Контрольная работа № 1 по дисциплине «Высшая математика» для студентов заочного отделения

Выбор номера варианта контрольной работы.

Берётся порядковый номер в русском алфавите первой буквы фамилии студента и вторая цифра этого номера соответствует номеру варианта. Например, для студента Поликарпова Николая номер варианта – **7**, *т.к. буква «П» в алфавите под номером 17, вторая цифра которого равна 7. Если номер однозначный, то он и является номером варианта; цифра 0 соответствует варианту № 10.*

Выбор значений параметров a и b.

Значение параметра a равно порядковому номеру первой буквы фамилии студента, значение параметра b равно порядковому номеру первой буквы имени студента в алфавите. Например, у Поликарпова Николая $a=17$, $b=15$ (буква «Н» в русском алфавите имеет порядковый номер 15).

I. Линейная алгебра

1. Проверьте, верно ли равенство $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, где

$$A=\begin{pmatrix} a+b+1 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & a \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} a+b+1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ a & -4 & b \end{pmatrix}$.

3. Для матрицы A найдите обратную матрицу A^{-1} и проверьте равенство

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -a \\ b & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} 5x-4y-1z=a \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x-y+z=b \end{cases}.$$

1) Решите систему по формулам Крамера;

2) Запишите систему в матричном виде и решить ее матричным способом.

5. Решите системы методом Гаусса:

$$1)\ \begin{cases} x+y-z=a \\ 2x+6y-2z=-1 \\ 3x+7y-3z=a-1 \end{cases}; \quad 2)\ \begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4=a \\ 2x_1+x_2-4x_3-x_4=-1 \\ 4x_1+2x_2-3x_3+x_4=b \end{cases}$$

II. Векторная алгебра

6. Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$.

6.1. $\vec{a}(1;3;4)$; $\vec{b}(-1;0;2)$; $\vec{c}(3;4;1)$; $\vec{d}(3;7;7)$.

6.2. $\vec{a}(1;2;3)$; $\vec{b}(-1;3;2)$; $\vec{c}(2;-3;5)$; $\vec{d}(6;-7;11)$.

6.3. $\vec{a}(4;7;8)$; $\vec{b}(-1;1;3)$; $\vec{c}(2;-4;1)$; $\vec{d}(-1;16;9)$.

6.4. $\vec{a}(8;2;3)$; $\vec{b}(1;2;-5)$; $\vec{c}(3;-2;1)$; $\vec{d}(-9;4;-14)$.

6.5. $\vec{a}(10;3;1)$; $\vec{b}(1;4;2)$; $\vec{c}(3;1;9)$; $\vec{d}(1;8;30)$.

6.6. $\vec{a}(2;4;1)$; $\vec{b}(1;-4;2)$; $\vec{c}(1;-1;3)$; $\vec{d}(3;-15;11)$.

6.7. $\vec{a}(0;2;4)$; $\vec{b}(1;5;-3)$; $\vec{c}(4;-1;2)$; $\vec{d}(-15;13;-3)$.

6.8. $\vec{a}(1;4;3)$; $\vec{b}(2;-1;5)$; $\vec{c}(3;1;4)$; $\vec{d}(12;13;17)$.

6.9. $\vec{a}(1;1;1)$; $\vec{b}(4;1;-3)$; $\vec{c}(0;5;-2)$; $\vec{d}(8;-13;0)$.

6.10. $\vec{a}(2;7;3)$; $\vec{b}(3;1;8)$; $\vec{c}(2;-1;1)$; $\vec{d}(9;25;6)$.

1) Найдите разложение вектора $\vec{d}$ по векторам $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
2) При каком значении λ вектор $\vec{a} + \lambda \vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.
3) Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b} - \vec{c}$.
4) Найдите $[\vec{a} + 2\vec{b},\ \vec{c} - 4\vec{b}]$.
5) Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с общим началом (сделать чертеж).
6) Найти высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},$ как на ребрах (сделать чертеж).
7) При каком значении α векторы $\vec{a},\ \vec{b} + \alpha\vec{c},\ \vec{a} + \alpha\vec{b}$ компланарны?

III. Аналитическая геометрия

7. Даны три точки $M_1(-1; 2+b), M_2(2; 4-b), M_3(4; 5+2b)$.
1) Составьте уравнение прямой перпендикулярной прямой M_1M_2 и проходящей через точку M_3.
2) Составьте уравнение прямой параллельной прямой M_1M_2 и проходящей через точку M_3.

8. Даны координаты вершин пирамиды A_1, A_2, A_3, A_4.
1) Составьте уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.
2) Составьте уравнения прямой A_1A_4.
3) Составьте уравнения перпендикуляра, опущенного из точки A_4 на грань $A_1A_2A_3$.
4) Найдите площадь грани $A_1A_2A_3$, объем пирамиды и ее высоту, опущенную из вершины A_4;
8.1. $A_1(7;7;3)$; $A_2(6;5;8)$; $A_3(3;5;8)$; $A_4(8;2;1)$.
8.2. $A_1(8;6;4)$; $A_2(10;5;5)$; $A_3(5;6;8)$; $A_4(8;10;7)$.
8.3. $A_1(7;2;2)$; $A_2(5;7;7)$; $A_3(5;3;1)$; $A_4(2;3;7)$.
8.4. $A_1(6;6;5)$; $A_2(4;9;5)$; $A_3(4;6;11)$; $A_4(6;9;3)$.
8.5. $A_1(4;8;2)$; $A_2(5;2;6)$; $A_3(5;7;4)$; $A_4(4;10;9)$.

8.6. $A_1(10;6;6)$; $A_2(-2;8;2)$; $A_3(6;8;-1)$; $A_4(7;10;3)$.
8.7. $A_1(3;5;4)$; $A_2(8;7;4)$; $A_3(5;10;4)$; $A_4(4;7;8)$.
8.8. $A_1(4;6;5)$; $A_2(6;9;4)$; $A_3(2;-1;10)$; $A_4(7;5;9)$.
8.9. $A_1(4;4;2)$; $A_2(4;10;2)$; $A_3(2;8;4)$; $A_4(9;6;9)$.
8.10. $A_1(4;2;5)$; $A_2(0;7;2)$; $A_3(1;5;0)$; $A_4(0;2;7)$.

9. Составьте уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $M_0(x_0, y_0)$ и прямой $Ax + By + C = 0$. Сделайте чертеж.

9.1. $M_0(0;2)$; $y - 4 = 0$
9.2. $M_0(2;-6)$; $x + 2 = 0$
9.3. $M_0(-2;5)$; $y + 1 = 0$
9.4. $M_0(3;-4)$; $y + 3 = 0$
9.5. $M_0(-3;3)$; $3x - 2 = 0$
9.6. $M_0(-2;-3)$; $x - 6 = 0$
9.7. $M_0(4;-1)$; $4y + 1 = 0$
9.8. $M_0(3;-5)$; $2x - 5 = 0$
9.9. $M_0(1;-1)$; $x + 4 = 0$
9.10. $M_0(-1;7)$; $y = 4$

10. Приведите уравнение линии к каноническому виду и постройте ее.

10.1. $9x^2 - 36x + 4y^2 + 8y + 4 = 0;$
10.2. $4x^2 + 24x - 9y^2 - 18y - 9 = 0;$
10.3. $4x^2 - 8x + 25y^2 - 100y + 4 = 0;$
10.4. $5x^2 - 16y^2 - 32y = 0;$
10.5. $x^2 - 8x + 4y^2 - 16y = 0;$
10.6. $x^2 + 4x - 9y^2 + 10 = 0;$
10.7. $4x^2 - 32x + y^2 - 10y + 25 = 0;$
10.8. $x^2 + 6x - 3y^2 - 12y = 0;$
10.9. $5x^2 - 10x + y^2 - 4y = 0;$
10.10. $x^2 + 6y^2 + 12y - 6 = 0.$

IV. Дифференциальное исчисление функции одной переменной

11. Найдите производные $\frac{dy}{dx}$, пользуясь формулами и правилами дифференцирования:

11.1. а) $y = 2\sqrt{4x+3} - \frac{3}{\sqrt{x^3 + x + 1}}$;
б) $y = \left(e^{\cos x} + 3\right)^2$;
в) $y = \ln\sin(2x+5)$;
г) $y = x^{\sin x}$;
д) $tg\left(\frac{y}{x}\right) = 5x$;
е) $x = \cos\left(\frac{t}{2}\right)$, $y = t - \sin t$.

11.2. а) $y = x^2\sqrt{1-x^2}$;
б) $y = \frac{4\sin x}{\cos^2 x}$;
в) $y = arctg e^{2x}$;
г) $y = x^{\frac{1}{x}}$;
д) $x - y + arctg y = 0$;
е) $x = t^3 + 8t$, $y = t^5 + 2t$.

11.3. а) $y = \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{2x+3}$;
б) $y = \sqrt[3]{x^2 + 3\ln x}$;
в) $y = \arcsin\sqrt{\sin x}$;
г) $y = (\sin x)^{\cos x}$;
д) $2y\ln y = x$;
е) $x = \frac{1+t}{t}$, $y = \frac{t-1}{t}$

11.4. а) $y = x\sqrt{(1+x^2)(1-x)}$;
б) $y = \frac{1}{tg^2 2x}$;

в) $y = \arcsin\sqrt{1-3x}$; г) $y = x^{\ln x}$;

д) $y\sin x = \cos(x-y)$; д) $x = t - \sin t, \qquad y = 1 - \cos t.$

11.5. а) $y = \dfrac{\sqrt[9]{4x^5+2}}{3x^4}$; б) $y = \sqrt{(a-x)(x-b)} - arctg\sqrt{\dfrac{a-x}{x-b}}$;

в) $y = e^{-x^2}\ln\sqrt[3]{1-3x}$; г) $y = 2x^{\sqrt{x}}$;

д) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$; е) $x = t^3 + 1, \qquad y = t^2 + t + 1$

11.6. а) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; б) $y = \dfrac{\sin^2 x}{2 + 3\cos^2 x}$;

в) $y = \dfrac{x\ln x}{x-1}$; г) $y = (arctgx)^{\ln x}$;

д) $(e^x - 1)(e^y - 1) - 1 = 0$; е) $x = 2tgt, \qquad y = 2\sin^2 t + \sin 2t.$

11.7. а) $y = x \cdot arctg\sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{x^2 + a^2} - a\arcsin\dfrac{a}{x}$;

в) $y = \ln\dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$; г) $y = \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;

д) $x\sin y - \cos y + \cos 2y = 0$; е) $x = 2t + 3t^2, \qquad y = t^2 + 2t^3.$

11.8. а) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} + 5\sqrt[5]{x^3+1}}$ б) $y = 2tg^3(x^2+1)$;

в) $y = 3^{arctgx}$; г) $y = (arctgx)^x$;

д) $y^2 x = e^{\frac{y}{x}}$; е) $x = 3\cos^2 t, \qquad y = 2\sin^3 t.$

11.9 а) $y = \sqrt[3]{\dfrac{(1+x^2)}{(1-x^2)}}$; б) $y = \dfrac{1}{2}tg^2 x + \ln\cos x$;

в) $y = arctg\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$; г) $y = (x + x^2)^x$;

д) $x^2 + y^2 + 3axy = 0$; е) $x = \dfrac{1+t}{t^3}, \quad y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}.$

11.10. а) $y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}$; б) $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$;

в) $y = x^3 arctg\sqrt{x+2}$; г) $y = (x^2+1)^{\sin x}$:

д) $y\sin x - \cos(x-y) = 0$; е) $x = 3\cos t, \qquad y = 4\sin^2 t.$