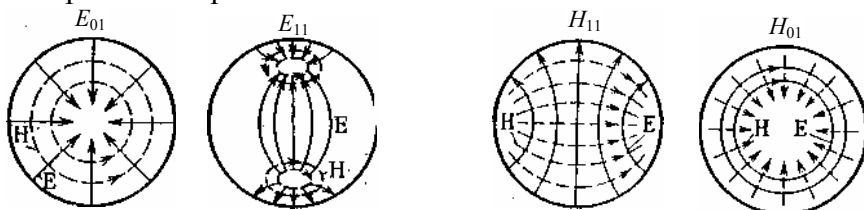


Рис. 4.8

H *E* *H* *E* *H* *E*
E *H*

РИС. 4.9

РИС. 4.10

Выражения для составляющих векторов поля волн типа H_{mn} в круглом волноводе имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= j \frac{\omega \mu_a}{g^2 r} m H_0 J_m'(gr) \sin(m\varphi) e^{-jhz} ; \\ \dot{E}_\varphi &= j \frac{\omega \mu_a}{g} H_0 J_m'(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz} ; \\ \dot{E}_z &= 0 ; \end{aligned} \tag{4.91}$$

$$\dot{H}_r = -j \frac{h}{g} H_0 J_m'(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz} ;$$

$$\dot{H}_\varphi = j \frac{hm}{g^2 r} H_0 J_m'(gr) \sin(m\varphi) e^{-jhz} ;$$

$$\dot{H}_z = H_0 J_m'(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz} .$$

Основным типом волны в круглом волноводе, имеющей наибольшую критическую длину, является волна типа H_{11} , для которой $\lambda_{кр} = 3,41a$. Из других волн магнитного типа в круглом волноводе часто используют волну H_{01} , для которой $\lambda_{кр} = 1,640a$. Картина силовых линий поля волн типов H_{11} и H_{01} изображена на рис. 4.10.

Характеристическим сопротивлением Z_0 волновода называется отношение поперечных составляющих векторов E и H . Для волн электрического типа

$$Z_{cE} = Z_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2} . \tag{4.92}$$

Для волн магнитного типа

$$Z_{cH} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}} , \tag{4.93}$$

где Z_0 – характеристическое сопротивление плоской волны в свободном пространстве.

Мощность, переносимую волной любого типа в волноводе, определяют интегрированием вектора Пойнтинга по поперечному сечению волновода:

$$P_{cp} = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \left\{ 1_z \left[\dot{E} \dot{H}^* \right] \right\} dS . \tag{4.94}$$

Подставляя выражения для составляющих векторов поля (4.89) в (4.94), получим формулу для расчета мощности, переносимой волной типа H_{10} в прямоугольном волноводе:

$$P = \frac{ab \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}}{4Z_0} E_0^2 , \tag{4.95}$$

где E_0 – максимальная амплитуда напряженности электрического поля в волноводе.

Аналогично выводится формула расчета мощности, переносимой волной типа H_{11} в круглом волноводе:

$$P = \frac{\pi a^2 E_0^2}{4,28 Z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (4.96)$$

Максимальная переносимая мощность в волноводе определяется максимально допустимой (пробивной) напряженностью электрического поля в волноводе. Для сухого воздуха при атмосферном давлении $E_{\max} = 30 \frac{\text{кВ}}{\text{см}}$.

Затухание волн в волноводах зависит от потерь в металлических стенках и в материале, заполняющем волновод. Результирующий коэффициент ослабления волны в волноводе равен сумме коэффициентов ослаблений, вызванных потерями в металлических стенках и в диэлектрике:

$$\alpha_{\text{общ}} = \alpha_{\text{м}} + \alpha_{\text{д}}.$$

Коэффициент ослабления вследствие потерь в металлических стенках для любой волны в волноводе произвольного сечения

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{1}{2} \frac{R_S \int_L |\dot{H}_\tau|^2 dl}{\int_S \operatorname{Re} [\dot{E} \dot{H}^*] dS}, \quad (4.97)$$

где $R_S = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}}$ – поверхностное сопротивление металла; \dot{H}_τ – составляющая магнитного поля, тангенциальная к поверхности металла.

Интеграл в числителе выражения (4.97) берут по контуру сечения волновода, интеграл в знаменателе – по его поперечному сечению.

Подставляя соотношение для составляющих векторов поля в общее выражение (4.97), получим расчетные формулы для коэффициентов ослабления конкретных типов волн в волноводах:

для волн типа H_{10} в прямоугольном волноводе

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{R_S \left[1 + \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right) \frac{2b}{a} \right]}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}; \quad (4.98)$$

для волн типа H_{mn} в прямоугольном волноводе ($n \geq 1$)

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{R_S}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} \left\{ \left(1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2 \right] \frac{b \left(\frac{b}{a} n^2 + m^2\right)}{\frac{b^2 n^2}{a^2} + m^2} \right) \right\}; \quad (4.99)$$

для волн типа E_{mn} в прямоугольном волноводе

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{2R_S \left[\left(\frac{b}{a}\right)^3 n^2 + m^2 \right]}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^2 n^2 + m^2 \right]}; \quad (4.100)$$

для волн типа H_{mn} в круглом волноводе

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{R_S}{Z_0 a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}} \left[\left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2 + \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2} \right]; \quad (4.101)$$

для волн типа E_{mn} в круглом волноводе

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{R_S}{Z_0 a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}. \quad (4.102)$$

Расчетные формулы (4.96), (4.97), (4.99) – (4.102) получены в предположении, что волновод имеет воздушное заполнение. Если волновод заполнен диэлектриком, то в эти формулы вместо λ_0 следует подставить значение длины волны в диэлектрике $\frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}}$.

Для расчета коэффициента ослабления за счет потерь в диэлектрике можно воспользоваться формулой (4.83), где вместо ϵ следует подставить комплексную проницаемость диэлектрика $\tilde{\epsilon} = \epsilon(1 - j \operatorname{tg} \delta_s)$. В результате получим

$$\alpha_d = \operatorname{Im} \left[\sqrt{\beta^2 \epsilon (1 - j \operatorname{tg} \delta_s) - g^2} \right]. \quad (4.103)$$

При условии $\operatorname{tg} \delta_s \ll 1$ формула (4.103) может быть упрощена:

$$\alpha_d \approx \frac{\beta^2 \epsilon \operatorname{tg} \delta_s}{2h}, \quad (4.104)$$

или

$$\alpha_d \approx \frac{\pi \epsilon \operatorname{tg} \delta_s}{\lambda_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\beta} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}}. \quad (4.105)$$

4.4 ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ С ВОЛНАМИ ТИПА m

Электромагнитные волны, векторы напряженности электрического и магнитного полей которых лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, называют *поперечными электромагнитными волнами* или волнами типа T .

Волна типа T в отличие от волн типа E и H распространяется в линии при любой частоте ($\omega_{\text{кр} T} = 0$), что важно для практики.

Для волн типа T поперечное волновое число $g = 0$, поэтому продольное волновое число h оказывается таким же, как и в случае однородной плоской волны. Для линии без потерь

$$h = \beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad (4.106)$$

откуда фазовая скорость волны

$$v_{\text{ф}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}; \quad (4.107)$$

$$\lambda_{\text{в}} = \lambda, \quad (4.108)$$

где λ – длина однородной плоской волны в заполняющем диэлектрике с параметрами ϵ_a , μ_a ; $\lambda_{\text{в}}$ – длина волны в волноводе.

Характеристическое сопротивление волны типа T в линии без потерь, обозначаемое Z_{cT} и равное отношению поперечной составляющей напряженности электрического поля и поперечной составляющей напряженности магнитного поля бегущей волны, совпадает с аналогичной величиной, вычисленной для однородной плоской волны в неограниченном пространстве:

$$Z_{cT} = Z_c = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}. \quad (4.109)$$

Комплексные амплитуды полей волны типа T в поперечной плоскости удовлетворяют векторным уравнениям Лапласа:

$$\nabla_{\perp}^2 \bar{E}_0 = 0, \quad \nabla_{\perp}^2 \bar{H}_0 = 0. \quad (4.110)$$

Распределение электрического и магнитного полей вдоль продольной оси z можно записать в виде бегущей волны:

для линии с потерями

$$\bar{E} = \bar{E}_0 e^{-\gamma z}, \quad \bar{H} = \bar{H}_0 e^{-\gamma z}, \quad (4.111)$$

где $\gamma = -j - \alpha$ – коэффициент распространения; \bar{E}_0 и \bar{H}_0 определяются уравнениями (4.110).

Электрические и магнитные поля волны типа T в плоскости поперечного сечения линии передачи по структуре будут такими же, как и постоянные во времени электрические и магнитные поля, существующие в системе при тех же граничных условиях. Это означает, что распространение волны типа T

возможно лишь в линиях, которые могут быть использованы для передачи постоянного тока (двухпроводные, коаксиальные, полосковые и др.).

СТАТИЧЕСКИЙ ХАРАКТЕР ПОПЕРЕЧНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПОЗВОЛЯЕТ ОПРЕДЕЛИТЬ РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ МЕЖДУ ПРОВОДНИКАМИ ЛИНИИ (РИС. 4.11):

$$\dot{U} = \int_{L(P,Q)} \bar{E} d\bar{l}', \quad (4.112)$$

не зависящую от выбора пути интегрирования L в поперечной плоскости.

Ток вдоль проводников

$$\dot{I} = \int_I \bar{n}_3 d\bar{l} \quad (4.113)$$

находят интегрированием вектора \bar{n}_3 плотности поверхностного электрического тока по контуру сечения проводника I .

Линии передачи с волной типа T характеризуются волновым сопротивлением Z_B , равным отношению комплексных амплитуд напряжения и тока в режиме бегущих волн и выражающимся через погонные индуктивность L_1 и емкость C_1 линии следующим образом:

$$Z_B = \sqrt{L_1/C_1}. \quad (4.114)$$

Фазовая скорость в линии передачи с волной типа T :

$$v_\Phi = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (4.115)$$

Мощность, переносимая волной по линии передачи:

$$P = \frac{1}{2} \int_S \text{Re}[\bar{E}\bar{H}] d\bar{S}, \quad (4.116)$$

или

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \int_S |\bar{E}|^2 dS, \quad (4.117)$$

ГДЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ВЕДЕТСЯ ПО ПОПЕРЕЧНОМУ СЕЧЕНИЮ ЛИНИИ.

Коэффициент ослабления волны в линии передачи складывается из коэффициента α_d , учитывающего потери в диэлектрике, и коэффициента α_m , описывающего потери в металле:

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_m, \quad \text{м}^{-1}. \quad (4.118)$$

Здесь

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \text{tg } \delta_3, \quad (4.119)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \frac{R_S \int |\dot{H}_\tau|^2 dl}{\int_S \text{Re}[\dot{E}\dot{H}] dS}, \quad (4.120)$$

где R_S – поверхностное сопротивление металла.

Интегрирование в числителе ведется по контуру сечения линии, в знаменателе – по поперечному сечению линии.

Двухпроводные линии передачи. Двухпроводная линия образована системой из двух параллельных проводников, окруженных однородным веществом с параметрами ϵ_a и μ_a .

На рис. 4.12 показана симметричная двухпроводная линия передачи из одинаковых проводников круглого сечения. Рассмотрим основные расчетные соотношения для этой линии.

Комплексные амплитуды тока \dot{I} и напряжения \dot{U} для бесконечной линии без потерь:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= I e^{-j\beta z}, \\ \dot{U} &= U e^{-j\beta z}. \end{aligned} \quad (4.121)$$

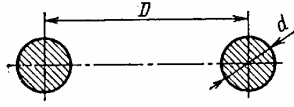


РИС. 4.12

Погонные параметры двухпроводной линии передачи:

$$L_1 \approx \frac{\mu_a}{\pi} \ln\left(\frac{2D-d}{d}\right), \text{ Гн/м;} \quad (4.122)$$

$$C_1 \approx \pi\epsilon_a \frac{1}{\ln\left(\frac{2D-d}{d}\right)}, \text{ Ф/м,} \quad (4.123)$$

Волновое сопротивление

$$Z_B \approx 120 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{2D-d}{d}\right), \text{ Ом.} \quad (4.124)$$

Картина силовых линий электромагнитного поля показана на рис. 4.13. Мощность, переносимая волной типа T в двухпроводной линии передачи:

$$P = \frac{U^2}{2Z_B} = \frac{U^2}{240} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{\ln\left(\frac{2D-d}{d}\right)}, \text{ Вт.} \quad (4.125)$$

Напряженность электрического поля максимальна на участках поверхности, которые наиболее близки друг к другу. Приближенно при $d/D < 0,4$

$$E_{\max} = \frac{U}{d} \frac{1+d/(2D)}{\ln\left(\frac{2D-d}{d}\right)}. \quad (4.126)$$

Диэлектрик способен выдержать без электрического пробоя некоторое предельное значение напряженности электрического поля $E_{\text{пред}}$, которое и определяет предельную переносимую мощность.

Коэффициент ослабления волны за счет потерь в диэлектрике определяется формулой (4.119). Коэффициент ослабления, обусловленный сопротивлением проводников:

$$\alpha_m = \frac{R_s}{\pi d Z_B \sqrt{1-(d/D)^2}}, \text{ м}^{-1}. \quad (4.127)$$

Здесь квадратный корень учитывает повышение ослабления вследствие неравномерного распределения тока; при $d < D/3$ этой поправкой можно пренебречь.

Коаксиальные линии передачи. Коаксиальная линия передачи представляет собой систему из двух соосных металлических цилиндров с диаметрами d и D , разделенных слоем диэлектрика с проницаемостями μ_a и ϵ_a (рис. 4.14).

Комплексная амплитуда вектора \vec{E} бегущей волны в коаксиальной линии передачи без потерь

$$\vec{E} = \frac{\dot{U}}{\ln(D/d)} \frac{1}{r} e^{-j\beta z} \vec{1}_r, \quad (4.128)$$

где \dot{U} – комплексная амплитуда напряжения (разности потенциалов) между внутренним и внешним проводниками в сечении $z = 0$.

Для линии без потерь

$$Z_{сГ} = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a} = 120\pi\sqrt{\mu/\epsilon}, \text{ Ом.} \quad (4.129)$$

Погонные параметры коаксиальной линии передачи:

$$L_1 = \mu_a/(2\pi) \ln(D/d), \text{ Гн/м,} \quad (4.130)$$

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln(D/d)}, \text{ Ф/м.} \quad (4.131)$$

Волновое сопротивление коаксиальной линии передачи

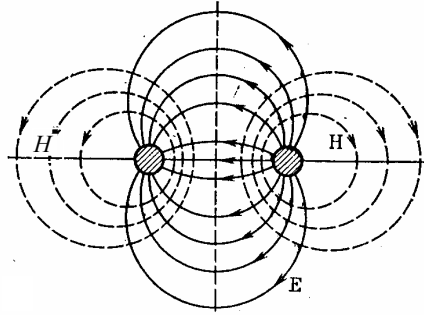


РИС. 4.13

$$Z_b = 60\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln\left(\frac{D}{d}\right) = 138\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \lg\left(\frac{D}{d}\right), \text{ Ом.} \quad (4.132)$$

Переносимая мощность

$$P = \frac{U^2}{120} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{\ln(D/d)}, \text{ Вт.} \quad (4.133)$$

Поскольку

$$U = E_{\max} \frac{d}{2} \ln(D/d), \text{ В,} \quad (4.134)$$

выражение (4.133) можно представить в виде

$$P = \frac{E_{\max}^2 d^2}{480} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \ln(D/d), \text{ Вт.} \quad (4.135)$$

Коэффициент ослабления волны типа T в коаксиальной линии передачи, учитывающий потери в диэлектрике, определяется формулой (4.119). Коэффициент ослабления, обусловленный потерями в металле:

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{R_{S1}/d + R_{S2}/D}{120\pi \ln(D/d)}, \text{ м}^{-1}, \quad (4.136)$$

где R_{S1} и R_{S2} – поверхностные сопротивления металла внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

В коаксиальной линии передачи волны электрического и магнитного типов являются высшими типами волн. Обычно они не используются для передачи, но могут возникать как паразитные. Для подавления волн высших типов достаточно, чтобы частота колебаний удовлетворяла неравенству

$$\omega \leq \frac{4}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} (d + D)}. \quad (4.137)$$

Полосковые линии передачи. В технике СВЧ широко применяют направляющие системы, называемые полосковыми линиями передачи, которые особенно удобны в печатных и интегральных схемах СВЧ. На рис. 4.15, *a* и *б* изображены полосковые линии передачи несимметричного и симметричного типов. Эти линии либо заполнены воздухом, либо имеют основание из твердого диэлектрика.

Строгая теория полосковых линий довольно сложна. Так называемая квази- T -волна в этих линиях может существовать, если ширина токонесущего проводника и расстояние между ним и заземленной пластиной меньше половины длины волны в линии передачи. При этом электрическое и магнитное поля сосредоточены в основном в пространстве между проводником и заземленной пластиной. Электрическое поле в поперечной плоскости может быть описано уравнением Лапласа (4.110).

В полосковых линиях передачи с диэлектрическим основанием волны типа T не могут распространяться в чистом виде из-за неоднородности диэлектрика. Однако теория и опыт показывают, что поля и поток мощности сосредотачиваются главным образом в диэлектрике между токонесущим проводником и заземленной пластиной. Поэтому можно принять допущение об однородности диэлектрика, заполняющего всю линию передачи.

Картинки силовых линий электромагнитного поля в полосковых линиях передачи приведены на рис. 4.16, *a* и *б*. Для практических расчетов удобны следующие приближенные соотношения, которые хорошо согласуются с опытными данными [8].

Погонные емкости ($\Phi/\text{м}$) рассчитывают по формулам:

– для несимметричной полосковой линии передачи (см. рис. 4.15, *a*)

$$C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1 + b/d) \quad (t/d \ll 1; b/d > 0,6); \quad (4.138)$$

$$C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1 + b/d) \frac{1}{1 - t/d} \quad (b/d < 2); \quad (4.139)$$

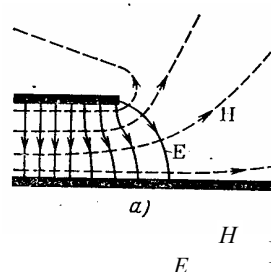
$$C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \varepsilon \left[1 + \frac{b}{d} \left(\frac{1}{1 - t/d} \right) \right] \quad (b/d > 2); \quad (4.140)$$

– для симметричной полосковой линии передачи (см. рис. 4.4.5, *б*)

$$C_1 = 1,54 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1 + b/d) \quad (t/d \ll 1; b/d > 0,6); \quad (4.141)$$

$$C_1 = 1,54 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1 + b/d) \frac{1}{1 - t/d} \quad (b/d < 2); \quad (4.142)$$

$$C_1 = 1,54 \cdot 10^{-11} \varepsilon \left[1 + \frac{b}{d} \left(\frac{1}{1 - t/d} \right) \right] \quad (b/d > 2). \quad (4.143)$$



Волновые сопротивления с учетом толщины токонесущего проводника t рассчитывают по формулам:

– для несимметричной линии передачи

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{314}{1+b/d} (1-t/d) \quad (b/d < 2); \quad (4.144)$$

$$Z_B = 314 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{1 + \frac{b}{d} \left(\frac{1}{1-t/d} \right)} \quad (b/d > 2); \quad (4.145)$$

– для симметричной линии передачи

$$Z_B = 216 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1-t/d}{1-b/d} \quad (b/d < 2); \quad (4.146)$$

$$Z_B = 216 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{1 + \frac{b}{d} \left(\frac{1}{1-t/d} \right)} \quad (b/d > 2). \quad (4.147)$$

Волновые сопротивления без учета толщины проводника определяются соотношениями:

– для несимметричной линии передачи

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{314}{1+b/d}; \quad (4.148)$$

– для симметричной линии передачи

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{216}{1+b/d}. \quad (4.149)$$

Передаваемая мощность в несимметричной полосковой линии передачи

$$P = 8,44 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 d^2 \ln \frac{r_B}{r_A}, \text{ Вт}, \quad (4.150)$$

где E_0 – амплитуда напряженности поля в центре линии, В/м.

Значения коэффициентов r_A и r_B в зависимости от отношения b/d определяют по табл. 4.1.

При $b/d \geq 1$ в формуле (4.150) можно принять, что

$$\ln \frac{r_B}{r_A} \approx r_B, \quad (4.151)$$

в результате чего она упрощается:

$$P = 8,44 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 d^2 r_B, \text{ Вт}. \quad (4.152)$$

Предельная мощность в полосковых линиях передачи ограничивается условиями пробоя и допустимым нагревом диэлектрика. Если пробой диэлектрика определяет предел мощности в импульсе, то нагрев ограничивает передаваемую мощность при непрерывной работе или среднюю мощность в импульсном режиме.

Предельная мощность полосковых линий передачи, обусловленная условиями электрического пробоя, ограничивается максимально допустимой величиной напряженности электрического поля у края проводника, так как поле внутри линии неравномерно:

$$E_{\max} = 2E_0 / k_n. \quad (4.153)$$

где k_n учитывает неравномерность распределения напряженности электрического поля в плоскости поперечного сечения несимметричной полосковой линии.

ДЛЯ НЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

$$k_n \approx 2 \sqrt{2 \frac{t}{d} + 4 \frac{t}{d}}. \quad (4.154)$$

При малых значениях t/d

$$k_n \approx 2 \sqrt{2 \frac{t}{d}}. \quad (4.155)$$

Для несимметричной полосковой линии передачи, учитывая выражения (4.152), (4.153) и заменяя E_{\max} на $E_{\text{пред}}$, получим

$$P_{\text{пред}} = 8,44 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\text{пред}}^2 \frac{k_n^2}{4} d^2 r_B, \text{ Вт}. \quad (4.156)$$

На основании неравенства (4.155) формулу (4.156) можно упростить:

$$P_{\text{перед}} = 16,88 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\text{перед}}^2 d^2 \frac{t}{d} r_B, \text{ Вт.} \quad (4.157)$$

Передаваемая мощность в симметричной полосковой линии передачи

$$P = \frac{1}{60\pi^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 d^2 k_c^2 \ln\left(\frac{1+r_c}{1-r_c}\right), \text{ Вт.} \quad (4.158)$$

где

$$k_c^2 = \sqrt{\frac{t}{2d} \left(1 + \frac{t}{d}\right) \left(2 + \frac{t}{d}\right)^2 \left(4 + \frac{t}{d}\right)} - \quad (4.159)$$

коэффициент, учитывающий неравномерность распределения напряженности электрического поля в плоскости поперечного сечения. Значения r_c для различных отношений b/d приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

b/d	1	1,2	1,4	1,6	2,0	3,0	4,0
r_c	0,89 0	0,920	0,945	0,948	0,98 0	0,99 0	0,990 9
b/d	5,0	6,0	9,0	14,0	20		
r_c	0,99 9	0,9996	0,999 9	0,9999 9	0,999999		

Если геометрические размеры удовлетворяют неравенствам $t/d < 0,3$; $b/d > 1$, то выражение (4.158) можно преобразовать к виду

$$P = 5,4 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 d^2 (0,1 + t/d)(4 + b/d). \quad (4.160)$$

Предельная мощность в симметричной полосковой линии передачи

$$P_{\text{перед}} = 5,4 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\text{перед}}^2 d^2 (0,1 + t/d)(4 + b/d), \text{ Вт.} \quad (4.161)$$

Коэффициент ослабления, обусловленный потерями в проводящих пластинах несимметричной полосковой линии передачи:

$$\alpha_m = \frac{R_S}{120\pi d} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left| \frac{\ln(r_A k_H / 2)}{\ln(r_B / r_A)} \right|. \quad (4.162)$$

Здесь коэффициент k_H определяют по соотношению (4.154) или (4.155).

Коэффициент ослабления, обусловленный потерями в проводящих пластинах симметричной полосковой линии передачи (при $t/d < 0,3$, $b/d > 1$):

$$\alpha_m = \frac{R_S}{120\pi d} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{7 - 50t/d + b/d}{3,2(0,1 + t/d)(4 + b/d)}, \text{ м}^{-1}. \quad (4.163)$$

В формулах (4.162), (4.163) R_S – поверхностное сопротивление металла.

Коэффициент ослабления волны типа T в полосковой линии передачи за счет потерь в диэлектрике определяется соотношением (4.119).

Примеры решения типовых задач

1 Рассчитать волновое сопротивление и коэффициент ослабления симметричной двухпроводной линии передачи. Диаметр проводов линии $d = 3$ мм, расстояние между проводами $D = 200$ мм. Проводники линии выполнены из меди, диэлектрик – воздух. Рабочая частота 10^8 Гц.

Решение. В соответствии с формулой (4.124) волновое сопротивление

$$Z_B = 120 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln\left(\frac{2D-d}{d}\right) = 120 \ln\left(\frac{2 \cdot 200 - 3}{3}\right) = 586 \text{ Ом.}$$

Коэффициент ослабления в двухпроводной линии передачи определяется только сопротивлением проводников, так как потери в диэлектрике отсутствуют. Согласно выражению (4.127)

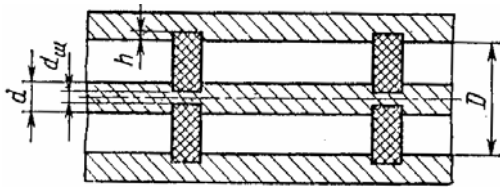


Рис. 4.18

$$\alpha = \alpha_m = \frac{R_S}{\pi d Z_B \sqrt{(1 - (d/D))^2}}$$

Вычисляя

$$\frac{d}{D} = \frac{3}{200} = 0,015 \quad \text{и} \quad \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2} = \sqrt{1 - 0,015^2} \approx 1,$$

находим коэффициент ослабления

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu_m \omega}{2\sigma_m}} \frac{1}{\pi d Z_B} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} 2\pi \cdot 10^8}{2 \cdot 5,7 \cdot 10^7}} \frac{1}{\pi 3 \cdot 10^{-3} \cdot 586} = 0,048 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.$$

2 Найти отношение между внешним и внутренним диаметрами коаксиальной линии передачи с волной типа T , при котором будет минимальное затухание, считая, что потери в диэлектрике отсутствуют. Внутренний и внешний цилиндры выполнены из одного материала.

Решение. Согласно выражению (4.119) $\alpha_{\text{м, д}} = 0$. Коэффициент ослабления α_m в коаксиальной линии передачи определяем согласно формуле (4.136). Поскольку $R_{S1} = R_{S2} = R_S$, находим

$$\alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{R_S}{120\pi} \frac{1/d + 1/D}{\ln(D/d)}.$$

Преобразуем последнее выражение так, чтобы в него входило в явном виде отношение D/d :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{R_S}{120\pi} \frac{(D/d + 1)}{\ln(D/d)}.$$

Обозначив $\frac{\sqrt{\varepsilon/\mu} R_S}{D 120\pi} = A$, $\frac{D}{d} = x$, запишем $\alpha = A \frac{1+x}{\ln x}$.

Для нахождения экстремума следует решить уравнение

$$\frac{d\alpha}{dx} = A \frac{\ln x - \frac{1+x}{x}}{\ln^2 x} = 0 \quad \text{или} \quad \ln x = \frac{1+x}{x}.$$

Полученное уравнение является трансцендентным. Из графических построений (рис. 4.17) имеем корень $x = 3,6$, откуда $D/d = 3,6$. Таким образом, минимальное затухание волны типа T в коаксиальной линии передачи получается при отношении $D/d = 3,6$.

3 Центрирование внутреннего цилиндра воздушной коаксиальной линии передачи осуществляют с помощью диэлектрических шайб (рис. 4.18). Рассчитать диаметр D внешнего цилиндра и глубину выточек h в нем, исходя из условия отсутствия отражений. Волновое сопротивление линии $Z_B = 70$ Ом, диаметр внутреннего цилиндра линии $d = 4,5$ мм, диаметр отверстия в шайбе $d_m = 3,0$ мм, относительная диэлектрическая проницаемость материала шайбы $\varepsilon_r = 2,3$. Потерями в линии пренебречь.

Решение. Воздушную коаксиальную линию передачи с шайбами можно рассматривать как каскадное соединение отрезков регулярных линий. Поскольку в плоскости стыка шайбы и воздушной линии напряжение U является непрерывной функцией координаты z , мощность может быть целиком передана из одной линии в другую без отражения, если $Z_{B1} = Z_{B2}$, где Z_{B2} – волновое сопротивление той части, где расположена шайба.

Согласно выражению (4.132)

$$Z_{B1} = 60 \ln\left(\frac{D}{4,5}\right) = 70 \text{ Ом},$$

откуда $D = 14,45$ мм. Далее находим

$$Z_{B2} = 60 \sqrt{\frac{1}{2,3}} \ln\left(\frac{14,45 + 2h}{3,0}\right).$$

Приравняв Z_{B1} и Z_{B2} , получаем уравнение

$$70 = 39,56 \ln\left(\frac{14,45 + 2h}{3,0}\right),$$

или
$$\ln \frac{14,45 + 2h}{3,0} = 1,77,$$

корень которого $h = 1,58$ мм.

Полученное решение является приближенным, поскольку не учитываются локальные возмущения поля из-за скачков диаметров проводников.

4 Рассчитать волновое сопротивление, погонные емкость и индуктивность, а также предельную передаваемую мощность в несимметричной полосковой линии передачи с воздушным заполнением. Параметры линии: ширина проводника $b = 5$ мм, расстояние между проводником и заземленной пластиной $d = 1$ мм, толщина проводника $t = 0,025$ мм (см. рис. 4.15, а), предельно допустимое значение напряженности электрического поля в воздухе $E_{\text{пред}} = 30$ кВ/см.

Р е ш е н и е. Волновое сопротивление несимметричной полосковой линии передачи определяется выражением (4.144) или (4.145) в зависимости от отношения b/d . В нашем случае $b/d > 2$, поэтому

$$Z_B = 314 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left/ \left[1 + \frac{b}{d} \left(\frac{1}{1-t/d} \right) \right] \right., \text{ Ом.}$$

Полосковая линия передачи заполнена воздухом, для которого $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$. Тогда

$$Z_B = 314 \left/ \left[1 + \frac{5}{1} \left(\frac{1}{1-0,025/1} \right) \right] \right. = 51,24 \text{ Ом.}$$

Волновое сопротивление можно определить и по формуле (4.148), так как в рассматриваемом случае $t/d = 0,025 \ll 1$:

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{314}{1+b/d} = \frac{314}{1+5/1} = 52,333 \text{ Ом.}$$

Погрешность при этом не превышает 2,5 %. Погонную емкость находим по формуле (4.138):

$$C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1 + b/d) = 1,06 \cdot 10^{-11} (1 + 5/1) = 63,6 \text{ пФ/м,}$$

а погонную индуктивность – по формуле

$$Z_B = \sqrt{L_1 / C_1},$$

откуда $L_1 = Z_B^2 C_1$ или после численных подстановок $L_1 = 0,173 \cdot 10^{-6}$ Гн/м.

Предельная передаваемая мощность в несимметричной полосковой линии передачи вычисляется по формуле (4.157). При отношениях $b/d = 5$ и $t/d = 0,025$ по табл. 4.1 находим, что $r_B = 14,56$. Тогда $P_{\text{пред}} = 5,53$ кВт.

5 Рассчитать коэффициент ослабления в симметричной полосковой линии передачи с твердым диэлектриком. Параметры линии: ширина проводника $b = 1,2$ мм, расстояние между проводником и заземленной пластиной $d = 1$ мм, толщина $l = 0,05$ мм (см. рис. 4.15, б). Проводники выполнены из меди. Параметры диэлектрика: $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = 2,55$, $\text{tg } \delta = 8 \cdot 10^{-4}$. Рабочая частота $6 \cdot 10^9$ Гц.

Р е ш е н и е. Согласно выражению (4.118) коэффициент ослабления волны

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_m.$$

Коэффициент ослабления α_d за счет потерь в диэлектрике определяется формулой (4.119). Так как

$$\sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{3 \cdot 10^8},$$

то $\alpha_d = \frac{1}{2} 2\pi 6 \cdot 10^9 \sqrt{2,55 \cdot 1} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^8} \cdot 8 \cdot 10^{-4} = 0,798 \text{ м}^{-1}$.

Коэффициент ослабления α_m , обусловленный потерями в проводящих пластинах, согласно (4.163) равен $0,0979 \text{ м}^{-1}$.

Суммарный коэффициент ослабления

$$\alpha = \alpha_m + \alpha_d = 0,0979 + 0,798 = 0,17777 \text{ м}^{-1}.$$

Глава 5 ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ СТРУКТУРЫ

Поверхностными называют волны, распространяющиеся вдоль так называемых замедляющих структур (линий передачи поверхностных волн). Фазовая скорость этих волн меньше скорости света. Существует большое число разнообразных видов линий передачи поверхностных волн; наибольшее распро-

странение получили диэлектрическая пластина, Н-образная металлодиэлектрическая линия передачи, диэлектрический стержень, гребенчатая структура, диафрагмированный волновод и спираль.

5.1 Диэлектрическая пластина

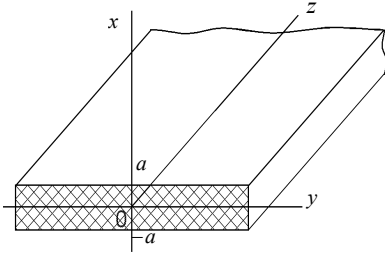


Рис. 5.1

Бесконечная диэлектрическая пластина (рис. 5.1) является простейшей замедляющей структурой. Вдоль нее могут распространяться волны типов E и H .

Поле волны типа E описывается уравнением Гельмгольца. Имеются следующие выражения для составляющих векторов поля:

– вне пластины ($|x| > a$)

$$\begin{aligned} \dot{H}_{y1} &= i\omega\varepsilon_0 p C e^{-px} e^{-jhz}; \\ \dot{E}_{x1} &= ihp C e^{-px} e^{-jhz}; \\ \dot{E}_{z1} &= p^2 C e^{-px} e^{-jhz}; \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\dot{H}_{x1} = \dot{H}_{z1} = \dot{E}_{y1} = 0,$$

где p – поперечное волновое число в воздухе, причем

$$p^2 = h^2 - \omega^2\varepsilon_0\mu_0; \quad (5.2)$$

– внутри пластины ($|x| < a$):

$$\begin{aligned} \dot{H}_{y2} &= j\omega\varepsilon_a g (A \sin gx - B \cos gx) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_{x2} &= jhg (A \sin gx - B \cos gx) e^{-jhz}; \\ \dot{E}_{z2} &= g^2 (A \cos gx + B \sin gx) e^{-jhz}; \\ \dot{H}_{x2} &= \dot{H}_{z2} = \dot{E}_{y2} = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где g – поперечное волновое число в диэлектрике,

$$g^2 = \omega^2\varepsilon_a\mu_0 - h^2; \quad (5.4)$$

ε_a – диэлектрическая проницаемость пластины).

На границах раздела воздуха и диэлектрика $x = a$ и $x = -a$ тангенциальные составляющие поля должны удовлетворять граничным условиям:

$$\dot{E}_{z1} = \dot{E}_{z2}, \quad \dot{H}_{y1} = \dot{H}_{y2}. \quad (5.5)$$

Все типы волн диэлектрической пластины можно разбить на две группы: четные волны E_1, E_3, E_5, \dots , для которых $A = 0, B \neq 0$ и поперечные составляющие поля описываются четными функциями координаты x ; нечетные волны E_2, E_4, E_6, \dots , для которых $A \neq 0, B = 0$ и поперечные составляющие поля описываются нечетными функциями координаты x .

Подставляя выражения (5.1) и (5.3) в граничные условия (5.5), получим характеристические уравнения:

– для четных волн

$$pa = \frac{1}{\varepsilon} ga \operatorname{tg} ga; \quad (5.6)$$

– для нечетных волн

$$pa = \frac{1}{\varepsilon} ga \operatorname{ctg} ga, \quad (5.7)$$

где ε – относительная диэлектрическая проницаемость пластины.

Кроме того, волновые числа p и g удовлетворяют соотношению

$$(pa)^2 + (ga)^2 = (\beta a)^2 (\varepsilon - 1). \quad (5.8)$$

Анализ волн типа H производят аналогично. Решая уравнение Гельмгольца для составляющей H_z , получим выражения для составляющих векторов поля:

– вне пластины

$$\begin{aligned} \dot{E}_{y1} &= -j\omega\mu_0 p C e^{-px} e^{-jhz}; \\ \dot{H}_{x1} &= jhp C e^{-px} e^{-jhz}; \\ \dot{H}_{z1} &= p^2 C e^{-px} e^{-jhz}; \\ \dot{E}_{x1} &= \dot{E}_{z1} = \dot{H}_{y1} = 0; \end{aligned} \quad (5.9)$$

– внутри пластины

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_{y2} &= j\omega\mu_a g[-A \sin gx + B \cos gx]e^{-jhz}; \\
 \dot{H}_{x2} &= jhg[A \sin gx - B \cos gx]e^{-jhz}; \\
 \dot{H}_{z2} &= g^2[A \cos gx + B \sin gx]e^{-jhz}; \\
 \dot{E}_{x2} &= \dot{E}_{z2} = \dot{H}_{y2} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Подстановка выражений (5.9) и (5.10) в граничные условия (5.5) дает характеристические уравнения

$$pa = ga \operatorname{tg} ga - \text{для четных волн } (H_1, H_3, \dots); \tag{5.11}$$

$$pa = -ga \operatorname{ctg} ga - \text{для нечетных волн } (H_2, H_4, \dots). \tag{5.12}$$

Характеристические уравнения часто решают графически. Искомые значения pa и ga , например, для четных волн типа H находят как координаты точки пересечения кривой, определяемой уравнением (5.11), с окружностью, описываемой уравнением (5.8) (рис. 5.2).

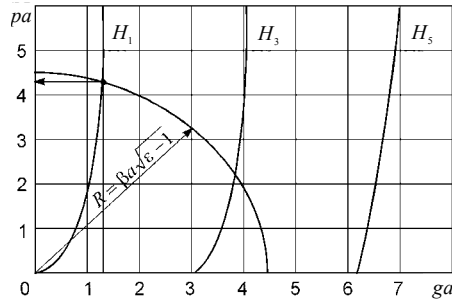


Рис. 5.2

Рис. 5.3

Характеристические уравнения решают и численными методами.

После того как найдено решение характеристического уравнения, с помощью выражений (5.2) или (5.4) можно определить продольное волновое число h , а затем фазовую скорость и длину волны в линии.

Модификациями рассматриваемой замедляющей структуры являются диэлектрическая пластина на металлической подложке (рис. 5.3) и Н-образная металлодиэлектрическая линия передачи (рис. 5.4).

Поле в диэлектрической пластине на металлической подложке должно удовлетворять граничным условиям на поверхности металла. Из волн типа E в такой структуре могут существовать только четные волны, а из волн типа H – только нечетные.

Н-образная металлодиэлектрическая линия передачи (см. рис. 5.4) представляет собой диэлектрическую пластину, ограниченную с двух сторон металлическими плоскостями. Здесь поле должно удовлетворять граничным условиям на поверхности металлических пластин:

$$E_x|_{y=0} = 0, \quad E_z|_{y=0} = 0. \tag{5.13}$$

Основной волной Н-образной линии передачи является волна магнитного типа H_{10} , вектор E которой имеет единственную составляющую, причем все составляющие векторов поля не зависят от координаты y . Эта волна полностью аналогична основной волне магнитного типа диэлектрической пластины; в частности, она имеет такую же фазовую скорость, как и волна типа H , диэлектрической пластины.

Все остальные типы волн Н-образной линии передачи имеют одну или несколько вариаций вдоль оси y . Характеристические уравнения для этих типов волн оказываются более сложными.

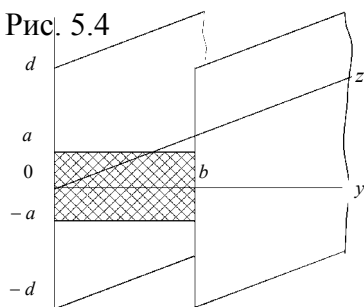


Рис. 5.4

5.2 Гребенчатая структура

Гребенчатая замедляющая структура, или гребенка, представлена на рис. 5.5. Рассмотрим распространение поверхностных электромагнитных волн вдоль такой структуры в направлении координаты z .

Строгий анализ волн в гребенке достаточно сложен, ограничимся приближенным решением, предполагая, что шаг a гребенки мал по сравнению с длиной волны, а толщина зуба d значительно меньше величины шага.

Поле поверхностной волны над гребенкой имеет экспоненциально убывающий характер:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= jhpAe^{-px}e^{-jhz}; \\ \dot{H}_y &= j\omega\epsilon_0pAe^{-px}e^{-jhz}; \\ \dot{E}_z &= p^2Ae^{-px}e^{-jhz}; \\ \dot{H}_x &= \dot{E}_y = \dot{H}_z = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Пазы гребенки можно рассматривать как закороченные на конце отрезки плоского волновода длиной l . Поле в пазах имеет две составляющие:

$$\begin{aligned} \dot{E}_z &= B \sin \beta(x-l), \\ \dot{H}_y &= j \frac{B}{Z_0} \cos \beta(x-l). \end{aligned} \quad (5.15)$$

При выводе характеристического уравнения обычно пользуются понятием поверхностного импеданса

$$Z = \dot{E}_z / \dot{H}_y.$$

Приравняв импедансы поля над гребенкой и поля в пазах в плоскости $x = 0$, получим характеристическое уравнение вида

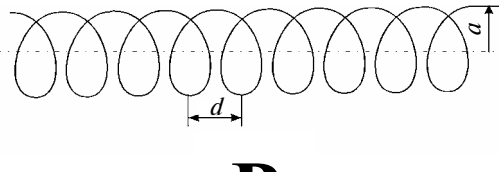
$$p = \beta \operatorname{tg} \beta l. \quad (5.16)$$

Для существования поверхностной волны необходимо, чтобы выполнялось условие $p > 0$. Это возможно, например, при $\beta l < \pi/2$ или $l < \lambda_0/4$.

На основании уравнения (5.16) можно найти выражение для коэффициента замедления

$$v_\phi/c = \cos \beta l.$$

5.3 Металлическая спираль



Спираль представляет собой проводник, навитый на круглый цилиндр радиусом a с постоянным шагом d (рис. 5.6). Если диаметр провода мал по сравнению с диаметром спирали, то ее можно приближенно рассматривать как анизотропный цилиндр, проводимость которого бесконечна в направлении витков спирали и

равна нулю в перпендикулярном направлении.

Для симметричных волн, когда поле не зависит от угла φ , продольные составляющие E_z и H_z изменяются пропорционально цилиндрическим функциям $I_0(pr)$ внутри спирали и $K_0(pr)$ вне спирали. Поперечные составляющие поля описываются производными $I'_0(pr)$ и $K'_0(pr)$.

При подстановке составляющих векторов поля в граничные условия получается характеристическое уравнение

$$p = \frac{\beta}{\operatorname{tg} \alpha} \sqrt{\frac{K_1(pa)I_1(pa)}{K_0(pa)I_0(pa)}}, \quad (5.17)$$

где $\operatorname{tg} \alpha = d/2\pi a$ – тангенс угла наклона витков спирали.

При $pa \gg 1$, что соответствует малым углам намотки спирали, подкоренное выражение в (5.17) близко к единице и характеристическое уравнение значительно упрощается:

$$p \approx \beta \operatorname{ctg} \alpha. \quad (5.18)$$

Таким образом,

$$v_\phi/c \approx \sin \alpha. \quad (5.19)$$

Чтобы найти более точное решение характеристического уравнения (5.17), значение p , вычисленное по формуле (5.18), следует подставить в правую часть уравнения (5.17). Полученное при этом уточненное значение p можно снова подставить в уравнение (5.17) и т.д. до тех пор, пока результаты не будут различаться на достаточно малую величину.

5.4 Примеры решения задач

5.4.1 Найти фазовую скорость двух низших волн магнитного типа, распространяющихся вдоль диэлектрической пластины толщиной 2 см с относительной проницаемостью $\varepsilon = 2,9$. Длина волны генератора 3,2 см. Построить графики распределения поперечных составляющих векторов поля в направлении, перпендикулярном пластине.

Решение. Определим фазовую скорость волны типа H_1 . Для этого решим характеристическое уравнение (5.11) совместно с (5.8). Вычислим $\beta a \sqrt{\varepsilon - 1} = 2,706$. Применяя метод интерполяции, найдем значения

$pa = 2,456$ и $ga = 1,137$, откуда $p = 245,6 \text{ м}^{-1}$, $g = 113,7 \text{ м}^{-1}$.

С помощью формулы (5.2) определим продольное волновое число h :

$$h = \sqrt{\beta^2 + p^2} = 314,4 \text{ м}^{-1}$$

и наконец, найдем фазовую скорость волны типа H_1 :

$$v_\phi = \omega/h = 1,874 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Аналогичным путем определим параметры волны типа H_2 : $pa = 1,582$; $ga = 2,195$; $p = 158,2 \text{ м}^{-1}$; $g = 219,5 \text{ м}^{-1}$; $h = 252,15 \text{ м}^{-1}$; $v_\phi = 2,336 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$

Перейдем к построению графиков распределения поперечных составляющих векторов поля. Распределение поля вдоль оси x описывается выражениями (5.9), (5.10). Для волны типа H_1 , которая является четной, в (5.10) следует положить $A = 0$. Упрощая запись выражений для составляющих поля и опуская множитель e^{-jhz} , для волны типа H_1 получим

$$\begin{aligned} E_y &= Ce^{-px} - \text{вне пластины,} \\ E_y &= B \cos gx - \text{внутри пластины.} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Коэффициенты C и B характеризуют амплитуду напряженности поля; они связаны друг с другом граничными условиями (5.5), откуда

$$Ce^{-pa} = B \cos ga. \quad (5.21)$$

Положим для определенности $C = 1$, найдем B из условия (5.21) и, подставляя вычисленные ранее значения p и g , построим в соответствии с выражениями (5.20) график распределения составляющей E_y (рис. 5.7). Составляющая H_x имеет такой же характер распределения.

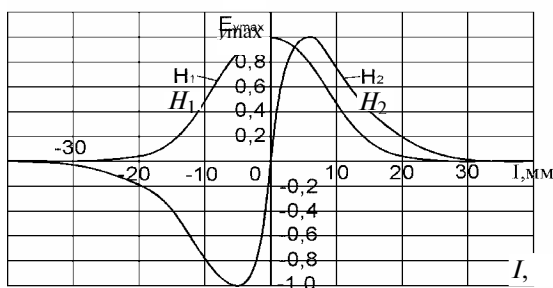
Построение распределения составляющих векторов поля волны типа H_2 производится аналогично. Полагая в (5.10) $B = 0$ и упрощая выражения для составляющих поля, получим

$$\begin{aligned} E_y &= Ce^{-px} - \text{вне пластины;} \\ E_y &= A \sin gx - \text{внутри пластины.} \end{aligned} \quad (5.22)$$

При этом коэффициенты C и A удовлетворяют условию

$$Ce^{-pa} = A \sin ga. \quad (5.23)$$

График распределения составляющей E_y , построенный на основании выражений (5.22) и (5.23), приведен на рис. 5.7.



Р

5.4.2 Определить значения фазовой скорости волн электрического типа, которые могут распространяться в диэлектрической пластине на металлической подложке (см. рис. 5.3). Толщина пластины $a = 15$ мм, относительная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2,25$. Частота поля 10 ГГц.

Решение. В диэлектрической пластине на металлической подложке могут распространяться только четные волны электрического типа E_1, E_3, \dots , у которых критическая частота меньше частоты поля. Это возможно при выполнении условия (см. рис. 5.2) $\beta a \sqrt{\varepsilon - 1} > (n-1)\pi/2$, где n – индекс волны.

Отсюда
$$f_{\text{кр}} = \frac{(n-1)c}{4a\sqrt{\varepsilon-1}}.$$

Подставляя численные данные, найдем значения критических частот для основных типов волн:

для волны E_1 $f_{\text{кр}} = 0$, т.е. волна может распространяться при любой частоте поля;

для волны E_1 $f_{\text{кр}} = 8,944$ ГГц, т.е. волна может распространяться при заданных условиях;

для волны E_1 $f_{\text{кр}} = 17,89$ ГГц критическая частота выше частоты поля, следовательно, волна не может распространяться.

Определим фазовые скорости волн E_1 и E_3 , решая характеристическое уравнение (5.6) совместно с (5.8). Можно применить любой численный метод, например метод половинного деления. Решая эти уравнения, получаем:

для волны E_1 $ga = 1,3827$, $pa = 3,2288$;

для волны E_3 $ga = 3,4722$, $pa = 0,5296$.

С помощью формулы (5.2) определяем продольное волновое число

$$h = \sqrt{\beta^2 + p^2}$$

и находим фазовую скорость $v_{\text{ф}} = \omega/h$.

Подставляя численные данные, получаем:

для волны E_1 $v_{\text{ф}} = 2,092 \cdot 10^8$ м/с;

для волны E_3 $v_{\text{ф}} = 2,958 \cdot 10^8$ м/с.

Глава 6 МНОГОПОЛЮСНЫЕ СХЕМЫ СВЧ

6.1 Делители мощности

К многополюсным схемам СВЧ относятся устройства, у которых более двух входов. Простейшими из них являются шестиполосники – устройства с тремя входами, представляющие собой разветвление одной линии на две и применяющиеся для деления мощности.

На рис. 6.1 изображено коаксиальное разветвление – коаксиальный тройник. На рис. 6.2 представлен волноводный тройник в плоскости H .

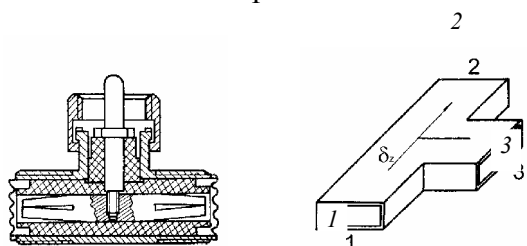


РИС. 6.1

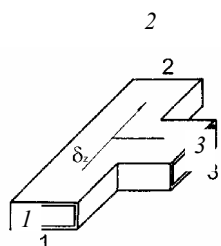


Рис. 6.2 Разветвление волноводов в плоскости H

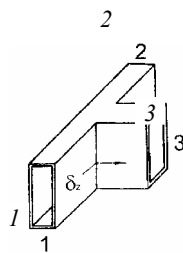


Рис. 6.3 Разветвление волноводов в плоскости E

Продольный ток, текущий по волноводу 1, разветвляется на два и переходит в плечи 2 и 3. Следовательно, все волноводы включены здесь параллельно. При подключении генератора к плечу 3 поля в плечах 1 и 2 будут одинаковы по амплитуде и фазе.

На рис. 6.3 изображен волноводный тройник в плоскости E . В этом соединении волновод 3 включен в волновод 1–2 последовательно, так как продольный ток волновода 1–2 обтекает волновод 3. Мощность из плеча 3 делится на равные части в плечах 1 и 2, причем поля в них противофазны.

Все линейные пассивные шестиполусные устройства без активных потерь обладают одним общим свойством, а именно: они не могут быть согласованы одновременно со всех трех плеч. Это свойство можно доказать в общем виде, исходя из унитарности матрицы рассеяния реактивной шестиполусной схемы. Доказательство проведем методом «от противного». Пусть схему удалось согласовать со всех входов. Тогда матрица рассеяния будет иметь вид

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & 0 & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & 0 \end{bmatrix}.$$

Применив свойство унитарности матрицы $[S]$, получим

$$S_{12}^2 + S_{13}^2 = 1; \quad S_{12} S_{13}^* = 0; \quad S_{21} S_{31}^* = 0;$$

$$S_{21}^2 + S_{23}^2 = 1; \quad S_{21} S_{23}^* = 0; \quad S_{12} S_{31}^* = 0;$$

$$S_{31}^2 + S_{32}^2 = 1; \quad S_{31} S_{32}^* = 0; \quad S_{13} S_{32}^* = 0.$$

В последних равенствах положим $S_{12} = 0$. Это немедленно приводит к следующим значениям элементов матрицы рассеяния:

$$\begin{array}{l} S_{12}=0; \quad S_{13}=1; \\ S_{23}=0; \quad S_{21}=1; \\ S_{31}=0; \quad S_{32}=1; \end{array} \quad [S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Получившаяся матрица S является матрицей рассеяния трехплечевого циркулятора. Таким образом, условие согласования со всех входов привело к направленной передаче электромагнитных волн. Следовательно, наше допущение об одновременном согласовании всех плеч неверно.

Определим матрицу рассеяния симметричного разветвления любой линии передачи. В этом разветвлении все входы совершенно равноправны и условия связи любых двух плеч одинаковы в силу симметрии схемы, что приводит к следующим равенствам элементов матрицы: $S_{11} = S_{22} = S_{33}$; $S_{12} = S_{21} = S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32}$. Матрица S теперь имеет только два различных элемента:

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

Если пренебречь высшими типами волн, возникающими в тройнике, то его можно представить как параллельное соединение трех одинаковых линий. Коэффициент отражения от любого плеча будет равен $S_{11} = \frac{-1}{3}$. Далее, используя унитарность матрицы $[S]$, можно найти элемент S_{12} ; $S_{11}^2 + 2S_{12}^2 = 1$; $S_{12} = \frac{2}{3}$.

Матрица S будет

$$[S] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

В последнем выражении не учтена электрическая длина каждого входа. Полученная матрица S показывает, что при подключении генератора к любому плечу $\frac{1}{9}$ подводимой мощности отражается и по $\frac{4}{9}$ поступает в два других плеча, если они нагружены на согласованные нагрузки.

Можно изготовить делитель мощности, согласованный с одного плеча, что широко применяется на практике. Для этого необходимо, чтобы волновые сопротивления выходных плеч узла были в 2 раза больше волнового сопротивления входного плеча (параллельное соединение линий). Однако при переключении генератора к другому плечу система будет рассогласована.

Общим недостатком рассмотренных делителей мощности является сильная связь между выходными плечами. Действительно, если в выходном плече появится отраженная волна, то она обязательно попадает в два других плеча, что видно, например, из формулы для матрицы рассеяния. Подобные тройники получили название ненаправленных делителей мощности.

От этого недостатка свободно разветвление полосковых линий, в которое специально введено активное сопротивление. Схема разветвления приведена на рис. 6.4. На рисунке изображена только полоска симметричной или несимметричной линии. Генератор подключается к плечу 1 и его мощность делится пополам в плечи 2 и 3 . Чтобы вход делителя был согласован, волновое сопротивление кольцевой линии должно быть равно $W_1 = \sqrt{2}W$. Действительно, входное сопротивление одного полукольца, нагруженного на сопротивление W , $R_{\text{вх}} = \frac{W_1^2}{W}$. Оба полукольца включены параллельно, отсюда $\frac{1}{2} \frac{W_1^2}{W} = W$.

Между выходными плечами 2 и 3 включено активное сопротивление R . При согласовании выходов плечи 3 и 2 находятся под одинаковыми потенциалами и ток через сопротивление R не течет.

Если в одном из плеч, например 2 , появится отраженная волна, то она будет распространяться по кольцу и через сопротивление R . Так как длина кольца равна $\lambda_n/2$, то в плечо 3 придут две волны с противоположными фазами. Чтобы поле не распространялось в плечо 3 , эти две волны должны иметь одинаковую амплитуду. Подбор амплитуд этих волн осуществляется величиной сопротивления R . Необходимо, чтобы половина амплитуды отраженной волны поглощалась сопротивлением R , а половина – входным сопротивлением плеча 1 со стороны кольца. Но входное сопротивление полукольца равно $R_{\text{вх}} = \frac{W_1^2}{W} = 2W$. Следовательно, величина сопротивления должна быть $R = 2W$. При этом условия мощность отраженной в плечах 2 или 3 волны делится пополам, половина уходит в плечо 1 , а половина поглощается сопротивлением R . Выходные плечи 2 и 3 оказываются изолированными друг от друга. Доля просочившейся из плеча 2 в 3 мощности из-за неточности изготовления делителя не превышает 20 дБ в полосе частот 30 ... 35 %.

Зная, как разделяется мощность между каналами, нетрудно написать матрицу рассеяния этого делителя мощности. Плечи $2-3$ не связаны, следовательно, $S_{23} = S_{32} = 0$. Система согласована со всех плеч, что приводит к равенствам $S_{11} = S_{22} = S_{33} = 0$. Наконец фаза всех выходных волн отличается от фазы входных на $\pi/2$ за счет длины полукольца $\lambda_n/4$. Матрица рассеяния будет иметь следующий вид:

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Отметим, что эта матрица уже не подчиняется условию унитарности, так как в разветвлении есть поглощающее сопротивление. Если возьмем сумму квадратов элементов по второй или третьей строке, то получим не единицу, а $\frac{1}{2}$. Недостающая половина мощности поглотилась внутри разветвления в сопротивлении R . Устройство, изображенное на рис. 6.4, обеспечивает одинаковые мощности в выходных плечах $P_2 = P_3$. Путем подбора волновых сопротивлений отдельных участков схемы можно обеспечить деление мощности в заданном отношении.

На рис. 6.5 изображена топология одного из возможных типов микрополоскового направленного делителя с неравным делением мощности в выходных плечах $k^2 = \frac{P_2}{P_3}$ ($P_2 > P_3$). Неравномерность деления обеспечивается разными значениями волновых сопротивлений W_2 и W_3 . Линии с волновыми сопротивлениями W_1, W_4, W_5 являются четвертьволновыми согласующими трансформаторами.

Применив методику, по которой рассчитывалось волновое сопротивление делителя с равным делением мощности, можно определить волновые сопротивления отдельных участков схемы. Отличие будет заключаться в том, что здесь необходимо рассчитывать условия согласования каждого полукольца в отдельности. Окончательные формулы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} W_1 &= \left(\frac{k}{k^2 + 1} \right)^{1/4} W_0; & W_2 &= k^{3/4} (k^2 + 1)^{1/4} W_0; & W_3 &= \frac{(k^2 + 1)^{1/4}}{k^{5/4}} W_0; \\ W_4 &= \sqrt{k} W_0; & W_5 &= \frac{1}{\sqrt{k}} W_0; & R &= \frac{k^2 + 1}{k} W_0. \end{aligned} \quad (6.3)$$

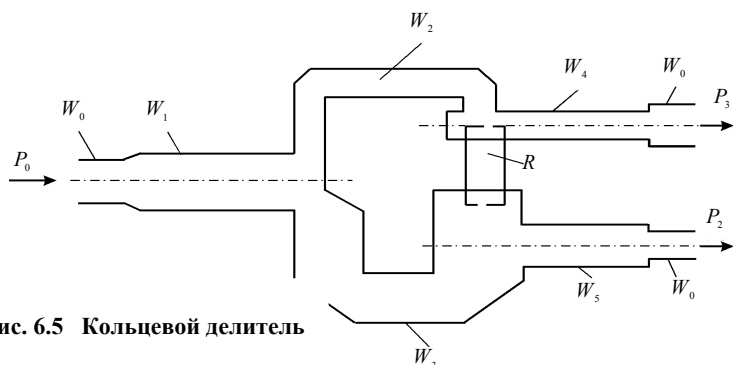


Рис. 6.5 Кольцевой делитель

Длины участков линий с волновыми сопротивлениями W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 равны четверти длины волны в линии.

Описываемый делитель мощности может обеспечить неравномерность деления на $k^2 \leq 5$. При больших значениях k^2 волновое сопротивление оказывается слишком большим, что приводит к малой ширине полоски линии 2, трудно получаемой существующими методами технологии изготовления микрополосковых линий. Так, расчет по формулам (6.3) при $W_0 = 50$ Ом, $k^2 = 5$ приводит к следующим значениям волновых сопротивлений: $W_1 = 39,6$; $W_2 = 143,5$; $W_3 = 28,7$; $W_4 = 74,5$; $W_5 = 33,6$; $R = 134$ Ом.

6.2 Направленные ответвители и мостовые схемы

Направленный ответвитель и его частный случай – мостовая схема являются взаимным, реактивным восьмиполюсным устройством, в котором плечи попарно развязаны. Схема восьмиполюсника показана на рис. 6.6. Матрица рассеяния взаимных систем симметрична, т.е. $S_{12} = S_{21}$; $S_{13} = S_{31}$; $S_{14} = S_{41}$; $S_{23} = S_{32}$; $S_{34} = S_{43}$.

Большинство ответвителей имеет две плоскости симметрии. Симметрия относительно плоскости I приводит к равенству следующих элементов матрицы: $S_{13} = S_{24}$; $S_{11} = S_{22}$; $S_{33} = S_{44}$, а симметрия относи-

тельно плоскости II добавляет еще равенства $S_{12} = S_{34}$; $S_{11} = S_{33}$; $S_{22} = S_{44}$; $S_{14} = S_{23}$. В результате матрица рассеяния взаимного реактивного восьмиполюсника с двумя плоскостями симметрии приобретает вид

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{11} & S_{14} & S_{13} \\ S_{13} & S_{14} & S_{11} & S_{12} \\ S_{14} & S_{13} & S_{12} & S_{11} \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

Взаимный реактивный восьмиполюсник обладает следующими свойствами: если он является направленным ответвителем, то согласуется со всех четырех плеч. Справедливо и обратное: если восьмиполюсник согласован со всех плеч, то он является ответвителем. Это свойство восьмиполюсной схемы доказывается в общем виде из унитарности его матрицы рассеяния. Докажем вторую часть этого свойства восьмиполюсника на

0 и применим к (6.4) в виде:

$$S_{12}^2 + S_{13}^2 + S_{14}^2 = 1; \quad (6.5a)$$

$$S_{13}^* S_{14} + S_{14}^* S_{13} = 0; \quad (6.5б)$$

$$S_{12}^* S_{14} + S_{14}^* S_{12} = 0; \quad (6.5в)$$

$$S_{12}^* S_{13} + S_{13}^* S_{12} = 0; \quad (6.5г)$$

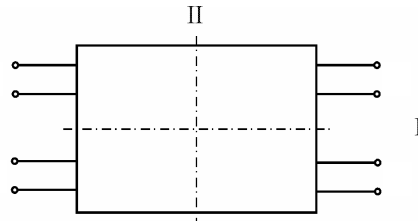


РИС. 6.6

примере матрицы (6.4). Положим $S_{11} = 0$ и применим к (6.4) в виде:

Найдем из (6.5в) величину S_{12}^* и подставим ее в (6.5г). В результате получим $S_{12}(S_{14} S_{13} - S_{13} S_{14}) = 0$. Выражение $S_{14}^* S_{13} - S_{13}^* S_{14} \neq 0$, так как это противоречит (6.5б). Следовательно, $S_{12} = 0$, т.е. согласование всех входов ($S_{11} = 0$) привело к тому, что передачи из плеча 1 в 2 и из плеча 3 в 4 нет. Матрица рассеяния устройства становится следующей:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} & S_{14} \\ 0 & 0 & S_{14} & S_{13} \\ S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ S_{14} & S_{13} & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$

Получили первый тип направленного ответвителя, схема которого изображена на рис. 6.7, а. В нем мощность, подводимая к плечу 1 делится в плечах 3 и 4 в соответствии S_{13}^2 и $S_{14}^2 = 1 - S_{13}^2$. Из (6.5б) следует, что

$$|S_{13}| |S_{14}| e^{j(\psi_{13} - \psi_{14})} + |S_{13}| |S_{14}| e^{-j(\psi_{13} - \psi_{14})} = 0;$$

$$\cos(\psi_{13} - \psi_{14}) = 0; \quad \psi_{13} - \psi_{14} = \frac{\pi}{2}.$$

Поля в плечах 3 и 4 сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Отметим, что если ответвитель имеет одну плоскость симметрии, то поля в выходных плечах либо синфазны, либо противофазны.

Второй тип ответвителя показан на рис. 6.7, б. В нем изолированы друг от друга плечи 1-4 и 2-3 ($S_{14} = 0$). В третьем типе ответвителя, изображенном на рис. 6.7, в, отсутствует связь между плечами 1-3 и 2-4 ($S_{13} = 0$).

Любой ответвитель характеризуется двумя основными параметрами: переходным затуханием C и направленностью D .

Переходное затухание C для ответвителя первого типа будет

$$C_{14} = 10 \lg \frac{1}{|S_{14}|^2}. \quad (6.7)$$

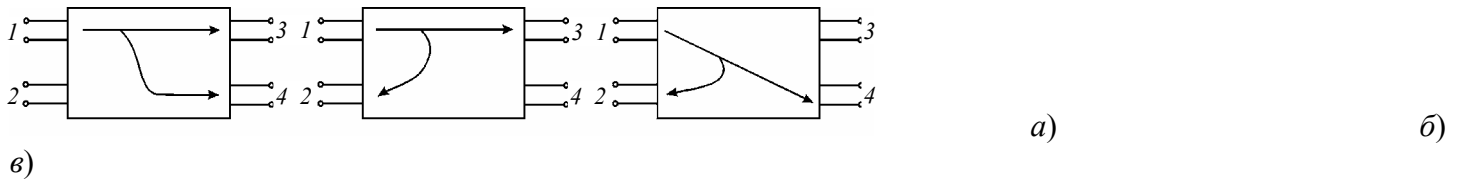


Рис. 6.7 Три типа направленных ответвителей

Переходное затухание определяет долю мощности, ответвляющуюся из плеча 1 в плечо 4. Зависимость величины C от частоты является частотной характеристикой ответвителя.

Для ответвителя первого типа направленность определяется следующим образом:

$$D = 10 \lg \frac{|S_{14}|^2}{|S_{12}|^2}; \quad (6.8)$$

этот параметр характеризует долю мощности, просачивающейся в плечо 2.

Наличие плоскостей симметрии у восьмиполюсников позволяет существенно упростить расчет их матриц рассеяния, через элементы которых находятся все необходимые параметры. При этом задача расчета восьмиполюсника сводится к задаче расчета двух четырехполюсников. Метод заключается в синфазном и противофазном возбуждении входов восьмиполюсника.

Пусть восьмиполюсник имеет плоскость симметрии I (см. рис. 6.6). Подадим на вход 1 волну $a_1 = \frac{a}{2}$, на вход 2 – волну $a_2 = -\frac{a}{2}$, а входы 3 и 4 согласованы. В силу симметрии схемы при подобном противофазном возбуждении в плоскости симметрии I будет нуль напряжения и здесь можно разместить металлическую плоскость. Восьмиполюсник распался на два несвязанных четырехполюсника. Обозначим их матрицу рассеяния как

$$[S]^{+-} = \begin{bmatrix} S_{11}^{+-} & S_{12}^{+-} \\ S_{21}^{+-} & S_{22}^{+-} \end{bmatrix}.$$

С помощью этой матрицы рассеяния определим выходные волны как

$$b_1^{+-} = \frac{1}{2} S_{11}^{+-} a; \quad b_2^{+-} = -\frac{1}{2} S_{11}^{+-} a;$$

$$b_3^{+-} = \frac{1}{2} S_{21}^{+-} a; \quad b_4^{+-} = -\frac{1}{2} S_{21}^{+-} a.$$

Теперь возбудим входы 1–2 синфазно: $a_1 = \frac{1}{2} a$; $a_2 = \frac{1}{2} a$. При этом в плоскости I устанавливается пучность напряжения (режим холостого хода) и схема разделяется идеальной магнитной плоскостью на два одинаковых четырехполюсника. Матрица рассеяния четырехполюсника запишется так:

$$[S]^{++} = \begin{bmatrix} S_{11}^{++} & S_{12}^{++} \\ S_{21}^{++} & S_{22}^{++} \end{bmatrix}.$$

Выходные волны b теперь будут следующими:

$$b_1^{++} = \frac{1}{2} S_{11}^{++} a; \quad b_2^{++} = \frac{1}{2} S_{11}^{++} a; \quad b_3^{++} = \frac{1}{2} S_{21}^{++} a; \quad b_4^{++} = \frac{1}{2} S_{21}^{++} a.$$

Суперпозиция обоих режимов приводит к возбуждению восьмиполюсника только с входа 1 волной $a_1 = a$. Далее суммируем выходные волны:

$$b_1 = b_1^{+-} + b_1^{++} = \frac{1}{2}(S_{11}^{++} + S_{11}^{+-})a,$$

отсюда искомым элементом матрицы рассеяния S_{11} будет следующий:

$$S_{11} = \frac{1}{2}(S_{11}^{++} + S_{11}^{+-}).$$

Аналогично находим другие элементы матрицы:

$$S_{21} = \frac{1}{2}(S_{11}^{++} - S_{11}^{+-}); \quad S_{31} = \frac{1}{2}(S_{21}^{++} + S_{21}^{+-}); \quad S_{41} = \frac{1}{2}(S_{21}^{++} - S_{21}^{+-}).$$

Если восьмиполосник имеет две плоскости симметрии I и II, то все элементы матрицы S известны. Если же симметрии в плоскости II нет, то необходимо рассмотреть дополнительно возбуждение со стороны входа 3 или 4. В результате получим недостающие элементы матрицы S взаимного восьмиполосника:

$$S_{33} = \frac{1}{2}(S_{22}^{++} + S_{22}^{+-}); \quad S_{34} = \frac{1}{2}(S_{22}^{++} - S_{22}^{+-}).$$

Особенно плодотворные результаты метод синфазного и противофазного возбуждения дает при расчете направленных ответвителей на связанных линиях.

Конструктивно направленный ответвитель представляет собой две линии передачи, соединенные элементами связи. Так как эта система реактивная, то отсутствие передачи между плечами может происходить только за счет взаимной комплексации двух или более волн.

Простейший тип ответвителя изображен на рис. 6.8. Это два волновода с общей узкой стенкой, в которой прорезаны два отверстия связи, расположенные на расстоянии $\lambda_n/4$. Если генератор подключен к плечу 1, то в плечо 2 проходят две волны с одинаковой амплитудой и противоположными фазами. В результате суммарное поле здесь оказывается равным нулю. Величина направленности D зависит от точности изготовления ответвителя. Величина переходного затухания C определяется степенью связи, т.е. диаметром отверстий. Ответвители с двумя элементами используются редко, так как они имеют очень узкую полосу частот. Чаще используются многоэлементные ответвители. Подбирая диаметр отверстий и их число, можно обеспечить нужную частотную характеристику переходного затухания. Ча-

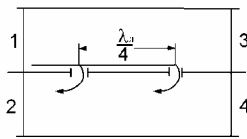


Рис. 6.8 Волновол-

ще всего используются чебышевская $|S_{14}| = \left| h T_{k-1} \left(\frac{\cos \theta}{S} \right) \right|$ и максимально плоская характеристики $|S_{13}| = \left| h \left(\frac{\cos \theta}{S} \right)^{k-1} \right|$, здесь h и S – амплитудный и масштабный коэффициенты; θ – электрическое расстояние между отверстиями связи; k – число отверстий.

Направленный ответвитель можно построить не только на сосредоточенных элементах связи, но и на связи распределенной. Примером такого ответвителя является ответвитель на связанных полосковых и микрополосковых линиях, схема которого изображена на рис. 6.9. На участке связи длиной l , которая равна $\lambda_n/4$, линия 2–4 близко расположена около линии 1–3 и связана с ней электромагнитным полем. В линии 1–3 слева направо распространяется бегущая волна (генератор подключен к плечу 1). Эта волна в линии 2–4 возбуждает две волны. Первая волна возбуждается электрическим полем линии, она синфазна полю линии 1–3, а другая возбуждается магнитным полем. Согласно второму уравнению Максвелла $\text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ эта волна противофазна полю линии 1–3. Фазовые соотношения между этими двумя волнами оказываются такими, что в плечо 4 они приходят в противофазе, а в плечо 2 – в фазе. Таким образом, ответвитель на связанных линиях является ответвителем второго типа, здесь изолированы плечи 1–4 и 2–3. Величина связи между линиями мало зависит от частоты, поэтому с точки зрения направленности и согласования ответвитель на связанных линиях является весьма широкополосным устройством с полосой в октаву. Количественное значение

направленности определяется точностью изготовления и согласованием выходных плеч. Реальная величина D составляет около 20 дБ.

Полоса рабочих частот ответвителя определяется переходным затуханием C_{12} : чем меньше величина переходного затухания, тем шире полоса частот.

В связанных линиях величина переходного затухания C зависит в первую очередь от зазора между полосками S (рис. 6.9). В микрополосковых линиях получить значение $C_{12} < 6$ дБ не удастся из-за технологических трудностей обеспечения необходимой величины S . По этой причине такие ответвители получили название ответвителей со слабой связью.

Для увеличения связи применяются гребенчатые (многосвязные) структуры. Пример топологии такого ответвителя изображен на рис. 6.10. Число полосок n , образующих гребенчатую структуру, определяется по формуле

$$n = \frac{2k_0}{2k_0 - k}, \quad (6.9)$$

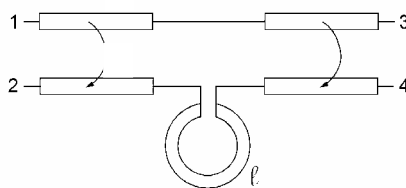
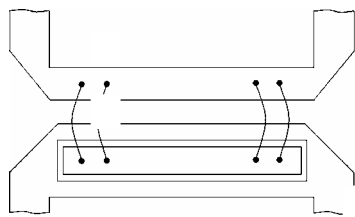


РИС. 6.10

РИС. 6.11

где $k_0 = 10^{\frac{C}{20}}$ – эквивалентный коэффициент связи; C – заданная величина переходного затухания, дБ; k – коэффициент связи между соседними полосками гребенчатой структуры. Число полосок n в гребенчатой структуре может принимать значения $4 < n < 10$. При $n > 10$ ширина полоски оказывается очень малой. Длина перемычек, соединяющих полоски гребенчатой структуры для выравнивания их потенциалов, должна быть минимальной; их число равно 2 – 3.

Направленные ответвители такого вида обеспечивают в рабочей полосе частот с коэффициентом перекрытия $f_{\max}/f_{\min} = 2$ величины $C_1 \geq 2,5$ дБ; $D \geq 15$ дБ, $KCB \leq 1,5$.

Для увеличения переходного затухания C_{12} в ответвителях на связанных линиях применяется также каскадное включение нескольких ответвителей с более слабой связью. Пример каскадного включения двух ответвителей представлен на рис. 6.11. Длина участка фазирования $l = \frac{\lambda_d}{2}$. При технически достижимых зазорах s микрополосковых ответвителей общая величина переходного затухания $C \geq 2,5$ дБ.

При величине переходного затухания $C_{12} = 3$ дБ величины переходных затуханий в отдельных ответвителях составляют $C = 7,7$ дБ.

Достоинствами ответвителей на связанных полосковых и микрополосковых линиях являются их малые габариты и массы.

В микрополосковых линиях широко применяются также шлейфные направленные ответвители. По сравнению с ответвителями на связанных линиях они имеют большие габариты и более узкую полосу частот, однако получение сильных связей в них не представляет технологических трудностей. Топология четырехшлейфного ответвителя приведена на рис. 6.12.

Волновые проводимости всех выходов одинаковы Y_0 . Величины проводимостей $Y_{ш1}$ и Y определяются числом шлейфов и заданной величиной переходного затухания C_{14} . Матрица рассеяния ответвителя описывается формулой (6.6). Для четырехшлейфного ответвителя выполняется условие $Y_1 = Y_2 = Y_0 = Y_3$; $Y_{ш1} = Y_{ш4}$; $Y_{ш2} = Y_{ш3}$.

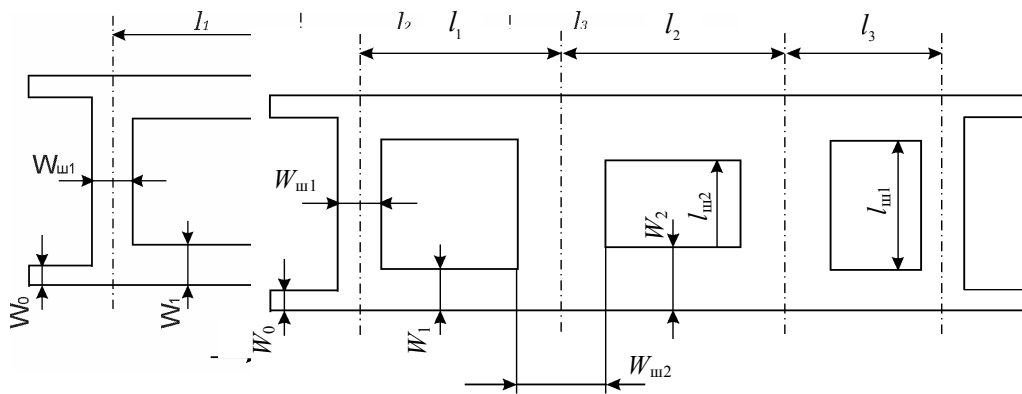


Рис. 6.12 Четырехшлейфный направленный ответвитель

Волновые проводимости определяются по формулам

$$Y_{ш1} = \frac{k - \sqrt{1 - \sqrt{1 - k}}}{W_0 \sqrt{1 - k^2}}; \quad (6.10)$$

$$Y_{ш2} = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - k}}}{W_0}, \quad (6.11)$$

где $W_0 = \frac{1}{Y_0}$ – волновое сопротивление входов;

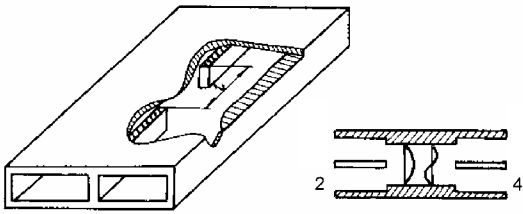
$$k = 10^{\frac{C}{20}} - \quad (6.12)$$

коэффициент связи плеч 1–4, выраженный через переходное затухание C в дБ; длины всех участков Y и $Y_{ш}$ равны $\lambda_{л}/4$.

Направленные ответвители широко применяются в измерительной технике для раздельного измерения падающей и отраженной волн. Ответвитель на связанных линиях под названием рефлектомер был разработан еще в сороковых годах для измерения КБВ в открытых двухпроводных линиях.

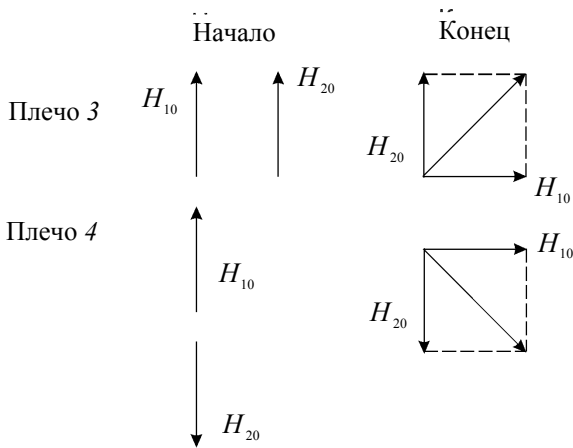
Очень широкое применение в технике СВЧ имеют мостовые схемы. Мост – это направленный ответвитель, в котором мощность, подводимая к одному из плеч, в выходных плечах делится пополам. Мостовую схему часто называют трехдецибельным направленным ответвителем. Рассмотрим наиболее употребительные мостовые схемы.

Волноводно-щелевой мост состоит из двух волноводов с общей узкой стенкой. В этой стенке прорезано окошко связи длиной l (рис. 6.13). В волноводно-щелевом мосте развязаны плечи 1–2 и 3–4. Принцип работы моста заключается в следующем. Во всех входах может распространяться только волна H_{10} . В том месте, где прорезано окно связи, размер волновода увеличивается вдвое и волновод становится докритическим для двух волн H_{10} и H_{20} , которые и возникают в начале окна. Причиной, вызывающей возникновение волны H_{20} , является острое ребро, расположенное в пучности поля E волны H_{10} . В начале окна в волноводе 1–3 обе волны в фазе, а в волноводе 2–4 – в противофазе. По этой причине в плече 2 суммарное поле равно нулю и плечо 2 оказывается развязанным от плеча 1. Далее обе волны распространяются вдоль окна. Поле на входах плеч 3 и 4 будет определяться фазовыми соотношениями волн H_{10} и H_{20} . Чтобы система была мостом,



необходимо, чтобы разность фазовых набегов волн H_{10} и H_{20} на длине окна l равнялась $\frac{\pi}{2}$. Последнее поясняется векторными диаграммами в начале и конце окна связи, приведенными на рис. 6.14. Если разность фазовых набегов равна $\frac{\pi}{2}$, то поля в выходах 3 и 4 одинаковы по амплитуде и сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Из векторных диаграмм рис. 6.14 видно, что если разность фазовых набегов волн H_{10} и H_{20} будет

Рис. 6.13 Волноводно-щелевой мост



отличаться от $\pi/2$, то суммарные векторы поля в плечах 3 и 4 будут неодинаковыми, т.е. система перестанет быть мостом. В частности, если разность фазовых набегов составит 180° , то из плеча 1 вся энергия перейдет в плечо 4, т.е. плечи 1-3 окажутся развязанными. Такую систему называют мостом с полной связью. На острых ребрах окна связи возникают волны высших типов, вызывающие рассогласование моста. Для его настройки в середине окна связи в верхней стенке волновода ставится емкостной винт. Чтобы уменьшить возможность возбуждения волны H_{30} , в месте окна делается небольшое сужение волнопроводов.

Волноводно-щелевой мост – система достаточно широкополосная. Полоса рабочих частот моста с емкостным винтом на уровне $3 \pm 0,5$ дБ составляет 12 ... 20 %; направленность моста при этом $D > 20$ дБ.

Волноводно-щелевой мост является ответвителем первого типа, и его матрица рассеяния описывается формулой (6.6). Определим элементы матрицы S моста и с помощью этой матрицы проанализируем его работу. При этом выясним области применения мостовых схем. В мостовой схеме мощности в выходных плечах одинаковы, поэтому $|S_{13}| = |S_{14}|$. Из условия унитарности $S_{13}^2 + S_{14}^2 = 1$, $S_{13}^* S_{14} + S_{14}^* S_{13} = 0$ определим эти элементы: $|S_{13}| = |S_{14}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\psi_{13} - \psi_{14} = \pi/2$, отсюда матрица рассеяния будет

$$[S] = \frac{e^{-j\psi}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & j & 1 \\ 0 & 0 & 1 & j \\ j & 1 & & \\ 1 & j & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.13)$$

В (6.3) ψ – набег фазы на участке от входа до начала окна связи; этот набег фазы одинаков для всех плеч и мы его опустим, т.е. плоскости отсчета расположим близко к окну связи.

Напишем уравнение $[b] = [S][a]$ в развернутом виде:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ja_3 + a_4); & b_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ja_1 + a_2); \\ b_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ja_3 + a_4); & b_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(ja_1 + a_2). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Проанализируем с помощью (6.14) различные случаи работы моста.

1 В плечо 1 включен генератор, создающий волну $a_1 = a$. Все остальные плечи нагружены на согласованные нагрузки $a_2 = a_3 = a_4 = 0$. Из (6.14) имеем $b_3 = j\frac{a}{\sqrt{2}}$, $b_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Поля в плечах 3 и 4 имеют одинаковые амплитуды. Поле в плече 3 опережает по фазе поле в плече 4 на 90° . В этом режиме мост работает как делитель мощности. Достоинством такого делителя мощности по сравнению с обычными тройниками является отсутствие связи между выходными плечами 3 и 4.

2 К плечам 1 и 2 подключены два генератора, создающие на входах одинаковые синфазные поля $a_1 = a_2 = a$; $a_3 = a_4 = 0$. Тогда $b_3 = \frac{a}{\sqrt{2}}(1+j)$; $b_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}(1+j)$. Мощности генераторов сложились и сумма поделилась поровну между плечами 3 и 4. Поля в выходных плечах в фазе и сдвинуты на 45° по отношению к входным волнам. Влияния одного генератора на другой нет, так как плечи 1 и 2 развязаны.

3 Ко входам 1 и 2 снова подключены два генератора, создающие одинаковые по амплитуде, но сдвинутые по фазе на 90° поля $a_1 = a$; $a_2 = ja$; $a_3 = a_4 = 0$. Из (6.14) следует, что

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+a) = j\frac{2a}{\sqrt{2}}; \quad b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-a) = 0. \quad (6.15)$$

Теперь в плече 3 поля сложились в фазе, а в плече 4 – в противофазе.

Мощность обоих генераторов проходит только в плечо 3. Такой режим работы мостовой схемы очень широко применяется на практике, например для сложения мощности двух генераторов в общей нагрузке, особенно в микроэлектронике. Мощности современных СВЧ-полупроводниковых приборов пока невелики. Зачастую требуются значительно большие мощности, чем может обеспечить один транзисторный или диодный генератор СВЧ; в этом случае системы суммирования мощностей нескольких генераторов строятся на основе мостовых схем.

Из равенств (6.5) видно, что в плече 3 образуется сумма полей, в плече 4 – их разность. Это позволяет на основе моста строить различные балансные схемы: балансные смесители, балансные детекторы, фазовые детекторы. С помощью мостовых схем удобно сравнивать сигналы двух изолированных друг от друга источников. Если поддерживать разность фаз двух сигналов равной $\pi/2$, то их можно сравнить по амплитуде. Уравняв их амплитуды – осуществить сравнение по фазе.

Если изменить фазы входных сигналов так, чтобы $a_1 = ja$; $a_2 = a$, то аналогично получим $b_4 = j2\frac{a}{\sqrt{2}}$, $b_3 = 0$. Энергия теперь поступает только в плечо 3. Изменяя сдвиг фаз между сигналами a_1 и a_2 в пределах $\pm\pi/2$, можно мощности в выходных плечах разделить в любом отношении.

4

4 Фазовращатель на основе волноводно-щелевого моста. Поместим в выходных плечах 3, 4 короткозамыкающие поршни. Поршни расположены на одинаковом расстоянии от окна связи и перемещаются совместно (рис. 6.15). Теперь выходные волны b_3 и b_4 будут отражаться от поршней и тем самым образуют входные волны a_3 и a_4 , равные $a_3 = -b_3e^{j2\theta}$; $a_4 = -b_4e^{j2\theta}$, где θ – электрическая длина участка от окна связи до поршня. Теперь найдем выходные волны b_1 и b_2 . Из (6.14) получим

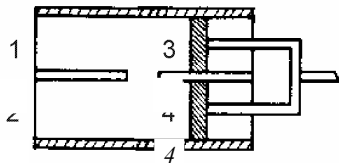


Рис. 6.15 Фазовращатель на

основе волноводно-щелевого моста

механически управляемый фазовращатель. Фазовращатель согласован по входу $b_1 = 0$, если согласован его выход $a_2 = 0$.

$$b_1 = 0; \quad b_2 = ae^{j(2\theta-\pi/2)}. \quad (6.16)$$

Из (6.16) следует, что фаза выходной волны будет линейно изменяться при перемещении поршней. Устройство превратилось в механически управляемый фазовращатель. Фазовращатель согласован по входу $b_1 = 0$, если согласован его выход $a_2 = 0$.

На рис. 6.16 изображен второй тип моста – двойной волноводный тройник, представляющий собой объединение тройников в плоскости E и H . Пронумеруем входы узла так, чтобы он соответствовал ответвлению первого типа. В месте соединения четырех волноводов возникают высшие типы волн и для согласования тройника в нем размещают два согласующих устройства: в плече 4 – индуктивный штырь и в плече 3 – емкостной штырь.

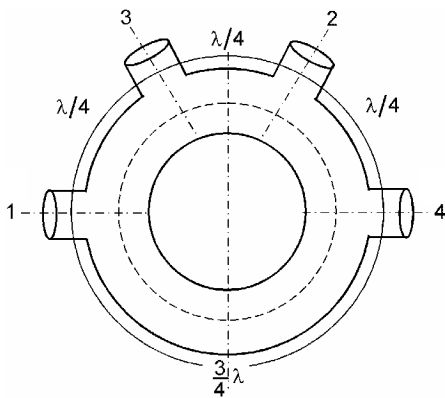
Двойной тройник имеет одну плоскость симметрии. Используя ту же методику, что и для волноводно-щелевого моста, можно найти матрицу рассеяния двойного тройника

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & e^{j(\theta_3+\theta_1)} & e^{j(\theta_4+\theta_1)} \\ 0 & 0 & e^{j(\theta_3+\theta_2)} & e^{j(\theta_4+\theta_2)} \\ e^{j(\theta_1+\theta_3)} & e^{j(\theta_2+\theta_3)} & 0 & 0 \\ e^{j(\theta_1+\theta_4)} & e^{j(\theta_2+\theta_4)} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

где θ_i – электрическая длина i -го плеча.

Из выражения для матрицы рассеяния (6.17) следует, что если генератор включен в плечо 3, то падающая волна возбуждает в плечах 1 и 2 волны одинаковой амплитуды и фазы. Плечи 3–4 развязаны. Волна, падающая из плеча 4, возбуждает в плечах 1 и 2 волны, одинаковые по амплитуде и противоположные по фазе. Волна, падающая из плеча 1, возбуждает в плечах 3 и 4 волны одинаковой амплитуды и фазы. Плечи 1–2 при этом развязаны. И, наконец, волна, падающая из плеча 2, возбуждает плечи 3 и 4 в противофазе; плечи 1–2 развязаны. Если включить два генератора в плечи 1 и 2, то в плече 3 образуется сумма, а в плече 4 – разность сигналов. Направленность двойного тройника составляет $D \approx 20$ дБ.

На рис. 6.17 изображена третья мостовая схема – гибридное кольцо, выполненное на коаксиальной линии. Такое же кольцо выполняется на волноводах, полосковых и микрополосковых линиях. Из рисунка видно, что гибридное кольцо представляет собой замкнутый отрезок линии длиной $1,5\lambda$. К кольцу через $\lambda/4$ подключены четыре входа. Схема имеет одну плоскость симметрии, и ее матрица рассеяния будет следующей:



$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

Из любого плеча кольца в любое другое плечо приходят две волны одинаковой амплитуды. Суммарное поле в этом плече будет определяться сдвигом фаз между ними. Легко проследить по рис. 6.17, что плечи 1–2 и 3–4 будут развязаны, так как разность хода между ними по обеим половинам кольца равняется полуволне.

Каждый вход нагружен на два таких же входа, включенных на расстоянии, равном нечетному числу четвертей длин волн, поэтому для согласования входов с кольцевой линией, ее волновое сопротивление должно быть $W = \sqrt{2}W_0$, W_0 – волновое сопротивление входных линий.

Рис. 6.17 Гибридное кольцо

Гибридное кольцо можно выполнить и на открытых двухпроводных линиях. Схема такого кольца приведена на рис. 6.18. Для исключения полуволновой линии между плечами 1–4 применено перекрещивание проводов, обеспечивающее частотно-независимый сдвиг фаз в 180° . На всех частотах кольцо делит мощность в выходных плечах на равные части и обладает высокой направленностью. Частотно-зависимым здесь оказывается согласование входов, однако в полосе, превышающей две октавы, оно остается в допустимых пределах.

Мостовую схему легко можно превратить в шлейфный направленный ответвитель (рис. 6.12). Для этого необходимо положить величину переходного затухания равной $S_{14} = 3$ дБ и по формулам (6.10) – (6.12) определить необходимые величины сопротивлений схемы.

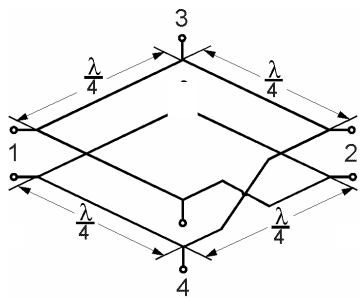


Рис. 6.18 Мостовая схема

на основе двухпроводной линии

Все схемы направленных ответвителей, мостов, делителей мощности содержат отрезки линий длиной $\lambda/4$. При большой длине волны устройства становятся слишком громоздкими. Особенно важно это в микроэлектронной технике, где часто необходимо на одной подложке разместить несколько узлов; в этих случаях отрезки линий можно заменить симметричными П-образными четырехполюсниками.

Список ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Фальковский О.И. Техническая электродинамика. – М.: Связь, 1978. – 432 с.
- 2 Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976.
- 3 Поливанов К.И. Теория электромагнитного поля. – М.: Энергия, 1975.
- 4 Терлицкий Я.П., Рыбаков Ю.П. Электродинамика. – М.: Высшая школа, 1990. – 352 с.
- 5 Федоров К.Н. Основы электродинамики. – М.: Высшая школа, 1980.

6 Красюк Н.П., Дымович Н.Л. Электродинамика и распространение радиоволн. – М.: Высшая школа, 1974.

7 Кухаркин Е.С. Основы инженерной электрофизики. – М.: Высшая школа, 1969.

8 Туровский Я. Техническая электродинамика. – М.: Энергия, 1974.

9 Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. – М.: Иностранная литература, 1948.

10 Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977.

11 БЕССОНОВ Л.А. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ. – М.: ВЫСШАЯ ШКОЛА, 1978. – Ч. III.

12 Федоров В.В. Теоретические основы технической электродинамики. – Л.: ЛЭТИ, 1981. – 62 с.

13 Сборник задач по курсу «Электродинамика и распространение радиоволн» / Под ред. С.И. Баскакова. – М.: Высшая школа, 1981.