УДК 004.75

А.Н. Пчелинцев, А.Ю. Поветьев

СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СРЕДЕ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ЛОРЕНЦА

В 1963 г. Эдвард Лоренц, метеоролог из Массачусетского технологического института, получил модель, описывающую динамику жидкости при свободной конвекции в плоском слое. Эта модель сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1),\ \ \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1 x_3,\ \ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - bx_3 . \qquad (1)$$

При значениях параметров $\sigma = 28$, $r = 28$ и $b = 8/3$ в жидкости возникает турбулентное течение. Лоренц Э. установил, что в системе (1) существует единственное притягивающее множество – аттрактор, к которому стягиваются все решения данной системы (1). Как отметил Э. Лоренц, этот аттрактор имеет весьма сложную структуру. Впоследствии в ходе исследований (как аналитических, так и численных) была предложена следующая структура аттрактора Лоренца. Аттрактор содержит три положения равновесия (два седлофокуса и один седлоузел) и счетное всюду плотное множество седловых предельных циклов с неограниченно увеличивающимся периодом. Тогда если периоды одних циклов неограниченно увеличиваются, то периоды некоторых других циклов должны неограниченно уменьшаться. Однако, как показали численные эксперименты, это не так. В связи с этим появилась идея проверки гипотезы структуры аттрактора в системе Лоренца с помощью новых методов исследования динамических систем, изложенных в книге [1].

Суть методов, изложенных в [1], состоит в отыскании рекуррентных траекторий и установлении сценария приближения к ним других ограниченных решений. Для отыскания рекуррентных траекторий следует, прежде всего, построить дискретную динамическую систему вдоль решений системы (1). В нашем случае построение дискретной динамической системы осуществлялось в распределенной компьютерной среде с использованием символьных вычислений. После построения дискретной динамической системы становится возможным отыскать устойчивые по Пуассону точки среди точек $P_i^{(0)}$ ($i=\overline{1,\,m}$, m определяется порядком системы) таких систем; согласно [1] именно через эти точки проходят рекуррентные траектории системы (1).

Заметим, что для построения дискретной динамической системы был модифицирован метод степенных рядов, позволяющий в символьной форме построить оператор сдвига вдоль решений системы (1); этот оператор и определяет дискретную динамическую систему. Модификация же применяемого метода состоит в следующем. Процедура символьного дифференцирования правой части системы (1), применяемая для нахождения значений производных, входящих в степенной ряд, осуществляется в распределенной компьютерной среде. Последнее позволяет увеличить эффективность применяемого метода за счет того, что символьные выражения для производных правой части каждого из уравнений системы (1) можно находить независимо друг от друга. Для этого в каждом из параллельных процессов вызывается математический пакет Maxima через перенаправление ввода/вывода. Схема проведения вычислений в распределенной компьютерной среде представлена на рис. 1. В сетевой базе данных хранятся символьные выражения для производных, которые в дальнейшем используются для приближенного вычисления координат той или иной точки на траектории при разложении в степенной ряд решения системы (1) на отрезке определения дискретной динамической системы.

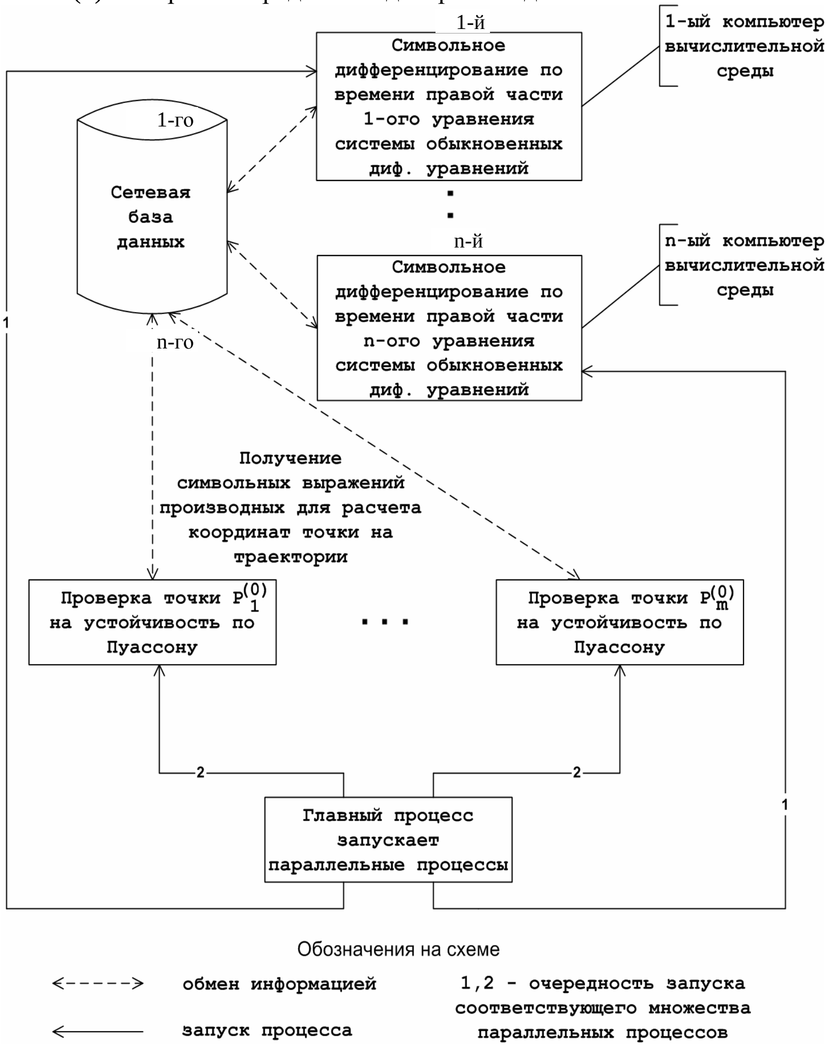

Рис. 1. Отыскание точек, устойчивых по Пуассону,
в распределенной компьютерной среде

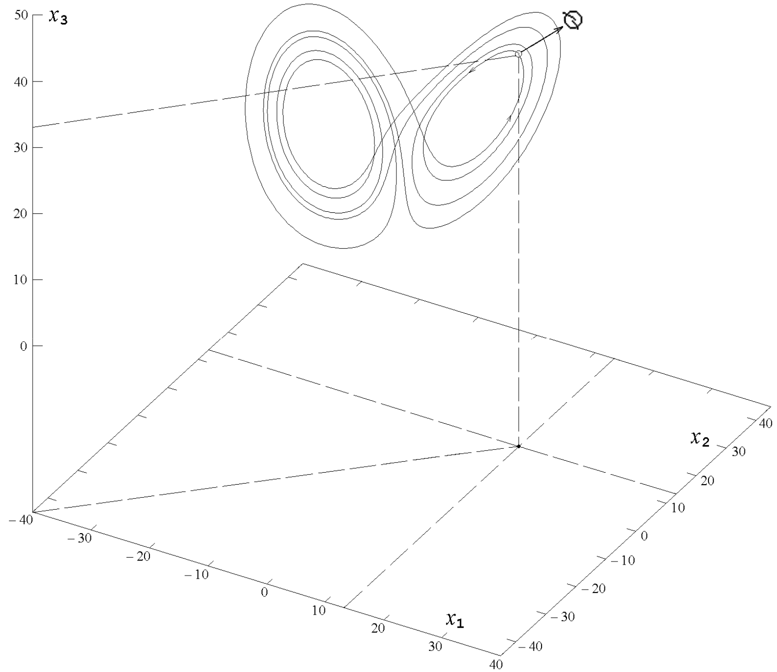

Рис. 2. Дуга траектории системы Лоренца, построенная на отрезке времени [0; 6,827], для начальной точки с координатами (13,41265629; 13,46430003; 33,46156416). Стрелкой отмечено возвращение в ε-окрестность (ε = 0,11)

В результате проведенных вычислительных экспериментов с помощью программы [2] циклы в системе (1) не были обнаружены, найден только возврат в ε-окрестность начального значения (рис. 2). Последнее означает, что данные траектории, скорее всего, являются незамкнутыми устойчивыми по Пуассону траекториями (в том числе и рекуррентными).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Афанасьев, А.П. Устойчивость по Пуассону в динамических и непрерывных периодических системах / А.П. Афанасьев, С.М. Дзюба. – М. : Издательство ЛКИ, 2007. – 240 с.
2. Пчелинцев, А.Н. Отыскание равномерно устойчивых по Пуассону движений динамических систем в распределенной вычислительной среде с использованием библиотеки MPFR C++ высокоточных вычислений (программа для ЭВМ) [Электронный ресурс] / А.Н. Пчелинцев, А.Ю. Поветьев. – URL : http://cluster.tstu.ru/tiki-download_ file.php?fileId=26, свободный. – Загл. с экрана.

Кафедра "Распределенные вычислительные системы", ТГТУ

УДК 372.851