



Е.Н. Туголуков

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ
КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**



◆ ИЗДАТЕЛЬСТВО ТГТУ ◆

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Тамбовский государственный технический университет"

Е.Н. Туголуков

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Утверждено Ученым советом университета
в качестве учебного пособия



Тамбов
Издательство ТГТУ
2005

УДК 536.2
ББК 22.37
Т81

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор
заведующий кафедрой компьютерного и математического моделирования ИМФИ ТГУ им. Г.Р. Державина
А.А. Арзамасцев

Доктор технических наук, профессор ТГТУ
С.В. Фролов

Туголуков Е.Н.

Т81 Решение задач теплопроводности методом конечных интегральных преобразований: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та. 2005. 116 с.

Пособие посвящено использованию метода конечных интегральных преобразований для решения задач нестационарной теплопроводности многослойных тел канонической формы и ограниченных тел канонической формы с произвольными начальными условиями, с неоднородными несимметричными и нелинейными граничными условиями, с распределенными внутренними источниками тепла.

Предназначено для специалистов, занимающихся расчетами технологического оборудования химической промышленности, а также аспирантов и студентов.

УДК 536.2
ББК 22.37

ISBN 5-8265-0444-7

© Туголуков Е.Н., 2005
© Тамбовский государственный
технический университет (ТГТУ), 2005

Учебное издание

ТУГОЛУКОВ Евгений Николаевич

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ
ПРЕОБРАЗОВАНИЙ**

Учебное пособие

Редактор Т.М. Глинкина

Инженер по компьютерному макетированию М.Н. Рыжкова

Подписано к печати 30.11.2005.

Формат 60 × 84/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.

Гарнитура Times New Roman. Объем: 6,71 усл. печ. л.; 6,6 уч.-изд. л.

Тираж 100 экз. С. 834^М

Издательско-полиграфический центр
Тамбовского государственного технического университета
392000, Тамбов, Советская, 106, к. 14

1 ВВЕДЕНИЕ

Очевидно, что проектирование аппаратного оформления химических производств должно обеспечивать возможность выпуска конкурентоспособной продукции. При этом востребованности продукта на рынке, реализации энерго- и ресурсосберегающих технологий, надежности оборудования и экологичности производства оказывается недостаточно. Залогом успеха является использование конструктивных особенностей аппаратов, обеспечивающих оптимальные условия протекания технологических процессов. Поэтому на стадии проектирования в ходе решения задач оптимизации конструктивных и режимных параметров оборудования принципиальную важность приобретает качество используемых расчетных методик, обеспечивающее их адекватность моделируемым процессам, надежность в реализации и достоверность полученных результатов.

Требуемое качество расчетов достигается при наличии набора математических моделей полей определяющих параметров для классов процессов, реализуемых в соответствующих типах аппаратов.

Технологические расчеты с использованием полей определяющих параметров имеют ряд принципиальных преимуществ, а именно:

- расчеты стационарных, квазистационарных, нестационарных, периодических и переходных процессов могут выполняться по унифицированным методикам;
- поля определяющих параметров могут быть рассчитаны как для отдельных единиц оборудования, так и для групп совместно работающих аппаратов;
- возможен учет локальных значений характеристик исследуемых процессов;
- при известных полях определяющих параметров возможен расчет всех остальных параметров процессов, таких как потоки, градиенты, амплитуды, интегральные характеристики определяющих параметров.

Значения тепловых потоков определяют интенсивность и продолжительность тепловых процессов. Значения температурных градиентов в продукте, как правило, определяют его качественные показатели. Интегральные теплоты и потери определяют основную составляющую эксплуатационных затрат на осуществление процесса.

Использование современных средств компьютерной техники делает такие расчеты не только практически реализуемыми, но и необходимыми при решении задач разработки и оптимизации современного промышленного химического производства.

Для математического моделирования полей определяющих параметров целесообразно использовать аналитические методы везде, где они применимы, т.е. позволяют получать аналитические решения соответствующих задач. При выработке некоторых навыков, получение аналитического решения и его дальнейшая реализация не вызывают трудностей, больших, чем при использовании численных методов, а преимущества использования аналитических методов очевидны:

- независимость объема вычислений от значений пространственных и временных координат (как следствие – отсутствие накопления систематических расчетных погрешностей);
- не вызывающий дополнительных затруднений расчет потоков, средних и локальных значений, балансных соотношений, присутствующих в любой модели;
- возможность использования решений частных задач, полученных ранее;
- возможность использования унифицированного набора задач для моделирования класса процессов в соответствующем оборудовании;
- возможность анализа и упрощения решений для характерных и предельных значений параметров процесса;
- наглядность и "физичность" промежуточных и конечных расчетных результатов.

Рассмотрим возможности аналитических подходов к математическому моделированию полей определяющих параметров на примере температурных полей. Пространственные нестационарные температурные поля в производственном промышленном оборудовании могут моделироваться решениями класса задач теплопроводности, рассматриваемыми в данной работе.

В самом общем случае пространственное нестационарное температурное поле может быть описано дифференциальным уравнением Фурье – Кирхгофа [1]. Без учета переноса тепла диффузионной теплопроводностью, которым обычно пренебрегают вследствие его малости по сравнению с другими составляющими, уравнение имеет вид:

$$c_p \rho \frac{dt}{d\tau} = \text{div}(\lambda \nabla t) + Q_V + \frac{dp}{d\tau} + \eta \Phi_V + S_V, \quad (1.1)$$

где $t=t(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$ – определяемая температура, как функция пространственных координат α, β, γ и времени τ ; $\frac{\partial t}{\partial \tau}$ – полная производная температуры

в декартовых координатах:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + v_x \frac{\partial t}{\partial x} + v_y \frac{\partial t}{\partial y} + v_z \frac{\partial t}{\partial z}; \quad (1.2)$$

в цилиндрических координатах:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + v_r \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial t}{\partial z}; \quad (1.3)$$

в сферических координатах:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} + v_r \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial t}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r \sin(\theta)} \frac{\partial t}{\partial \varphi}; \quad (1.4)$$

$\text{div}(\lambda \nabla t)$ – перенос тепла теплопроводностью в декартовых координатах

$$\text{div}(\lambda \nabla t) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial t}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial z} + \lambda \left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right); \quad (1.5)$$

в цилиндрических координатах:

$$\text{div}(\lambda \nabla t) = \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial t}{\partial \theta} + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial t}{\partial z} + \lambda \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right); \quad (1.6)$$

в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\lambda \nabla t) = & \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial t}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial \lambda}{\partial \varphi} \frac{\partial t}{\partial \varphi} + \\ & + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin(\theta) \frac{\partial t}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right); \end{aligned} \quad (1.7)$$

c_p – удельная теплоемкость; ρ – плотность; τ – время; λ – коэффициент теплопроводности; Q_V – суммарная удельная мощность объемных источников тепла; $dp/d\tau$ – работа сил давления; η – коэффициент вязкости; Φ_V – диссипативная функция Релея; S_V – суммарная удельная работа внешних сил в процессе диффузионного переноса; v_x, v_y, v_z – проекции скорости на оси координат.

Это уравнение описывает температурное поле на основе фундаментальных законов переноса тепла в пространстве с учетом всех тепловых эффектов, которые встречаются при эксплуатации промышленного производственного оборудования.

К ним относятся следующие составляющие:

- теплоты разбавления и концентрирования растворов (Q_V);
- теплота фазовых переходов (Q_V);
- тепловые эффекты химических превращений (Q_V);
- теплота, приносимая перемешивающими устройствами (Φ_V);
- теплота внутреннего трения в потоках продуктов и теплоносителей (Φ_V);
- теплота, приносимая внешними электромагнитными, электрическими, акустическими и другими воздействиями (Q_V, S_V);
- теплота, приносимая работой сил давления ($dp/d\tau$).

2 МЕТОД КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Для решения рассматриваемого класса задач теплопроводности практически наиболее удобным оказался метод конечных интегральных преобразований, теория которого была разработана Н.С. Кошляковым [2].

Дальнейшее развитие теория конечных интегральных преобразований получила в работах Э.М. Карташова [3 – 11].

По сравнению с методами разделения переменных, функций Грина, источников, тепловых потенциалов и интегральных преобразований в бесконечных пределах, методы конечных интегральных преобразований имеют ряд практических преимуществ:

- они унифицированы и не требуют изобретательности в технических приемах (как, например, в методе разделения переменных для задач с внутренними граничными условиями (ГУ) 4 рода);
- позволяют получать решение в случае неоднородных граничных условий без представления задачи в виде совокупности стационарной и нестационарной (хотя это несколько ухудшает сходимость рядов в окончательном решении);
- допускают преобразование по нескольким (или всем) координатам одновременно, а также по координатам, вдоль которых свойства среды изменяются ступенчато; это позволяет переходить от системы дифференциальных уравнений в частных производных в оригиналах к одному обыкновенному дифференциальному уравнению в изображениях.

Метод конечных интегральных преобразований целесообразно использовать не только для решения дифференциальных уравнений теплопроводности. Он удобен также для решения уравнений Лапласа, Гельмгольца и Пуассона, которые могут встречаться как в качестве вспомогательных при решении многомерных задач теплопроводности, так и в качестве самостоятельных задач при моделировании не только температурных полей, но и полей других физических величин:

уравнение Гельмгольца

$$\nabla^2 P(u) = -\mu^2 P(u); \quad (2.1)$$

уравнение Пуассона

$$\nabla^2 P(u) = -k^2 F(u); \quad (2.2)$$

уравнение Лапласа

$$\nabla^2 P(u) = 0. \quad (2.3)$$

В декартовой системе координат:

$$u \equiv u(x, y, z);$$

в цилиндрической системе координат:

$$u \equiv u(z, r, \varphi);$$

в сферической системе координат:

$$u \equiv u(r, \rho, \varphi).$$

Теоретическая возможность использования этого метода для решения нелинейных задач не исключается, но даже в специальной литературе можно встретить отказы от рассмотрения таких решений ввиду их чрезмерной сложности.

Это же относится к задачам для тел сложной формы, пространственные границы которых являются сложными функциями пространственных координат.

Возможно использование метода конечных интегральных преобразований для решения задач теплопроводности тел с подвижными границами.

Методика решения задач теплопроводности для многослойных тел, т.е. тел, свойства которых меняются скачкообразно вдоль одной из пространственных координат, рассмотрена ниже. Обобщение теории конечных интегральных преобразований для случая скачкообразного изменения свойств среды в направлении координаты, по которой производится преобразование, разработано Г.А. Гринбергом [12].

Использование решений многослойных задач является разумным приближением к нелинейным задачам, но не используется практически, по-видимому, из-за кажущейся сложности в реализации. В дей-

ствительности увеличение числа слоев в постановке задачи не приводит к принципиальному усложнению решения, так как в решении используются цепочные (или рекуррентные) соотношения, легко реализуемые при программировании. При этом увеличение объема вычислений не играет решающей роли благодаря высоким вычислительным возможностям современных компьютеров. В то же время использование аналитических решений задач теплопроводности для многослойных тел позволяет разрабатывать и применять сложные математические модели процессов производства и обработки многослойных материалов, которые иначе разработать практически невозможно.

Смысл метода конечных интегральных преобразований состоит в следующем.

Преобразование, которым функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ставится в соответствие функция

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \dots, x_n) &= \\ &= \int_a^b f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \xi, x_{j+1}, \dots, x_n) K(\xi, \gamma) \rho(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.4)$$

является интегральным преобразованием по переменной x_j , которая в общем случае может быть комплексной. Диапазон $[a, b]$ является пределами интегрального преобразования, функция $K(\xi, \gamma)$ является ядром интегрального преобразования и функция $\rho(\xi)$ – весовой функцией.

Возможно интегральное преобразование по нескольким или сразу по всем пространственным переменным. Интегральное преобразование по нескольким переменным эквивалентно последовательному применению интегрального преобразования по отдельным переменным.

Преобразование, которым функция $F(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \gamma, x_{j+1}, \dots, x_n)$ преобразуется в функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, является обратным преобразованием.

Интегральное преобразование определено, когда интеграл в правой части (2.4) существует. При практическом использовании интегрального преобразования необходимо существование и обратного преобразования.

Вопросы существования прямого и обратного интегральных преобразований, а также сходимости и устойчивости решений дифференциальных уравнений являются предметами специальных математических исследований и выходят за рамки данной работы.

Основным отличием интегральных преобразований в конечных пределах от операционного исчисления является использование широкого набора интегральных преобразований, в которых ядра интегральных преобразований и весовые функции определяются индивидуально для каждой конкретной задачи.

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\sum_{i=0}^3 \alpha_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=0}^3 \beta_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f. \quad (2.5)$$

Выберем переменную $x_j = \xi$, которая изменяется в постоянных конечных пределах $[a, b]$, в качестве переменной преобразования.

Ядро интегрального преобразования $K(\xi, \gamma)$ и весовая функция $\rho(\xi)$ определяются из условия, чтобы интегральное соотношение

$$\int_a^b \left(\sum_{i=0}^3 \alpha_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i} + \sum_{i=0}^3 \beta_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu \right) K(\xi, \gamma) \rho(\xi) d\xi = \bar{f} \quad (2.6)$$

(здесь \bar{f} – интегральное преобразование функции f) являлось дифференциальным уравнением относительно интегрального преобразования

$$\bar{u} = \int_a^b u K(\xi, \gamma) \rho(\xi) d\xi \quad (2.7)$$

функции u .

Тогда весовая функция ρ определяется с точностью до постоянного множителя из условия

$$(\alpha_j \rho)' = \beta_j \rho. \quad (2.8)$$

Если граничные условия по координате x_j имеют вид

$$\alpha_a u'(a) + \beta_a u(a) = \varphi_a, \quad (2.9)$$

$$\alpha_b u'(b) + \beta_b u(b) = \varphi_b, \quad (2.10)$$

то ядро интегрального преобразования $K(\xi, \gamma)$ является решением задачи Штурма – Лиувилля

$$(\alpha_j \rho K')' + \rho(c + \gamma^2)K = 0; \quad (2.11)$$

$$\alpha_a u'(a) + \beta_a u(a) = 0; \quad (2.12)$$

$$\alpha_b u'(b) + \beta_b u(b) = 0, \quad (2.13)$$

также полученным с точностью до постоянного множителя.

Здесь γ – собственные числа задачи, определяемые из условий (2.12), (2.13).

Обратное преобразование выполняется по формуле

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\bar{u}_i K}{N}, \quad (2.14)$$

причем суммирование ведется по собственным числам и

$$N = \int_a^b K^2(\xi, \gamma) \rho(\xi) d\xi. \quad (2.15)$$

3 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ТЕЛ, СВОЙСТВА КОТОРЫХ МЕНЯЮТСЯ СКАЧКООБРАЗНО ВДОЛЬ ОДНОЙ ИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КООРДИНАТ (МНОГОСЛОЙНЫЕ СИСТЕМЫ)

Рассмотрим задачу с неоднородными граничными условиями. Несмотря на возможность непосредственного решения задачи с неоднородными граничными условиями, в случае получения решения для практической реализации на компьютере целесообразнее получать решение с выделением стационарной составляющей температурного поля. При этом достигается лучшая сходимость рядов, составляющих решение задачи теплопроводности, что практически приводит к снижению объема вычислений и вычислительных погрешностей.

Иными словами, при решении задач теплопроводности в многослойных телах с неоднородными граничными условиями предпочтительно решение искать в виде алгебраической суммы решений стационарной задачи теплопроводности с неоднородными граничными условиями и нестационарной задачи теплопроводности с однородными граничными условиями.

Кроме того, решение стационарных задач теплопроводности в ряде случаев имеет самостоятельное значение.

Для многомерных областей стационарную задачу теплопроводности также целесообразно решать методом конечных интегральных преобразований.

Рассмотрим возможность использования метода конечных интегральных преобразований для случая скачкообразного изменения свойств среды в направлении координаты, по которой производится преобразование на примере решения линейной одномерной задачи теплопроводности для многослойной области канонической формы.

К таким областям относятся неограниченная многослойная пластина, неограниченный сплошной и полый многослойные цилиндры, сплошной и полый многослойные шары (рис. 3.1).

Рассмотрим задачу с произвольным начальным условием, неоднородными граничными условиями и распределенным внутренним источником тепла.

$$\frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + A_{k,i} \frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right) + Q_i(r_i, \tau); \quad (3.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N; \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i; \quad k = 0, 1, 2; \quad \tau > 0;$$

$$t_i(r_i, 0) = f_i(r_i); \quad (3.2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} - \alpha_1 (t_1(R_0, \tau) - t_{c1}(\tau)) = 0; \quad (3.3)$$

$$\lambda_N \frac{\partial t_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + \alpha_N (t_N(R_N, \tau) - t_{cN}(\tau)) = 0; \quad (3.4)$$

$$t_j(R_j, \tau) = t_{j+1}(R_j, \tau); \quad \lambda_j \frac{\partial t_j(R_j, \tau)}{\partial r_j} = \lambda_{j+1} \frac{\partial t_{j+1}(R_j, \tau)}{\partial r_{j+1}}; \quad (3.5)$$

$j = 1, 2, \dots, N-1.$

Здесь r – пространственная координата; τ – время; N – число слоев многослойной области; $t_i(r_i, \tau)$ – температурное поле i -й области; $Q_i(r_i, \tau)$ – мощность внутреннего источника тепла i -й области; $\lambda_i, a_i^2, c_i, \rho_i$ – соответственно теплопроводность, температуропроводность, теплоемкость и плотность вещества i -й области; $A_{k,i}$ – коэффициенты уравнения, определяемые видом координат:

- для декартовой системы координат $k = 0, A_{0,i} = 0$;
- для цилиндрической системы координат $k = 1, A_{1,i} = 1/r_i$;
- для сферической системы координат $k = 2, A_{2,i} = 2/r_i$;

α_1, α_N – коэффициенты конвективной теплоотдачи от внешних поверхностей в окружающую среду; $t_{c1}(\tau), t_{cN}(\tau)$ – температуры окружающей среды как функции времени; R_{i-1}, R_i – координаты границ i -й области.

Для исключения координаты r , вдоль которой свойства тела изменяются ступенчато, используется формула перехода к изображениям:

$$U(\mu, \tau) = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_0^{R_m} \rho(r_m) t_m(r_m, \tau) W_m(r_m, \mu) dr_m, \quad (3.6)$$

где $\rho(r)$ – весовая функция, являющаяся, с точностью до постоянного множителя, решением уравнения

$$\frac{d\rho(r_m)}{dr} - A_{k,m} \rho(r_m) = 0. \quad (3.7)$$

Для декартовой системы координат:

$$\rho(r) = 1;$$

для цилиндрической системы координат:

$$\rho(r) = r;$$

для сферической системы координат:

$$\rho(r) = r^2.$$

Ядро интегрального преобразования $W_m(r_m, \mu)$ является решением задачи Штурма – Лиувилля с соответствующими однородными граничными условиями, определяемым с точностью до постоянного множителя (здесь μ – параметр):

$$\frac{d^2 W_m(r_m, \mu)}{d r_m^2} + A_{k,m} \frac{d W_m(r_m, \mu)}{d r_m} + \frac{\mu^2}{a_m^2} W_m(r_m, \mu) = 0; \quad (3.8)$$

$$m = 1, 2, \dots, N, \quad R_{m-1} \leq r_m \leq R_m;$$

$$\lambda_1 \frac{d W_1(R_0, \mu)}{d r_1} - \alpha_1 W_1(R_0, \mu) = 0; \quad (3.9)$$

$$\lambda_N \frac{d W_N(R_N, \mu)}{d r_N} + \alpha_N W_N(R_N, \mu) = 0; \quad (3.10)$$

$$W_j(R_j, \mu) = W_{j+1}(R_j, \mu);$$

$$\lambda_j \frac{d W_j(R_j, \mu)}{d r_j} = \lambda_{j+1} \frac{d W_{j+1}(R_j, \mu)}{d r_{j+1}}; \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.11)$$

Решение уравнения (3.8) имеет вид:

$$W_m(r_m, \mu) = C1_m \exp\left(-\frac{r_m}{2}\left(A_{k,m} + \sqrt{A_{k,m}^2 - 4\frac{\mu^2}{a_m^2}}\right)\right) + C2_m \exp\left(-\frac{r_m}{2}\left(A_{k,m} - \sqrt{A_{k,m}^2 - 4\frac{\mu^2}{a_m^2}}\right)\right). \quad (3.12)$$

В декартовой системе координат

$$W_m(r_m, \mu) = C1_m \sin\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right) + C2_m \cos\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right). \quad (3.13)$$

В цилиндрической системе координат

$$W_m(r_m, \mu) = C1_m J_0\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right) + C2_m Y_0\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right), \quad (3.14)$$

где $J_0(z)$, $Y_0(z)$ – функции Бесселя первого рода, нулевого и первого порядка соответственно.

В сферической системе координат

$$W_m(r_m, \mu) = \frac{1}{r_m} \left(C1_m \sin\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right) + C2_m \cos\left(\frac{\mu}{a_m} r_m\right) \right). \quad (3.15)$$

Коэффициенты $C1_m$ и $C2_m$, а также числа μ определяются из граничных условий (3.9) – (3.11), причем $C1_1 = 1$.

Для перехода к изображениям необходимо формулу (3.6) применить почленно к уравнению (3.1) и начальному условию (3.2).

В общем случае интегралы в правой части (3.6) берутся по частям с учетом граничных условий (3.3) – (3.5) и (3.9) – (3.11).

Изображение частной производной по времени:

$$\sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) \frac{\partial t_m(r_m, \tau)}{\partial \tau} W_m(r_m, \mu) dr_m = \frac{dU(\mu, \tau)}{d\tau}. \quad (3.16)$$

Изображение частных производных по координате. Следующий интеграл берется по частям дважды:

$$\int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) \left(\frac{\partial^2 t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m^2} + A_{k,m} \frac{\partial t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} \right) W_m(r_m, \mu) dr_m =$$

$$\begin{aligned}
& \rho(r_m) \left(\frac{\partial^2 t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m^2} + A_{k,m} \frac{\partial t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} \right) dr_m = dv, \quad v = \rho(r_m) \frac{\partial t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m}, \\
& W_m(r_m, \mu) = u, \quad \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} dr_m = du. \\
& = \rho(r_m) \frac{\partial t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} W_m(r_m, \mu) \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} - \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) \frac{\partial t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} dr_m = \\
& \quad \frac{\partial t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} dr_m = dv, \quad v = t_m(r_m, \tau); \\
& \quad \rho(r_m) \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} = u, \quad \left(\frac{d\rho(r_m)}{dr_m} \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} + \rho(r_m) \frac{dW_m^2(r_m, \mu)}{dr_m^2} \right) dr_m = du. \\
& = \rho(r_m) \frac{\partial t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} W_m(r_m, \mu) \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} - \rho(r_m) t_m(r_m, \tau) \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} + \\
& + \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) t_m(r_m, \tau) \left(\frac{dW_m^2(r_m, \mu)}{dr_m^2} + A_{k,m} \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} \right) dr_m = \\
& = \rho(r_m) \frac{\partial t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} W_m(r_m, \mu) \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} - \rho(r_m) t_m(r_m, \tau) \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} - \\
& - \frac{\mu^2}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) t_m(r_m, \tau) W_m(r_m, \mu) dr_m. \tag{3.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) a_m^2 \left(\frac{\partial^2 t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m^2} + A_{k,m} \frac{\partial t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} \right) W_m(r_m, \mu) dr_m = \\
& = \sum_{m=1}^N \lambda_m \left(\rho(r_m) \frac{\partial t_m(r_m, \tau)}{\partial r_m} W_m(r_m, \mu) \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} - \right. \\
& \left. - \rho(r_m) t_m(r_m, \tau) \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} \Big|_{R_{m-1}}^{R_m} - \right. \\
& \left. - \frac{\mu^2}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) t_m(r_m, \tau) W_m(r_m, \mu) dr_m \right) = \\
& = \lambda_N \rho(R_N) \left(\frac{\partial t_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} W_N(R_N, \mu) - t_N(R_N, \tau) \frac{dW_N(R_N, \mu)}{dr_N} \right) - \\
& - \lambda_1 \rho(R_0) \left(\frac{\partial t_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} W_1(R_0, \mu) - t_1(R_0, \tau) \frac{dW_1(R_0, \mu)}{dr_1} \right) - \mu^2 U(\mu, \tau) = \\
& = \alpha_N \rho(R_N) W(R_N, \mu) t_{cN}(\tau) + \alpha_1 \rho(R_0) W(R_0, \mu) t_{c1}(\tau) - \mu^2 U(\mu, \tau).
\end{aligned}$$

(3.18)

Изображение начального условия:

$$\sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) f_m(r_m) W_m(r_m, \mu) dr_m = U_0. \quad (3.19)$$

Изображение функции источника:

$$\sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) \frac{Q_m(r_m, \tau)}{c_m \rho_m} W_m(r_m, \mu) dr_m = G(\mu, \tau). \quad (3.20)$$

Таким образом, в изображениях имеем задачу:

$$\begin{aligned} \frac{dU(\mu_n, \tau)}{d\tau} + \mu_n^2 U(\mu_n, \tau) = G(\mu_n, \tau) + \alpha_N \rho(R_N) W(R_N, \mu_n) t_{cN}(\tau) + \\ + \alpha_1 \rho(R_0) W(R_0, \mu_n) t_{c1}(\tau); \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$U(\mu_n, 0) = U_0. \quad (3.22)$$

Решение задачи (3.21) – (3.22) в изображениях имеет вид:

$$\begin{aligned} U(\mu_n, \tau) = \exp(-\mu_n^2 \tau) \times \\ \times \left(U(\mu_n, 0) + \int_0^\tau (G(\mu_n, \tau) + FW(\mu_n, \tau)) \exp(\mu_n^2 \tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} FW(\mu_n, \tau) = \alpha_N \rho(R_N) W(R_N, \mu_n) t_{cN}(\tau) + \\ + \alpha_1 \rho(R_0) W(R_0, \mu_n) t_{c1}(\tau). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Обратный переход осуществляется по формуле:

$$t_m(r_m, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\mu_n, \tau) W_m(r_m, \mu_n)}{S_n}, \quad (3.25)$$

где

$$S_n = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) W_m^2(r_m, \mu_n) dr_m. \quad (3.26)$$

4 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ N -СЛОЙНОЙ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЫ

Решение нестационарной задачи теплопроводности для N -слойной неограниченной пластины (рис. 4.1) с произвольным начальным распределением, граничными условиями 4-го рода на поверхностях контакта слоев и неоднородными несимметричными граничными условиями 3-го рода на внешних границах приведено ниже.

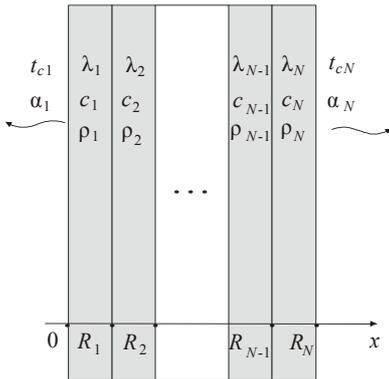


Рис. 4.1 N -слойная неограниченная пластина

Решение задачи может быть использовано для расчета нестационарных температурных полей и тепловых потоков в многослойных листовых изделиях, плоских элементах аппаратов, конструкций и сооружений, в плоских образцах, у которых теплофизические параметры функционально зависят от температуры, а также для определения условий протекания теплообменных процессов в перечисленных выше случаях по измеренным температурным полям.

$$\frac{\partial t_i(x_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \frac{\partial^2 t_i(x_i, \tau)}{\partial x_i^2}, \quad (4.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad 0 \leq x_i \leq R_i, \quad \tau > 0;$$

$$t_i(x_i, 0) = f_i(x_i); \quad (4.2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(0, \tau)}{\partial x_1} - \alpha_1 (t_1(0, \tau) - t_{c1}) = 0; \quad (4.3)$$

$$\lambda_N \frac{\partial t_N(R_N, \tau)}{\partial x_N} + \alpha_N (t_N(R_N, \tau) - t_{cN}) = 0; \quad (4.4)$$

$$t_j(R_j, \tau) = t_{j+1}(0, \tau);$$

$$\lambda_j \frac{\partial t_j(R_j, \tau)}{\partial x_j} = \lambda_{j+1} \frac{\partial t_{j+1}(0, \tau)}{\partial x_{j+1}}, \quad (4.5)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1.$$

Здесь $a_i^2 = \frac{\lambda_i}{c_i \rho_i}$ – коэффициенты температуропроводности слоев.

Решение задачи (4.1) – (4.5) с неоднородными граничными условиями может быть получено непосредственным применением метода конечных интегральных преобразований, но, поскольку решение предполагается для использования в компьютерных расчетах, для улучшения сходимости рядов, образующих решение, целесообразно выделить стационарную составляющую. Тогда решение представляет

ся в виде:

$$t_i(x_i, \tau) = S_i(x_i) + P_i(x_i, \tau), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.6)$$

где $S_i(x_i)$ – решение стационарной задачи с неоднородными граничными условиями

$$\frac{d^2 S_i(x_i)}{d x_i^2} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad 0 \leq x_i \leq R_i; \quad (4.7)$$

$$\lambda_1 \frac{d S_1(0)}{d x_1} - \alpha_1 (S_1(0) - t_{c1}) = 0; \quad (4.8)$$

$$\lambda_N \frac{d S_N(R_N)}{d x_N} + \alpha_N (S_N(R_N) - t_{cN}) = 0; \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} S_j(R_j) &= S_{j+1}(0); \\ \lambda_j \frac{d S_j(R_j)}{d x_j} &= \lambda_{j+1} \frac{d S_{j+1}(0)}{d x_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Решение стационарной задачи (4.7) – (4.10) имеет вид:

$$S_i(x_i) = A_i x_i + B_i, \quad (4.11)$$

где

$$A_i = \frac{t_{cN} - t_{c1}}{\lambda_i \left(\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{\lambda_k} + \frac{1}{\alpha_N} \right)}; \quad (4.12)$$

$$B_i = t_{cN} - \frac{(t_{cN} - t_{c1}) \left(\frac{R_i}{\lambda_i} + \sum_{k=i+1}^N \frac{R_k}{\lambda_k} + \frac{1}{\alpha_N} \right)}{\frac{1}{\alpha_1} + \sum_{k=1}^N \frac{R_k}{\lambda_k} + \frac{1}{\alpha_N}}. \quad (4.13)$$

$P_i(x_i, \tau)$ – решение нестационарной задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial P_i(x_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \frac{\partial^2 P_i(x_i, \tau)}{\partial x_i^2}, \quad (4.14)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad 0 \leq x_i \leq R_i, \quad \tau > 0;$$

$$P_i(x_i, 0) = f_i(x_i) - S_i(x_i); \quad (4.15)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial P_1(0, \tau)}{\partial x_1} - \alpha_1 P_1(0, \tau) = 0; \quad (4.16)$$

$$\lambda_N \frac{\partial P_N(R_N, \tau)}{\partial x_N} + \alpha_N P_N(R_N, \tau) = 0; \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} P_j(R_j, \tau) &= P_{j+1}(0, \tau); \\ \lambda_j \frac{\partial P_j(R_j, \tau)}{\partial x_j} &= \lambda_{j+1} \frac{\partial P_{j+1}(0, \tau)}{\partial x_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Решение задачи (4.14) – (4.18) получено методом конечных интегральных преобразований. Для исключения координаты x , вдоль которой свойства тела изменяются ступенчато, используется формула перехода к изображениям:

$$U(\mu, \tau) = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_0^{R_m} P_m(x_m, \tau) W_m(x_m, \mu) dx_m. \quad (4.19)$$

Весовая функция, равная 1, опущена.

Обратный переход осуществляется по формуле:

$$P_i(x_i, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\mu_n, \tau) W_i(x_i, \mu_n)}{Z_n}, \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned} Z_n &= \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_0^{R_m} W_m^2(x_m, \mu_n) dx_m = 0,5 \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n}^2 \times \\ &\times \left(R_m - \frac{a_m}{\mu_n} \left(\sin \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n} \right) \cos \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin(\varphi_{m,n}) \cos(\varphi_{m,n}) \right) \right), \end{aligned} \quad (4.21)$$

а ядро интегрального преобразования $W_m(x_m, \mu)$ является решением вспомогательной задачи (здесь μ – параметр):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 W_m(x_m, \mu)}{d x_m^2} + \frac{\mu^2}{a_m^2} W_m(x_m, \mu) &= 0, \\ m = 1, 2, \dots, N, \quad 0 \leq x_m \leq R_m; \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\lambda_1 \frac{dW_1(0, \mu)}{dx_1} - \alpha_1 W_1(0, \mu) = 0; \quad (4.23)$$

$$\lambda_N \frac{dW_N(R_N, \mu)}{dx_N} + \alpha_N W_N(R_N, \mu) = 0; \quad (4.24)$$

$$W_j(R_j, \mu) = W_{j+1}(0, \mu);$$

$$\lambda_j \frac{dW_j(R_j, \mu)}{dx_j} = \lambda_{j+1} \frac{dW_{j+1}(0, \mu)}{dx_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.25)$$

Подставляя решение задачи (4.22)

$$W_m(x_m, \mu_n) = C_{m,n} \sin\left(\frac{\mu_n x_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) \quad (4.26)$$

в граничные условия (4.23) – (4.25), находим числа $C_{m,n}$, $\varphi_{m,n}$, μ_n , причем $C_{1,n}$ принимаются равными 1:

$$\varphi_{1,n} = \arctg\left(\frac{\lambda_1 \mu_n}{\alpha_1 a_1}\right); \quad (4.27)$$

$$\varphi_{j+1,n} = \arctg\left(\frac{\lambda_{j+1} a_j}{\lambda_j a_{j+1}} \operatorname{tg}\left(\frac{\mu_n R_j}{a_j} + \varphi_{j,n}\right)\right), \quad (4.28)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$C_{j+1,n} = C_{j,n} \frac{\sin\left(\frac{\mu_n R_j}{a_j} + \varphi_{j,n}\right)}{\sin(\varphi_{j+1,n})}; \quad (4.29)$$

μ_n – n -й положительный корень уравнения

$$\frac{\lambda_N \mu}{a_N} \cos\left(\frac{\mu R_N}{a_N} + \varphi_N\right) + \alpha_N \sin\left(\frac{\mu R_N}{a_N} + \varphi_N\right) = 0. \quad (4.30)$$

Применяя преобразование (4.19) к задаче (4.14) – (4.18), переходим к изображениям:

$$\frac{dU(\mu_n, \tau)}{d\tau} + \mu_n^2 U(\mu_n, \tau) = 0; \quad (4.31)$$

$$U(\mu_n, 0) = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_0^{R_m} (f_m(x_m) - S_m(x_m)) W_m(x_m, \mu_n) dx_m. \quad (4.32)$$

Решением задачи (4.31) – (4.32) является функция

$$U(\mu_n, \tau) = U(\mu_n, 0) \exp(-\mu_n^2 \tau). \quad (4.33)$$

Таким образом, решение исходной задачи (4.1) – (4.5) имеет вид:

$$t_i(x_i, \tau) = A_i x_i + B_i + \frac{\sum_{n=1}^{\infty} C_{i,n} \sin\left(\frac{\mu_n x_i}{a_i} + \varphi_{i,n}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau) \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n} \times}{0,5 \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n}^2} \times \frac{\int_0^{R_m} (f_m(x_m) - A_m x_m - B_m) \sin\left(\frac{\mu_n x_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) dx_m}{\left(R_m - \frac{a_m}{\mu_n} \left(\sin\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) \cos\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) - (\sin(\varphi_{m,n}) \cos(\varphi_{m,n}))\right)\right)}. \quad (4.34)$$

Средняя температура по слоям равна

$$\begin{aligned}
\bar{t}_i(\tau) &= \frac{1}{R_i} \int_0^{R_i} t_i(x_i, \tau) dx_i = 0,5 A_i R_i + B_i + \\
&+ \frac{\sum_{n=1}^{\infty} C_{i,n} \frac{a_i}{\mu_n} \left(\cos(\varphi_{i,n}) - \cos\left(\frac{\mu_n R_i}{a_i} + \varphi_{i,n}\right) \right) \exp(-\mu_n^2 \tau) \times}{0,5 \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n}^2 \times} \rightarrow \\
&\times \frac{\sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n} \int_0^{R_m} (f_m(x_m) - A_m x_m - B_m) \sin\left(\frac{\mu_n x_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) dx_m}{\left(R_m - \frac{a_m}{\mu_n} \left(\sin\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) \cos\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) - (\sin(\varphi_{m,n}) \cos(\varphi_{m,n})) \right) \right)} \rightarrow
\end{aligned} \tag{4.35}$$

В случае применения данного решения для локальной временной области интегралы в числителях правых частей формул (4.34) и (4.35) могут быть вычислены аналитически, так как начальным распределением $f_m(x_m)$ является температурный профиль, определяемый формулой (4.34) для момента времени, соответствующего концу предыдущей области.

Индекс "b" далее указывает, что параметр относится к предыдущей области.

Для этого решение (4.34) можно записать в виде:

$$t_i(x_i, \tau) = A_i x_i + B_i + \sum_{n=1}^{\infty} H_{i,n} \sin\left(\frac{\mu_n x_i}{a_i} + \varphi_{i,n}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau), \tag{4.36}$$

где

$$\begin{aligned}
H_{i,n} &= \frac{C_{i,n} \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n} \times}{0,5 \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n}^2 \times} \rightarrow \\
&\times \frac{\int_0^{R_m} (f_m(x_m) - A_m x_m - B_m) \sin\left(\frac{\mu_n x_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) dx_m}{\left(R_m - \frac{a_m}{\mu_n} \left(\sin\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) \cos\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) - (\sin(\varphi_{m,n}) \cos(\varphi_{m,n})) \right) \right)} \rightarrow
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Тогда

$$I_{m,n} = \int_0^{R_m} (f_m(x_m) - A_m x_m - B_m) \sin\left(\frac{\mu_n x_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) dx_m =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{R_m} (t_{mb}(x_m, \tau_k) - A_m x_m - B_m) \sin\left(\frac{\mu_n x_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) dx_m = \\
&= (B_{mb} - B_m) \int_0^{R_m} \sin\left(\frac{\mu_n x_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) dx_m + (A_{mb} - A_m) \int_0^{R_m} x_m \sin\left(\frac{\mu_n x_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) dx_m + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} H_{m,kb} \exp(-\mu_{nb}^2 \tau_b) \int_0^{R_m} \sin\left(\frac{\mu_{nb} x_m}{a_{mb}} + \varphi_{m,nb}\right) \sin\left(\frac{\mu_k x_m}{a_m} + \varphi_{m,k}\right) dx_m = \\
&= (B_{mb} - B_m) \frac{a_m}{\mu_n} \left(\cos(\varphi_{m,n}) - \cos\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) \right) + \\
&+ (A_{mb} - A_m) \left(\frac{R_m}{\mu_n} \cos\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) - \frac{a_m^2}{\mu_n^2} \left(\sin\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) + \sin(\varphi_{m,n}) \right) \right) + \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} H_{m,kb} \exp(-\mu_{nb}^2 \tau_b) \int_0^{R_m} \sin\left(\frac{\mu_{nb} x_m}{a_{mb}} + \varphi_{m,nb}\right) \sin\left(\frac{\mu_k x_m}{a_m} + \varphi_{m,k}\right) dx_m.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

В свою очередь

$$\begin{aligned}
&\int_0^{R_k} \sin\left(\frac{\mu_{nb} x_m}{a_{mb}} + \varphi_{m,nb}\right) \sin\left(\frac{\mu_k x_m}{a_m} + \varphi_{k,n}\right) dx_m = \frac{a_{mb} a_m}{\mu_{nb}^2 a_m^2 - \mu_k^2 a_{mb}^2} \times \\
&\times \left(\mu_k a_{mb} \cos\left(\frac{\mu_k R_m}{a_m}\right) \cos(\varphi_{m,k}) \sin\left(\frac{\mu_{nb} R_m}{a_{mb}} + \varphi_{m,nb}\right) - \right. \\
&- \mu_k a_{mb} \sin\left(\frac{\mu_k R_m}{a_m}\right) \sin(\varphi_{m,k}) \sin\left(\frac{\mu_{nb} R_m}{a_{mb}} + \varphi_{m,nb}\right) - \\
&- \mu_{nb} a_m \cos\left(\frac{\mu_{nb} R_m}{a_{mb}}\right) \cos(\varphi_{m,nb}) \sin\left(\frac{\mu_k R_m}{a_m} + \varphi_{m,k}\right) + \\
&+ \mu_{nb} a_m \sin\left(\frac{\mu_{nb} R_m}{a_{mb}}\right) \sin(\varphi_{m,nb}) \sin\left(\frac{\mu_k R_m}{a_m} + \varphi_{m,k}\right) - \\
&\left. - \mu_{nb} a_m \sin(\varphi_{m,k}) \cos(\varphi_{m,nb}) + \mu_k a_{mb} \sin(\varphi_{m,nb}) \cos(\varphi_{m,k}) \right),
\end{aligned} \tag{4.39}$$

если

$$\mu_{nb}^2 a_m^2 - \mu_k^2 a_{mb}^2 \neq 0,$$

иначе

$$\frac{\mu_{nb}}{a_{mb}} = \frac{\mu_k}{a_m},$$

В ЭТОМ СЛУЧАЕ

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{R_m} \sin\left(\frac{\mu_{nb} x_m}{a_{mb}} + \varphi_{m,nb}\right) \sin\left(\frac{\mu_k x_m}{a_m} + \varphi_{m,k}\right) dx_m = \\
 & = \frac{1}{2\mu_k} (R_m \mu_k \cos(\varphi_{m,k} - \varphi_{m,nb}) - \\
 & - a_m \sin\left(\frac{\mu_k R_m}{a_m}\right) \cos\left(\frac{\mu_k R_m}{a_m}\right) \cos(\varphi_{m,k} - \varphi_{m,nb}) - \\
 & - a_m \cos\left(\frac{\mu_k R_m}{a_m}\right) \cos\left(\frac{\mu_k R_m}{a_m}\right) \sin(\varphi_{m,k} + \varphi_{m,nb}) + \\
 & + a_m \sin(\varphi_{m,k} + \varphi_{m,nb})).
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

4.1 Решение задачи теплопроводности для двухслойной неограниченной пластины

$$\frac{\partial t_i(x_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i \frac{\partial^2 t_i(x_i, \tau)}{\partial x_i^2}; \quad i=1, 2; \quad 0 \leq x_i \leq R_i; \tag{4.41}$$

$$t_i(x_i, 0) = f_i(x_i); \tag{4.42}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(0, \tau)}{\partial x_1} - \alpha_1 (t_1(0, \tau) - t_{c1}) = 0; \tag{4.43}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(R_2, \tau)}{\partial x_2} + \alpha_2 (t_2(R_2, \tau) - t_{c2}) = 0; \tag{4.44}$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(R_1, \tau)}{\partial x_1} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(0, \tau)}{\partial x_2}; \tag{4.45}$$

$$t_1(R_1, \tau) = t_2(0, \tau). \tag{4.46}$$

Решение получено методом конечных интегральных преобразований, примененных по линейной координате x_i , вдоль которой теплофизические свойства тела меняются ступенчато.

В окончательном виде решение задачи (4.41) – (4.46) имеет вид:

$$t_i(x_i, \tau) = P_i(x_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(\tau)}{N_n} S_n(x_i); \quad (4.47)$$

$$\bar{t}_i(\tau) = Q_i(x_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(\tau)}{N_n} Z_{i,n}. \quad (4.48)$$

Здесь

$$P_1(x_1) = \left(\frac{x_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_1} \right) W + t_{c1}; \quad (4.49)$$

$$P_2(x_2) = \left(\frac{x_2}{\lambda_2} + \frac{R_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_1} \right) W + t_{c2}; \quad (4.50)$$

$$Q_1(x_1) = \left(\frac{R_1}{2\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_1} \right) W + t_{c1}; \quad (4.51)$$

$$Q_2(x_2) = \left(\frac{R_2}{2\lambda_2} + \frac{R_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_1} \right) W + t_{c2}; \quad (4.52)$$

$$W = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\frac{1}{\alpha_2} + \frac{R_2}{\lambda_2} + \frac{R_1}{\lambda_1} + \frac{1}{\alpha_1}}; \quad (4.53)$$

$$Z_{i,n} = \frac{\sqrt{a_i}}{\mu_n R_i} \left(\cos(\varphi_{i,n}) - \cos \left(\frac{\mu_n R}{\sqrt{a_i}} + \varphi_{i,n} \right) \right); \quad (4.54)$$

$$T_n(\tau) = D_n \exp(-\mu_n^2 \tau); \quad (4.55)$$

$$D_n = \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i}{a_i} C_i \int_0^{R_i} (f_i(x_i) - P_i(x_i)) \sin \left(\frac{\mu_n}{\sqrt{a_i}} x_i + \varphi_{i,n} \right) dx_i; \quad (4.56)$$

μ_n – положительные корни уравнения

$$\frac{\lambda_1 \sqrt{a_2}}{\lambda_2 \sqrt{a_1}} \cos\left(\frac{\mu}{\sqrt{a_1}} R_1 + \varphi_1\right) \sin(\varphi_2) + \sin\left(\frac{\mu}{\sqrt{a_1}} R_1 + \varphi_1\right) \cos(\varphi_2) = 0; \quad (4.57)$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_1 \mu}{\alpha_1 \sqrt{a_1}}\right); \quad (4.58)$$

$$\varphi_2 = -R_2 \frac{\mu}{\sqrt{a_2}} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda_2 \mu}{\alpha_2 \sqrt{a_2}}\right); \quad (4.59)$$

$$S_n(x_i) = C_{i,n} \sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{a_i}} x_i + \varphi_{i,n}\right); \quad (4.60)$$

$$C_{1,n} = 1; C_{2,n} = \frac{\sin\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{a_{12}}} R_1 + \varphi_{1,n}\right)}{\sin(\varphi_{2,n})}; \quad (4.61)$$

$$N_n = \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i}{a_i} C_i^2 \left(\frac{\mu_n}{\sqrt{a_i}} R_i - \frac{1}{2} \left(\sin\left(2\left(\frac{\mu_n}{\sqrt{a_i}} R_i + \varphi_{i,n}\right)\right) - \sin(2\varphi_{i,n}) \right) \right). \quad (4.62)$$

4.2 Решение задачи нестационарной теплопроводности для однослойной неограниченной пластины с функциональным источником

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{q(x)}{c\rho}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad \tau > 0; \quad (4.63)$$

$$t(x, 0) = f(x); \quad (4.64)$$

$$\lambda \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} - \alpha_1 (t(0, \tau) - t_{c1}) = 0; \quad (4.65)$$

$$\lambda \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 (t(R, \tau) - t_{c2}) = 0. \quad (4.66)$$

Решение целесообразно искать в виде

$$t(x, \tau) = S(x) + P(x, \tau), \quad (4.67)$$

где $S(x)$ – решение стационарной задачи с неоднородными граничными условиями; $P(x, \tau)$ – решение нестационарной задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{d^2 S(x)}{dx^2} = 0; \quad (4.68)$$

$$\lambda \frac{dS(0)}{dx} - \alpha_1 (S(0) - t_{c1}) = 0; \quad (4.69)$$

$$\lambda \frac{dS(R)}{dx} + \alpha_2 (S(R) - t_{c2}) = 0. \quad (4.70)$$

Решение стационарной задачи (4.68) – (4.70) имеет вид:

$$S(x) = Ax + B, \quad (4.71)$$

где

$$A = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\lambda \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{R}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right)}; \quad (4.72)$$

$$B = t_{c1} - \frac{\lambda}{\alpha_1} A. \quad (4.73)$$

$$\frac{\partial P(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 P(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{q(x)}{c\rho}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad \tau > 0; \quad (4.74)$$

$$P(x, 0) = f(x) - S(x); \quad (4.75)$$

$$\lambda \frac{\partial P(0, \tau)}{\partial x} - \alpha_1 P(0, \tau) = 0; \quad (4.76)$$

$$\lambda \frac{\partial P(R, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 P(R, \tau) = 0. \quad (4.77)$$

Решение задачи (4.74) – (4.77) получено методом конечных интегральных преобразований. Для исключения координаты x , вдоль которой свойства тела изменяются ступенчато, используется формула перехода к изображениям:

$$U(\mu, \tau) = \int_0^{R_n} P(x, \tau) W(x, \mu) dx. \quad (4.78)$$

Весовая функция, равная 1, опущена.

Обратный переход осуществляется по формуле

$$P(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\mu_n, \tau) W(x, \mu_n)}{Z_n}, \quad (4.79)$$

где

$$Z_n = \int_0^R W^2(x, \mu_n) dx = \frac{1}{2\mu_n} \times \\ \times (R\mu_n - \sin(\mu_n R + \varphi_n) \cos(\mu_n R + \varphi_n) + \sin(\varphi_n) \cos(\varphi_n)), \quad (4.80)$$

а ядро интегрального преобразования $W(x, \mu)$ является решением вспомогательной задачи (здесь μ – параметр):

$$\frac{d^2 W(x, \mu)}{dx^2} + \mu^2 W(x, \mu) = 0, \quad 0 \leq x \leq R; \quad (4.81)$$

$$\lambda \frac{dW(0, \mu)}{dx} - \alpha_1 W(0, \mu) = 0; \quad (4.82)$$

$$\lambda \frac{dW(R, \mu)}{dx} + \alpha_2 W(R, \mu) = 0. \quad (4.83)$$

Подставляя решение задачи (4.81) (с точностью до постоянного множителя)

$$W(x, \mu_n) = \sin(\mu_n x + \varphi_n) \quad (4.84)$$

в граничные условия (4.82) – (4.83), находим числа φ_n, μ_n :

$$\varphi_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda \mu_n}{\alpha_1}\right); \quad (4.85)$$

μ_n – n -й положительный корень уравнения

$$\frac{\lambda \mu}{a_2} \cos(\mu R_N + \varphi_N) + \sin(\mu R_N + \varphi_N) = 0. \quad (4.86)$$

Применяя преобразование (4.78) к задаче (4.74) – (4.77), переходим к изображениям:

$$\frac{dU(\mu_n, \tau)}{d\tau} + a\mu_n^2 U(\mu_n, \tau) - Q = 0; \quad (4.87)$$

$$U(\mu_n, 0) = \int_0^R (f(x) - S(x)) W(x, \mu_n) dx; \quad (4.88)$$

$$Q = \int_0^R \frac{q(x)}{c\rho} W(x, \mu_n) dx. \quad (4.89)$$

Решением задачи (4.87) – (4.88) является функция

$$U(\mu_n, \tau) = \left(U(\mu_n, 0) - \frac{Q}{a\mu_n^2} \right) \exp(-a\mu_n^2 \tau) + \frac{Q}{a\mu_n^2}. \quad (4.90)$$

5 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ N -СЛОЙНОГО ПОЛОГО И СПЛОШНОГО ЦИЛИНДРОВ

Решение нестационарной задачи теплопроводности для N -слойных полого и сплошного неограниченных цилиндров (рис. 5.1, 5.2.) с произвольным начальным распределением, граничными условиями 4-го рода на поверхностях контакта слоев и неоднородными несимметричными граничными условиями 3-го рода на внешних границах представлено ниже.

Решение задачи может быть использовано для расчета нестационарных температурных полей и тепловых потоков в многослойных цилиндрических изделиях, цилиндрических элементах аппаратов, конструкций и сооружений, в цилиндрических образцах, у которых теплофизические параметры функционально зависят от температуры, а также для определения условий протекания теплообменных процессов в перечисленных выше случаях по измеренным температурным полям.

5.1 Решение задачи нестационарной теплопроводности для N -слойного полого цилиндра

$$\frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i, \quad \tau > 0; \quad (5.1)$$

$$t_i(r_i, 0) = f_i(r_i); \quad (5.2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} - \alpha_1 (t_1(R_0, \tau) - t_{c1}) = 0; \quad (5.3)$$

$$\lambda_N \frac{\partial t_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + \alpha_N (t_N(R_N, \tau) - t_{cN}) = 0; \quad (5.4)$$

$$t_j(R_j, \tau) = t_{j+1}(R_j, \tau); \quad \lambda_j \frac{\partial t_j(R_j, \tau)}{\partial r_j} = \lambda_{j+1} \frac{\partial t_{j+1}(R_j, \tau)}{\partial r_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.5)$$

I.

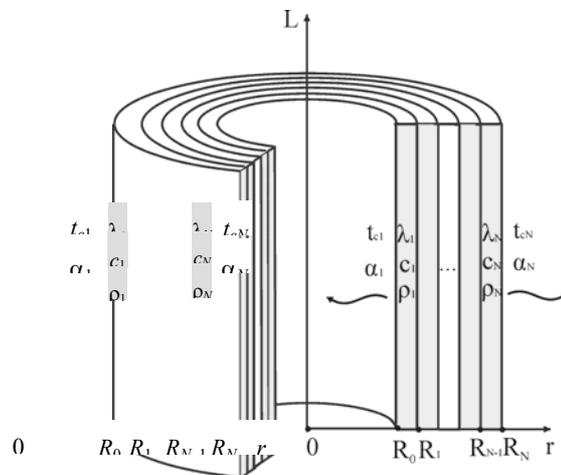


Рис. 5.1 Неограниченный N -слойный полый цилиндр

Решение задачи (5.1) – (5.5) с неоднородными граничными условиями также целесообразно представить, как сумму стационарной и нестационарной составляющих:

$$t_i(r_i, \tau) = S_i(r_i) + P_i(r_i, \tau), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.6)$$

где $S_i(r_i)$ – решение стационарной задачи с неоднородными граничными условиями

$$\frac{d^2 S_i(r_i)}{d r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{d S_i(r_i)}{d r_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i; \quad (5.7)$$

$$\lambda_1 \frac{d S_1(R_0)}{d r_1} - \alpha_1 (S_1(R_0) - t_{c1}) = 0; \quad (5.8)$$

$$\lambda_N \frac{d S_N(R_N)}{d r_N} + \alpha_N (S_N(R_N) - t_{cN}) = 0; \quad (5.9)$$

$$S_j(R_j) = S_{j+1}(R_j); \quad \lambda_j \frac{d S_j(R_j)}{d r_j} = \lambda_{j+1} \frac{d S_{j+1}(R_j)}{d r_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.10)$$

Решение стационарной задачи (5.7) – (5.10) имеет вид:

$$S_i(r_i) = A_i + B_i \ln(r_i), \quad (5.11)$$

где

$$B_1 = \frac{t_{c1} - t_{cN}}{\ln(R_0) - \frac{\lambda_1}{R_0 \alpha_1} - \frac{\lambda_1}{\lambda_N} \left(\ln(R_N) + \frac{\lambda_N}{R_N \alpha_N} \right) + \lambda_1 \sum_{k=1}^{N-1} \ln(R_k) \left(\frac{1}{\lambda_{k+1}} - \frac{1}{\lambda_k} \right)}; \quad (5.12)$$

$$A_1 = t_{c1} - B_1 \left(\ln(R_0) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1 R_0} \right); \quad (5.13)$$

$$B_{j+1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{j+1}} B_1, \quad j = 1, 2, \dots, N-1; \quad (5.14)$$

$$A_{j+1} = A_j + B_1 \ln(R_j) \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}} \right). \quad (5.15)$$

$P_i(r_i, \tau)$ – решение нестационарной задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial P_i(r_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 P_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial P_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i, \quad \tau > 0; \quad (5.16)$$

$$P_i(r_i, 0) = f_i(r_i) - S_i(r_i); \quad (5.17)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial P_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} - \alpha_1 P_1(R_0, \tau) = 0; \quad (5.18)$$

$$\lambda_N \frac{\partial P_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + \alpha_N P_N(R_N, \tau) = 0; \quad (5.19)$$

$$P_j(R_j, \tau) = P_{j+1}(R_j, \tau); \quad \lambda_j \frac{\partial P_j(R_j, \tau)}{\partial r_j} = \lambda_{j+1} \frac{\partial P_{j+1}(R_j, \tau)}{\partial r_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.20)$$

Решение задачи (5.16) – (5.20) может быть получено методом конечных интегральных преобразований. Для исключения координаты r , вдоль которой свойства тела изменяются ступенчато, используется формула перехода к изображениям:

$$U(\mu, \tau) = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) P_m(r_m, \tau) W_m(r_m, \mu) dr_m, \quad (5.21)$$

где $\rho(r_m) = r_m$ – весовая функция, являющаяся решением уравнения

$$\frac{d\rho(r)}{dr} - \frac{\rho(r)}{r} = 0. \quad (5.22)$$

Обратный переход осуществляется по формуле:

$$P_i(r_i, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\mu_n, \tau) W_i(r_i, \mu_n)}{Z_n}, \quad (5.23)$$

ГДЕ

$$\begin{aligned}
Z_n &= \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m W_m^2(r_m, \mu_n) dr_m = \\
&= \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \left(0,5 R_m^2 C_{m,n}^2 \left(J_0^2 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) + J_1^2 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) \right) + \right. \\
&+ R_m^2 C_{m,n} D_{m,n} \left(J_0 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) Y_0 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) + J_1 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) Y_1 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) \right) + \\
&+ 0,5 R_m^2 D_{m,n}^2 \left(Y_0^2 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) + Y_1^2 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) \right) - \\
&- 0,5 R_{m-1}^2 C_{m,n}^2 \left(J_0^2 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) + J_1^2 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) \right) - \\
&- R_{m-1}^2 C_{m,n} D_{m,n} \left(J_1 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) Y_1 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) + J_1 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) Y_1 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) \right) - \\
&- 0,5 R_{m-1}^2 D_{m,n}^2 \left(Y_0^2 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) + Y_1^2 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) \right) \Bigg). \tag{5.24}
\end{aligned}$$

Здесь $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ – Бесселевы функции первого и второго рода, нулевого и первого порядка соответственно.

Ядро интегрального преобразования $W_m(r_m, \mu)$ является решением вспомогательной задачи (здесь μ – параметр):

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 W_m(r_m, \mu)}{dr_m^2} + \frac{1}{r_m} \frac{d W_m(r_m, \mu)}{dr_m} + \frac{\mu^2}{a_m^2} W_m(r_m, \mu) = 0, \tag{5.25} \\
m = 1, 2, \dots, N, R_{m-1} \leq r_m \leq R_m;
\end{aligned}$$

$$\lambda_1 \frac{d W_1(R_0, \mu)}{dr_1} - \alpha_1 W_1(R_0, \mu) = 0; \tag{5.26}$$

$$\lambda_N \frac{d W_N(R_N, \mu)}{dr_N} + \alpha_N W_N(R_N, \mu) = 0; \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
W_j(R_j, \mu) = W_{j+1}(R_j, \mu); \lambda_j \frac{d W_j(R_j, \mu)}{dr_j} = \lambda_{j+1} \frac{d W_{j+1}(R_j, \mu)}{dr_{j+1}}, \tag{5.28} \\
j = 1, 2, \dots, N-1.
\end{aligned}$$

Подставляя решение задачи (5.25)

$$W_m(r_m, \mu_n) = C_{m,n} J_0\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m}\right) + D_{m,n} Y_0\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m}\right) \quad (5.29)$$

в граничные условия (5.26) – (5.28), находим числа $C_{m,n}$, $D_{m,n}$, μ_n , причем $C_{1,n}$ принимаются равными 1:

$$D_{1,n} = \frac{\frac{\lambda_1 \mu_n}{a_1} J_1\left(\frac{\mu_n R_0}{a_1}\right) - \alpha_1 J_0\left(\frac{\mu_n R_0}{a_1}\right)}{\alpha_1 Y_0\left(\frac{\mu_n R_0}{a_1}\right) - \frac{\lambda_1 \mu_n}{a_1} Y_1\left(\frac{\mu_n R_0}{a_1}\right)}, \quad (5.30)$$

$$C_{j+1,n} = \frac{C_{j,n} J_0\left(\frac{\mu_n R_j}{a_j}\right) + D_{j,n} Y_0\left(\frac{\mu_n R_j}{a_j}\right) - D_{j+1,n} Y_0\left(\frac{\mu_n R_j}{a_{j+1}}\right)}{Y_0\left(\frac{\mu_n R_j}{a_{j+1}}\right)},$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1; \quad (5.31)$$

$$D_{j+1,n} = \frac{\frac{\lambda_j a_{j+1}}{\lambda_{j+1} a_j} J_0\left(\frac{\mu_n R_j}{a_{j+1}}\right) \left(C_{j,n} J_1\left(\frac{\mu_n R_j}{a_j}\right) + D_{j,n} Y_1\left(\frac{\mu_n R_j}{a_j}\right) \right) -}{J_0\left(\frac{\mu_n R_j}{a_{j+1}}\right) Y_1\left(\frac{\mu_n R_j}{a_{j+1}}\right) -}$$

$$\rightarrow \frac{-J_1\left(\frac{\mu_n R_j}{a_{j+1}}\right) \left(C_{j,n} J_0\left(\frac{\mu_n R_j}{a_j}\right) + D_{j,n} Y_0\left(\frac{\mu_n R_j}{a_j}\right) \right)}{-J_1\left(\frac{\mu_n R_j}{a_{j+1}}\right) Y_0\left(\frac{\mu_n R_j}{a_{j+1}}\right)}, \quad (5.32)$$

μ_n – n -й положительный корень уравнения

$$C_N \left(J_0\left(\frac{\mu R_N}{a_N}\right) - \frac{\mu \lambda_N}{a_N \alpha_N} J_1\left(\frac{\mu R_N}{a_N}\right) \right) + D_N \left(Y_0\left(\frac{\mu R_N}{a_N}\right) - \frac{\mu \lambda_N}{a_N \alpha_N} Y_1\left(\frac{\mu R_N}{a_N}\right) \right) = 0. \quad (5.33)$$

Применяя преобразование (5.21) к задаче (5.16) – (5.20), переходим к изображениям:

$$\frac{dU(\mu_n, \tau)}{d\tau} + \mu_n^2 U(\mu_n, \tau) = 0; \quad (5.34)$$

$$U(\mu_n, 0) = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m (f_m(r_m) - S_m(r_m)) W_m(r_m, \mu_n) dr_m. \quad (5.35)$$

Решением задачи (5.34) – (5.35) является функция

$$U(\mu_n, \tau) = U(\mu_n, 0) \exp(-\mu_n^2 \tau). \quad (5.36)$$

Таким образом, решение исходной задачи (5.1) – (5.5) имеет вид:

$$\begin{aligned} t_i(r_i, \tau) = & A_i + B_i \ln(r_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z_n} \left(C_{i,n} J_0\left(\frac{\mu_n r_i}{a_i}\right) + D_{i,n} Y_0\left(\frac{\mu_n r_i}{a_i}\right) \right) \exp(-\mu_n^2 \tau) \times \\ & \times \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m (f_m(r_m) - A_m - B_m \ln(r_m)) \left(C_{m,n} J_0\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m}\right) + D_{m,n} Y_0\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m}\right) \right) dr_m. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Средняя температура по слоям равна

$$\begin{aligned} \bar{t}_i(\tau) = & \frac{2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} \int_{R_{i-1}}^{R_i} r_i t_i(r_i, \tau) dr_i = A_i - \frac{B_i}{2} + \frac{B_i}{R_i^2 - R_{i-1}^2} \times \\ & \times \left(R_i^2 \ln(R_i) - R_{i-1}^2 \ln(R_{i-1}) \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i}{\mu_n Z_n} \times \left(R_i \left(C_{i,n} J_1\left(\frac{\mu_n R_i}{a_i}\right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + D_{i,n} Y_1\left(\frac{\mu_n R_i}{a_i}\right) \right) - R_{i-1} \left(C_{i,n} J_1\left(\frac{\mu_n R_{i-1}}{a_i}\right) + D_{i,n} Y_1\left(\frac{\mu_n R_{i-1}}{a_i}\right) \right) \right) \times \\ & \times \exp(-\mu_n^2 \tau) \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m (f_m(r_m) - A_m - B_m \ln(r_m)) \times \\ & \times \left(C_{m,n} J_0\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m}\right) + D_{m,n} Y_0\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m}\right) \right) dr_m. \end{aligned} \quad (5.38)$$

5.2 Решение задачи нестационарной теплопроводности для N -слойного сплошного цилиндра

$$\frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right), \quad (5.39)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i, \quad \tau > 0;$$

$$t_i(r_i, 0) = f_i(r_i); \quad (5.40)$$

$$\frac{\partial t_1(0, \tau)}{\partial r_1} = 0; \quad (5.41)$$

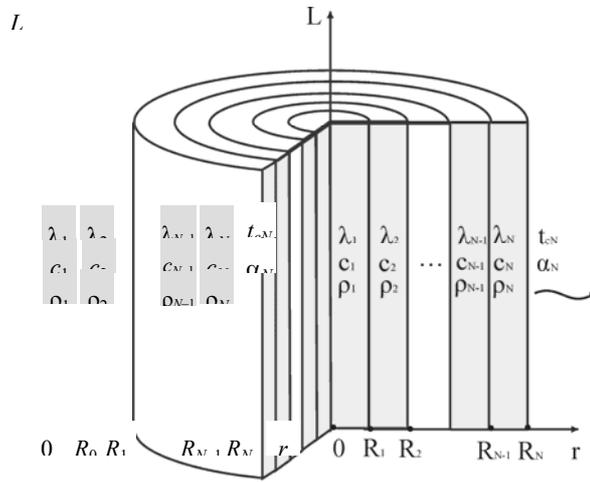


Рис. 5.2 Неограниченный N -слойный сплошной цилиндр

$$\lambda_N \frac{\partial t_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + \alpha_N (t_N(R_N, \tau) - t_{cN}) = 0; \quad (5.42)$$

$$t_j(R_j, \tau) = t_{j+1}(R_j, \tau); \quad \lambda_j \frac{\partial t_j(R_j, \tau)}{\partial r_j} = \lambda_{j+1} \frac{\partial t_{j+1}(R_j, \tau)}{\partial r_{j+1}},$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.43)$$

Решение этой задачи получается подстановкой в решения (5.37), (5.38) задачи (5.1) – (5.5) следующих значений чисел, входящих в решение:

$$R_0 = 0; \quad A_i = t_{cN}; \quad B_i = 0; \quad D_{1,n} = 0, \quad (5.44)$$

а также исключением членов, содержащих функции

$$\ln(R_0); \quad Y_0\left(\frac{\mu_n R_0}{a_1}\right); \quad Y_1\left(\frac{\mu_n R_0}{a_1}\right).$$

5.3 Решение задачи теплопроводности для 2-слойного полого цилиндра

$$\frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right), \quad i = 1, 2, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i, \quad \tau > 0; \quad (5.45)$$

$$t_i(r_i, 0) = f_i(r_i); \quad (5.46)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} - \alpha_1 (t_1(R_0, \tau) - t_{c1}) = 0; \quad (5.47)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(R_2, \tau)}{\partial r_2} + \alpha_2 (t_2(R_2, \tau) - t_{c2}) = 0; \quad (5.48)$$

$$t_1(R_1, \tau) = t_2(R_2, \tau); \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1(R_1, \tau)}{\partial r_1} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(R_1, \tau)}{\partial r_2}. \quad (5.49)$$

Решение задачи (5.45) – (5.49) с неоднородными граничными условиями целесообразно представить, как сумму стационарной и нестационарной составляющих:

$$t_i(r_i, \tau) = S_i(r_i) + P_i(r_i, \tau), \quad i = 1, 2, \quad (5.50)$$

где $S_i(r_i)$ – решение стационарной задачи с неоднородными граничными условиями

$$\frac{d^2 S_i(r_i)}{d r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{d S_i(r_i)}{d r_i} = 0, \quad i = 1, 2, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i; \quad (5.51)$$

$$\lambda_1 \frac{d S_1(R_0)}{d r_1} - \alpha_1 (S_1(R_0) - t_{c1}) = 0; \quad (5.52)$$

$$\lambda_2 \frac{d S_2(R_2)}{d r_2} + \alpha_2 (S_2(R_2) - t_{c2}) = 0; \quad (5.53)$$

$$S_1(R_1) = S_2(R_1); \quad \lambda_1 \frac{d S_1(R_1)}{d r_1} = \lambda_2 \frac{d S_2(R_1)}{d r_2}. \quad (5.54)$$

Решение стационарной задачи (5.51) – (5.54) имеет вид:

$$S_i(r_i) = A_i + B_i \ln(r_i), \quad (5.55)$$

где

$$B_1 = \frac{t_{c2} - t_{c1}}{\ln\left(\frac{R_1}{R_0}\right) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \lambda_1 \left(\frac{1}{R_2 \alpha_2} + \frac{1}{R_0 \alpha_1}\right)}; \quad (5.56)$$

$$A_1 = t_{c1} - B_1 \left(\ln(R_0) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1 R_0} \right); \quad (5.57)$$

$$B_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} B_1; \quad (5.58)$$

$$A_2 = A_1 + B_1 \ln(R_1) \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right). \quad (5.59)$$

$P_i(r_i, \tau)$ – решение нестационарной задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial P_i(r_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 P_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial P_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right), \quad i = 1, 2, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i, \quad \tau > 0; \quad (5.60)$$

$$P_i(r_i, 0) = f_i(r_i) - S_i(r_i); \quad (5.61)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial P_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} - \alpha_1 P_1(R_0, \tau) = 0; \quad (5.62)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial P_2(R_2, \tau)}{\partial r_2} + \alpha_2 P_2(R_2, \tau) = 0; \quad (5.63)$$

$$P_1(R_1, \tau) = P_2(R_1, \tau); \quad \lambda_1 \frac{\partial P_1(R_1, \tau)}{\partial r_1} = \lambda_2 \frac{\partial P_2(R_1, \tau)}{\partial r_2}. \quad (5.64)$$

Решение задачи (5.60) – (5.64) получено методом конечных интегральных преобразований. Для исключения координаты r , вдоль которой свойства тела изменяются ступенчато, используется формула перехода к изображениям:

$$U(\mu, \tau) = \sum_{m=1}^2 \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m P_m(r_m, \tau) W_m(r_m, \mu) dr_m, \quad (5.65)$$

где $\rho(r) = r_m$ – весовая функция, являющаяся решением уравнения

$$\frac{d\rho(r)}{dr} - \frac{\rho(r)}{r} = 0. \quad (5.66)$$

Обратный переход осуществляется по формуле:

$$P_m(r_m, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\mu_n, \tau) W_m(r_m, \mu_n)}{Z_{m,n}}, \quad (5.67)$$

где

$$\begin{aligned} Z_{m,n} &= \sum_{m=1}^2 \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m W_m^2(r_m, \mu_n) dx_m = \\ &= \sum_{m=1}^2 \frac{\lambda_m}{a_m^2} \left(0,5 R_m^2 C_{m,n}^2 \left(J_0^2 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) + J_1^2 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) \right) + \right. \\ &+ R_m^2 C_{m,n} D_{m,n} \left(J_0 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) Y_0 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) + J_1 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) Y_1 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) \right) + \\ &+ 0,5 R_m^2 D_{m,n}^2 \left(Y_0^2 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) + Y_1^2 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} \right) \right) \left. \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -0,5 R_{m-1}^2 C_{m,n}^2 \left(J_0^2 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) + J_1^2 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) \right) - \\
& - R_{m-1}^2 C_{m,n} D_{m,n} \left(J_1 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) Y_1 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) + J_1 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) Y_1 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) \right) - \\
& - 0,5 R_{m-1}^2 D_{m,n}^2 \left(Y_0^2 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) + Y_1^2 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} \right) \right). \tag{5.68}
\end{aligned}$$

Здесь $J_0(x)$, $J_1(x)$, $Y_0(x)$, $Y_1(x)$ – Бесселевы функции первого и второго рода, нулевого и первого порядка соответственно.

Ядро интегрального преобразования $W_m(r_m, \mu)$ является решением вспомогательной задачи (здесь μ – параметр):

$$\frac{d^2 W_m(r_m, \mu)}{d r_m^2} + \frac{1}{r_m} \frac{d W_m(r_m, \mu)}{d r_m} + \frac{\mu^2}{a^2} W_m(r_m, \mu) = 0, \quad m = 1, 2, \quad R_{m-1} \leq r_m \leq R_m; \tag{5.69}$$

$$\lambda_1 \frac{d W_1(0, \mu)}{d r_1} - \alpha_1 W_1(0, \mu) = 0; \tag{5.70}$$

$$\lambda_2 \frac{d W_2(R_2, \mu)}{d r_2} + \alpha_2 W_2(R_2, \mu) = 0; \tag{5.71}$$

$$W_1(R_1, \mu) = W_2(R_1, \mu); \quad \lambda_1 \frac{d W_1(R_1, \mu)}{d r_1} = \lambda_2 \frac{d W_2(R_1, \mu)}{d r_2}. \tag{5.72}$$

Подставляя решение задачи (5.69)

$$W_m(r_m, \mu_n) = C_{m,n} J_0 \left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} \right) + D_{m,n} Y_0 \left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} \right) \tag{5.73}$$

в граничные условия (5.70) – (5.72), находим числа $C_{m,n}$, $D_{m,n}$, μ_n , причем $C_{1,n}$ принимается равным 1:

$$D_{1,n} = \frac{\frac{\lambda_1 \mu_n}{a_1} J_1\left(\frac{\mu_n R_0}{a_1}\right) - \alpha_1 J_0\left(\frac{\mu_n R_0}{a_1}\right)}{\alpha_1 Y_0\left(\frac{\mu_n R_0}{a_1}\right) - \frac{\lambda_1 \mu_n}{a_1} Y_1\left(\frac{\mu_n R_0}{a_1}\right)}; \quad (5.74)$$

$$C_{2,n} = \frac{C_{1,n} J_0\left(\frac{\mu_n R_1}{a_1}\right) + D_{1,n} Y_0\left(\frac{\mu_n R_1}{a_1}\right) - D_{2,n} Y_0\left(\frac{\mu_n R_1}{a_2}\right)}{J_0\left(\frac{\mu_n R_1}{a_2}\right)}; \quad (5.75)$$

$$D_{2,n} = \frac{\frac{\lambda_1 a_2}{\lambda_2 a_1} J_0\left(\frac{\mu_n R_1}{a_2}\right) \left(C_{1,n} J_1\left(\frac{\mu_n R_1}{a_1}\right) + D_{1,n} Y_1\left(\frac{\mu_n R_1}{a_1}\right) \right) -}{J_0\left(\frac{\mu_n R_1}{a_2}\right) Y_1\left(\frac{\mu_n R_1}{a_2}\right) -} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-J_1\left(\frac{\mu_n R_1}{a_2}\right) \left(C_{1,n} J_0\left(\frac{\mu_n R_1}{a_1}\right) + D_{1,n} Y_0\left(\frac{\mu_n R_1}{a_1}\right) \right)}{-J_1\left(\frac{\mu_n R_1}{a_2}\right) Y_0\left(\frac{\mu_n R_1}{a_2}\right)}, \quad (5.76)$$

μ_n – n -й положительный корень уравнения

$$C_2 \left(J_0\left(\frac{\mu R_2}{a_2}\right) - \frac{\mu \lambda_2}{a_2 \alpha_2} J_1\left(\frac{\mu R_2}{a_2}\right) \right) + D_2 \left(Y_0\left(\frac{\mu R_2}{a_2}\right) - \frac{\mu \lambda_2}{a_2 \alpha_2} Y_1\left(\frac{\mu R_2}{a_2}\right) \right) = 0. \quad (5.77)$$

Применяя преобразование (5.65) к задаче (5.60) – (5.64), переходим к изображениям:

$$\frac{dU(\mu_n, \tau)}{d\tau} + \mu_n^2 U(\mu_n, \tau) = 0; \quad (5.78)$$

$$U(\mu_n, 0) = \sum_{m=1}^2 \frac{\lambda_m}{a_m} \int_{R_{m-1}}^{R_m} (f_m(r_m) - S_m(r_m)) W_m(r_m, \mu_n) dr_m. \quad (5.79)$$

Решением задачи (5.78) – (5.79) является функция

$$U(\mu_n, \tau) = U(\mu_n, 0) \exp(-\mu_n^2 \tau). \quad (5.80)$$

Таким образом, решение исходной задачи (5.45) – (5.49) имеет вид:

$$\begin{aligned}
t_i(r_i, \tau) = & A_i + B_i \ln(r_i) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z_{m,n}} \left(C_{i,n} J_0 \left(\frac{\mu_n r_i}{a_i} \right) + D_{i,n} Y_0 \left(\frac{\mu_n r_i}{a_i} \right) \right) \times \\
& \times \exp(-\mu_n^2 \tau) \sum_{m=1}^2 \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m (f_m(r_m) - A_m - B_m \ln(r_m)) \times \\
& \times \left(C_{i,n} J_0 \left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} \right) + D_{i,n} Y_0 \left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} \right) \right) dr_m.
\end{aligned} \tag{5.81}$$

Средняя температура по слоям равна

$$\begin{aligned}
\bar{t}_i(\tau) = & \frac{2}{R_i^2 - R_{i-1}^2} \int_{R_{i-1}}^{R_i} r_i t_i(r_i, \tau) dr_i = A_i - \frac{B_i}{2} + \frac{B_i}{R_i^2 - R_{i-1}^2} (R_i^2 \ln(R_i) - R_{i-1}^2 \ln(R_{i-1})) + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_i}{\mu_n Z_{m,n}} \left(R_i \left(C_{i,n} J_1 \left(\frac{\mu_n R_i}{a_i} \right) + D_{i,n} Y_1 \left(\frac{\mu_n R_i}{a_i} \right) \right) - \right. \\
& \left. - R_{i-1} \left(C_{i,n} J_1 \left(\frac{\mu_n R_{i-1}}{a_i} \right) + D_{i,n} Y_1 \left(\frac{\mu_n R_{i-1}}{a_i} \right) \right) \right) \exp(-\mu_n^2 \tau) \times \\
& \times \sum_{m=1}^2 \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m (f_m(r_m) - A_m - B_m \ln(r_m)) \left(C_{i,n} J_0 \left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} \right) + D_{i,n} Y_0 \left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} \right) \right) dr_m.
\end{aligned} \tag{5.82}$$

5.4 Задача теплопроводности для сплошного 2-слойного цилиндра

$$\frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + \frac{1}{r_i} \frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right), \quad i=1,2, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i, \quad \tau > 0; \tag{5.83}$$

$$t_i(r_i, 0) = f_i(r_i); \tag{5.84}$$

$$\frac{\partial t_1(0, \tau)}{\partial r_1} = 0; \tag{5.85}$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(R_2, \tau)}{\partial r_2} + \alpha_2 (t_2(R_2, \tau) - t_{c2}) = 0; \tag{5.86}$$

$$t_1(R_1, \tau) = t_2(R_1, \tau); \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1(R_1, \tau)}{\partial r_1} = \lambda_2 \frac{\partial t_2(R_1, \tau)}{\partial r_2}. \tag{5.87}$$

Решение этой задачи получается подстановкой в решения (5.81), (5.82) задачи (5.45) – (5.49) следующих значений чисел, входящих в решение:

$$R_0 = 0; \quad A_i = t_{c2}; \quad B_i = 0; \quad C_{1,n} = 1; \quad D_{1,n} = 0, \quad (5.88)$$

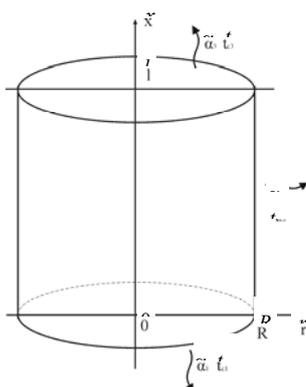
а также исключением членов, содержащих $\ln(R_0)$, $Y_0\left(\frac{\mu_n R_0}{a_1}\right)$, $Y_1\left(\frac{\mu_n R_0}{a_1}\right)$.

6 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Решение задачи сплошного ограниченного цилиндра распределением и неоднородными условиями 3-го рода на торцевых и ниже.

Решение задачи может быть нестационарных температурных цилиндрической формы в условиях, торцах, элементах аппаратов, форму конечного цилиндра, а также теплообменных процессов в измеренным температурным полям.

За точку отсчета удобнее принять температуру среды со стороны боковой поверхности цилиндра, что дает возможность использовать однородные граничные условия на этой поверхности. При этом задача имеет вид:



нестационарной теплопроводности для (рис. 6.1) с произвольным начальным несимметричными граничными условиями боковой поверхности представлено

использовано для расчета полей и тепловых потоков в изделиях когда необходим учет теплообмена на конструкций и сооружений, имеющих для определения условий протекания перечисленных выше случаях по

$$\frac{\partial t(x, r, \tau)}{\partial \tau} = a \left(\frac{\partial^2 t(x, r, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(x, r, \tau)}{\partial r} \right); \quad 0 < x < l; \quad 0 < r < R; \quad (6.1)$$

$$t(x, r, \tau) = f(x, r) - t_{c2}; \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial t(x, 0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (6.3)$$

$$\lambda \frac{\partial t(0, r, \tau)}{\partial x} - \alpha_1 (t(0, r, \tau) - t_{c1} + t_{c2}) = 0; \quad (6.4)$$

$$\lambda \frac{\partial t(l, r, \tau)}{\partial x} + \alpha_3 (t(l, r, \tau) - t_{c3} + t_{c2}) = 0; \quad (6.5)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, R, \tau)}{\partial r} + \alpha_2 t(x, R, \tau) = 0. \quad (6.6)$$

Проведем интегральное преобразование одновременно по координатам x и r . Для нахождения ядра интегрального преобразования $P(x, r)$ необходимо решить вспомогательную задачу с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 P(x, r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial P(x, r)}{\partial r} = -\mu^2 P(x, r); \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial P(x, 0)}{\partial r} = 0; \quad (6.8)$$

$$\lambda \frac{\partial P(0, r)}{\partial x} - \alpha_1 P(0, r) = 0; \quad (6.9)$$

$$\lambda \frac{\partial P(l, r)}{\partial x} + \alpha_3 P(l, r) = 0; \quad (6.10)$$

$$\lambda \frac{\partial P(x, R)}{\partial r} + \alpha_2 P(x, R) = 0. \quad (6.11)$$

Эта задача может быть решена любым аналитическим методом, в том числе и интегральными преобразованиями по одной из оставшихся координат. При этом ищется частное решение с точностью до постоянного множителя.

Для решения задачи (6.7) – (6.11) по тем же правилам составляем еще одну задачу:

$$\frac{d^2 K(x)}{dx^2} = -\nu^2 K(x); \quad (6.12)$$

$$\lambda \frac{dK(0)}{dx} - \alpha_1 K(0) = 0; \quad (6.13)$$

$$\lambda \frac{dK(l)}{dx} + \alpha_3 K(l) = 0. \quad (6.14)$$

Задача (6.12) – (6.14) имеет решение с точностью до постоянного множителя:

$$K(x) = \sin(\nu x + \varphi), \quad (6.15)$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\lambda v}{\alpha_1}\right), \quad (6.16)$$

а v_n – n -й положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg}(vl + \varphi) = -\frac{\lambda v}{\alpha_3}. \quad (6.17)$$

Изображение задачи (6.7) – (6.11) находим по формуле:

$$U(r) = \int_0^l P(x, r) K(x) dx. \quad (6.18)$$

При этом в изображениях имеем:

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU(r)}{dr} = -\gamma^2 U(r); \quad (6.19)$$

$$\frac{\partial U(0)}{\partial r} = 0; \quad (6.20)$$

$$\lambda \frac{dU(R)}{dr} + \alpha_2 U(R) = 0, \quad (6.21)$$

где $\gamma^2 = \mu^2 - v^2. \quad (6.22)$

Здесь $U(r) = J_0(\gamma r), \quad (6.23)$

причем γ – положительный корень уравнения

$$\frac{\lambda \gamma}{\alpha_2} J_1(\gamma R) - J_0(\gamma R) = 0; \quad (6.24)$$

$J_1(r), J_0(r)$ – Бесселевы функции.

Теперь может быть записано общее решение задачи (6.7) – (6.11):

$$P(x, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N_{xn}} \sin(v_n x + \varphi_n) J_0(\gamma_m r), \quad (6.25)$$

где N_{xn} – постоянные коэффициенты.

Для решения задачи (6.1) – (6.6) необходимо частное решение с точностью до постоянного множителя, т.е.

$$P(x, r) = \sin(vx + \varphi) J_0(\gamma r). \quad (6.26)$$

Переходим к изображениям задачи (6.1) – (6.6) по формуле:

$$T(\tau) = \int_0^l \int_0^R t(x, r, \tau) r P(x, r) dr dx, \quad (6.27)$$

где r – весовая функция.

В результате в изображениях получаем задачу:

$$\frac{dT(\tau)}{d\tau} = a(-\mu^2 T(\tau) + S); \quad (6.28)$$

$$T(0) = F. \quad (6.29)$$

Решение этой задачи в изображениях:

$$T(\tau) = \frac{S}{\mu^2} + \left(F - \frac{S}{\mu^2} \right) \exp(-\mu^2 a \tau). \quad (6.30)$$

$$\text{Здесь} \quad \gamma^2 = \mu^2 - v^2; \quad (6.31)$$

F – изображение начального условия:

$$F = \int_0^l \int_0^R (f(x, r) - t_{c2}) \sin(vx + \varphi) r J_0(\gamma r) dr dx; \quad (6.32)$$

S учитывает неоднородность граничных условий по линейной координате:

$$S = \frac{R}{\gamma} J_1(\gamma R) \left(\frac{\alpha_3}{\lambda} (t_{c3} - t_{c2}) \sin(vl + \varphi) + \frac{\alpha_1}{\lambda} (t_{c1} - t_{c2}) \sin(\varphi) \right). \quad (6.33)$$

Обратный переход выполняется по формуле:

$$t(x, r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N_{mn}} T(\tau) P_{mn}(x, r). \quad (6.34)$$

$$N_{mn} = \int_0^l \int_0^R r P_{mn}^2(x, r) = \frac{R^2}{4} \left(J_1^2(\gamma_m R) + J_0^2(\gamma_m r) \right) \times \\ \times \left(l + \frac{1}{v_n} (\sin(\varphi_n) \cos(\varphi_n) - \sin(v_n x + \varphi_n) \cos(v_n x + \varphi_n)) \right). \quad (6.35)$$

Таким образом, окончательное решение задачи (6.1) – (6.6) имеет вид:

$$t(x, r, \tau) = t_{c2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N_{mn}} \left(\frac{S}{\mu_{mn}} + \left(F - \frac{S}{\mu_{mn}} \right) \exp(-\mu_{mn}^2 a \tau) \right) \times \\ \times \sin(v_n x + \varphi_n) J_0(\gamma_m r); \quad (6.36)$$

$$\bar{t}(\tau) = t_{c2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N_{mn}} \left(\frac{S}{\mu_{mn}} + \left(F - \frac{S}{\mu_{mn}} \right) \exp(-\mu_{mn}^2 a \tau) \right) \times \\ \times \frac{2}{r l v_n \gamma_m} (\cos(\varphi_n) - \cos(v_n l + \varphi_n)) J_1(\gamma_m R). \quad (6.37)$$

Все величины, входящие в (6.36) и (6.37), определены уравнениями:

$$N_{mn} \rightarrow (4.35); \quad S \rightarrow (4.33); \quad \mu_{mn} \rightarrow (4.31); \quad F \rightarrow (4.32); \\ v_n \rightarrow (4.17); \quad \varphi_n \rightarrow (4.16); \quad \gamma_m \rightarrow (4.24).$$

Здесь μ_{mn} имеет размерность $[1/м]$, что определяется видом (6.25) и характерно для выбранного метода решения задачи (6.1) – (6.6).

Интеграл в (6.31) берется аналитически, если в качестве $f(x, r)$ использовать (6.36) при $\tau = \tau_k$ для конца предыдущего периода (интервала по τ).

Если начальное распределение температуры является решением задачи теплопроводности для предыдущего временного интервала:

$$f(x, r) = t_p(x, r, \tau_p) \quad (6.38)$$

(индекс p указывает на принадлежность предыдущему интервалу), тогда параметр

$$T(\tau) = \int_0^l \int_0^R t(x, r, \tau) r P(x, r) dr dx, \quad (6.39)$$

входящий в решение, может быть выражен алгебраически, так как интегралы берутся аналитически (стандартными преобразованиями сводятся к табличным):

$$t(x, r, \tau) = t_{c2} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N_{mn}} \left(\frac{S}{\mu_{mn}} + \left(F - \frac{S}{\mu_{mn}} \right) \exp(-\mu_{mn}^2 a \tau) \right) \times \\ \times \sin(v_n x + \varphi_n) J_0(\gamma_m r); \quad (6.40)$$

где

$$S_c = \frac{R}{\gamma_{mp}^2 - \gamma_m^2} (\gamma_{mp} J_1(\gamma_{mp} R) J_0(\gamma_m R) - \gamma_m J_0(\gamma_{mp} R) J_1(\gamma_m R)) \quad (6.41)$$

при условии $\gamma_{mp} \neq \gamma_m$;

$$S_c = \frac{R}{2} \left(J_0^2(\gamma_m R) - J_1^2(\gamma_m R) \right), \quad (6.42)$$

если $\gamma_{mp} \neq \gamma_m$:

$$S_l = \frac{1}{2(v_{np} - v_n)} \left(\sin((v_{np} - v_n)l + \varphi_{np} - \varphi_n) - \sin(\varphi_{np} - \varphi_n) \right) - \frac{1}{2(v_{np} + v_n)} \left(\sin((v_{np} + v_n)l + \varphi_{np} + \varphi_n) - \sin(\varphi_{np} + \varphi_n) \right), \quad (6.43)$$

если $v_{np} \neq v_n$, и

$$S_l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{1}{v_n} \left(\sin(\varphi_n) \cos(\varphi_n) - \sin(v_n l + \varphi_n) \cos(v_n l + \varphi_n) \right) \right), \quad (6.44)$$

если $v_{np} \neq v_n$.

В случае, когда $f(x, r) = t_0 = \text{const}$, что характерно для начала процесса, выражения соответственно упрощаются. Для параметра F получаем выражение

$$F = t_0 \frac{1}{v_n} \left(\cos(\varphi_n) - \cos(v_n l + \varphi_n) \right) \frac{R}{\gamma_m} J_0(\gamma_m R). \quad (6.45)$$

7 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ОГРАНИЧЕННОГО ЦИЛИНДРА С ФУНКЦИОНАЛЬНО МЕНЯЮЩЕЙСЯ ТЕМПЕРАТУРОЙ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ

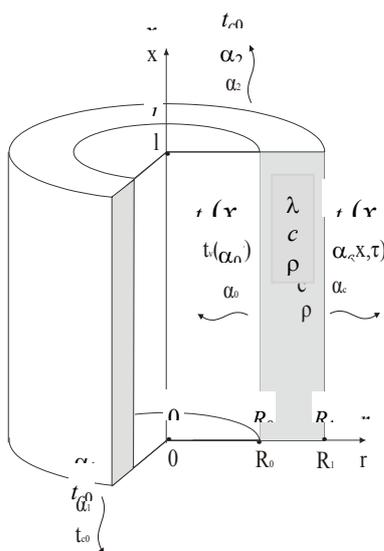
СО СТОРОНЫ БОКОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Рассмотрим другой пример используемой при элементарных областях химической промышленности.

Цилиндрические стенки также трубки кожухотрубчатых лоносителем, температура длине зоны теплообмена.

Температурное поле такой теплопроводности для полого функционально меняющейся стороны боковых поверхностей

В приводимой постановке температуры окружающей



решения задачи теплопроводности, моделировании температурных полей производственного оборудования

аппаратов, охваченные рубашкой, а теплообменников омываются теплотого которого меняется во времени и по

стенки моделируется решением задачи ограниченного цилиндра с температурой окружающей среды со (рис. 7.1).

задача записана относительно среды с торцовых поверхностей.

Рис. 7.1. Полый ограниченный

$$\frac{\partial t(x, r, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 t(x, r, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(x, r, \tau)}{\partial r} \right),$$

$$0 \leq x \leq l, \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad \tau > 0; \quad (7.1)$$

$$t(x, r, 0) = f(x, r) - t_{c0}; \quad (7.2)$$

$$\lambda \frac{\partial t(0, r, \tau)}{\partial x} - \alpha_1 t(0, r, \tau) = 0; \quad (7.3)$$

$$\lambda \frac{\partial t(l, r, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 t(l, r, \tau) = 0; \quad (7.4)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, R_0, \tau)}{\partial r} - \alpha_0 (t(x, R_0, \tau) - t_c(x, \tau) + t_{c0}) = 0; \quad (7.5)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, R_1, \tau)}{\partial r} + \alpha_c (t(x, R_1, \tau) - t_c(x, \tau) + t_{c0}) = 0. \quad (7.6)$$

Для торцевых поверхностей могут быть выбраны иные граничные условия с соответствующей постановкой задачи.

Решение задачи (7.1) – (7.6) также может быть получено методом конечных интегральных преобразований, примененных последовательно по линейной и цилиндрической координате.

Для исключения координаты x используем формулу перехода к изображениям

$$T(r, \tau) = \int_0^l t(x, r, \tau) S(\mu, x) dx, \quad (7.7)$$

где $S(\mu, x)$ – ядро интегрального преобразования, являющееся решением задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{d^2 S(x)}{dx^2} = -\mu^2 S(x); \quad (7.8)$$

$$\lambda \frac{dS(0)}{dx} - \alpha_1 S(0) = 0; \quad (7.9)$$

$$\lambda \frac{dS(l)}{dx} + \alpha_2 S(l) = 0. \quad (7.10)$$

Задача (7.8) – (7.10) с точностью до постоянного множителя имеет решение:

$$S(x) = \sin(\mu x + \varphi), \quad (7.11)$$

где

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\lambda \mu}{\alpha_1}\right), \quad (7.12)$$

μ_n – n -й положительный корень уравнения

$$\alpha_3 \sin(\mu l + \varphi) + \lambda \mu \cos(\mu l + \varphi) = 0. \quad (7.13)$$

Обратный переход может быть выполнен по формуле

$$t(x, r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(r, \tau) S(\mu_n, x)}{N_n}, \quad (7.14)$$

где

$$N_n = \int_0^l S^2(\mu_n, x) dx =$$

$$= 0,5 \left(l - \frac{1}{\mu_n} (\sin(\mu_n l + \varphi_n) \cos(\mu_n l + \varphi_n) - \sin(\varphi_n) \cos(\varphi_n)) \right). \quad (7.15)$$

В изображениях задача (7.1) – (7.6) имеет вид:

$$\frac{\partial T(r, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T(r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, \tau)}{\partial r} + \mu^2 T(r, \tau) \right), \quad (7.16)$$

$$T(r, 0) = \int_0^l (f(x, r) - t_{c0}) S(\mu, x) dx; \quad (7.17)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R_0, \tau)}{\partial r} - \alpha_0 (T(R_0, \tau) - U(\tau)) = 0; \quad (7.18)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R_1, \tau)}{\partial r} + \alpha_c (T(R_1, \tau) - W(\tau)) = 0, \quad (7.19)$$

где

$$U(\tau) = \int_0^l (t_v(x, \tau) - t_{c0}) S(\mu, x) dx; \quad (7.20)$$

$$W(\tau) = \int_0^l (t_c(x, \tau) - t_{c0}) S(\mu, x) dx. \quad (7.21)$$

Теперь возможно исключение координаты r путем использования следующего интегрального преобразования:

$$V(\tau) = \int_{R_0}^{R_1} T(r, \tau) r P(\eta, r) dr, \quad (7.22)$$

с обратным переходом по формуле

$$T(r, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(\eta_k, \tau) V(\tau)}{Z_k}, \quad (7.23)$$

причем $P(\eta, r)$ является решением задачи

$$\frac{d^2 P(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP(r)}{dr} + \eta^2 P(r) = 0; \quad (7.24)$$

$$\lambda \frac{\partial P(R_0)}{\partial r} - \alpha_0 P(R_0) = 0; \quad (7.25)$$

$$\lambda \frac{\partial P(R_1)}{\partial r} + \alpha_c P(R_1) = 0. \quad (7.26)$$

Это решение с точностью до постоянного множителя имеет вид:

$$P(r) = J_0(\eta r) + AY_0(\eta r), \quad (7.27)$$

где

$$A = -\frac{\eta \lambda J_1(\eta R_0) + \alpha_0 J_0(\eta R_0)}{\eta \lambda Y_1(\eta R_0) + \alpha_0 Y_0(\eta R_0)}, \quad (7.28)$$

а η_k – k -й положительный корень уравнения

$$\frac{\eta \lambda J_1(\eta R_1) - \alpha_c J_0(\eta R_1)}{-\eta \lambda Y_1(\eta R_1) + \alpha_c Y_0(\eta R_1)} = -\frac{\eta \lambda J_1(\eta R_0) + \alpha_0 J_0(\eta R_0)}{\eta \lambda Y_1(\eta R_0) + \alpha_0 Y_0(\eta R_0)}. \quad (7.29)$$

Тогда

$$\begin{aligned} Z_k &= \int_{R_0}^{R_1} r P^2(r) dr = \\ &= \frac{R_1^2}{2} \left((J_0(\eta_k R_1) + A_k Y_0(\eta_k R_1))^2 + (J_1(\eta_k R_1) + A_k Y_1(\eta_k R_1))^2 \right) - \\ &\quad - \frac{R_0^2}{2} \left((J_0(\eta_k R_0) + A_k Y_0(\eta_k R_0))^2 + (J_1(\eta_k R_0) + A_k Y_1(\eta_k R_0))^2 \right). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Применяя преобразование (7.22) к задаче (7.16) – (7.19), переходим к новым изображениям:

$$\frac{dV(\tau)}{d\tau} + \eta_k^2 a^2 V(\tau) = -\frac{\alpha_0 R_0^2}{\lambda} P(R_0) U(\tau) + \frac{\alpha_c R_1^2}{\lambda} P(R_1) W(\tau); \quad (7.31)$$

$$V(0) = \int_{R_0}^{R_1} \int_0^l (f(x, r) - t_{c0}) S(x) r P(r) dx dr. \quad (7.32)$$

Решением задачи (7.31) – (7.32) является функция

$$\begin{aligned} V(\tau) = \exp(-\eta_k^2 a^2 \tau) & \left(\int_{R_0}^{R_1} \int_0^l (f(x, r) - t_{c0}) S(x) r P(r) dx dr - \right. \\ & - \frac{\alpha_0 a^2 R_0}{\lambda} P(R_0) \int_0^\tau \int_0^l (t_v(x, \tau) - t_{c0}) S(x) \exp(\eta_k^2 a^2 \tau) dx d\tau + \\ & \left. + \frac{\alpha_c a^2 R_1}{\lambda} P(R_1) \int_0^\tau \int_0^l (t_c(x, \tau) - t_{c0}) S(x) \exp(\eta_k^2 a^2 \tau) dx d\tau \right). \end{aligned} \quad (7.33)$$

Возврат к оригиналам выполняется по формуле

$$t(x, r, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V(\tau) P(r) S(x)}{N_n Z_k}. \quad (7.34)$$

При расчете температурного поля элементарной области аппаратов, имеющих трубчатые элементы, целесообразно использовать рассмотренную задачу в упрощенной постановке, соответствующей условиям работы трубчатого элемента. В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{\partial t(x, r, \tau)}{\partial \tau} = a^2 & \left(\frac{\partial^2 t(x, r, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, r, \tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t(x, r, \tau)}{\partial r} \right), \\ 0 \leq x \leq l, \quad R_0 \leq r \leq R_1, \quad \tau > 0; \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$t(x, r, 0) = f(x, r) - t_{c0}; \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial t(0, r, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (7.37)$$

$$\frac{\partial t(l, r, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (7.38)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, R_0, \tau)}{\partial r} - \alpha_0 (t(x, R_0, \tau) - t_v(x, \tau) + t_{c0}) = 0; \quad (7.39)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, R_1, \tau)}{\partial r} + \alpha_c (t(x, R_1, \tau) - t_c(x, \tau) + t_{c0}) = 0. \quad (7.40)$$

Методика решения остается прежней, но ряд формул приобретает упрощенный вид.

Формула (7.9):

$$\frac{\partial S(0)}{\partial x} = 0. \quad (7.41)$$

Формула (7.10):

$$\frac{\partial S(l)}{\partial x} = 0. \quad (7.42)$$

Формула (7.11):

$$S(x) = \cos(\mu x). \quad (7.43)$$

Формула (7.12):

$$\varphi = 0. \quad (7.44)$$

Формула (7.13):

$$\mu_n = \frac{\pi n}{l}. \quad (7.45)$$

Формула (7.15):

$$N_n = \int_0^l S^2(\mu_n, x) dx = 0,5 \left(l + \frac{1}{\mu_n} \sin(\mu_n l) \cos(\mu_n l) \right). \quad (7.46)$$

Формула (7.17):

$$T(r, 0) = \int_0^l f(x, r) S(\mu, x) dx. \quad (7.47)$$

Формула (7.20):

$$U(\tau) = \int_0^l t_v(x, \tau) S(\mu, x) dx. \quad (7.48)$$

Формула (7.21):

$$W(\tau) = \int_0^l t_c(x, \tau) S(\mu, x) dx. \quad (7.49)$$

Формула (7.32):

$$V(0) = \int_{R_0}^{R_1} \int_0^l f(x, r) S(x) r P(r) dx dr. \quad (7.50)$$

Формула (7.33):

$$V(\tau) = \exp(-\eta_k^2 a^2 \tau) \left(\int_{R_0}^{R_1} \int_0^l f(x, r) S(x) r P(r) dx dr - \frac{\alpha_0 a^2 R_0}{\lambda} P(R_0) \int_0^\tau \int_0^l t_v(x, \tau) S(x) \exp(\eta_k^2 a^2 \tau) dx d\tau + \frac{\alpha_c a^2 R_1}{\lambda} P(R_1) \int_0^\tau \int_0^l t_c(x, \tau) S(x) \exp(\eta_k^2 a^2 \tau) dx d\tau \right). \quad (7.51)$$

8 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СОСТАВНОГО КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Решение задачи может быть стационарных температурных цилиндрических изделиях, в аппаратов, конструкций и образцах, у которых лфизические параметры или поверхности.

Задача теплопроводности быть решена следующим задачи теплопроводности для независимо друг от друга при поверхности контакта или поверхности контакта. Затем, из поверхности контакта, опре-

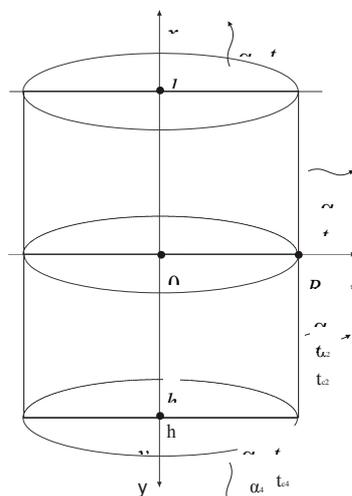


Рис. 8.1 Составной конечный цилиндр

использовано для расчета полей и тепловых потоков в составных цилиндрических элементах сооружений, в цилиндрических скачкообразно изменяются теплограничные условия на боковой

для составного тела (рис. 8.1) может образом. Решаются соответствующие каждого из контактирующих тел произвольных температурах на произвольных тепловых потоках через граничных условий 4-го рода на деляются функции, первоначально

заданные как произвольные.

В данном случае для упрощения математических выражений целесообразно выбрать координаты так, как показано на рисунке. Выбранное расположение координат определяет знаки тепловых потоков в постановке задачи.

$$\frac{\partial^2 t_1(x,r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_1(x,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_1(x,r)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial^2 t_2(y,r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_2(y,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_2(y,r)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq y \leq h; \quad (8.2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(l,r)}{\partial x} + \alpha_3 (t_1(l,r) - t_{c3}) = 0; \quad (8.3)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(x,R)}{\partial r} + \alpha_1 (t_1(x,R) - t_{c1}) = 0; \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial t_1(x,0)}{\partial r} = 0; \quad (8.5)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(h,r)}{\partial y} + \alpha_4 (t_2(h,r) - t_{c4}) = 0; \quad (8.6)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(y,R)}{\partial r} + \alpha_2 (t_2(y,R) - t_{c2}) = 0; \quad (8.7)$$

$$\frac{\partial t_2(y,0)}{\partial r} = 0; \quad (8.8)$$

$$t_1(0,r) = t_2(0,r); \quad (8.9)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(0,r)}{\partial x} = -\lambda_2 \frac{\partial t_2(0,r)}{\partial y}. \quad (8.10)$$

Будем считать произвольным тепловой поток через стыковую поверхность тел. Вследствие осевой симметрии он будет являться только функцией радиальной координаты.

Тогда стационарное температурное поле первого тела является решением задачи:

$$\frac{\partial^2 t_1(x,r)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t_1(x,r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_1(x,r)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (8.11)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(l,r)}{\partial x} + \alpha_3 (t_1(l,r) - t_{c3}) = 0; \quad (8.12)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(x,R)}{\partial r} + \alpha_1 (t_1(x,R) - t_{c1}) = 0; \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial t_1(x,0)}{\partial r} = 0; \quad (8.14)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(0,r)}{\partial x} = -m(r). \quad (8.15)$$

Решение задачи (8.11) – (8.15) может быть получено методом конечных интегральных преобразований. Для исключения координаты "r" используется формула перехода к изображениям:

$$T(x,\mu) = \int_0^R \rho(r) t_1(x,r) P(r,\mu) dr, \quad (8.16)$$

где $\rho(r) = r$ – весовая функция, являющаяся решением уравнения

$$\frac{d\rho(r)}{dr} - \frac{\rho(r)}{r} = 0. \quad (8.17)$$

Ядро интегрального преобразования $P(r,\mu)$ является решением вспомогательной задачи (здесь μ – параметр):

$$\frac{d^2 P(r,\mu)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dP(r,\mu)}{dr} + \mu^2 P(r,\mu) = 0; \quad (8.18)$$

$$\lambda_1 \frac{dP(R,\mu)}{dr} + \alpha_1 P(R,\mu) = 0; \quad (8.19)$$

$$\frac{dP(0,\mu)}{dr} = 0. \quad (8.20)$$

Решение задачи (8.18) – (8.20) с точностью до постоянного множителя имеет вид:

$$P(r, \mu) = J_0(\mu r), \quad (8.21)$$

здесь μ – последовательные положительные корни уравнения

$$\alpha_1 J_0(\mu R) - \mu \lambda_1 J_1(\mu R) = 0. \quad (8.22)$$

Обратный переход осуществляется по формуле:

$$t_1(x, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T(x, \mu_n) P(r, \mu_n)}{Z_n}, \quad (8.23)$$

где

$$Z_n = \int_0^R r P^2(r, \mu_n) dr = \int_0^R r J_0^2(r, \mu_n) dr = 0,5 R^2 (J_0^2(\mu_n R) + J_1^2(\mu_n R)). \quad (8.24)$$

Здесь $J_0(x)$, $J_1(x)$ – Бесселевы функции первого рода, нулевого и первого порядка соответственно.

Применяя преобразование (8.16) к задаче (8.11) – (8.15), переходим к изображениям:

$$\frac{d^2 U(x, \mu)}{dx^2} - \mu_n^2 U(x, \mu) = 0; \quad (8.25)$$

$$\lambda_1 \frac{dU(l, \mu)}{dx} + \alpha_3 U(l, \mu) + S = 0; \quad (8.26)$$

$$\lambda_1 \frac{dU(0, \mu)}{dx} = M, \quad (8.27)$$

где

$$T(x, \mu) = U(x, \mu) + K; \quad (8.28)$$

$$K = \frac{\alpha_1 R t_{c1}}{\lambda_1 \mu^2} J_0(\mu R); \quad (8.29)$$

$$S = \alpha_3 \left(K - \frac{R t_{c3}}{\mu} J_1(\mu R) \right); \quad (8.30)$$

$$M = - \int_0^R r m(r) J_0(\mu r) dr. \quad (8.31)$$

Решение задачи (8.25) – (8.27) имеет вид:

$$U(x, \mu) = A \operatorname{sh}(\mu x) + B \operatorname{ch}(\mu x), \quad (8.32)$$

где A и B определяются из граничных условий (8.26) – (8.27):

$$A = \frac{M}{\lambda_1 \mu}; \quad (8.33)$$

$$B = - \frac{S + MC}{D}, \quad (8.34)$$

здесь

$$C = \operatorname{ch}(\mu l) + \frac{\alpha_3}{\lambda_1 \mu} \operatorname{sh}(\mu l); \quad (8.35)$$

$$D = \alpha_3 \operatorname{ch}(\mu l) + \lambda_1 \mu \operatorname{sh}(\mu l). \quad (8.36)$$

Теперь можно записать решение задачи (8.11) – (8.15):

$$t_1(x, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r \mu_n)}{Z_n} \left(\frac{M_n}{\lambda_1 \mu_n} \operatorname{sh}(\mu_n x) - \frac{S_n + M_n C_n}{D_n} \operatorname{ch}(\mu_n x) + K_n \right). \quad (8.37)$$

Стационарное температурное поле второго тела является решением задачи, аналогичной задаче (8.11) – (8.15):

$$\frac{\partial^2 t_2(y, r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t_2(y, r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t_2(y, r)}{\partial r} = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \quad 0 \leq r \leq R; \quad (8.38)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(h, r)}{\partial y} + \alpha_4 (t_2(h, r) - t_{c4}) = 0; \quad (8.39)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(y, R)}{\partial r} + \alpha_2 (t_2(y, R) - t_{c2}) = 0; \quad (8.40)$$

$$\frac{\partial t_2(y, 0)}{\partial r} = 0; \quad (8.41)$$

$$\lambda_2 \frac{\partial t_2(0, r)}{\partial y} = -m(r). \quad (8.42)$$

Решение этой задачи может быть записано формально путем соответствующей замены величин, входящих в решение задачи (8.11) – (8.15):

$$\begin{aligned} y &\rightarrow x, \quad \lambda_2 \rightarrow \lambda_1, \quad \alpha_2 \rightarrow \alpha_1, \quad \alpha_4 \rightarrow \alpha_3, \quad t_{c2} \rightarrow t_{c1}, \\ t_{c4} &\rightarrow t_{c3}, \quad \gamma_n \rightarrow \mu_n, \quad M_{1n} \rightarrow M_n, \quad K_{1n} \rightarrow K_n, \\ S_{1n} &\rightarrow S_n, \quad C_{1n} \rightarrow C_n, \quad D_{1n} \rightarrow D_n, \quad Z_{1n} \rightarrow Z_n. \end{aligned} \quad (8.43)$$

Теперь числа M_1 и M могут быть найдены из условия равенства температур (8.9) и неразрывности тепловых потоков (8.10) на поверхности контакта тел:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\mu_n)}{Z_n} \left(-\frac{S_n + M_n C_n}{D_n} + K_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\gamma_n)}{Z_{1n}} \left(-\frac{S_{1n} + M_{1n} C_{1n}}{D_{1n}} + K_{1n} \right); \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\mu_n)}{Z_n} M = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(r\gamma_n)}{Z_{1n}} M_{1n}. \end{cases} \quad (8.44)$$

Будем последовательно умножать левые и правые части равенства на $rJ_0(r\mu_k)$ и интегрировать в пределах от 0 до R . В результате получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{Z_k} \left(-\frac{S_k + M_k C_k}{D_k} + K_k \right) \int_0^R r J_0^2(r\mu_k) dr = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z_{1n}} \left(-\frac{S_{1n} + M_{1n} C_{1n}}{D_{1n}} + K_{1n} \right) \int_0^R r J_0(r\mu_k) J_0(r\gamma_n) dr, \\ \frac{M_k}{Z_k} \int_0^R r J_0^2(r\mu_k) dr = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z_{1n}} \int_0^R r J_0(r\mu_k) J_0(r\gamma_n) dr. \end{cases} \quad (8.45)$$

Здесь использовано свойство ортогональности Бесселевых функций:

$$\int_0^R r J_0(\mu_n r) J_0(\mu_k r) dr = 0, \text{ если } n \neq k. \quad (8.46)$$

Если в расчетах используются N членов ряда, система (8.45) представляет собой систему линейных уравнений, из которой определяются числа $M_{1k}, M_k; 1 \leq k \leq N$.

Вводя соответствующие обозначения, получим систему (8.45) в виде:

$$\begin{cases} G_k M_k - \sum_{n=1}^N H_{nk} G_{1n} M_{1n} = L_k, 1 \leq k \leq N; \\ M_k - \sum_{n=1}^N H_{nk} M_n = 0, \end{cases} \quad (8.47)$$

где

$$G_k = \frac{C_k}{D_k}; \quad G_{1k} = \frac{C_{1k}}{D_{1k}}; \quad (8.48)$$

$$H_{nk} = \frac{R}{Z_n} \frac{\mu_n J_1(\mu_n R) J_0(\gamma_k R) - \gamma_k J_0(\mu_n R) J_1(\gamma_k R)}{\mu_n^2 - \gamma_k^2}; \quad (8.49)$$

$$L_k = -\frac{S_k}{D_k} + K_k + \sum_{n=1}^N H_{nk} \left(\frac{S_{1k}}{D_{1k}} - K_{1k} \right). \quad (8.50)$$

Подставляя из второго уравнения системы (8.47) M_k в первое, получаем систему N линейных уравнений относительно неизвестных M_{1n} :

$$\sum_{n=1}^N H_{nk} (G_k + G_{1n}) M_{1n} = -L_k, 1 \leq k \leq N; \quad (8.51)$$

затем определяются числа M_k :

$$M_k = \sum_{n=1}^N H_{nk} M_n, 1 \leq k \leq N. \quad (8.52)$$

9 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ N -СЛОЙНОГО ПОЛОГО И СПЛОШНОГО ШАРА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

Приводится методика решения нестационарной задачи теплопроводности для N -слойных полого и сплошного шара (рис. 9.1.) с произвольным начальным распределением, граничными условиями 4-го рода на поверхностях контакта слоев и неоднородными несимметричными граничными условиями 3-го рода на внешних границах.

Решение задачи может быть использовано для расчета нестационарных температурных полей и тепловых потоков в многослойных сферических изделиях, сферических элементах аппаратов, конструкций и сооружений, в сферических образцах, у которых теплофизические параметры функционально зависят от температуры, а также для определения условий протекания теплообменных процессов в перечисленных выше случаях по измеренным температурным полям.

9.1 Задача теплопроводности для N -слойного полого шара

$$\frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + \frac{2}{r_i} \frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right) + \frac{q_i}{c_i \rho_i}, \quad (9.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i, \quad \tau > 0;$$

$$t_i(r_i, 0) = f_i(r_i); \quad (9.2)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial t_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} - \alpha_1 (t_1(R_0, \tau) - t_{c1}) = 0; \quad (9.3)$$

$$\lambda_N \frac{\partial t_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + \alpha_N (t_N(R_N, \tau) - t_{cN}) = 0; \quad (9.4)$$

$$t_j(R_j, \tau) = t_{j+1}(R_j, \tau); \quad \lambda_j \frac{\partial t_j(R_j, \tau)}{\partial r_j} = \lambda_{j+1} \frac{\partial t_{j+1}(R_j, \tau)}{\partial r_{j+1}},$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (9.5)$$

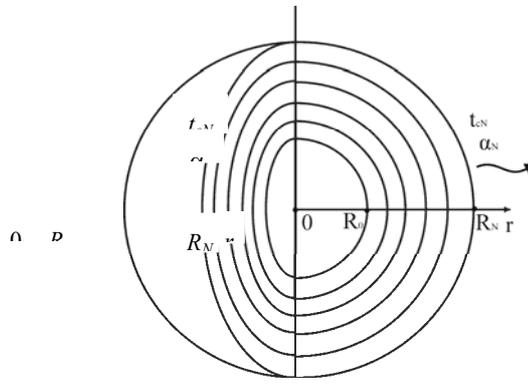


Рис. 9.1 *N*-слойный полый шар

Решение задачи (9.1) – (9.5) с неоднородными граничными условиями также целесообразно представить, как сумму стационарной и нестационарной составляющих:

$$t_i(r_i, \tau) = S_i(r_i) + P_i(r_i, \tau), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (9.6)$$

где $S_i(r_i)$ – решение стационарной задачи с неоднородными граничными условиями

$$\frac{d^2 S_i(r_i)}{dr_i^2} + \frac{2}{r_i} \frac{dS_i(r_i)}{dr_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i; \quad (9.7)$$

$$\lambda_1 \frac{dS_1(R_0)}{dr_1} - \alpha_1 (S_1(R_0) - t_{c1}) = 0; \quad (9.8)$$

$$\lambda_N \frac{dS_N(R_N)}{dr_N} + \alpha_N (S_N(R_N) - t_{cN}) = 0; \quad (9.9)$$

$$S_j(R_j) = S_{j+1}(R_j); \quad \lambda_j \frac{dS_j(R_j)}{dr_j} = \lambda_{j+1} \frac{dS_{j+1}(R_j)}{dr_{j+1}},$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (9.10)$$

Решение стационарной задачи (9.7) – (9.10) имеет вид:

$$S_i(r_i) = A_i + \frac{B_i}{r_i}, \quad (9.11)$$

где

$$B_1 = \frac{t_{cN} - t_{c1}}{\frac{\lambda_1}{R_N} \left(\frac{1}{\lambda_N} - \frac{1}{R_N \alpha_N} \right) - \frac{\lambda_1}{R_0} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{R_0 \alpha_1} \right) + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\lambda_1}{R_k} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{k+1}} \right)}; \quad (9.12)$$

$$A_1 = t_{c1} - \frac{B_1}{R_0} \left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1 R_0} + 1 \right); \quad (9.13)$$

$$B_{j+1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_{j+1}} B_1, \quad j=1, 2, \dots, N-1; \quad (9.14)$$

$$A_{j+1} = A_j + \frac{B_j}{R_j} \left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}} \right); \quad (9.15)$$

$P_i(r_i, \tau)$ – решение нестационарной задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial P_i(r_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 P_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + \frac{2}{r_i} \frac{\partial P_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right) + \frac{q_i}{c_i \rho_i}, \quad (9.16)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i, \quad \tau > 0;$$

$$P_i(r_i, 0) = f_i(r_i) - S_i(r_i); \quad (9.17)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial P_1(R_0, \tau)}{\partial r_1} - \alpha_1 P_1(R_0, \tau) = 0; \quad (9.18)$$

$$\lambda_N \frac{\partial P_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + \alpha_N P_N(R_N, \tau) = 0; \quad (9.19)$$

$$P_j(R_j, \tau) = P_{j+1}(R_j, \tau); \quad \lambda_j \frac{\partial P_j(R_j, \tau)}{\partial r_j} = \lambda_{j+1} \frac{\partial P_{j+1}(R_j, \tau)}{\partial r_{j+1}},$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (9.20)$$

Решение задачи (4.16) – (4.20) получено методом конечных интегральных преобразований. Для исключения координаты r , вдоль которой свойства тела изменяются ступенчато, используется формула перехода к изображениям:

$$U(\mu, \tau) = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) P_m(r_m, \tau) W_m(r_m, \mu) dr_m, \quad (9.21)$$

где $\rho(r_m) = r_m^2$ – весовая функция, являющаяся решением уравнения

$$\frac{d\rho(r)}{dr} - \frac{2\rho(r)}{r} = 0. \quad (9.22)$$

Обратный переход осуществляется по формуле:

$$P_m(r_m, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\mu_n, \tau) W_m(r_m, \mu_n)}{Z_n}, \quad (9.23)$$

где

$$Z_n = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m^2 W_m^2(r_m, \mu_n) dr_m, \quad (9.24)$$

а ядро интегрального преобразования $W_m(r_m, \mu)$ является решением вспомогательной задачи (здесь μ – параметр):

$$\frac{d^2 W_m(r_m, \mu)}{dr_m^2} + \frac{2}{r_m} \frac{dW_m(r_m, \mu)}{dr_m} + \frac{\mu^2}{a_m^2} W_m(r_m, \mu) = 0, \quad (9.25)$$

$m = 1, 2, \dots, N, \quad R_{m-1} \leq r_m \leq R_m;$

$$\lambda_1 \frac{dW_1(R_0, \mu)}{dr_1} - \alpha_1 W_1(R_0, \mu) = 0; \quad (9.26)$$

$$\lambda_N \frac{dW_N(R_N, \mu)}{dr_N} + \alpha_N W_N(R_N, \mu) = 0; \quad (9.27)$$

$$W_j(R_j, \mu) = W_{j+1}(R_j, \mu); \quad \lambda_j \frac{dW_j(R_j, \mu)}{dr_j} = \lambda_{j+1} \frac{dW_{j+1}(R_j, \mu)}{dr_{j+1}},$$

$j = 1, 2, \dots, N-1. \quad (9.28)$

Подставляя решение задачи (9.25)

$$W_m(r_m, \mu_n) = \frac{C_{m,n}}{r_m} \sin\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) \quad (9.29)$$

в граничные условия (9.26) – (9.28), находим числа $C_{m,n}$, $\varphi_{m,n}$, μ_n , причем $C_{1,n}$ принимаются равными 1:

$$\varphi_{1,n} = -\frac{\mu_n R_0}{a_1} + \operatorname{arctg} \left(\frac{\lambda_1 R_0 \mu_n}{a_1 (\alpha_1 R_0 + \lambda_1)} \right); \quad (9.30)$$

$$\varphi_{m+1,n} = -\frac{\mu_n R_m}{a_{m+1}} + \operatorname{arctg} \left(\frac{a_{m+1}}{\lambda_{m+1} \mu_n} \left(\frac{\lambda_{m+1} - \lambda_m}{R_m} + \frac{\mu_n \lambda_m}{a_m} \operatorname{tg} \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n} \right) \right) \right),$$

$$m = 1, 2, \dots, N-1; \quad (9.31)$$

$$C_{m+1,n} = C_{m,n} \frac{\sin \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n} \right)}{\sin \left(\frac{\mu_n R_{m+1}}{a_{m+1}} + \varphi_{m+1,n} \right)}; \quad (9.32)$$

μ_n – n -й положительный корень уравнения

$$\frac{\mu}{a_N} \cos \left(\frac{\mu R_N}{a_N} + \varphi_N \right) + \left(\frac{\alpha_N}{\lambda_N} - \frac{1}{R_N} \right) \sin \left(\frac{\mu R_N}{a_N} + \varphi_N \right) = 0. \quad (9.33)$$

Тогда

$$Z_n = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m^2 W_m^2(r_m, \mu_n) dx_m = 0,5 \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n}^2 \times$$

$$\times \left(R_m - R_{m-1} - \frac{a_m}{2\mu_n} \left(\sin \left(2 \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n} \right) \right) - \sin \left(2 \left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} + \varphi_{m,n} \right) \right) \right) \right).$$

$$(9.34)$$

Применяя преобразование (9.19) к задаче (9.14) – (9.18), переходим к изображениям:

$$\frac{dU(\mu_n, \tau)}{d\tau} + \mu_n^2 U(\mu_n, \tau) = Q_n; \quad (9.35)$$

$$U(\mu_n, 0) = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m^2 (f_m(r_m) - S_m(r_m)) W_m(r_m, \mu_n) dr_m, \quad (9.36)$$

где Q_n – изображение функции распределенного источника

$$Q_n = \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} \frac{q_m}{c_m \rho_m} \int_{R_{m-1}}^{R_m} \rho(r_m) W_m(r_m, \mu_n) dr_m. \quad (9.37)$$

Решением задачи (9.34) – (9.35) является функция

$$U(\mu_n, \tau) = \left(U(\mu_n, 0) - \frac{Q_n}{\mu_n^2} \right) \exp(-\mu_n^2 \tau) + \frac{Q_n}{\mu_n^2}. \quad (9.38)$$

Таким образом, решение исходной задачи (9.1) – (9.5) имеет вид:

$$t_i(r_i, \tau) = A_i + \frac{B_i}{r_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{i,n} \sin\left(\frac{\mu_n r_i}{a_i} + \varphi_{i,n}\right) \exp(-\mu_n^2 \tau) \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n} \times}{0,5 \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n}^2 \times} \rightarrow$$

$$\times \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m \left(f_m(r_m) - A_m - \frac{B_m}{r_m} \right) \sin\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) dr_m$$

$$\rightarrow \frac{\left(R_m - \frac{a_m}{\mu_n} \left(\sin\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) \cos\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) - (\sin(\varphi_{m,n}) \cos(\varphi_{m,n})) \right) \right)}{\left(R_m - \frac{a_m}{\mu_n} \left(\sin\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) \cos\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) - (\sin(\varphi_{m,n}) \cos(\varphi_{m,n})) \right) \right)}. \quad (9.39)$$

Средняя температура по слоям равна

$$\bar{t}_i(\tau) = \frac{3}{R_i^3 - R_{i-1}^3} \int_{R_{i-1}}^{R_i} r_i^2 t_i(r_i, \tau) dr_i = A_i + \frac{3}{2} B_i \frac{R_i^2 - R_{i-1}^2}{R_i^3 - R_{i-1}^3} + \frac{3}{R_i^3 - R_{i-1}^3} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{a_m}{\mu_n} \left(\sin\left(\frac{\mu_n R_i}{a_i} + \varphi_{i,n}\right) - \sin\left(\frac{\mu_n R_{i-1}}{a_i} + \varphi_{i,n}\right) \right) - R_i \cos\left(\frac{\mu_n R_i}{a_i} + \varphi_{i,n}\right) + \right)}{0,5 \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n}^2 \times}$$

$$+ R_{i-1} \cos\left(\frac{\mu_n R_{i-1}}{a_i} + \varphi_{i,n}\right) \times C_{i,n} \frac{a_m}{\mu_n} \exp(-\mu_n^2 \tau) \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n} \times$$

$$\rightarrow \frac{\left(R_m - \frac{a_m}{\mu_n} \left(\sin\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) \cos\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) - \right)}{\left(R_m - \frac{a_m}{\mu_n} \left(\sin\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) \cos\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) - \right)} \right)}$$

$$\times \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m \left(f_m(r_m) - A_m - \frac{B_m}{r_m} \right) \sin \left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} + \varphi_{m,n} \right) dr_m \rightarrow \frac{\left. \right]}{-\sin(\varphi_{m,n}) \cos(\varphi_{m,n})} \quad (9.40)$$

В случае применения данного решения для локальной временной области, интегралы в числителях правых частей формул (9.39) и (9.40) могут быть вычислены аналитически, так как начальным распределением $f_m(r_m)$ является температурный профиль, определяемый формулой (9.39) для момента времени, соответствующего концу предыдущей области.

Для этого решение (9.39) удобно записать в виде:

$$t_i(r_i, \tau) = A_i + \frac{B_i}{r_i} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{i,n} \sin \left(\frac{\mu_n r_i}{a_i} + \varphi_{i,n} \right) \exp(-\mu_n^2 \tau)}{\sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n}^2 Z_{m,n}}, \quad (9.41)$$

где

$$H_{i,n} = 2C_{i,n} \sum_{m=1}^N \frac{\lambda_m}{a_m^2} C_{m,n} \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m \left(f_m(r_m) - A_m - \frac{B_m}{r_m} \right) \sin \left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} + \varphi_{m,n} \right) dr_m, \quad (9.42)$$

$$Z_{m,n} = R_m - \frac{a_m}{\mu_n} \left(\sin \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n} \right) \cos \left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n} \right) - \sin(\varphi_{m,n}) \cos(\varphi_{m,n}) \right). \quad (9.43)$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m \left(f_m(r_m) - A_m - \frac{B_m}{r_m} \right) \sin \left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} + \varphi_{m,n} \right) dr_m = \\ &= \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m \left(t_{mb}(r_m, \tau_b) - A_m - \frac{B_m}{r_m} \right) \sin \left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} + \varphi_{m,n} \right) dr_m = \\ &= (A_{mb} - A_m) \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m \sin \left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} + \varphi_{m,n} \right) dr_m + (B_{mb} - B_m) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{R_{m-1}}^{R_m} \sin\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) dr_m + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{m,kb} \exp(-\mu_{kb}^2 \tau_{bp})}{\sum_{v=1}^N \frac{\lambda_{vb}}{a_{vb}^2} C_{v,kb}^2 Z_{v,kb}} \times \\
& \times \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m \sin\left(\frac{\mu_{kb} r_m}{a_{mb}} + \varphi_{m,kb}\right) \sin\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) dr_m = (A_{mb} - A_m) \times \\
& \times \frac{a_m}{\mu_n^2} \left(\mu_n R_{m-1} \cos\left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) - a_m \sin\left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) - \mu_n R_m \times \right. \\
& \times \cos\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) - a_m \sin\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) \left. \right) + (B_{mb} - B_m) \frac{a_m}{\mu_n} \times \\
& \times \left(\cos\left(\frac{\mu_n R_{m-1}}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) - \cos\left(\frac{\mu_n R_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{m,kb} \exp(-\mu_{kb}^2 \tau_{bp})}{\sum_{v=1}^N \frac{\lambda_{vb}}{a_{vb}^2} C_{v,kb}^2 Z_{v,kb}} \times \times \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m \sin\left(\frac{\mu_{kb} r_m}{a_{mb}} + \varphi_{m,kb}\right) \sin\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} + \varphi_{m,n}\right) dr_m .
\end{aligned} \tag{9.44}$$

Интеграл в последнем слагаемом также вычисляется:

$$\begin{aligned}
& \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m \sin\left(\frac{\mu_{kb} r_m}{a_{mb}} + \varphi_{m, kb}\right) \sin\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} + \varphi_{m, n}\right) dr_m = \\
& = 0,5 \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m \cos\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} - \frac{\mu_n}{a_m}\right) r_m + \varphi_{m, kb} - \varphi_{m, n}\right) dr_m - \\
& - 0,5 \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m \cos\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) r_m + \varphi_{m, kb} + \varphi_{m, n}\right) dr_m = \\
& = \frac{0,5}{\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} - \frac{\mu_n}{a_m}\right)^2} \left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} - \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_m \sin\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} - \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_m + \varphi_{m, kb} - \varphi_{m, n}\right) + \right. \\
& + \cos\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} - \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_m + \varphi_{m, kb} - \varphi_{m, n}\right) - \left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} - \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_{m-1} \times \\
& \times \sin\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} - \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_{m-1} + \varphi_{m, kb} - \varphi_{m, n}\right) - \\
& \left. - \cos\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} - \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_{m-1} + \varphi_{m, kb} - \varphi_{m, n}\right) \right) - \\
& - \frac{0,5}{\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right)^2} \left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_m \sin\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_m + \varphi_{m, kb} + \varphi_{m, n}\right) + \right. \\
& + \cos\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_m + \varphi_{m, kb} + \varphi_{m, n}\right) - \\
& \left. - \left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_{m-1} \sin\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_{m-1} + \varphi_{m, kb} + \varphi_{m, n}\right) - \right. \\
& \left. - \cos\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_{m-1} + \varphi_{m, kb} + \varphi_{m, n}\right) \right),
\end{aligned}$$

(9.45)

если $\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} - \frac{\mu_n}{a_m} \neq 0$, иначе

$$\begin{aligned}
& \int_{R_{m-1}}^{R_m} r_m \sin\left(\frac{\mu_{kb} r_m}{a_{mb}} + \varphi_{m, kb}\right) \sin\left(\frac{\mu_n r_m}{a_m} + \varphi_{m, n}\right) dr_m = \\
& = 0,25 (R_m^2 - R_{m-1}^2) \cos(\varphi_{m, kb} - \varphi_{m, n}) - \frac{0,5}{\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right)^2} \times \\
& \times \left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_m \sin\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_m + \varphi_{m, kb} + \varphi_{m, n}\right) + \right. \\
& + \cos\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_m + \varphi_{m, kb} + \varphi_{m, n}\right) - \\
& \left. - \left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_{m-1} \sin\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_{m-1} + \varphi_{m, kb} + \varphi_{m, n}\right) - \right. \\
& \left. - \cos\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right) R_{m-1} + \varphi_{m, kb} + \varphi_{m, n}\right) \right)
\end{aligned}$$

$$-\cos\left(\left(\frac{\mu_{kb}}{a_{mb}} + \frac{\mu_n}{a_m}\right)R_{m-1} + \varphi_{m, kb} + \varphi_{m, n}\right). \quad (9.46)$$

9.2 Задача теплопроводности для N -слойного сплошного шара (рис. 9.2)

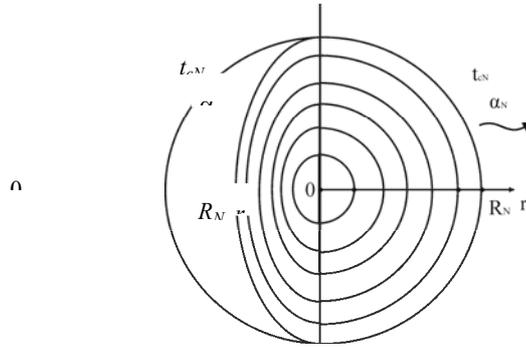


Рис. 9.2 Сплошной N -слойный шар

$$\frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial \tau} = a_i^2 \left(\frac{\partial^2 t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i^2} + \frac{2}{r_i} \frac{\partial t_i(r_i, \tau)}{\partial r_i} \right) + \frac{q_i}{c_i \rho_i}, \quad (9.47)$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad R_{i-1} \leq r_i \leq R_i, \quad \tau > 0;$$

$$t_i(r_i, 0) = f_i(r_i); \quad (9.48)$$

$$\frac{\partial t_1(0, \tau)}{\partial r_1} = 0; \quad (9.49)$$

$$\lambda_N \frac{\partial t_N(R_N, \tau)}{\partial r_N} + \alpha_N (t_N(R_N, \tau) - t_{cN}) = 0; \quad (9.50)$$

$$t_j(R_j, \tau) = t_{j+1}(R_j, \tau); \quad \lambda_j \frac{\partial t_j(R_j, \tau)}{\partial r_j} = \lambda_{j+1} \frac{\partial t_{j+1}(R_j, \tau)}{\partial r_{j+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1.$$

(9.51)

Решение этой задачи получается подстановкой в решения (9.39), (9.40) задачи (9.1) – (9.5) следующих значений чисел, входящих в решение:

$$R_0 = 0; \quad A_i = t_{cN}; \quad B_i = 0; \quad \varphi_{1,n} = \frac{\pi}{2}. \quad (9.52)$$

10 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ НЕОГРАНИЧЕННОГО БРУСА

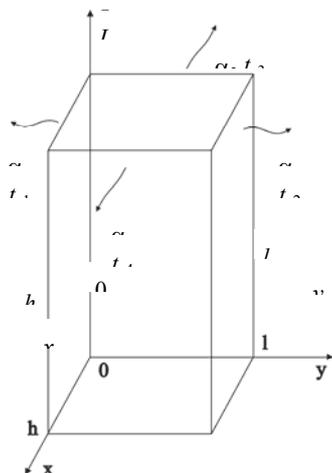


Рис. 10.1 Неограниченный брус

Приводится методика решения нестационарной задачи теплопроводности для неограниченного бруса (рис. 10.1) с произвольным начальным распределением и неоднородными несимметричными граничными условиями 3-го рода на боковых поверхностях.

Решение может быть использовано для расчета температурных полей в конструктивных элементах аппаратов с целью нахождения поперечных тепловых потоков в них.

Нестационарное температурное поле в неограниченном брус прямоугольного поперечного сечения описывается следующей системой:

$$\frac{\partial t(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right), \quad (10.1)$$

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq h, \quad \tau > 0;$$

$$t(x, y, 0) = f(x, y); \quad (10.2)$$

$$\lambda \frac{\partial t(0, y, \tau)}{\partial x} - \alpha_1 (t(0, y, \tau) - t_{c1}) = 0; \quad (10.3)$$

$$\lambda \frac{\partial t(l, y, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 (t(l, y, \tau) - t_{c2}) = 0; \quad (10.4)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, 0, \tau)}{\partial y} - \alpha_3 (t(x, 0, \tau) - t_{c3}) = 0; \quad (10.5)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, h, \tau)}{\partial y} + \alpha_4 (t(x, h, \tau) - t_{c4}) = 0. \quad (10.6)$$

Здесь $t(x, y, \tau)$ – искомое температурное поле как функция поперечных координат бруса, и времени; a, λ – соответственно коэффициенты температуропроводности и теплопроводности материала бруса; α_i, t_{ci} – соответственно коэффициенты теплоотдачи и температуры окружающей среды со стороны боковых поверхностей бруса.

Решение этой задачи также целесообразно представить в виде суммы

$$t(x, y, \tau) = P(x, y, \tau) + S(x, y) + t_{c1}, \quad (10.7)$$

причем $P(x, y, \tau)$ – решение нестационарной задачи с однородными граничными условиями, а $S(x, y)$ – решение стационарной задачи с неоднородными граничными условиями. Кроме того, для некоторого упрощения выражений решение задачи целесообразно искать относительно температуры окружающей среды со стороны одной из граней бруса.

$$\frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial y^2} = 0; \quad (10.8)$$

$$\lambda \frac{\partial S(0, y)}{\partial x} - \alpha_1 S(0, y) = 0; \quad (10.9)$$

$$\lambda \frac{\partial S(l, y)}{\partial x} + \alpha_2 (S(l, y) - T_{c2}) = 0; \quad (10.10)$$

$$\lambda \frac{\partial S(x, 0)}{\partial y} - \alpha_3 (S(x, 0) - T_{c3}) = 0; \quad (10.11)$$

$$\lambda \frac{\partial S(x, h)}{\partial y} + \alpha_4 (S(x, h) - T_{c4}) = 0, \quad (10.12)$$

где

$$T_{ci} = t_{ci} - t_{c1}. \quad (10.13)$$

Для решения стационарной задачи используем метод конечных интегральных преобразований.

Для исключения координаты x используем интегральное преобразование вида

$$U(y) = \int_0^l S(x, y) \rho(x) W(x) dx, \quad (10.14)$$

причем весовая функция $\rho(x) = 1$, а ядро интегрального преобразования $W(x)$ является решением вспомогательной задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{d^2 W(x)}{dx^2} + \mu^2 W(x) = 0; \quad (10.15)$$

$$\lambda \frac{dW(0)}{dx} - \alpha_1 W(0) = 0; \quad (10.16)$$

$$\lambda \frac{dW(l)}{dx} + \alpha_2 W(l) = 0. \quad (10.17)$$

Решение ищется с точностью до постоянного множителя в виде:

$$W(x) = \sin(\mu x + \varphi), \quad (10.18)$$

причем числа μ и φ определяются из граничных условий (10.16), (10.17):

$$\varphi = a \operatorname{tg}\left(\frac{\lambda \mu}{\alpha_1}\right); \quad (10.19)$$

числа μ определяются как последовательные положительные корни уравнения

$$\alpha_2 \sin(\mu l + \varphi) + \lambda \mu \cos(\mu l + \varphi) = 0. \quad (10.20)$$

Обратный переход выполняется по стандартной формуле

$$S(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(y) W(x)}{N}, \quad (10.21)$$

где

$$\begin{aligned} N &= \int_0^l \rho(x) W^2(x) dx = \int_0^l \sin^2(\mu x + \varphi) dx = \\ &= \frac{1}{2\mu} (\mu l + \sin(\varphi) \cos(\varphi) - \sin(\mu l + \varphi) \cos(\mu l + \varphi)). \end{aligned} \quad (10.22)$$

Суммирование в (10.21) ведется по значениям μ_n .

Переходим к изображениям задачи (10.8) – (10.12).

$$\int_0^l \frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial y^2} W(x) dx = \frac{d^2 U(y)}{dy^2}; \quad (10.23)$$

$$\int_0^l \frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial x^2} W(x) dx = -\mu^2 U(y) + Q, \quad (10.24)$$

тогда

$$\frac{d^2 U(y)}{dy^2} - \mu^2 U(y) + Q = 0; \quad (10.25)$$

$$\lambda \frac{\partial U(0)}{\partial y} - \alpha_3 U(0) = Q_1; \quad (10.26)$$

$$\lambda \frac{\partial U(h)}{\partial y} + \alpha_4 U(h) = Q_2, \quad (10.27)$$

где

$$Q = \frac{\alpha_2}{\lambda} T_{c2} W(l) = \frac{\alpha_2}{\lambda} T_{c2} \sin(\mu l + \varphi); \quad (10.28)$$

$$Q_1 = -\int_0^l \alpha_3 T_{c3} W(x) dx = -\frac{\alpha_3 T_{c3}}{\mu} (\cos(\varphi) - \cos(\mu l + \varphi)); \quad (10.29)$$

$$Q_2 = \int_0^l \alpha_4 T_{c4} W(x) dx = \frac{\alpha_4 T_{c4}}{\mu} (\cos(\varphi) - \cos(\mu l + \varphi)). \quad (10.30)$$

Решением задачи (10.25) – (10.27) является функция

$$U(y) = A \operatorname{ch}(\mu y) + B \operatorname{sh}(\mu y) + \frac{Q}{\mu^2}. \quad (10.31)$$

A и B определяются из граничных условий (10.26) и (10.27):

$$B = \frac{Q_2 - \frac{Q}{\mu^2} \alpha_4 - \left(\frac{Q_1}{\alpha_3} - \frac{Q}{\mu^2} \right) (\lambda \mu \operatorname{sh}(\mu h) + \alpha_4 \operatorname{ch}(\mu h))}{\lambda \mu \left(1 - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \right) \operatorname{ch}(\mu h) + \left(\alpha_4 - \frac{\lambda^2 \mu^2}{\alpha_3} \right) \operatorname{sh}(\mu h)}; \quad (10.32)$$

$$A = \frac{Q_1}{\alpha_3} - \frac{Q}{\mu^2} - \frac{\lambda \mu}{\alpha_3} B. \quad (10.33)$$

Таким образом, все составляющие решения (10.21) задачи (10.8) – (10.12) полностью определены.

Другая составляющая решения (10.7) задачи (10.1) – (10.6), функция $P(x, y, \tau)$, является решением нестационарной задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial P(x, y, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 P(x, y, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, y, \tau)}{\partial y^2} \right),$$

$$0 \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h, \tau > 0; \quad (10.34)$$

$$P(x, y, 0) = f(x, y) - S(x, y) - t_{c1}; \quad (10.35)$$

$$\lambda \frac{\partial P(0, y, \tau)}{\partial x} - \alpha_1 P(0, y, \tau) = 0; \quad (10.36)$$

$$\lambda \frac{\partial P(l, y, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 P(l, y, \tau) = 0; \quad (10.37)$$

$$\lambda \frac{\partial P(x, 0, \tau)}{\partial y} - \alpha_3 P(x, 0, \tau) = 0; \quad (10.38)$$

$$\lambda \frac{\partial P(x, h, \tau)}{\partial y} + \alpha_4 P(x, h, \tau) = 0. \quad (10.39)$$

Решение этой задачи может быть выполнено методом конечных интегральных преобразований по двум пространственным координатам как одновременно, так и последовательно.

В данном случае последний вариант предпочтительнее, так как для исключения координаты x может быть применено преобразование, использованное при решении стационарной задачи (10.8) – (10.12):

$$R(y, \tau) = \int_0^l t(x, y, \tau) \rho(x) W(x) dx. \quad (10.40)$$

Обратный переход выполняется по формуле

$$t(x, y, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(y, \tau) W(x)}{N}, \quad (10.41)$$

где значение N определяется формулой (10.22).

Функция $W(x)$ является решением задачи (10.15) – (10.17).

Переходим к изображению задачи (10.34) – (10.39):

$$\frac{\partial R(y, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 R(y, \tau)}{\partial y^2} - \mu^2 R(y, \tau) \right); \quad (10.42)$$

$$R(y, 0) = F(y) = \int_0^l (f(x, y) - S(x, y) - t_{c1}) W(x) dx; \quad (10.43)$$

$$\lambda \frac{\partial R(0, \tau)}{\partial y} - \alpha_3 R(0, \tau) = 0; \quad (10.44)$$

$$\lambda \frac{\partial R(h, \tau)}{\partial y} + \alpha_4 R(h, \tau) = 0. \quad (10.45)$$

В свою очередь, задача (10.42) – (10.45) может быть решена с использованием конечного интегрального преобразования по координате y :

$$V(\tau) = \int_0^h R(y, \tau) v(y) Z(y) dy, \quad (10.46)$$

с весовой функцией $v(y) = 1$ и формулой обратного перехода

$$R(y, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V(\tau) Z(y)}{M}, \quad (10.47)$$

где

$$M = \int_0^h v(y) Z^2(y) dy. \quad (10.48)$$

Функция $Z(y)$ является решением вспомогательной задачи

$$\frac{d^2 Z(y)}{dy^2} - \mu^2 Z(y) + \gamma^2 Z(y) = 0; \quad (10.49)$$

$$\lambda \frac{dZ(0)}{dy} - \alpha_3 Z(0) = 0; \quad (10.50)$$

$$\lambda \frac{dZ(h)}{dy} + \alpha_4 Z(h) = 0. \quad (10.51)$$

Решение этой задачи с точностью до постоянного множителя имеет вид:

$$Z(y) = \sin(\eta y + \phi), \quad (10.52)$$

где числа $\eta^2 = \gamma^2 - \mu^2$ и ϕ определяются из граничных условий (10.50) и (10.51):

$$\phi = a \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda \eta}{\alpha_3} \right), \quad (10.53)$$

а η – последовательные положительные корни уравнения

$$\lambda \eta \cos(\eta h + \phi) + \alpha_4 \sin(\eta h + \phi) = 0. \quad (10.54)$$

Тогда

$$M = \int_0^h v(y) Z^2(y) dy = \int_0^h \sin^2(\eta y + \phi) dx =$$

$$= \frac{1}{2\eta} (\eta h + \sin(\phi) \cos(\phi) - \sin(\eta h + \phi) \cos(\eta h + \phi)). \quad (10.55)$$

Переходим к изображению задачи (10.42) – (10.45).

$$\frac{dV(\tau)}{d\tau} + a^2 \gamma^2 V(\tau) = 0, \quad (10.56)$$

$$V(0) = \int_0^h F(y) Z(y) dy = \int_0^h \int_0^l (f(x, y) - S(x, y) - t_{c1}) W(x) F(y) Z(y) dy dx.$$

$$(10.57)$$

Решение задачи (10.56) – (10.57) имеет вид:

$$V(\tau) = V(0) \exp(-a^2 \gamma^2 \tau) = V(0) \exp(-a^2 (\mu^2 + \eta^2) \tau). \quad (10.58)$$

Таким образом, решение задачи (10.1) – (10.6) имеет окончательный вид:

$$t(x, y, \tau) = t_{c1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(y) W(x)}{N} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W(x) Z(y) V(\tau)}{NM}. \quad (10.59)$$

11 РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Нестационарное температурное поле параллелепипеда описывается следующей системой:

$$\frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 t(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \right),$$

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq s, \quad 0 \leq z \leq h, \quad \tau > 0; \quad (11.1)$$

$$t(x, y, z, 0) = f(x, y, z); \quad (11.2)$$

$$\lambda \frac{\partial t(0, y, z, \tau)}{\partial x} - \alpha_1 (t(0, y, z, \tau) - t_{c1}) = 0; \quad (11.3)$$

$$\lambda \frac{\partial t(l, y, z, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 (t(l, y, z, \tau) - t_{c2}) = 0; \quad (11.4)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, 0, z, \tau)}{\partial y} - \alpha_3 (t(x, 0, z, \tau) - t_{c3}) = 0; \quad (11.5)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial y} + \alpha_4 (t(x, y, z, \tau) - t_{c4}) = 0; \quad (11.6)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, y, 0, \tau)}{\partial z} - \alpha_5 (t(x, y, 0, \tau) - t_{c5}) = 0; \quad (11.7)$$

$$\lambda \frac{\partial t(x, y, h, \tau)}{\partial z} + \alpha_6 (t(x, y, h, \tau) - t_{c6}) = 0. \quad (11.8)$$

Здесь $t(x, y, z, \tau)$ – искомое температурное поле как функция поперечных координат бруса и времени; a, λ – соответственно коэффициенты теплопроводности и теплопроводности материала параллелепипеда; α_i, t_{ci} – соответственно коэффициенты теплоотдачи и температуры окружающей среды со стороны наружных поверхностей параллелепипеда.

Решение этой задачи целесообразно представить в виде суммы

$$t(x, y, z, \tau) = P(x, y, z, \tau) + S(x, y, z) + t_{c1}, \quad (11.9)$$

причем $P(x, y, z, \tau)$ – решение нестационарной задачи с однородными граничными условиями, а $S(x, y, z)$ – решение стационарной задачи с неоднородными граничными условиями. Кроме того, для некоторого упрощения выражений решение задачи целесообразно искать относительно температуры окружающей среды со стороны одной из граней параллелепипеда.

$$\frac{\partial^2 S(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S(x, y, z)}{\partial z^2} = 0; \quad (11.10)$$

$$\lambda \frac{\partial S(0, y, z)}{\partial x} - \alpha_1 S(0, y, z) = 0; \quad (11.11)$$

$$\lambda \frac{\partial S(l, y, z)}{\partial x} + \alpha_2 (S(l, y, z) - T_{c2}) = 0; \quad (11.12)$$

$$\lambda \frac{\partial S(x, 0, z)}{\partial y} - \alpha_3 (S(x, 0, z) - T_{c3}) = 0; \quad (11.13)$$

$$\lambda \frac{\partial S(x, v, z)}{\partial y} + \alpha_4 (S(x, v, z) - T_{c4}) = 0; \quad (11.14)$$

$$\lambda \frac{\partial S(x, y, 0)}{\partial y} - \alpha_5 (S(x, y, 0) - T_{c5}) = 0; \quad (11.15)$$

$$\lambda \frac{\partial S(x, y, h)}{\partial z} + \alpha_6 (S(x, y, h) - T_{c6}) = 0, \quad (11.16)$$

где

$$T_{ci} = t_{ci} - t_{c1}. \quad (11.17)$$

Для решения стационарной задачи используем метод конечных интегральных преобразований.

Для исключения координаты x используем интегральное преобразование вида

$$U(y, z) = \int_0^l S(x, y, z) \rho(x) W(x) dx, \quad (11.18)$$

причем весовая функция $\rho(x) = 1$, а ядро интегрального преобразования $W(x)$ является решением вспомогательной задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{d^2 W(x)}{dx^2} + \mu^2 W(x) = 0; \quad (11.19)$$

$$\lambda \frac{dW(0)}{dx} - \alpha_1 W(0) = 0; \quad (11.20)$$

$$\lambda \frac{dW(l)}{dx} + \alpha_2 W(l) = 0. \quad (11.21)$$

Решение ищется с точностью до постоянного множителя в виде:

$$W(x) = \sin(\mu x + \varphi), \quad (11.22)$$

причем числа μ и φ определяются из граничных условий (11.20), (11.21):

$$\varphi = a \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda \mu}{\alpha_1} \right); \quad (11.23)$$

числа μ определяются как последовательные положительные корни уравнения

$$\alpha_2 \sin(\mu l + \varphi) + \lambda \mu \cos(\mu l + \varphi) = 0. \quad (11.24)$$

Обратный переход выполняется по стандартной формуле

$$S(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(y, z) W(x)}{N}, \quad (11.25)$$

где

$$\begin{aligned} N &= \int_0^l \rho(x) W^2(x) dx = \int_0^l \sin^2(\mu x + \varphi) dx = \\ &= \frac{1}{2\mu} (\mu l + \sin(\varphi) \cos(\varphi) - \sin(\mu l + \varphi) \cos(\mu l + \varphi)). \end{aligned} \quad (11.26)$$

Суммирование в (11.25) ведется по значениям μ_n .

Переходим к изображениям задачи (11.10) – (11.17).

$$\int_0^l \frac{\partial^2 S(x, y, z)}{\partial y^2} \rho(x) W(x) dx = \frac{\partial^2 U(y, z)}{\partial y^2}; \quad (11.27)$$

$$\int_0^l \frac{\partial^2 S(x, y, z)}{\partial z^2} \rho(x) W(x) dx = \frac{\partial^2 U(y, z)}{\partial z^2}; \quad (11.28)$$

$$\int_0^l \frac{\partial^2 S(x, y, z)}{\partial x^2} \rho(x) W(x) dx = -\mu^2 U(y, z) + Q, \quad (11.29)$$

тогда

$$\frac{\partial^2 U(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U(y, z)}{\partial z^2} - \mu^2 U(y, z) + Q = 0; \quad (11.30)$$

$$\lambda \frac{\partial U(0, z)}{\partial y} - \alpha_3 U(0, z) = Q_1; \quad (11.31)$$

$$\lambda \frac{\partial U(v, z)}{\partial y} + \alpha_4 U(v, z) = Q_2; \quad (11.32)$$

$$\lambda \frac{\partial U(y, 0)}{\partial z} - \alpha_5 U(y, 0) = Q_3; \quad (11.33)$$

$$\lambda \frac{\partial U(y, h)}{\partial z} + \alpha_6 U(y, h) = Q_4, \quad (11.34)$$

где

$$Q = \frac{\alpha_2}{\lambda} T_{c2} W(l) = \frac{\alpha_2}{\lambda} T_{c2} \sin(\mu l + \varphi); \quad (11.35)$$

$$Q_1 = -\int_0^l \alpha_3 T_{c3} W(x) dx = -\frac{\alpha_3 T_{c3}}{\mu} (\cos(\varphi) - \cos(\mu l + \varphi)); \quad (11.36)$$

$$Q_2 = \int_0^l \alpha_4 T_{c4} W(x) dx = \frac{\alpha_4 T_{c4}}{\mu} (\cos(\varphi) - \cos(\mu l + \varphi)); \quad (11.37)$$

$$Q_3 = -\int_0^l \alpha_5 T_{c5} W(x) dx = -\frac{\alpha_5 T_{c5}}{\mu} (\cos(\varphi) - \cos(\mu l + \varphi)); \quad (11.38)$$

$$Q_4 = \int_0^l \alpha_6 T_{c6} W(x) dx = \frac{\alpha_6 T_{c6}}{\mu} (\cos(\varphi) - \cos(\mu l + \varphi)). \quad (11.39)$$

Для исключения координаты u используем интегральное преобразование вида

$$M(z) = \int_0^v U(y, z) \rho_1(y) K(y) dy, \quad (11.40)$$

причем весовая функция $\rho_1(y) = 1$, а ядро интегрального преобразования $K(y)$ является решением вспомогательной задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{d^2 K(y)}{dy^2} + \eta^2 K(y) = 0; \quad (11.41)$$

$$\lambda \frac{dK(0)}{dy} - \alpha_3 K(0) = 0; \quad (11.42)$$

$$\lambda \frac{dK(y)}{dy} + \alpha_4 K(y) = 0. \quad (11.43)$$

Решение ищется с точностью до постоянного множителя в виде:

$$K(y) = \sin(\eta y + \xi), \quad (11.44)$$

причем числа η и ξ определяются из граничных условий (11.42), (11.43):

$$\xi = a \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda \eta}{\alpha_3} \right); \quad (11.45)$$

числа η определяются как последовательные положительные корни уравнения

$$\alpha_4 \sin(\eta v + \xi) + \lambda \eta \cos(\eta v + \xi) = 0. \quad (11.46)$$

Обратный переход выполняется по формуле

$$U(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{K(y) M(z)}{D}, \quad (11.47)$$

где

$$\begin{aligned} D &= \int_0^v \rho_1(y) K^2(y) dy = \int_0^v \sin^2(\eta y + \xi) dy = \\ &= \frac{1}{2\eta} (\eta v + \sin(\xi) \cos(\xi) - \sin(\eta v + \xi) \cos(\eta v + \xi)). \end{aligned} \quad (11.48)$$

Суммирование в (11.47) ведется по значениям η_m .

Переходим к изображениям задачи (11.30) – (11.34).

$$\int_0^v \frac{\partial^2(y, z)}{\partial^2} \rho_1(y) K(y) dy = \frac{d^2 M(z)}{dz^2}; \quad (11.49)$$

$$\int_0^v \frac{\partial^2 U(y, z)}{\partial y^2} \rho_1(y) K(y) dy = -\eta^2 M(z) + C, \quad (11.50)$$

тогда

$$\frac{d^2 M(z)}{dz^2} - (\mu^2 + \eta^2) M(z) + C = 0; \quad (11.51)$$

$$\lambda \frac{dM(0)}{dz} - \alpha_5 M(0) = C_1; \quad (11.52)$$

$$\lambda \frac{dM(h)}{dz} + \alpha_6 M(h) = C_2, \quad (11.53)$$

где

$$\begin{aligned} C &= \int_0^v (Q + Q_2 - Q_1) \rho_1(y) K(y) dy = \\ &= \left(\frac{\alpha_2}{\lambda} T_{c2} \sin(\mu l + \varphi) + \frac{1}{\mu} (\alpha_4 T_{c4} + \alpha_3 T_{c3}) (\cos(\varphi) - \cos(\mu l + \varphi)) \right) \times \\ &\quad \times \frac{1}{\eta} (\cos(\xi) - \cos(\eta v + \xi)); \end{aligned} \quad (11.54)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \int_0^v Q_3 \rho_1(y) K(y) dy = \\ &= -\frac{\alpha_5 T_{c5}}{\mu \eta} (\cos(\varphi) - \cos(\mu l + \varphi)) (\cos(\xi) - \cos(\eta v + \xi)); \end{aligned} \quad (11.55)$$

$$\begin{aligned} C_2 &= \int_0^v Q_4 \rho_1(y) K(y) dy = \\ &= \frac{\alpha_6 T_{c6}}{\mu \eta} (\cos(\varphi) - \cos(\mu l + \varphi)) (\cos(\xi) - \cos(\eta v + \xi)). \end{aligned} \quad (11.56)$$

Решением задачи (11.51) – (11.53) является функция

$$M(z) = A \operatorname{ch}(\eta z) + B \operatorname{sh}(\eta z) + \frac{C}{\mu^2 + \eta^2}. \quad (11.57)$$

A и B определяются из граничных условий (11.52) и (11.53):

$$A = \frac{C_2 - \frac{C\alpha_6}{\mu^2 + \eta^2} - C_1 \left(\frac{\alpha_6}{\lambda \eta} \operatorname{sh}(\eta h) + \operatorname{ch}(\eta h) \right)}{\left(\alpha_6 + \frac{\alpha_5 \lambda \eta C}{\mu^2 + \eta^2} \right) \operatorname{ch}(\eta h) + \left(\lambda \eta + \frac{\alpha_5 \alpha_6 C}{\mu^2 + \eta^2} \right) \operatorname{sh}(\eta h)}; \quad (11.58)$$

$$B = \frac{1}{\lambda \eta} \left(C_1 + A \frac{\alpha_5 C}{\mu^2 + \eta^2} \right). \quad (11.59)$$

Таким образом, решение задачи (11.10) – (11.16), все составляющие которого полностью определены, имеет вид:

$$S(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_n(x) K_m(y) M_{m,n}(z)}{N_n D_m}. \quad (11.60)$$

Другая составляющая решения (11.9) задачи (11.1) – (11.8), функция $P(x, y, z, \tau)$, является решением нестационарной задачи с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial P(x, y, z, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 P(x, y, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P(x, y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P(x, y, z, \tau)}{\partial z^2} \right),$$

$$0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq y \leq v, \quad 0 \leq z \leq h, \quad \tau > 0; \quad (11.61)$$

$$P(x, y, z, 0) = f(x, y, z) - S(x, y, z) - t_{c1}; \quad (11.62)$$

$$\lambda \frac{\partial P(0, y, z, \tau)}{\partial x} - \alpha_1 P(0, y, z, \tau) = 0; \quad (11.63)$$

$$\lambda \frac{\partial P(l, y, z, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 P(l, y, z, \tau) = 0; \quad (11.64)$$

$$\lambda \frac{\partial P(x, 0, z, \tau)}{\partial y} - \alpha_3 P(x, 0, z, \tau) = 0; \quad (11.65)$$

$$\lambda \frac{\partial P(x, v, z, \tau)}{\partial y} + \alpha_4 P(x, v, z, \tau) = 0; \quad (11.66)$$

$$\lambda \frac{\partial P(x, y, 0, \tau)}{\partial z} - \alpha_5 P(x, y, 0, \tau) = 0; \quad (11.67)$$

$$\lambda \frac{\partial P(x, y, h, \tau)}{\partial z} + \alpha_6 P(x, y, h, \tau) = 0. \quad (11.68)$$

Решение этой задачи может быть выполнено методом конечных интегральных преобразований по трем пространственным координатам как одновременно, так и последовательно.

В данном случае последний вариант предпочтительнее, так как для исключения координат x и y могут быть применены преобразования, использованные при решении стационарной задачи (11.10) – (11.16):

$$R(y, z, \tau) = \int_0^l t(x, y, z, \tau) \rho(x) W(x) dx. \quad (11.69)$$

Обратный переход выполняется по формуле

$$t(x, y, z, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(y, z, \tau) W(x)}{N}, \quad (11.70)$$

где значение N определяется формулой (11.26).

Функция $W(x)$ является решением (11.22) задачи (11.19) – (11.21).

Переходим к изображению задачи (11.61) – (11.68):

$$\frac{\partial R(y, z, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 R(y, z, \tau)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 R(y, z, \tau)}{\partial z^2} - \mu^2 R(y, z, \tau) \right); \quad (11.71)$$

$$R(y, z, 0) = F(y, z) = \int_0^l (f(x, y, z) - S(x, y, z) - t_{c1}) W(x) dx; \quad (11.72)$$

$$\lambda \frac{\partial R(0, z, \tau)}{\partial y} - \alpha_3 R(0, z, \tau) = 0; \quad (11.73)$$

$$\lambda \frac{\partial R(y, z, \tau)}{\partial y} + \alpha_4 R(y, z, \tau) = 0; \quad (11.74)$$

$$\lambda \frac{\partial R(y, 0, \tau)}{\partial z} - \alpha_5 R(y, 0, \tau) = 0; \quad (11.75)$$

$$\lambda \frac{\partial R(y, h, \tau)}{\partial z} + \alpha_6 R(y, h, \tau) = 0. \quad (11.76)$$

В свою очередь, задача (11.71) – (11.76) может быть решена с использованием конечного интегрального преобразования по координате y :

$$V(z, \tau) = \int_0^v R(y, z, \tau) \rho_1(y) K(y) dy, \quad (11.77)$$

с весовой функцией $\rho_1(y) = 1$ и формулой обратного перехода

$$R(y, z, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{V(z, \tau) K(y)}{D}, \quad (11.78)$$

где

$$D = \int_0^v \rho_1(y) K^2(y) dy. \quad (11.79)$$

Функция $K(y)$ является решением вспомогательной задачи (11.41) – (11.43).

Переходим к изображению задачи (11.71) – (11.76).

$$\frac{\partial V(z, \tau)}{\partial \tau} = a^2 \left(\frac{\partial^2 V(z, \tau)}{\partial z^2} - (\mu^2 + \eta^2) V(z, \tau) \right); \quad (11.80)$$

$$V(z, 0) = \int_0^v F(y, z) K(y) dy = \int_0^v \int_0^l (f(x, y, z) - S(x, y, z) - t_{c1}) W(x) K(y) dy dx; \quad (11.81)$$

$$\lambda \frac{\partial V(0, \tau)}{\partial z} - \alpha_5 V(0, \tau) = 0; \quad (11.82)$$

$$\lambda \frac{\partial V(h, \tau)}{\partial z} + \alpha_6 V(h, \tau) = 0. \quad (11.83)$$

В свою очередь, задача (11.80) – (11.83) может быть решена с использованием конечного интегрального преобразования по координате z :

$$G(\tau) = \int_0^h V(z, \tau) \rho_2(z) L(z) dz, \quad (11.84)$$

с весовой функцией $\rho_2(z) = 1$ и формулой обратного перехода

$$V(z, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{G(\tau) L(z)}{E}, \quad (11.85)$$

где

$$E = \int_0^h \rho_2(z) L^2(z) dz. \quad (11.86)$$

Функция $L(z)$ является решением вспомогательной задачи

$$\frac{d^2 L(z)}{dz^2} + \psi^2 L(z) = 0; \quad (11.87)$$

$$\lambda \frac{dL(0)}{dz} - \alpha_5 L(0) = 0; \quad (11.88)$$

$$\lambda \frac{dL(h)}{dz} + \alpha_6 L(h) = 0. \quad (11.89)$$

Решение ищется с точностью до постоянного множителя в виде:

$$L(z) = \sin(\psi z + \zeta), \quad (11.90)$$

причем числа ψ и ζ определяются из граничных условий (11.88), (11.89):

$$\zeta = a \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda \psi}{\alpha_5} \right); \quad (11.91)$$

числа ψ определяются как последовательные положительные корни уравнения

$$\alpha_6 \sin(\psi h + \zeta) + \lambda \psi \cos(\psi h + \zeta) = 0. \quad (11.92)$$

Переходим к изображению задачи (11.80) – (11.83).

$$\frac{dG(\tau)}{d\tau} = a^2 (\mu^2 + \eta^2 + \psi^2) G(\tau), \quad (11.93)$$

$$G(0) = \int_0^h V(z, 0) L(z) dz = \int_0^h \int_0^v \int_0^l (f(x, y, z) - S(x, y, z) - t_{c1}) W(x) K(y) L(z) dz dy dx. \quad (11.94)$$

Решение задачи (11.93) – (11.94) имеет вид:

$$G(\tau) = G(0) \exp(-a^2 (\mu^2 + \eta^2 + \psi^2) \tau). \quad (11.95)$$

Таким образом, решение задачи (11.1) – (11.8) имеет окончательный вид:

$$t(x, y, z, \tau) = t_{c1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{W_n(x) K_m(y) M_{m,n}(z)}{N_n D_m} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{W_n(x) K_m(y) L_k(z) G_{n,m,k}(\tau)}{N_n D_m E_k}. \quad (11.96)$$

12 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ В ЭЛЕМЕНТАХ ОБОРУДОВАНИЯ, ИМЕЮЩИХ ФОРМУ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН В СТАЦИОНАРНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ РЕЖИМЕ

Рассмотрим случай, когда постоянный тепловой поток подводится к торцу стержня или двум соседним торцам пластины, а поверхность стержня или плоские поверхности пластины омываются теплоносителем при свободной или вынужденной конвекции.

При выводе уравнения используются следующие допущения:

- температура теплоносителя по длине стержня или поверхности пластины не меняется;
- источники тепла в стержне или пластине отсутствуют;
- перепад температур в поперечном сечении стержня или по толщине пластины отсутствует;
- теплопроводность материала стержня или пластины не зависит от температуры;
- стержень или пластина имеют постоянное сечение.

Рассмотрим температурное поле стержня.

Выделим элементарную область длиной Δx по направлению движения теплового потока.

Запишем составляющие теплового баланса для элементарной области: Q_1 – тепловая мощность, подводимая теплопроводностью к элементарной области; Q_2 – тепловая мощность, отводимая теплопроводностью из элементарной области.

Тогда тепловая мощность, отдаваемая теплоносителю на элементарном участке, равна

$$Q_1 - Q_2 = \alpha f (t(x) - t_t), \quad (12.1)$$

где α – коэффициент теплоотдачи от поверхности стержня к теплоносителю; $f = \Pi \Delta x$ – омываемая площадь поверхности элементарной области; Π – периметр элементарной области; $t(x)$ – текущая температура стержня; t_t – температура теплоносителя; x – координата, направленная по длине стержня.

С другой стороны,

$$Q_1 - Q_2 = F (q_1 - q_2), \quad (12.2)$$

где F – площадь поперечного сечения стержня; q_1, q_2 – плотности тепловых потоков, соответственно подводимых к элементарной области и отводимых от нее теплопроводностью.

Устремляя Δx к нулю, имеем:

$$q_1 - q_2 = -\frac{dq(x)}{dx} \Delta x = -\frac{d}{dx} \left(-\lambda \frac{dt(x)}{dx} \right) dx = \lambda \frac{d^2 t(x)}{dx^2} dx. \quad (12.3)$$

Тогда

$$\lambda \frac{d^2 t(x)}{dx^2} F dx = \alpha \Pi (t(x) - t_t) dx. \quad (12.4)$$

Введя обозначения

$$T(x) = t(x) - t_t \quad \text{и} \quad k^2 = \frac{\alpha \Pi}{\lambda F}. \quad (12.5)$$

Окончательно получим:

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - k^2 T(x) = 0. \quad (12.6)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$T(x) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx). \quad (12.7)$$

При использовании краевых условий вида

$$-\lambda \frac{dT(0)}{dx} = q_0, \quad (12.8)$$

$$-\lambda \frac{dT(L)}{dx} = \alpha_t (t(L) - t_t), \quad (12.9)$$

где q_0 – входящий тепловой поток; L – длина стержня; α_t – торцевой коэффициент теплоотдачи.

Имеем:

$$C_1 = \frac{\alpha_t t_t + \frac{q_0}{\lambda k} (\alpha_t \operatorname{sh}(kL) + \lambda k \operatorname{ch}(kL))}{\alpha_t \operatorname{ch}(kL) + \lambda k \operatorname{sh}(kL)}; \quad (12.10)$$

$$C_2 = -\frac{q_0}{\lambda k}. \quad (12.11)$$

Теперь рассмотрим температурное поле пластины.

Сначала рассмотрим случай, когда тепловой поток подводится к одному из торцов пластины.

Обозначим толщину пластины h , ширину – s .

Выделим элементарную область размерами $\Delta x \times h$.

Запишем составляющие теплового баланса для выделенной элементарной области. Q_{x1} – тепловая мощность, подводимая теплопроводностью к элементарной области в направлении координаты x ; Q_{x2} – тепловая мощность, отводимая теплопроводностью из элементарной области в направлении координаты x .

Тогда тепловая мощность, отдаваемая теплоносителю на элементарном участке, равна

$$Q_{x1} - Q_{x2} = \alpha_1 f (t(x) - t_1) + \alpha_2 f (t(x) - t_2), \quad (12.12)$$

где α_1 и α_2 – коэффициенты теплоотдачи от наружных поверхностей пластины к теплоносителю; $f = \Delta x \times s$ – омываемая площадь поверхности элементарной области на каждой из плоскостей пластины; $t(x)$ – текущая температура пластины; t_1, t_2 – температуры теплоносителей; x – продольная координата.

С другой стороны:

$$Q_{x1} - Q_{x2} = F_x (q_{x1} - q_{x2}), \quad (12.13)$$

где $F_x = h \times s$ – площадь поперечного сечения элементарной области в направлении x ; q_{x1}, q_{x2} – плотности тепловых потоков, соответственно подводимых к элементарной области и отводимых от нее теплопроводностью.

Устремляя Δx к нулю, имеем:

$$q_{x1} - q_{x2} = -\frac{dq(x)}{dx} \Delta x = -\frac{d}{dx} \left(-\lambda \frac{dt(x)}{dx} \right) dx = \lambda \frac{d^2 t(x)}{dx^2} dx. \quad (12.14)$$

Тогда

$$\lambda \frac{d^2 t(x)}{dx^2} h dx s = (\alpha_1 (t(x) - t_1) + \alpha_2 (t(x) - t_2)) s dx. \quad (12.15)$$

Введя обозначения

$$k^2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h}; \quad m = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\lambda h}; \quad T = t(x) - \frac{m}{k^2}, \quad (12.16)$$

окончательно получим:

$$\frac{d^2 T(x)}{dx^2} - k^2 T(x) = 0. \quad (12.17)$$

При граничных условиях вида

$$-\lambda \frac{dT(0)}{dx} = q_{x0}; \quad (12.18)$$

$$-\lambda \frac{dT(L_x)}{dx} = \alpha_{xt} T(L_x), \quad (12.19)$$

где q_{x0} – входящий тепловой поток по направлению x ; L_x – длина пластины в направлении x ; α_{xt} – торцевой коэффициент теплоотдачи, получаем краевую задачу, имеющую решение:

$$T(x) = C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx). \quad (12.20)$$

C_1 и C_2 определяются из (12.18), (12.19):

$$C_2 = -\frac{q_{0x}}{\lambda k}; \quad (12.21)$$

$$C_1 = -\frac{C_2 (\lambda k + \alpha_{xt} \operatorname{th}(k L_x))}{\lambda k \operatorname{th}(k L_x) + \alpha_{xt}}. \quad (12.22)$$

Для моделирования температурного поля плоских элементов аппаратов, в которых присутствуют продольные тепловые потоки, вместо граничных условий (12.18), (12.19) можно принять граничные условия вида:

$$T(0) = t(0) - \frac{m}{k^2}; \quad (12.23)$$

$$\frac{dT(L_x)}{dx} = 0, \quad (12.24)$$

коэффициенты C_1 и C_2 будут равны:

$$C_1 = t(0) - \frac{m}{k^2}; \quad (12.25)$$

$$C_2 = -C_1 \operatorname{th}(k L_x). \quad (12.26)$$

Теперь рассмотрим случай, когда тепловой поток подводится к соседним торцам пластины.

В этом случае получаем двумерное температурное поле.

Выделим элементарную область размерами $\Delta x \times \Delta y \times h$.

Запишем составляющие теплового баланса для выделенной элементарной области: Q_{x1} – тепловая мощность, подводимая теплопроводностью к элементарной области в направлении координаты x ; Q_{x2} – тепловая мощность, отводимая теплопроводностью из элементарной области в направлении координаты x ; Q_{y1} – тепловая мощность, подводимая теплопроводностью к элементарной области в направлении координаты y ; Q_{y2} – тепловая мощность, отводимая теплопроводностью из элементарной области в направлении координаты y .

Тогда тепловая мощность, отдаваемая теплоносителю на элементарном участке, равна

$$Q_{x1} - Q_{x2} + Q_{y1} - Q_{y2} = (\alpha_1 + \alpha_2) f (t(x, y) - t_t), \quad (12.27)$$

где α_1 и α_2 – коэффициенты теплоотдачи от наружных поверхностей пластины к теплоносителю; $f = \Delta x \times \Delta y$ – омываемая площадь поверхности элементарной области на каждой из плоскостей пластины; $t(x, y)$ – текущая температура пластины; t_t – температура теплоносителя; x, y – координаты.

С другой стороны:

$$Q_{x1} - Q_{x2} = F_x (q_{x1} - q_{x2}); \quad Q_{y1} - Q_{y2} = F_y (q_{y1} - q_{y2}), \quad (12.28)$$

где $F_x = h \times \Delta y$; $F_y = h \times \Delta x$ – площади поперечного сечения элементарной области в направлениях x и y соответственно; $q_{x1}, q_{y1}, q_{x2}, q_{y2}$ – плотности тепловых потоков, соответственно подводимых к элементарной области и отводимых от нее теплопроводностью в соответствующих направлениях.

Устремляя одновременно Δx и Δy к нулю, имеем:

$$\begin{aligned} q_{x1} - q_{x2} &= -\frac{\partial q(x, y)}{\partial x} \Delta x = -\frac{\partial}{\partial x} \left(-\lambda \frac{\partial t(x, y)}{\partial x} \right) dx = \lambda \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial x^2} dx; \\ q_{y1} - q_{y2} &= -\frac{\partial q(x, y)}{\partial y} \Delta y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(-\lambda \frac{\partial t(x, y)}{\partial y} \right) dy = \lambda \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} dy. \end{aligned} \quad (12.29)$$

Тогда

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, y)}{\partial y^2} \right) h dx dy = (\alpha_1 + \alpha_2) (t(x, y) - t_t) dx dy. \quad (12.30)$$

Введя обозначения

$$T(x, y) = t(x, y) - t_t \quad \text{и} \quad k^2 = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{\lambda h}, \quad (12.31)$$

окончательно получим:

$$\frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} - k^2 T(x, y) = 0. \quad (12.32)$$

При граничных условиях вида

$$-\lambda \frac{\partial T(0, y)}{\partial x} = q_{x0}; \quad (12.33)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x, 0)}{\partial y} = q_{y0}; \quad (12.34)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(L_x, y)}{\partial x} = \alpha_{xt} T(L_x, y); \quad (12.35)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(x, L_y)}{\partial y} = \alpha_{yt} T(x, L_y), \quad (12.36)$$

где q_{x0} , q_{y0} – входящие тепловые потоки по направлениям x и y ; L_x , L_y – длины пластины в направлениях x и y ; α_{xt} , α_{yt} – торцевые коэффициенты теплоотдачи, получаем задачу, которая решается методом конечных интегральных преобразований.

Ядро интегрального преобразования, позволяющего исключить координату y , является решением вспомогательной задачи:

$$\frac{d^2 P(y)}{dy^2} + \mu^2 P(y) = 0 \quad (12.37)$$

с однородными граничными условиями

$$\frac{dP(0)}{dy} = 0, \quad (12.38)$$

$$-\lambda \frac{dP(L_y)}{dy} = \alpha_{y_l} P(L_y). \quad (12.39)$$

С точностью до постоянного множителя

$$P(y) = \cos(\mu y), \quad (12.40)$$

где μ – последовательные положительные корни уравнения

$$\mu \lambda \sin(\mu L_y) = \alpha_{y_l} \cos(\mu L_y). \quad (12.41)$$

Переход к изображениям выполняется по формуле

$$U(x) = \int_0^{L_y} T(x, y) \rho(y) P(y) dy, \quad (12.42)$$

где $\rho(y) = 1$.

Обратный переход выполняется по стандартной формуле

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(x) P(y)}{N}, \quad (12.43)$$

где суммирование ведется по значениям μ_n и

$$N = \int_0^{L_y} \rho(y) P^2(y) dy = \int_0^{L_y} \cos^2(\mu y) dy = \frac{1}{2\mu} (\mu L_y + \sin(\mu L_y) \cos(\mu L_y)). \quad (12.44)$$

Переходим к изображениям задачи (12.32) – (12.35):

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2} - v^2U(x) + \frac{q_{y0}}{\lambda} = 0, \quad v^2 = \mu^2 + k^2; \quad (12.45)$$

$$-\lambda \frac{dU(0)}{dx} = Q_{x0}; \quad (12.46)$$

$$-\lambda \frac{dU(L_x)}{dx} = \alpha_{xt}U(L_x), \quad (12.47)$$

где

$$Q_{x0} = \int_0^{L_y} q_{x0}P(y)dy = \frac{q_{x0}}{\mu} \sin(\mu L_y). \quad (12.48)$$

Решение задачи имеет вид:

$$U(x) = A \operatorname{sh}(vx) + B \operatorname{ch}(vx) + \frac{q_{y0}}{\lambda v^2}. \quad (12.49)$$

A и B определяются из краевых условий:

$$A = -\frac{Q_{x0}}{v\lambda}, \quad (12.50)$$

$$B = -\frac{A(\lambda v \operatorname{ch}(vL_x) + \alpha_{xt} \operatorname{sh}(vL_x)) + \frac{\alpha_{xt} q_{y0}}{\lambda v^2}}{\alpha_{xt} \operatorname{ch}(vL_x) + \lambda v \operatorname{sh}(vL_x)}. \quad (12.51)$$

Таким образом, все компоненты решения (12.43) определены.

13 ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ТЕРМИЧЕСКИ ТОНКИХ ТЕЛ

Термически тонким считается тело, тепловая проводимость которого значительно превышает тепловую проводимость от окружающих тел и сред к поверхности тела. При этом температурное поле тела близко к его среднеобъемной температуре.

В общем случае тепловая мощность внутренних источников тепла в теле тратится на изменение его теплосодержания и теплоотдачу к окружающим средам.

$$P = C_\tau \frac{dt(\tau)}{d\tau} + \sum_{i=1}^N \sigma_i (t(\tau) - t_i), \quad (13.1)$$

где P – тепловая мощность внутренних источников тепла, Вт; $t(\tau)$ – средняя температура тела, °С; C_T – полная теплоемкость тела, Дж/град; N – число сред, омывающих тело; t_i – температура i -й среды, °С; σ_i – тепловая проводимость между поверхностью тела и i -й средой, Вт/град.

Средняя температура тонкой пластины без внутренних источников тепла (тепловые проводимости и полная теплоемкость отнесены к 1 м^2), поверхности которой омываются средами с разными температурами, является решением уравнения

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} + t(\tau) \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{c R \rho} = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{c R \rho}, \quad (13.2)$$

$$t(0) = t_0. \quad (13.3)$$

Здесь $C_T = c R \rho$ – полная теплоемкость 1 м^2 пластины; $\sigma_i = \alpha_i$ – тепловая проводимость от i -й окружающей среды к 1 м^2 поверхности; α_1 и α_2 – соответственно коэффициенты теплоотдачи к средам с температурами t_1 и t_2 , Вт/($\text{м}^2 \cdot \text{°С}$); c , ρ – соответственно удельная теплоемкость, Дж/(кг · °С), и плотность, кг/ м^3 , материала пластины; R – толщина пластины, м.

Обозначив

$$K = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{c R \rho}; \quad S = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{c R \rho}, \quad (13.4)$$

имеем:

$$t(\tau) = \frac{S}{K} + \left(t_0 - \frac{S}{K} \right) \exp(-K\tau). \quad (13.5)$$

Средняя температура тонкой стенки цилиндрической трубы без внутренних источников тепла (тепловые проводимости и полная теплоемкость отнесены к 1 погонному метру), внутренняя и наружная поверхности которой омываются средами с разными температурами, является решением уравнения

$$\frac{dt(\tau)}{d\tau} + t(\tau) \frac{2(\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2)}{c(R_2^2 - R_1^2)\rho} = \frac{2(\alpha_1 R_1 t_1 + \alpha_2 R_2 t_2)}{c(R_2^2 - R_1^2)\rho}, \quad (13.6)$$

$$t(0) = t_0, \quad (13.7)$$

где R_1 и R_2 – соответственно внутренний и наружный радиусы трубы.

Обозначив

$$K = \frac{2(\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2)}{c(R_2^2 - R_1^2)\rho}; \quad S = \frac{2(\alpha_1 R_1 t_1 + \alpha_2 R_2 t_2)}{c(R_2^2 - R_1^2)\rho}, \quad (13.8)$$

имеем для уравнения (13.6) решение вида (13.5).

14 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ЖИДКОСТЬЮ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В РЕЖИМЕ ИДЕАЛЬНОГО ВЫТЕСНЕНИЯ ПО КАНАЛУ С УЧЕТОМ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ

Приводятся вывод и решение нестационарного уравнения переноса тепла жидкостью, движущейся в режиме идеального вытеснения по каналу, образованному N поверхностями (рис. 14.1), температуры которых меняются по длине канала и во времени. Учитываются конвективная и молекулярная составляющие тепловых потоков.

Рассмотрим случай, когда движущаяся жидкость омывает стенки канала, образованные N различными поверхностями с разными температурами. Частными случаями являются движение теплоносителя по кольцевому каналу рубашки емкостного аппарата или по межтрубному пространству кожухотрубчатого аппарата.

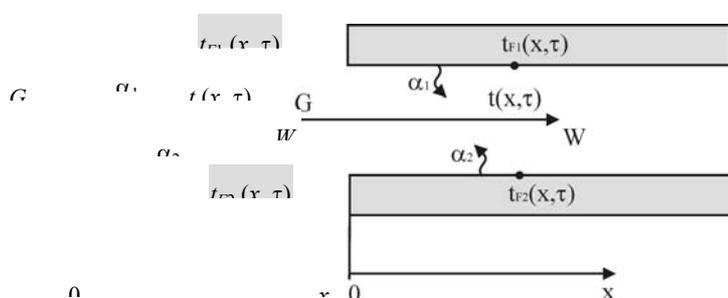


Рис. 14.1 Схема канала, образованного двумя поверхностями с различными температурами

Возможно использование приводимой методики и полученных уравнений для математического моделирования температурного поля жидкости, движущейся по каналу, заполненному насыпным слоем твердых гранул сорбента или катализатора при наличии теплообмена как с гранулами, так и со стенками канала.

При выводе уравнения используются следующие допущения:

- температура жидкости по сечению канала не меняется;
- жидкость несжимаемая;
- теплофизические характеристики жидкости не зависят от температуры;
- канал имеет постоянное сечение.

Приняты следующие обозначения:

x – пространственная координата по направлению движения потока;

τ – время;

$t(x, \tau)$ – текущая температура жидкости;

G – массовый расход жидкости;

c – теплоемкость жидкости;

q_i – плотность теплового потока через стенку i -го канала;

$\Delta F_i = \Pi_i \Delta x$ – площадь i -й стенки канала элементарной области;

Π_i – омываемый периметр i -й стенки канала;

α_i – коэффициент конвективной теплоотдачи от i -й стенки канала к жидкости;

$t_{Fi}(x, \tau)$ – температура i -й стенки канала.

Выделим элементарную область длиной Δx по направлению движения потока.

Запишем составляющие теплового баланса для элементарной области.

Тепло, привносимое потоком жидкости за время $\Delta \tau$

$$Q_p = G c t(x, \tau) d\tau - \lambda \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} d\tau S; \quad (14.1)$$

тепло, уносимое потоком жидкости за время $\Delta \tau$

$$Q_u = G c t(x + dx, \tau) d\tau - \lambda \frac{\partial t(x + dx, \tau)}{\partial x} d\tau S; \quad (14.2)$$

тепло, отдаваемое элементарной области i -й поверхностью

$$Q_i = q_i dF_i = \alpha_i (t_{Fi}(x, \tau) - t(x, \tau)) dF_i d\tau; \quad (14.3)$$

теплота, привносимая дополнительными источниками тепла

$$Q_d = q_d S dx d\tau, \quad (14.4)$$

где q_d – удельная мощность дополнительных источников тепла; S – площадь сечения канала.

Изменение теплосодержания жидкости в элементарной области за время dt :

$$Q = S dx \rho c (t(x, \tau + d\tau) - t(x, \tau)), \quad (14.5)$$

где ρ – плотность жидкости.

Изменение теплосодержания жидкости обусловлено результирующим количеством тепла, подведенным к жидкости в элементарной области:

$$Q = Q_p + Q_u + \sum_i Q_i \quad (14.6)$$

или

$$\begin{aligned} S dx \rho c (t(x, \tau + d\tau) - t(x, \tau)) = G c t(x, \tau) d\tau - \lambda \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} d\tau S - G c t(x + dx, \tau) d\tau + \\ + \lambda \frac{\partial t(x + dx, \tau)}{\partial x} d\tau S + q_d S dx d\tau + \sum_i \alpha_i (t_{Fi}(x, \tau) - t(x, \tau)) \Pi_i dx d\tau. \end{aligned} \quad (14.7)$$

Разделив уравнение почленно на произведение $dx d\tau$ и выполнив предельные переходы, получим:

$$S \rho c \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \lambda S \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} - G c \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} + q_d S + \sum_i \alpha_i (t_{Fi}(x, \tau) - t(x, \tau)) \Pi_i. \quad (14.8)$$

Далее, поделив уравнение почленно на произведение $S \rho c$ и перегруппировав слагаемые, получим окончательный вид уравнения:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} - a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2} + W \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} + K t(x, \tau) = P(x, \tau), \quad (14.9)$$

где $a = \frac{\lambda}{c \rho}$ – температуропроводность жидкости; $W = \frac{G}{S \rho}$ – скорость движения жидкости;

$$K = \frac{\sum_i \alpha_i \Pi_i}{S \rho c}; \quad P(x, \tau) = \frac{q_d S + \sum_i \alpha_i \Pi_i t_{Fi}(x, \tau)}{S \rho c}; \quad i = 1, \dots, N. \quad (14.10)$$

Используя условия однозначности

$$t(0, \tau) = t_0(\tau); \quad t(x, 0) = f(x); \quad \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = 0, \quad (14.11)$$

находим решение задачи (14.9) – (14.11).

Решение ищем в виде

$$t(x, \tau) = \exp(\phi x + \varphi \tau) u(x, \tau), \quad (14.12)$$

где

$$\phi = -K - \frac{W^2}{4a}; \quad \varphi = \frac{W}{2a}. \quad (14.13)$$

Тогда

$$\frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 u(x, \tau)}{\partial x^2} + \frac{P(x, \tau)}{\exp(\phi x + \varphi \tau)}, \quad 0 \leq x \leq r, \quad 0 \leq \tau, \quad (14.14)$$

$$u(x, 0) = \frac{f(x)}{\exp(\phi x)}, \quad u(0, \tau) = \frac{t_0(\tau)}{\exp(\varphi \tau)}, \quad \frac{\partial u(r, \tau)}{\partial x} + \phi u(r, \tau) = 0. \quad (14.15)$$

Вводим конечное интегральное преобразование вида

$$T(\tau) = \int_0^r u(x, \tau) S(x) dx, \quad (14.16)$$

где $S(x)$ – ядро интегрального преобразования, являющееся решением вспомогательной задачи

$$\frac{d^2 S(x)}{dx^2} = -\mu^2 S(x); \quad (14.17)$$

$$S(0) = 0; \quad \frac{dS(r)}{dx} + \phi S(r) = 0; \quad (14.18)$$

$$S_n(x) = \sin(\mu_n x), \quad (14.19)$$

где μ_n – последовательные положительные корни уравнения

$$\mu \cos(\mu r) + \phi \sin(\mu r) = 0. \quad (14.20)$$

Весовая функция в преобразовании (14.16) для уравнения (14.14) равна 1.

Обратный переход выполняется по формуле

$$u(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T_n(\tau) S_n(x)}{Z_n}, \quad (14.21)$$

где

$$Z_n = \int_0^r S_n^2(x) dx = 0,5 \left(r - \frac{\sin(\mu_n r) \cos(\mu_n r)}{\mu_n} \right). \quad (14.22)$$

Переход к изображениям позволяет найти функцию $T(\tau)$ как решение задачи:

$$\frac{dT(\tau)}{d\tau} = -a\mu^2 T(\tau) + \frac{a\mu t_0(\tau)}{\exp(\phi\tau)} + \int_0^r \frac{P(x, \tau) S(x)}{\exp(\phi\tau + \phi x)} dx, \quad (14.23)$$

$$T(0) = \int_0^r \frac{f(x) S(x)}{\exp(\phi x)} dx.$$

$$T(\tau) = \exp(-a\mu^2 \tau) \left[\int_0^r \frac{f(x) S(x)}{\exp(\phi x)} dx + \int_0^{\tau} \exp(a\mu^2 \tau) \left(\frac{a\mu t_0(\tau)}{\exp(\phi\tau)} + \int_0^r \frac{P(x, \tau) S(x)}{\exp(\phi\tau + \phi x)} dx \right) d\tau \right]. \quad (14.24)$$

Если молекулярным переносом тепла можно пренебречь, нестационарное уравнение переноса тепла жидкостью, движущейся в режиме идеального вытеснения по каналу, образованному N поверхностями, упрощается:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} + W \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} + K t(x, \tau) = F(x, \tau), \quad (14.25)$$

где W – скорость движения жидкости;

$$K = \frac{\sum \alpha_i \Pi_i}{S_{\text{pc}}}; \quad F(x, \tau) = \frac{q_d S + \sum \alpha_i \Pi_i t_{Fi}(x, \tau)}{S_{\text{pc}}}; \quad i = 1, \dots, N. \quad (14.26)$$

$$t(0, \tau) = t_0(\tau); \quad t(x, 0) = f(x). \quad (14.27)$$

При моделировании температурных полей потоков как совокупностей температурных полей элементарных областей возможно использование приближенного решения задачи (14.25) – (14.27), полученного при замене частной производной $\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau}$ конечно-разностным аналогом:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} \approx \frac{t(x, \tau) - t(x, \tau - d\tau)}{d\tau}. \quad (14.28)$$

При этом для фиксированного значения времени $d\tau$ внутри каждого временного интервала температурное поле потока является функцией только координаты x и описывается уравнением:

$$\frac{dt(x)}{dx} + Pt(x) = V(x), \quad (14.29)$$

где

$$P = \frac{K d\tau + 1}{W d\tau}; \quad V(x) = \frac{1}{W} \left(F(x, d\tau) + \frac{f(x)}{d\tau} \right), \quad (14.30)$$

$t_0(x)$ – температурное поле теплоносителя в элементарной области в начальный момент.

При начальном условии вида $t(0) = t_0$ имеем решение уравнения (14.29):

$$t(x) = \exp(-Px) \left(t_0 + \int_0^x V(\xi) \exp(P\xi) d\xi \right). \quad (14.31)$$

Средняя температура жидкости на участке длиной Δx равна

$$\bar{t} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} t(x) dx = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} \exp(-Px) \left(t_0 + \int_0^x V(\xi) \exp(P\xi) d\xi \right) dx. \quad (14.32)$$

Если канал образован одной стенкой замкнутого периметра с температурой $t_F(x, \tau)$, то

$$K = \frac{\alpha \Pi}{Sp c}; \quad F(x, \tau) = \frac{\alpha \Pi t_F(x, \tau)}{Sp c}, \quad (14.33)$$

где Π – периметр сечения канала; α – коэффициент теплоотдачи.

В стационарном случае задача упрощается:

$$\frac{dt(x)}{dx} + Kt(x) = S(x), \quad (14.34)$$

где

$$K = \frac{\alpha_1 \Pi_1 + \alpha_2 \Pi_2}{Gc}; \quad S(x) = \frac{\alpha_1 \Pi_1 t_{F1}(x) + \alpha_2 \Pi_2 t_{F2}(x)}{Gc}. \quad (14.35)$$

При начальном условии вида $t(0) = t_0$ решение уравнения (14.34) имеет вид:

$$t(x) = \exp(-Kx) \left(t_0 + \int_0^x S(x) \exp(Kx) dx \right). \quad (14.36)$$

Если температуры стенок постоянны, т.е. $t_{F1}(x) = \text{const} = t_{F1}$ и $t_{F2}(x) = \text{const} = t_{F2}$, то

$$t(x) = V + (t_0 - V) \exp(-Kx), \quad (14.37)$$

где

$$V = \frac{\alpha_1 \Pi_1 t_{F1}(x) + \alpha_2 \Pi_2 t_{F2}(x)}{\alpha_1 \Pi_1 + \alpha_2 \Pi_2}. \quad (14.38)$$

Средняя температура жидкости на участке длиной Δx равна

$$\bar{t} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} t(x) dx = V + \frac{(t_0 - V)}{K \Delta x} (1 - \exp(-Kx)). \quad (14.39)$$

Если канал образован одной стенкой замкнутого периметра с температурой $t_F(x)$, то

$$t(x) = \exp(-K_1 x) \left(t_0 + K_1 \int_0^x t_F(x) \exp(K_1 x) dx \right), \quad (14.40)$$

где

$$K_1 = \frac{\alpha \Pi}{Gc}.$$

Если температура стенки постоянна, т.е. $t_F(x) = \text{const} = t_F$, то

$$t(x) = t_F + (t_0 - t_F) \exp(-K_1 x), \quad (14.41)$$

а средняя температура жидкости на участке длиной Δx равна

$$\bar{t} = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} t(x) dx = t_F + \frac{(t_0 - t_F)}{K_1 \Delta x} (1 - \exp(-K_1 \Delta x)). \quad (14.42)$$

15 АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Решение ряда прикладных инженерных задач в области процессов и аппаратов химических технологий может быть основано на математическом моделировании температурных полей в рабочих объемах и конструкционных элементах промышленного оборудования.

Использование аналитических решений нелинейных задач теплопроводности существенно расширяет возможности данного подхода и повышает качественные характеристики результатов математического моделирования.

При математическом элементарной области температурное поле в начале элементарного интервала времени известно, поэтому теплопротекает тепловой процесс, как функция пространственных координат, а не температуры. Это дает возможность получить аналитические решения ряда нелинейных задач теплопроводности.

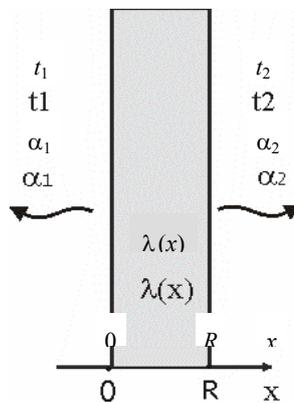
Рассмотрим решение нелинейных задач стационарной теплопроводности для тел канонической формы в декартовых и цилиндрических координатах.

Температурное поле моделируется решением следующей задачи теплопроводности:

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{dt(x)}{dx} \right) = 0, \quad 0 \leq x \leq R; \quad (15.1)$$

$$\lambda(0) \frac{dt(0)}{dx} - \alpha_1 (t(0) - t_1) = 0; \quad (15.2)$$

$$\lambda(R) \frac{dt(R)}{dx} + \alpha_2 (t(R) - t_2) = 0. \quad (15.3)$$



моделировании температурного поля в начале элементарного интервала проводность среды, в которой формально может быть представлена, ординат, а не температуры. Это дает решения ряда нелинейных задач

задач стационарной теплопроводности декартовых и цилиндрических коор-

неограниченной пластины (рис. 15.1) задачи теплопроводности:

Здесь $t(x)$ – температурное поле пластины; x – пространственная координата; R – толщина пластины; $\lambda(x)$ – коэффициент теплопроводности пластины как функция координаты; α_1, α_2 – коэффициенты конвективной теплоотдачи; t_1, t_2 – температуры окружающей среды.

Решение задачи (15.1) – (15.3) осуществляется путем интегрирования (15.1):

$$\lambda(x) \frac{dt(x)}{dx} = A. \quad (15.4)$$

Это уравнение, в свою очередь, так же может быть проинтегрировано:

$$\int_0^x t'(x) dx = A \int_0^x \frac{dx}{\lambda(x)}. \quad (15.5)$$

Отсюда получаем общее решение уравнения (15.1):

$$t(x) = t(0) + A \int_0^x \frac{dx}{\lambda(x)}. \quad (15.6)$$

Используя граничные условия (15.2) – (15.3), находим значения $t(0)$ и A .

В результате

$$t(x) = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \int_0^R \frac{dx}{\lambda(x)} + \frac{1}{\alpha_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1} + \int_0^x \frac{dx}{\lambda(x)} \right), \quad (15.7)$$

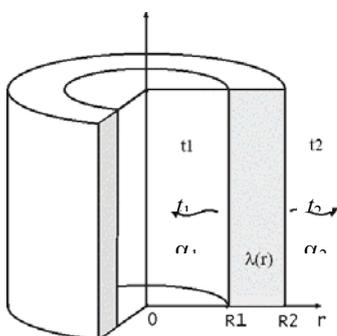
где $t(x)$ – искомое распределение температуры по толщине пластины.

Аналогично моделируется поле температур в полом неограниченном цилиндре (рис. 15.2):

$$\frac{d}{dr} \left(\lambda(r) r \frac{dt(r)}{dr} \right) = 0, \quad R_1 \leq r \leq R_2; \quad (15.8)$$

$$\lambda(R_1) \frac{dt(R_1)}{dr} - \alpha_1 (t(R_1) - t_1) = 0; \quad (15.9)$$

$$\lambda(R_2) \frac{dt(R_2)}{dr} + \alpha_2 (t(R_2) - t_2) = 0. \quad (15.10)$$



Здесь $t(r)$ – температурное поле цилиндра; r – пространственная координата; R_1, R_2 – соответственно внутренний и наружный радиусы цилиндра; $\lambda(r)$ коэффициент теплопроводности цилиндра как функция координаты; α_1, α_2 – коэффициенты конвективной теплоотдачи; t_1, t_2 – температуры окружающей среды.

Решение задачи (15.8) – (15.10) осуществляется путем интегрирования (15.8):

$$\lambda(r)r \frac{dt(r)}{dr} = A. \quad (15.11)$$

Это уравнение, в свою очередь, также может быть проинтегрировано:

$$\int_{R_1}^r t'(r) dr = A \int_{R_1}^r \frac{dr}{r\lambda(r)}. \quad (15.12)$$

Отсюда получаем общее решение уравнения (15.8):

$$t(r) = t(R_1) + A \int_{R_1}^r \frac{dr}{r\lambda(r)}. \quad (15.13)$$

Используя граничные условия (15.9) – (15.10), находим значения $t(R_1)$ и A .

В результате

$$t(r) = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r\lambda(r)} + \frac{1}{\alpha_2 R_2}} \left(\frac{1}{\alpha_1 R_1} + \int_{R_1}^r \frac{dr}{r\lambda(r)} \right). \quad (15.14)$$

Полученные аналитические решения нелинейных задач стационарной теплопроводности не только имеют самостоятельную прикладную ценность, но и входят в качестве составных частей в аналитические решения соответствующих нелинейных задач нестационарной теплопроводности.

15.1 Решение нелинейной нестационарной задачи теплопроводности

Теоретическая возможность использования метода конечных интегральных преобразований для решения нелинейных задач не исключается, но даже в специальной математической литературе можно встретить отказы от рассмотрения таких решений ввиду их чрезмерной сложности.

Однако, для ряда прикладных инженерных задач, связанных с расчетом технологического оборудования химической промышленности, могут быть получены аналитические решения нелинейных задач теплопроводности.

Рассмотрим задачу с однородными граничными условиями для случая, когда теплопроводность среды, в которой протекает тепловой процесс, может быть представлена как функция пространственных координат.

$$c\rho \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x) \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right), \quad 0 \leq x \leq R, \quad \tau > 0; \quad (15.15)$$

$$t(x, 0) = f(x); \quad (15.16)$$

$$\lambda(0) \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} - \alpha_1 t(0, \tau) = 0; \quad (15.17)$$

$$\lambda(R) \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial x} + \alpha_2 t(R, \tau) = 0. \quad (15.18)$$

Формула перехода к изображениям:

$$U(\mu, \tau) = \int_0^R t(x, \tau) W(x, \mu) dx. \quad (15.19)$$

Весовая функция, равная 1, опущена.

Обратный переход осуществляется по формуле:

$$t(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{U(\mu_n, \tau) W(x, \mu_n)}{Z_n}, \quad (15.20)$$

где

$$Z_n = \int_0^R W^2(x, \mu) dx. \quad (15.21)$$

Ядро интегрального преобразования $W(x, \mu)$ является решением вспомогательной задачи (здесь μ – параметр):

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{dW(x, \mu)}{dx} \right) + \mu^2 W(x, \mu) = 0, \quad 0 \leq x \leq R; \quad (15.22)$$

$$\lambda(0)\frac{dW(0,\mu)}{dx} - \alpha_1 W(0,\mu) = 0; \quad (15.23)$$

$$\lambda(R)\frac{dW(R,\mu)}{dx} + \alpha_2 W(R,\mu) = 0. \quad (15.24)$$

Рассмотрим случай, когда

$$\lambda(x) = kx + b. \quad (15.25)$$

Тогда

$$(kx + b)W'' + kW' + \mu^2 W = 0. \quad (15.26)$$

С точностью до постоянного множителя

$$W(x,\mu) = J_0\left(2\frac{\mu}{k}\sqrt{kx+b}\right) + CY_0\left(2\frac{\mu}{k}\sqrt{kx+b}\right). \quad (15.27)$$

$$\frac{dW(x,\mu)}{dx} = -\frac{\mu}{\sqrt{kx+b}} \left(J_1\left(2\frac{\mu}{k}\sqrt{kx+b}\right) + CY_1\left(2\frac{\mu}{k}\sqrt{kx+b}\right) \right). \quad (15.28)$$

С и μ определяются из граничных условий (15.23), (15.24):

$$C = \frac{\alpha_1 J_0\left(2\frac{\mu}{k}\sqrt{b}\right) - \frac{\mu}{\sqrt{b}} J_1\left(2\frac{\mu}{k}\sqrt{b}\right)}{\alpha_1 Y_0\left(2\frac{\mu}{k}\sqrt{b}\right) + \frac{\mu}{\sqrt{b}} Y_1\left(2\frac{\mu}{k}\sqrt{b}\right)}; \quad (15.29)$$

μ – последовательные положительные корни уравнения

$$\alpha_2 \left(J_0\left(2\frac{\mu}{k}\sqrt{kR+b}\right) + CY_0\left(2\frac{\mu}{k}\sqrt{kR+b}\right) \right) - \mu\sqrt{kR+b} \left(J_1\left(2\frac{\mu}{k}\sqrt{kR+b}\right) + CY_1\left(2\frac{\mu}{k}\sqrt{kR+b}\right) \right) = 0. \quad (15.30)$$

Применяя преобразование (15.19) к задаче (15.15) – (15.18), переходим к изображениям:

$$c\rho \frac{dU(\mu_n, \tau)}{d\tau} + \mu_n^2 U(\mu_n, \tau) = 0; \quad (15.31)$$

$$U(\mu_n, 0) = \int_0^R f(x) W(x, \mu_n) dx. \quad (15.32)$$

Решением задачи (15.31) – (15.32) является функция

$$U(\mu_n, \tau) = U(\mu_n, 0) \exp\left(-\frac{\mu_n^2}{c\rho} \tau\right). \quad (15.33)$$

Теперь рассмотрим задачу с однородными граничными условиями для случая, когда теплопроводность среды, в которой протекает тепловой процесс, может быть представлена как функция температуры.

$$c\rho \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(t(x, \tau)) \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right); \quad 0 \leq x \leq R; \quad \tau > 0; \quad (15.34)$$

$$t(x, 0) = \varphi(x); \quad (15.35)$$

$$\lambda(t(0, \tau)) \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} - \alpha_0 t(0, \tau) = 0; \quad (15.36)$$

$$\lambda(t(R, \tau)) \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial x} + \alpha_R t(R, \tau) = 0. \quad (15.37)$$

Здесь x – пространственная координата; τ – время; $t(x, \tau)$ – температурное поле; $\lambda(t)$ – коэффициент теплопроводности, являющийся функцией температуры; c, ρ – соответственно теплоемкость и плотность вещества; α_0, α_R – коэффициенты конвективной теплоотдачи от внешних поверхностей в окружающую среду; R – координата границы области.

Для исключения пространственной координаты x используется стандартная формула перехода к изображениям:

$$u(\mu, \tau) = \int_0^R t(x, \tau) w(x, \mu) dx \quad (15.38)$$

с формулой обратного перехода

$$t(x, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u(\mu_n, \tau) w(x, \mu_n)}{s_n}. \quad (15.39)$$

Ядро интегрального преобразования $w(x, \mu)$ является решением задачи, определяемым с точностью до постоянного множителя (здесь μ – параметр):

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(w(x)) \frac{dw(x)}{dx} \right) + \mu^2 w(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq R; \quad (15.40)$$

$$\lambda(w(0)) \frac{dw(0)}{dx} - \alpha_0 w(0) = 0; \quad (15.41)$$

$$\lambda(w(R)) \frac{dw(R)}{dx} + \alpha_R w(R) = 0. \quad (15.42)$$

Уравнение (15.40) является дифференциальным уравнением вида

$$(\lambda(w)w')' + \mu^2 w = 0, \quad (15.43)$$

или

$$\lambda(w) w'' + \lambda'(w) w'^2 + \mu^2 w = 0. \quad (15.44)$$

Пусть

$$p(w) = w'^2(x). \quad (15.45)$$

Тогда

$$p' + G(w)p + H(w) = 0, \quad (15.46)$$

где

$$G(w) = 2 \frac{\lambda'(w)}{\lambda(w)}; \quad H(w) = 2 \frac{\mu^2 w}{\lambda(w)}. \quad (15.47)$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$p(w) = \exp(-F) \left(\eta - \int_{\xi}^w H(w) \exp(F) dw \right), \quad (15.48)$$

где

$$F(w) = \int_{\xi}^w G(w) dw, \quad p(\xi) = \eta. \quad (15.49)$$

$$s_n = \int_0^R w^2(x, \mu_n) dx. \quad (15.50)$$

В изображениях задача имеет простой вид:

$$c\rho \frac{\partial u(\mu, \tau)}{\partial \tau} + \mu^2 u(\mu, \tau) = 0, \quad (15.51)$$

$$u(\mu_n, 0) = \int_0^R \varphi(x) w(x, \mu_n) dx. \quad (15.52)$$

15.2 Об использовании конечно-разностного аналога для приближенного решения нестационарной задачи теплопроводности

Другой подход к решению нелинейной задачи теплопроводности может быть основан на дискретизации временной координаты и использовании конечно-разностного аналога частной производной температуры по времени.

Рассмотрим нелинейное неоднородное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial t(x, \tau)}{\partial x} \right) + u(x, \tau) \quad (15.53)$$

с произвольным начальным условием (15.35) и однородными граничными условиями:

$$\lambda(0) \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} - \alpha_0 t(0, \tau) = 0; \quad (15.54)$$

$$\lambda(R) \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial x} + \alpha_R t(R, \tau) = 0. \quad (15.55)$$

Интервал времени $[0, T]$ разделим на n равных частей точками $\tau_i = ih; i=1, 2, \dots, n; h=T/n$, и положим $t(x, \tau_i) = t_i(x)$.

Производную по времени заменим конечно-разностным аналогом:

$$\frac{\partial t(x, \tau_i)}{\partial \tau} \approx \frac{t_{i+1}(x) - t_i(x)}{h}. \quad (15.56)$$

В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $t_i(x)$, которые являются приближенными значениями функции $t(x, \tau_i)$.

Эта система уравнений имеет вид:

$$a(x) \frac{d^2 t_{i+1}(x)}{dx^2} + \frac{\partial a(x)}{\partial x} \frac{dt_{i+1}(x)}{dx} = \frac{t_{i+1}(x) - t_i(x)}{h} - u(x, \tau_{i+1}). \quad (15.57)$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \chi(x) \frac{dy(x)}{dx} - \omega(x)y(x) = \theta(x), \quad (15.58)$$

где

$$\chi(x) = \frac{a'(x)}{a(x)}; \quad \omega(x) = \frac{1}{a(x)h}; \quad \theta(x) = -\frac{t_i(x)}{a(x)h} - \frac{u(x, \tau_i)}{a(x)}. \quad (15.59)$$

Однородное уравнение

$$\frac{d^2 \xi(x)}{dx^2} + \chi(x) \frac{d\xi(x)}{dx} - \omega(x)\xi(x) = 0 \quad (15.60)$$

заменой $\frac{d\xi(x)}{dx} = \xi(x)v(x)$ сводится к уравнению Риккарти

$$\frac{dv(x)}{dx} + v^2(x) + \chi(x)v(x) = \omega(x). \quad (15.61)$$

Оно имеет точные решения для ряда функций $\omega(x)$, которыми может быть аппроксимирована функция $\frac{1}{a(x)h}$.

Тогда

$$\xi(x) = \xi(x_0) \exp \left(\int_{x_0}^x v(x) dx \right), \quad (15.62)$$

а функция $y(x)$ выражается через фундаментальную систему решений $\xi_1(x)$ и $\xi_2(x)$:

$$y(x) = \xi_2(x) \int \frac{\xi_1(x)\theta(x)}{W(x)} dx - \xi_1(x) \int \frac{\xi_2(x)\theta(x)}{W(x)} dx + C_1 \xi_1(x) + C_2 \xi_2(x), \quad (15.63)$$

где

$$W(x) = \xi_1(x) \frac{d\xi_2(x)}{dx} - \xi_2(x) \frac{d\xi_1(x)}{dx}. \quad (15.64)$$

Таким образом, расчет нестационарного температурного поля выполняется последовательно для моментов времени τ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ по решению задачи (15.58) с начальным условием, соответствующим температурному полю в конце предыдущего временного интервала. Для первого интервала используется начальное распределение исходной задачи.

16 РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При математическом моделировании температурных полей, как правило, основным источником погрешностей служат значения конвективных коэффициентов теплоотдачи, входящие в граничные условия третьего рода задачи теплопроводности.

Коэффициент теплоотдачи является комплексной характеристикой интенсивности теплообмена теплоотдающей (тепловоспринимающей) поверхности и омывающего ее потока жидкости (газа). Он зависит от большого количества физических, геометрических и режимных параметров теплообменного процесса (10 и более). Поэтому вывод прямых аналитических зависимостей для расчета коэффициентов конвективной теплоотдачи на основе фундаментальных знаний о природе процессов теплопереноса в пространстве не представляется возможным.

Существуют различные возможности для определения численных значений коэффициентов конвективной теплоотдачи в конкретных условиях протекания теплообменного процесса.

Классическая инженерная методика расчета коэффициентов конвективной теплоотдачи, базирующаяся на теории подобия, основана на использовании критериальных уравнений алгебраического типа, обобщающих экспериментальные данные по различным веществам, выступающим в роли теплоносителей, для каждого набора условий протекания теплообменного процесса. Поэтому использование критериальных уравнений, являющихся по сути результатом многомерной аппроксимации, приводит в каждом конкретном расчете к погрешностям, не поддающимся оценке. Как правило, погрешность расчета

коэффициентов конвективной теплоотдачи по критериальным уравнениям составляет не менее 30...50 %.

Другой путь связан с непосредственным измерением температурных полей в лабораторных или промышленных условиях на действующем оборудовании для исследуемых условий протекания теплообменных процессов и видов теплоносителей. По результатам измерений температурных полей могут быть вычислены локальные значения коэффициентов теплоотдачи.

Возможно аналитическое определение коэффициента теплоотдачи по результатам экспериментальных исследований путем решения обратной задачи теплопроводности.

В качестве иллюстрации такого подхода (для декартовых координат) рассмотрим процесс конвективного теплообмена плоской неограниченной пластины с окружающей средой, имеющей постоянную температуру.

Пусть измеряется температура во времени в ряде точек по толщине пластины. Температурное поле такой пластины описывается решением следующей задачей теплопроводности:

$$\frac{\partial t(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq R, \quad \tau \geq 0, \quad (16.1)$$

с начальным условием

$$t(x, 0) = t_0 = \text{const}, \quad (16.2)$$

и граничными условиями

$$\lambda \frac{\partial t(R, \tau)}{\partial x} + \alpha (t(R, \tau) - t_c) = 0, \quad (16.3)$$

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (16.4)$$

Здесь x – координата, направленная по нормали к поверхности пластины; τ – время; $t(x, \tau)$ – температурное поле пластины; $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности материала пластины; λ, c, ρ – теплопроводность, теплоемкость и плотность материала пластины соответственно; t_0 – начальная температура пластины; t_c – температура окружающей среды; R – полутолщина пластины; α – коэффициент теплоотдачи.

Введем замену переменной

$$T(x, \tau) = t(x, \tau) - t_c, \quad (16.5)$$

позволяющую перейти к задаче с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial T(x, \tau)}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 T(x, \tau)}{\partial x^2}, \quad (16.6)$$

$$T(x, 0) = T_0 = t_0 - t_c, \quad (16.7)$$

$$\lambda \frac{\partial T(R, \tau)}{\partial x} + \alpha T(R, \tau) = 0, \quad (16.8)$$

$$\frac{\partial T(0, \tau)}{\partial x} = 0. \quad (16.9)$$

Применим к этой задаче конечное интегральное преобразование

$$W(\tau) = \int_0^R T(x, \tau) \rho S(x) dx, \quad (16.10)$$

причем весовая функция $\rho = 1$, а функция $S(x)$, являющаяся ядром интегрального преобразования, определяется как решение вспомогательной задачи Штурма–Лиувилля:

$$\frac{d^2 S(x)}{dx^2} + \mu^2 S(x) = 0; \quad (16.11)$$

$$\lambda \frac{dS(R)}{dx} + \alpha S(R) = 0; \quad (16.12)$$

$$\frac{dS(0)}{dx} = 0. \quad (16.13)$$

Решение этой задачи с точностью до постоянного множителя имеет вид:

$$S(x) = \sin(\mu x + \varphi). \quad (16.14)$$

Тогда

$$\frac{dS(x)}{dx} = \mu \cos(\mu x + \varphi). \quad (16.15)$$

Из граничного условия (16.13)

$$\mu \cos(\varphi) = 0, \quad (16.16)$$

откуда (минимальный положительный корень)

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad (16.17)$$

следовательно:

$$S(x) = \cos(\mu x). \quad (16.18)$$

Из граничного условия (16.12) имеем:

$$-\lambda \mu \sin(\mu R) + \alpha \cos(\mu R) = 0, \quad (16.19)$$

откуда в конечном итоге и определяется искомый коэффициент теплоотдачи:

$$\alpha = \lambda \mu \operatorname{tg}(\mu R). \quad (16.20)$$

Выполняем переход к изображениям:

$$\frac{dW(\tau)}{d\tau} + a\mu^2 W(\tau) = 0; \quad (16.21)$$

изображение начального условия (16.7):

$$W(0) = \int_0^R T_0 \cos(\mu x) dx = \frac{T_0}{\mu} \sin(\mu R). \quad (16.22)$$

Решение задачи (16.21) – (16.22) в изображениях:

$$W(\tau) = W(0) \exp(-\mu^2 a \tau) = \frac{T_0}{\mu} \sin(\mu R) \exp(-\mu^2 a \tau). \quad (16.23)$$

Изображение температурного профиля находим по формуле:

$$W(\tau) = \int_0^R T_i \cos(\mu x) dx, \quad (16.24)$$

где $T_i = T(x_i, \tau)$ – массив экспериментальных значений температур; $i = 1, 2, \dots, N$ – номер точки измерения температуры.

От точности вычисления этого интеграла, естественно, зависит погрешность конечного результата. При использовании численной схемы интегрирования не ниже третьего порядка точности погрешность расчета коэффициента теплоотдачи практически определяется погрешностью измерения температур.

При наличии не менее четырех точек измерения температуры по толщине пластины с равномерными интервалами удобна схема Эйлера третьего порядка точности:

$$I = \int_0^R T_i \cos(\mu x) dx \approx h(G_2 - 7(G_1 + G_N) + G_{N-1})/12 + h \sum_{i=1}^N G_i, \quad (16.25)$$

где h – величина интервала; $G_i = T_i \cos(\mu x_i)$ – подынтегральная функция; x_i – координата i -й точки измерения температуры.

Значение μ определяется как любой положительный корень уравнения

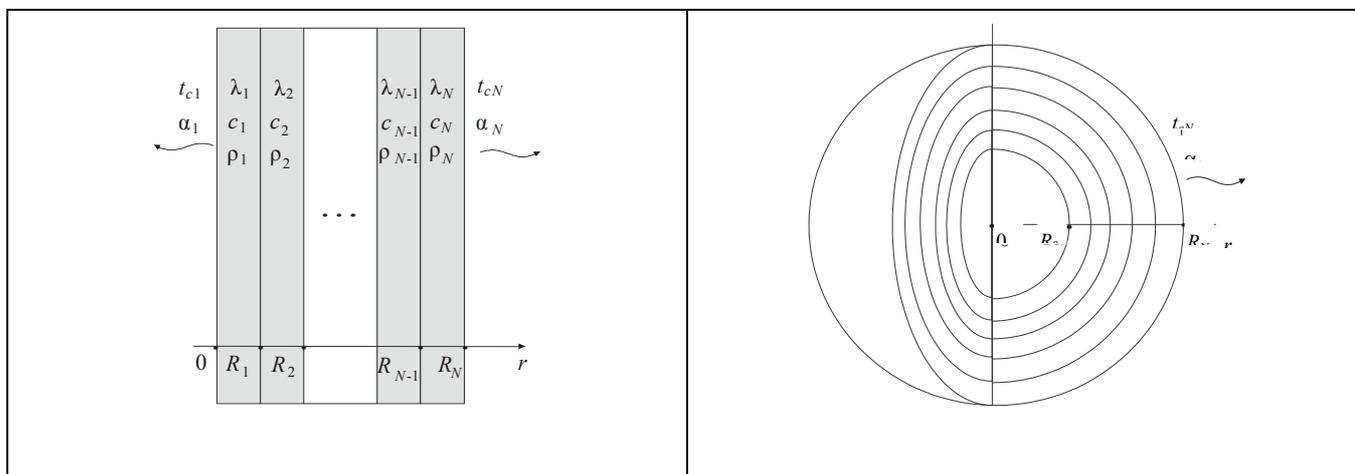
$$I = \frac{T_0}{\mu} \sin(\mu R) \exp(-\mu^2 a \tau). \quad (16.26)$$

Теперь для момента времени τ из уравнения (16.20) можно найти искомое значение коэффициента теплоотдачи α .

Устойчивость метода обусловлена сглаживанием значений экспериментальных температур при интегрировании по толщине пластины.

17 СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1 Лыков А.В. Теплообмен: Справочник. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
- 2 Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. школа, 1970. – 712 с.
- 3 Карташов Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. – 2-е изд. – М.: Высшая школа, 1985. – 480 с.
- 4 Карташов Э.М., Любов Б.Я. Аналитические методы решения краевых задач уравнения теплопроводности в области с движущимися границами: Обзор // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1974. – № 6. – С. 83–111.
- 5 Карташов Э.М. Метод интегральных преобразований в аналитической теории // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1976. – Т. 14. – № 5. – С. 85–105.
- 6 Карташов Э.М., Белоусов В.П. Расчеты температурных полей в твердых телах // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1983. – Т. 21. – № 5. – С. 112–121.
- 7 Карташов Э.М. Аналитические методы решения краевых задач теплопроводности с разнородными граничными условиями на линиях: Обзор // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1986. – № 5. – С. 125–149.
- 8 Карташов Э.М. Аналитические методы смешанных граничных задач теории теплопроводности: Обзор // Известия АН СССР. Энергетика и транспорт. – 1986. – № 6. – С. 116–129.
- 9 Карташов Э.М. Метод обобщенного интегрального преобразования при решении уравнения теплопроводности в области с движущимися границами // Инженерно-физический журнал. – 1987. – Т. 52. – № 3. – С. 495–505.
- 10 Карташов Э.М. Метод интегральных преобразований в аналитической теории теплопроводности твердых тел // Известия РАН. Энергетика. – 1993. – № 2. – С. 99–127.
- 11 Карташов Э.М. Расчеты температурных полей в твердых телах на основе улучшенной сходимости рядов Фурье-Ханкеля // Известия РАН. Энергетика. – 1993. – № 3. – С. 106–125.
- 12 Гринберг Г.А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. – М.: Изд-во АН СССР, 1948.



**Рис. 3.1 Многослойные тела канонической формы:
неограниченная пластина, шар, неограниченный цилиндр**