Контрольная работа № 2 по дисциплине «Высшая математика» для студентов заочного отделения

V. Дифференциальное исчисление

1. Исследуйте методами дифференциального исчисления функцию и, используя результаты исследования, постройте ее график:

1.1. $y = 2x^3 - 6x + 4;$

1.2. $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2;$

1.3. $y = \frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}x;$

1.4. $y = 4x^4 - 8x^2 + 5;$

1.5. $y = x^3 - 3x^2 + 2;$

1.6. $y = x^3 - 12x^2 + 11;$

1.7. $y = x^4 - 8x^2 + 7;$

1.8. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5;$

1.9. $y = x^4 - 18x^2 + 80;$

1.10. $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5.$

2. Найдите частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ функции $z = z(x, y)$, убедитесь, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$:

2.1. $z = x^2 \sin 4y + \frac{x^3}{y+1}$

2.2. $z = \ln(x^2 + 2y) - \frac{y}{\sqrt{x}}$

2.3 $z = \ln\left(y^3 - 2x^2\right) + y^2 x^4$

2.4 $z = \cos(2x^2 + 4y) - \sqrt{x^2 + y^3}$

2.5 $z = arcctg\left(\frac{y^2}{x}\right) - x \sin^2 y$

2.6. $z = \frac{\cos 2y}{x^2 + 1} - \frac{y - 1}{e^x}$

2.7. $z = e^{\frac{x}{y^2}} - (x + 2y)^2$

2.8. $z = arctg\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^3}{x^4}$

2.9. $z = \arccos(xy^2) - \sqrt{xy}$

2.10. $z = x^2 e^{\cos y} - \frac{\sqrt[4]{x}}{y + 2}$

3. Исследуйте на экстремум функцию $z = z(x, y)$:

3.1. $z = 2x^2 - xy + 4y^2 - x$

3.2. $z = 4x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x$

3.3. $z = \frac{y^3}{3} - y + 4x^2 - 8x$

3.4. $z = 3x^2 - xy + y^2 - 2x,$

3.6. $z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2y,$

3.7. $z = 0{,}25x^4 - x + 2y^2 - 4y,$

3.8. $z = \frac{x^3}{3} + y^2 - 2y - x,$

3.9. $z = x^2 + 2xy + 3y^2 - x,$

3.5. $z = 7xy - x^2 - 6y^2 - x$,

3.10. $z = 5xy + x^2 + 2y^2 - x$,

4. Даны функция $z = z(x, y)$ и точка $M(x, y)$. Найдите: а) $\overline{grad}\, z(M)$; б) производную этой функции в точке $M(x, y)$ по направлению вектора $\overline{OM}$ (точка O – начало координат).

4.1. $z = 2x^2 + xy,\ M(3,4)$.

4.2. $z = 2x^2 + 3xy + y^2,\ M(1,1)$.

4.3. $z = \ln(x^2 + 3y^2),\ M(-3,4)$.

4.4. $z = arctg\,(x^2 y^2),\ M(2,-1)$.

4.5. $z = \dfrac{y}{2x^2 + 3y^2},\ M(3,-4)$.

4.6. $z = x^2 + y^3 - 6xy,\ M(-1,1)$.

4.7. $z = ye^x - xe^y,\ M(1,-1)$.

4.8. $z = e^{2x^2 + y^3},\ M(-1,1)$.

4.9. $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2},\ M(5,12)$.

4.10. $z = \dfrac{x+y}{x^2 + y^2},\ M(4,-3)$.

VI. Интегральное исчисление функций одной переменной

5. Найдите неопределенные интегралы:

5.1. *а)* $\int x \ln^3 x\, dx$, *б)* $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$, *в)* $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$, *г)* $\int \dfrac{x^2 + 5x + 3}{x(x+1)^2} dx$.

5.2. *а)* $\int e^{-\frac{x}{2}} x\, dx$, *б)* $\int \dfrac{x^2 - 6x + 7}{(2x-1)(x^2+4)} dx$, *в)* $\int tg^5 x\, dx$, *г)* $\int \dfrac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$.

5.3. *а)* $\int \dfrac{x \arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$, *б)* $\int \dfrac{2x^2 + 10x + 3}{x^3 + 3x^2} dx$, *в)* $\int \sin 5x \cos 3x\, dx$, *г)* $\int \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1+x} + \sqrt{1+x}}$.

5.4. *а)* $\int \dfrac{x\, dx}{\cos^2 x}$, *б)* $\int \dfrac{2x^2 + x + 2}{x^3 + x} dx$, *в)* $\int ctg^3 x\, dx$, *г)* $\int \dfrac{\sqrt[6]{x}\, dx}{\sqrt[6]{x^5} + \sqrt[4]{x^3}}$.

5.5. *а)* $\int x^2 e^{-\frac{x}{3}} dx$, *б)* $\int \dfrac{3x^2 - x + 18}{(x-1)(x^2+3)} dx$, *в)* $\int \sin^4 x\, dx$, *г)* $\int \dfrac{\sqrt[3]{x}\, dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}$.

5.6. *а)* $\int x \ln(x^2 + 1) dx$, *б)* $\int \cos^6 x\, dx$, *в)* $\int \dfrac{x^2 - x + 2}{(x-1)(x^2+1)} dx$, *г)* $\int \dfrac{\sqrt{x}\, dx}{1 + \sqrt[3]{x}}$.

5.7. *а)* $\int \arcsin x\, dx$, *б)* $\int \dfrac{4x + 5}{(x-1)(x+2)} dx$, *в)* $\int \dfrac{dx}{1 + tgx}$, *г)* $\int \dfrac{\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[6]{x} + 2}{\sqrt[6]{x^5}(\sqrt{x} - 8)} dx$.

5.8. *а)* $\int \sqrt{x} \ln x\, dx$, *б)* $\int \dfrac{2x^2 - x - 2}{x^3 - x^2} dx$, *в)* $\int \dfrac{dx}{\cos^2 5x \sin^2 5x}$, *г)* $\int \dfrac{dx}{(1 + x^2)(arctgx - 3)}$.

5.9. *а)* $\int (1 - x) \sin x\, dx$, *б)* $\int \dfrac{dx}{x(x-1)^2}$, *в)* $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$, *г)* $\int \dfrac{\sqrt[3]{x}\, dx}{\sqrt{x} + \sqrt[6]{x}}$.

5.10. *а)* $\int \dfrac{x\, dx}{\sin^2 x}$, *б)* $\int \dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^3 + 4x} dx$, *в)* $\int \sin 3x \cos 5x\, dx$, *г)* $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$.

6. *а*) Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями; *б*) вычислите объем тела, образованного вращением фигуры Φ вокруг указанной оси; *в*) найдите длину дуги линии.

6.1. *а*) $y=\sqrt{x};\ y=x^3;$

б) Φ: $y^2=4-x,\ x=0;\quad OY;$

в) $y=1-\ln\cos x\left(0\le x\le\dfrac{\pi}{6}\right).$

6.2. *а*) $y=\dfrac{1}{1+x^2};\ y=\dfrac{x^2}{2},$

б) Φ: $y^3=x^2,\ y=1;\quad OX;$

в) $y^2=x^3$, отсеченной прямой $x=5$.

6.3. *а*) $y^2=9x;\ y=3x,$

б) Φ: $y=x^3,\ x=0,\ y=8;\quad OY;$

в) $y^3=x^2$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.

6.4. *а*) $y^2=4x;\ x^2=4y,$

б) Φ: $y=e^x,\ x=0,\ y=0,\ x=1;\quad OX;$

в) $y^2=(x-1)^3$ от точки $A(1;0)$ до точки $B(6;\sqrt{125})$.

6.5. *а*) $y^2=x^3;\ x=2,$

б) Φ: $y=x^3,\ 8x-y^2=0;\quad OY;$

в) $y^2=(x+1)^3$, отсеченной прямой $x=4$.

6.6. *а*) $y^2=x^3;\ x=0;\ y=4;$

б) Φ: $y^2=x,\ x^3=y;\quad OX;$

в) $y=\ln\sin x\quad\left(\dfrac{\pi}{3}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right).$

6.7. *а*) $y^2=x+1;\ y^2=9-x;$

б) Φ: $y=\sin x,\ y=0;\ (0\le x\le\pi);\quad OX;$

в) $y=\sqrt{1-x^2}$ от точки $A(0;1)$ до точки $B(1;0)$.

6.8. *а*) $y=x^2;\ y=2-x^2,$

б) Φ: $y^2=4x,\ x^2=4y;\quad OX;$

в) $y^2=(x-1)^3$ от точки $A(2;-1)$ до точки $B(5;-8)$.

6.9. *а*) $y=x^3;\ y=1,\ x=0,$

б) Φ: $y=2x-x^2,\ y=0;\quad OX;$

в) $y=e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\ (0\le x\le 2).$

6.10. *а*) $x^2=4y;\ y=\dfrac{8}{x^2+4},$

б) Φ: $y=x^2,\ 8x=y^2;\quad OY;$

в) $y^2=x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(4;8)$.

VII. Обыкновенные дифференциальные уравнения

7. Решите дифференциальные уравнения первого порядка: *а*) найдите общее решение; *б*) решите задачу Коши:

7.1. *а*) $x^2 y' = x^2 + y^2 + xy$,

б) $2xy\,dx + (4 - x^2)\,dy = 0, \quad y(0) = 4$;

7.2. *а*) $x\cos\dfrac{y}{x} + y = xy'$;

б) $\sqrt{x}\,dy - y\,dx = dx$, $y(0) = 0$;

7.3. *а*) $xdy - ydx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx$,

б) $(1 + e^x)\,y\,y' = e^x$, $y(0) = 1$.

7.4. *а*) $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$,

б) $(1 + y^2)\,x\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0$, $y(0) = 1$.

7.5. *а*) $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0$,

б) $y' \cdot 3^{x^2} + x \cdot 9^{-y} = 0$, $y(0) = 1$.

7.6. *а*) $(y^2 - 2xy)dx + x^2\,dy = 0$,

б) $y' - 2xy - y = 0$, $y(0) = \sqrt{3}$;

7.7. *а*) $y^2 + x^2 y' = xyy'$;

б) $2xy\,dx + (4 + x^2)\,dy = 0, y(0) = 2$;

7.8. *а*) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2}$,

б) $\sin^2 x \cos^2 y\,dx - \cos^2 x\,dy = 0$, $y(0) = \dfrac{\pi}{4}$.

7.9. *а*) $(x - y)ydx - x^2\,dy = 0$,

б) $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0{,}5$.

7.10. *а*) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$,

б) $y' = (2y + 1)\,ctg\,x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

8. Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

8.1. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$;

8.2. $y'' + y' - 2y = 3xe^x$;

8.3. $y'' + 8y' + 16y = (x + 1)e^{4x}$;

8.4. $y'' + 6y' + 5y = xe^{-x}$;

8.5. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$;

8.6. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$;

8.7. $y'' + 5y' = 72e^{2x}$;

8.8. $y'' + y' - 6y = (6x + 1)e^{3x}$;

8.9. $y'' - 2y' = 6 + 12x - 24x^2$;

8.10. $y'' - 4y' = 8 - 16x$.